Nutné pojmy z teorie pravděpodobnosti

Náhodné veličiny:

- diskrétní: náhodná veličina nabývá konečného množství hodnot, např. při hodu kostkou se jedná o možnosti 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6; pravděpodobnost výskytu jednotlivých hodnot je dána přímo, v případě hodu kostkou je pravděpodobnost výskytu všech hodnot stejná a rovná se $\frac{1}{6}$,
- spojité: náhodná veličina nabývá hodnot z nějakého intervalu reálných čísel, např. mez kluzu oceli; pravděpodobnost je definována pomocí hustoty pravděpodobnosti.

Diskrétní náhodná veličina

možné hodnoty náhodné veličiny $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

pravděpodobnosti výskytu $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

pravděpodobnost, že náhodná veličina X je rovna hodnotě x_i, je rovna $P(X = x_i) = p_i$

střední hodnota $EX = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$

rozptyl $VarX = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - EX)^2 p_i$

směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{VarX}$

Příklad diskrétní náhodné veličiny

hod hrací kostkou

možné hodnoty $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$

pravděpodobnosti výskytu
$p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{1}{6}, p_4 = \frac{1}{6}, p_5 = \frac{1}{6}, p_6 = \frac{1}{6},$

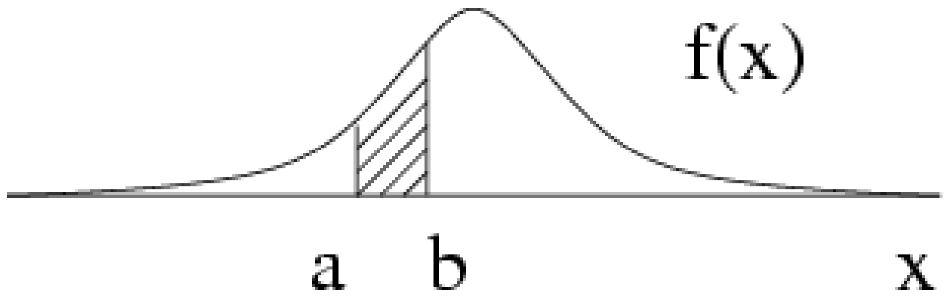
střední hodnota $EX = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = 3,5$

rozptyl $VarX = (1-3,5)^2.\frac{1}{6} + (2-3,5)^2.\frac{1}{6} + (3-3,5)^2.\frac{1}{6} + (4-3,5)^2.\frac{1}{6} + (5-3,5)^2.\frac{1}{6} + (6-3,5)^2.\frac{1}{6} = 2,916666$

Spojitá náhodná veličina

hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny X je funkce $f_X(x)$

pravděpodobnost, že náhodná veličina X je v intervalu (a,b), je rovna $P(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x$



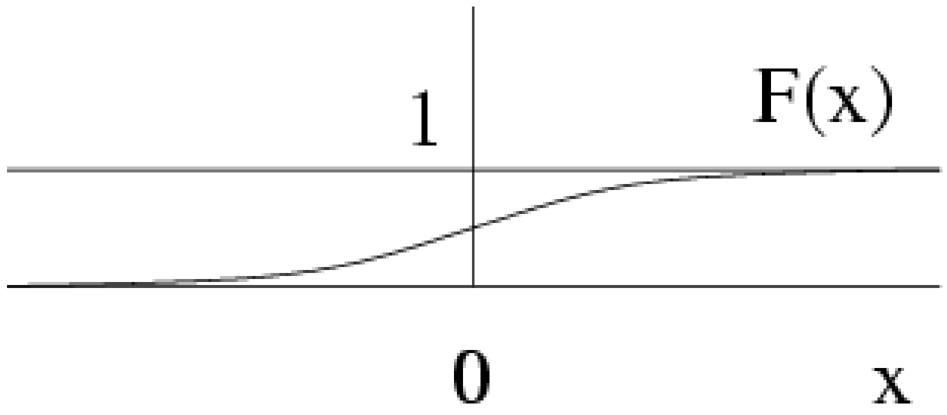
Pozor: pro spojité náhodné veličiny platí

$P(X = c) = \int_c^c f_X(x)\mathrm{d}x = 0$

pro hustotu pravděpodobnosti platí $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$

distribuční funkce náhodné veličiny X je definována

$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$



pro distribuční funkci platí

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

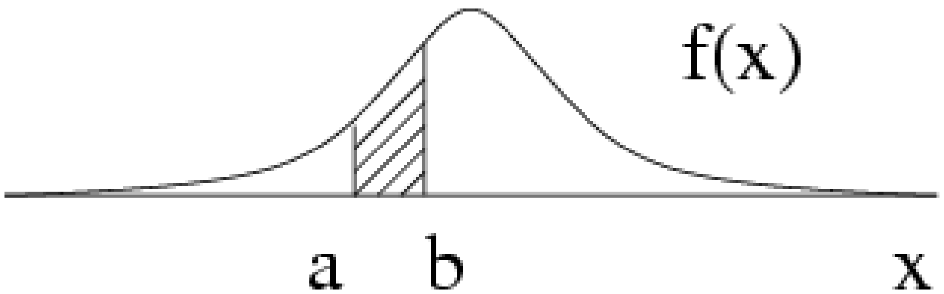
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$$

Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti

střední hodnota $EX = \mu$

směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{VarX}$

hustota pravděpodobnosti $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Základní pojmy

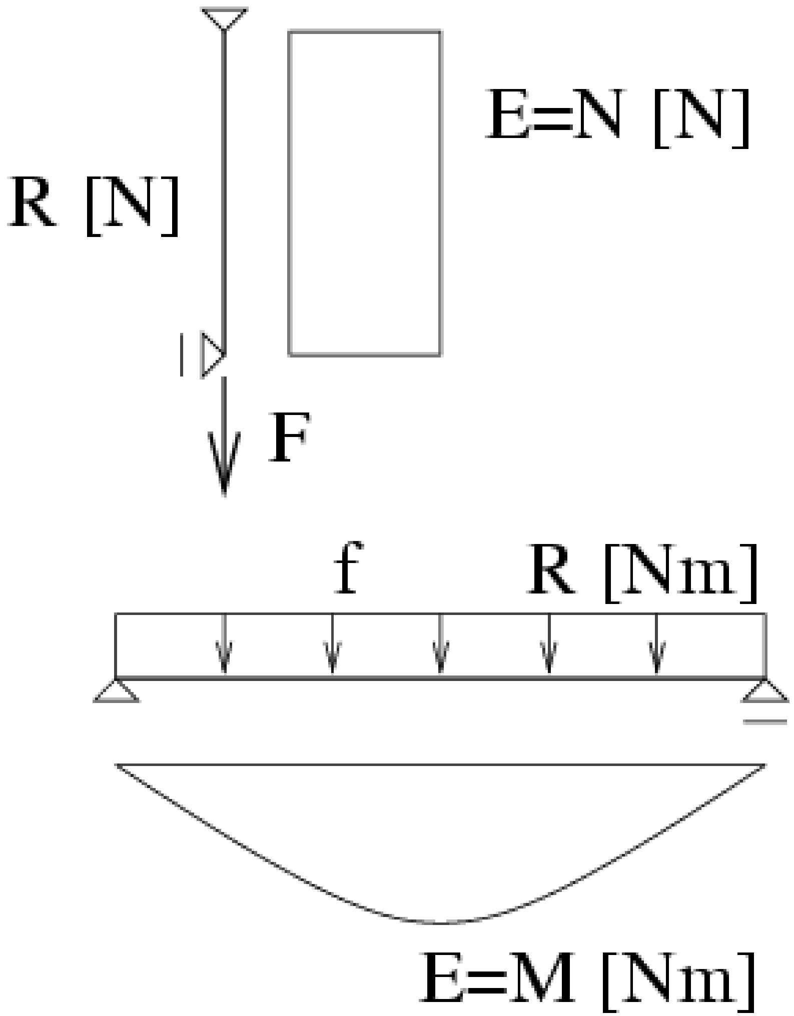
Kvalita systému: souhrn vlastností, které charakterizují užitkové vlastnosti systému.

Provoz systému: cílové působení systému, ale také souhrn všech ostatních operací, počínaje vyrobením až do montáže nebo demolice.

Ztráta kvality: může nastat nejen během funkční činnosti systému, ale také již při montáži nebo dopravě prvků systému. Ztráta kvality může být dílčí nebo úplná.

Spolehlivost: vlastnost systému, která má za následek zachování kvality po celou dobu provozu; je to stabilita kvality systému vzhledem ke všem možným poruchám.

Index spolehlivosti



účinek zatížení E (náhodná veličina)

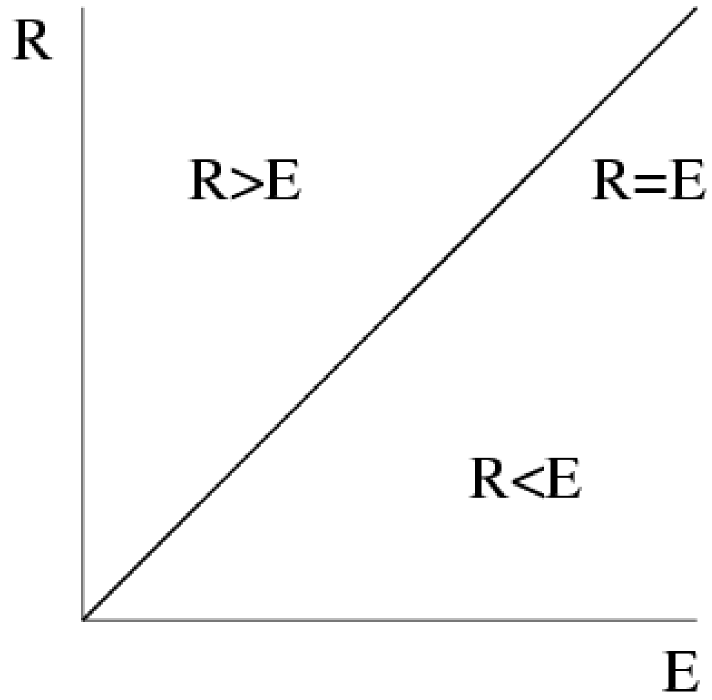
odolnost konstrukce R (náhodná veličina)

systém funguje $R > E$

systém nefunguje $R < E$

hranice poruchy $R = E$

hranice spolehlivosti



jsou-li odolnost konstrukce a účinek zatížení normálně rozdělené náhodné veličiny, definuje se rezerva spolehlivosti $Z = R - E$

střední hodnota odolnosti konstrukce	μ_R
směrodatná odchylka odolnosti konstrukce	σ_R
střední hodnota účinku zatížení	μ_E
směrodatná odchylka účinku zatížení	σ_E
střední hodnota rezervy spolehlivosti	$\mu_Z = \mu_R - \mu_E$
směrodatná odchylka rezervy spolehlivosti	$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}$

vztahy pro parametry rezervy spolehlivosti jsou známy jen výjimečně hustota pravděpodobnosti odolnosti konstrukce

$$f_R(r) = \frac{1}{\sigma_R\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(r-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}}$$

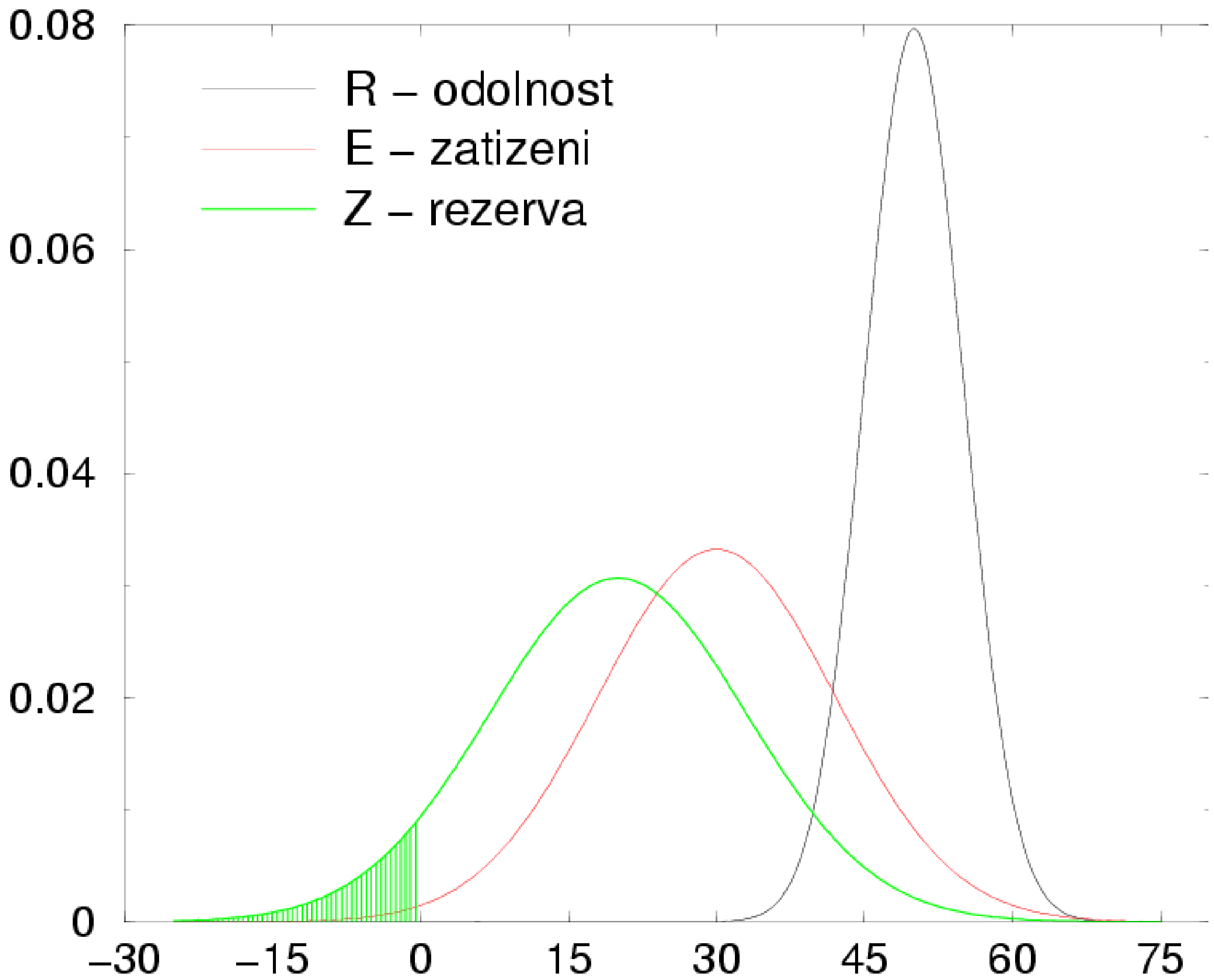
hustota pravděpodobnosti účinku zatížení

$$f_E(e) = \frac{1}{\sigma_E\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(e-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2}}$$

[eurokód označuje účinek zatížení E, e, což se překrývá s označením Eulerova čísla $e = 2,71828182..$, hustotu pravděpodobnosti lze psát ve tvaru $f_E(e) = \dfrac{1}{\sigma_E\sqrt{2\pi}}\ exp(-\dfrac{(e-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2})$]

hustota pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}}$$


0.08
0.06
0.04
0.02
0
–30
–15
0
15
30
45
60
75
R – odolnost
E – zatizeni
Z – rezerva

Konstrukce je spolehlivá, pokud $Z > 0$

Pravděpodobnost, že $Z > 0$ se určí z hustoty pravděpodobnosti

$P(Z > 0) = \int_0^\infty f_Z(z)\mathrm{d}z$

transformace na standardní normální rozdělení $z' = \dfrac{z - \mu_Z}{\sigma_Z}$

$P(Z > 0) = \int_{-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}}^\infty f_{Z'}(z')\mathrm{d}z'$

index spolehlivosti $\beta = \dfrac{\mu_Z}{\sigma_Z}$

$P(Z > 0) = \int_{-\beta}^\infty f_{Z'}(z')\mathrm{d}z' = F(\infty) - F(-\beta) = F(\beta)$

sdružená hustota pravděpodobnosti $f_{E,R}(e,r)$

$$P(R>E)=\int\int_{\Omega_S} f_{E,R}(e,r)\mathrm{d}e\mathrm{d}r=\int\int_{\Omega_S} f_E(e)f_R(r)\mathrm{d}e\mathrm{d}r$$

$$P(R>E)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{e}^{\infty} f_E(e)f_R(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}e$$

distribuční funkce odolnosti konstrukce $F_R(r)$

$$P(R>E)=\int_{-\infty}^{\infty}(F_R(\infty)-F_R(e))f_E(e)\mathrm{d}e$$

$$P(R>E)=\int_{-\infty}^{\infty}(1-F_R(e))f_E(e)\mathrm{d}e$$

diskretizace

$$P(R>E)=\sum_{i=1}^{i=n}(1-F_R(e_i))p_i$$

Diskretizace spojité veličiny

1. dělení osy x na podintervaly
2. výpočet hodnot $x_i^{'}$
3. výpočet pravděpodobnosti

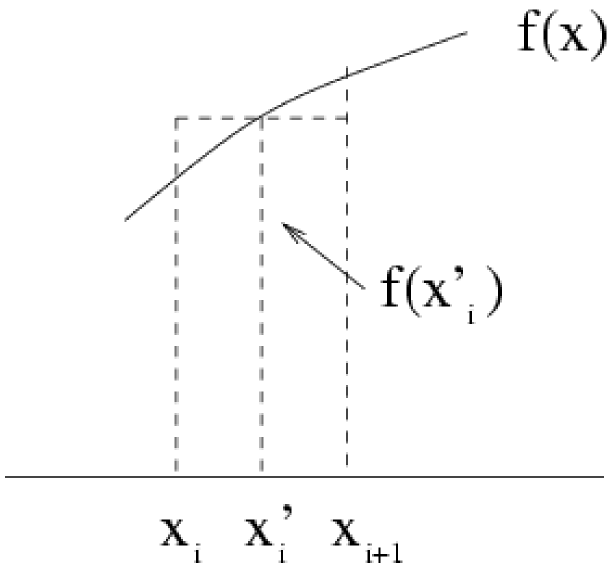
$$P(X \in (x_i, x_{i+1})) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

pro “malé” podintervaly lze počítat

$$P(X \in (x_i, x_{i+1})) \approx f_X(x_i^{'})(x_{i+1} - x_i)$$

4. pravděpodobnosti výskytu

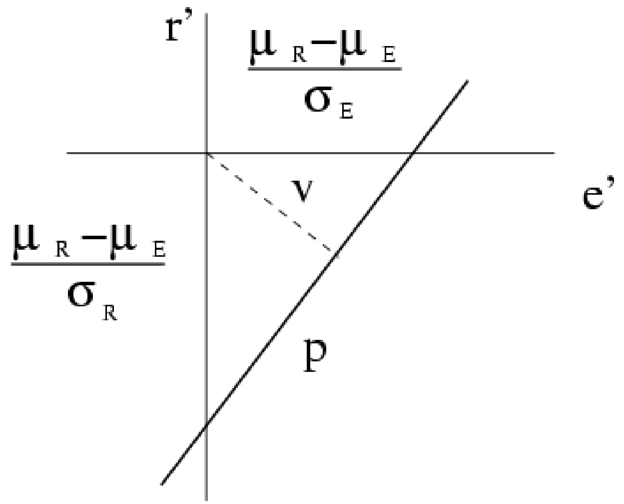
$$P(X = x_i^{'}) = p_i = P(X \in (x_i, x_{i+1}))$$



hranice poruchy $e = r$

transformace na standardní veličiny

$$e' = \frac{e - \mu_E}{\sigma_E}, r' = \frac{r - \mu_R}{\sigma_R}$$



hranice po transformaci

$$\mu_R + \sigma_R r' = \mu_E + \sigma_E e'$$

rovnice přímky

$$r' = \frac{\sigma_E}{\sigma_R} e' + \frac{\mu_E - \mu_R}{\sigma_R}$$

přepona

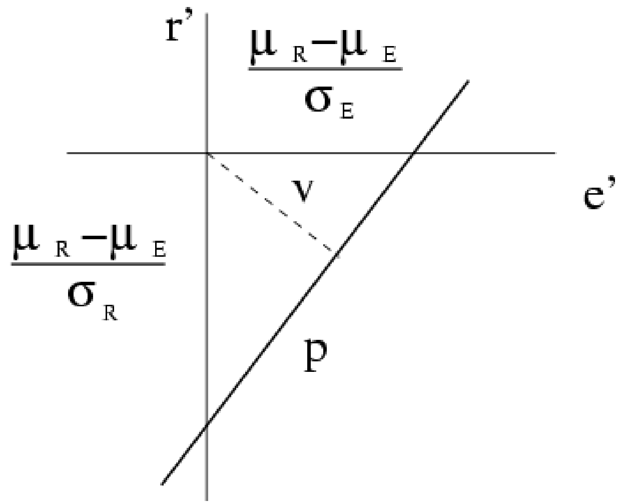
$$p = \sqrt{\left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_E}\right)^2}$$

výpočet vzdálenosti přímky od počátku

$$\frac{1}{2}pv = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_R}\right)\left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_E}\right)$$

výpočet vzdálenosti přímky od počátku

$$v = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \beta$$



mezní stav	β pro návrhovou životnost	β pro jeden rok
únosnosti	3,8	4,7
únavy	1,5 - 3,8	-
použitelnosti	1,5	3,0