Přednáška č. 6

Nestacionární vedení tepla

Řídicí rovnice

Konstitutivní rovnice

Transportní rovnice

Fourierův zákon

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\lambda}(T)\mathrm{grad}T(\boldsymbol{x}, t), \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{q}$ je tok tepla (W.m^{-2}), $\boldsymbol{\lambda}$ (W.m^{-1}.K^{-1}) je efektivní tepelná vodivost materiálu obecně závislá na teplotě a směru, ...

Bilanční rovnice

Bilance energie

$$\Big(\rho(T)C(T)\Big)\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}\boldsymbol{q}, \tag{2}$$

kde ρC je efektivní tepelná kapacita materiálu, ρ (kg.m^{-3}) je objemová hmotnost a C (J.kg^{-1}K^{-1}) je specifické teplo obecně závislé na tepotě ...

Diferenciální rovnice vedení tepla

Uvažujme diferenciální rovnici vedení tepla s konstantními parametry

$$\mathrm{div}(\lambda\ \mathrm{grad} T(\boldsymbol{x},t)) - \rho C\ \frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = 0 \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{3}$$

s počáteční podmínkou

$$T(\boldsymbol{x}, t=0) = T_0(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{4}$$

a s okrajovými podmínkami:
Dirichletova

$$T(\boldsymbol{x},t) = \overline{T}(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_T \tag{5}$$

Neumannova

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t) = \overline{q}(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{qp}, \tag{6}$$

Cauchyho

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t) = \alpha(T(\boldsymbol{x},t) - T_\infty(\boldsymbol{x},t)), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{qc}, \tag{7}$$

kde $\boldsymbol{q}(x,t) = -\lambda(\partial T(x,t)/\partial \vec{n})$.

Diferenciální rovnice vedení tepla

Galerkinova metoda

Na rovnici vedení tepla aplikujeme *Galerkinovu metodu*

$$\int_\Omega \delta T\Big(\mathrm{div}\lambda\ \mathrm{grad}T - \rho C\ \frac{\partial T}{\partial t}\Big)\mathrm{d}\Omega = 0. \tag{8}$$

Integrací per-partes

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\delta T\ \lambda\ \mathrm{grad}T\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta T\ \rho C\ \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \delta T\ \lambda\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}\Gamma = 0. \tag{9}$$

Za předpokladu, že $\delta T = 0$ na Γ_T je

$$\int_{\Gamma_T} \delta T\ \lambda\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\vec{n}}\mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{10}$$

je integrál na hranici

$$\int_{\Gamma_q} \delta T\Big(-\lambda\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\Big)\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{qp}} \delta T\overline{q}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{qc}} \delta T\alpha(T - T_\infty)\mathrm{d}\Gamma. \tag{11}$$

Slabé řešení je

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathrm{grad}\delta T\ \lambda\ \mathrm{grad}T\mathrm{d}\Omega \quad &+ \quad \int_\Omega \delta T\ \rho C\ \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \\ + \int_{\Gamma_{qp}} \delta T\ \overline{q}\mathrm{d}\Gamma \quad &+ \quad \int_{\Gamma_{qc}} \delta T\ \alpha T\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_{qc}} \delta T\ \alpha T_\infty\mathrm{d}\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Slabé řešení - MKP

Základní přístupy k formulaci slabého řešení

- Diskretizace celé časoprostorové oblasti - časoprostorové prvky

- Oddělená diskretizace prostorová a diskretizace časová (diferenční schema, metoda vážených reziduí, ...)

Numerické řešení MKP

Prostorová diskretizace

Teplotu na prvku aproximujeme:

$$T^e = \boldsymbol{N_e} \boldsymbol{r_T^e}, \qquad \mathrm{grad} T^e = \boldsymbol{B_e} \boldsymbol{r_T^e} \tag{13}$$

$$\delta T^e = \boldsymbol{N_e} \boldsymbol{w^e}, \qquad \mathrm{grad} \delta T^e = \boldsymbol{B_e} \boldsymbol{w^e} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n} \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}T} \Big(\int_\Omega \boldsymbol{B_e^T} \lambda \ \boldsymbol{B_e} \mathrm{d}\Omega \boldsymbol{r_T^e} + \int_\Omega \boldsymbol{N_e^T} \rho C \ \boldsymbol{N_e} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_T^e}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\Omega \quad + \\ + \int_{\Gamma_{qp}} \boldsymbol{N_e^T} \overline{q} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{qc}} \boldsymbol{N_e^T} \alpha \boldsymbol{N_e} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_{qc}} \boldsymbol{N_e^T} \alpha T_\infty \mathrm{d}\Gamma \Big) \quad = \quad 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Po několika úpravách obdržíme

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{r} + \boldsymbol{C} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} \tag{16}$$

kde je matice vodivosti:

$$\boldsymbol{K}_\Omega = \int_\Omega \Big(\frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x} \lambda \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial y} \lambda \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial z} \lambda \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z} \Big) \mathrm{d}\Omega,$$

$$\boldsymbol{K}_\Omega = \int_\Omega \Big(\boldsymbol{B}^T \lambda \boldsymbol{B} \Big) \mathrm{d}\Omega, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{K}_{\Gamma_{qc}} = \int_{\Gamma_{qc}} \Big(\boldsymbol{N}^T \alpha \boldsymbol{N} \Big) \mathrm{d}\Gamma, \tag{18}$$

matice kapacity:

$$\boldsymbol{C} = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}^T \rho C \ \boldsymbol{N} \mathrm{d}\Omega, \tag{19}$$

pravá strana (toky):

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{qp}}} = -\int_{\Gamma_{qp}} \boldsymbol{N}^T \overline{q} \mathrm{d}\Gamma, \qquad \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{qc}}} = \int_{\Gamma_{qc}} \left(\boldsymbol{N}^T \alpha T_{\infty} \right) \mathrm{d}\Gamma. \tag{20}$$

Numerické řešení MKP

Řešení lineárního problému - časová diskretizace (d-forma)

Uvažujeme časový interval $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ a předpokládáme, že známe řešení $\boldsymbol{r}_{i-1}$ v čase t_{i-1}.

Linární aproximace vektoru uzlových hodnot:

$$\boldsymbol{r}(t) = \tau \boldsymbol{r}_i + (1-\tau)\boldsymbol{r}_{i-1}, \tag{21}$$

kde $\tau = (t - t_{i-1})/\Delta t$. Stejnou aproximaci použijeme pro pravou stranu (toky): - vektor $\boldsymbol{f}$.

Časová derivace vektoru uzlových hodnot je tedy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{22}$$

Aplikací vztahů (21) a (22) v rovnici (16) obdržíme následující systém lineárních agebraických rovnic pro neznámý vektor $\boldsymbol{r}_i$ zapsaný v maticové formě

$$[\boldsymbol{K}\tau + \frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t}]\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{f}_{i-1}(1-\tau) + \boldsymbol{f}_i\tau + [\frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t} - \boldsymbol{K}(1-\tau)]\boldsymbol{r}_{i-1}. \tag{23}$$

Volba τ ovlivňuje stabilitu řešení

$$\tau \in [0; 1] \tag{24}$$

τ	název	stabilita	přesnost
0	explicitní (Eulerova)	podmíněná	$O(\Delta t)$
1	implicitní	nepodmíněná	$O(\Delta t)$
1/2	Crank-Nicolson	nepodmíněná	$O(\Delta t^2)$