Přednáška č. 9

Řešení 1D vedení tepla metodou sítí a metodou konečných objemů

Metoda sítí (metoda konečných diferencí - MKD)

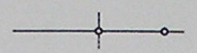
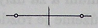
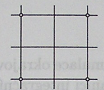
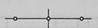
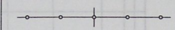
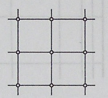
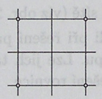
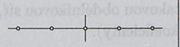
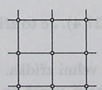
Metoda sítí

Základní myšlenka

- V oblasti, ve které hledáme řešení diferenciální rovnice, zvolíme konečnou množinu bodů, kterou nazveme sítí a příslušné body jejími uzly.
- Derivace hledané funkce, které se vyskytují v dané diferenciální rovnici a v okrajových podmínkách nahradíme diferenčními podíly (schematy) v těchto uzlech.
- Diferenčním podílem rozumíme lineární kombinaci funkčních hodnot v daném bodě a v několika okolních bodech, která příslušnou funkci aproximuje a která vznikne tak, že hodnotami hledané funkce v několika uzlech proložíme interpolační polynom a vypočteme jeho derivaci.
- Provedeme-li záměnu derivací diferencemi, dostaneme místo původního problému soustavu algebraických rovnic o n neznámých k určení přibližných hodnot neznámé funkce v n různých uzlech sítě.
- V praxi se nejčastěji používá metody sítí pro lineární diferenciální rovnice, protože pak vzniklá soustava je lineární.

Metoda sítí

Diferenční schemata

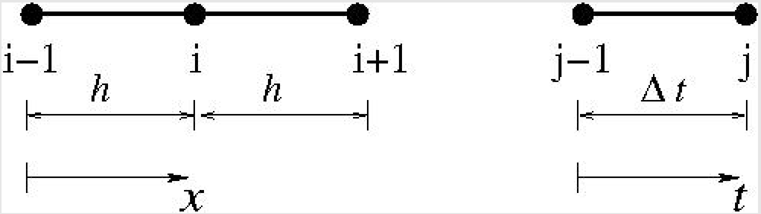
Derivace	Schéma	Přibližný vzorec
$\dfrac{\partial u}{\partial x}$	  	$\dfrac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \dfrac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h} + O(h)$ $\dfrac{\partial u_{ik}}{\partial x} = \dfrac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + O(h^2)$ $\dfrac{\partial u_{ik}}{\partial x} =$ $= \dfrac{u_{i+1,k+1} - u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k-1}}{4h} +$ $+ O(h^2)$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	  	$\dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} = \dfrac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + O(h^2)$ $\dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{12h^2}(-u_{i+2,k} + 16u_{i+1,k} - 30u_{ik} +$ $+ 16u_{i-1,k} - u_{i-2,k}) + O(h^4)$ $\dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{3h^2}(u_{i+1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i-1,k+1} +$ $+ u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k} + u_{i+1,k-1} -$ $- 2u_{i,k-1} + u_{i-1,k-1}) + O(h^2)$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$		$\dfrac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{4h^2}(u_{i+1,k+1} - u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k+1} +$ $+ u_{i-1,k-1}) + O(h^2)$
$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$		$\dfrac{\partial^4 u_{ik}}{\partial x^4} = \dfrac{1}{h^4}(u_{i+2,k} - 4u_{i+1,k} + 6u_{ik} -$ $- 4u_{i-1,k} + u_{i-2,k}) + O(h^2)$
$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$		$\dfrac{\partial^4 u_{ik}}{\partial x^2 \partial y^2} = \dfrac{1}{h^4}(u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k-1} +$ $+ u_{i-1,k-1} - 2u_{i+1,k} - 2u_{i-1,k} -$ $- 2u_{i,k+1} - 2u_{i,k-1} + 4u_{ik}) + O(h^2)$

Metoda sítí

1D Vedení tepla

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Prostorová diskretizace a časová diskretizace



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta t}$$

Metoda sítí

1D Vedení tepla

- Explicitní schema

$$\lambda \frac{T_{i-1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j-1}}{h^2} - \rho C \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = 0$$

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{\lambda \Delta t}{\rho C} \, \frac{\left(T_{i-1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j-1}\right)}{h^2}$$

Metoda sítí

1D Vedení tepla

- Implicitní schema

$$\lambda \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2} - \rho C \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta t} = 0$$

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{\lambda \Delta t}{\rho C} \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2}$$

Metoda sítí

1D Vedení tepla

- Schema Crank-Nicholson

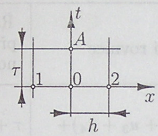
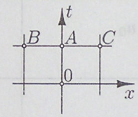
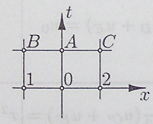
$$\lambda\frac{T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}}{h^2} + \lambda\frac{T_{i-1,j-1}-2T_{i,j-1}+T_{i+1,j-1}}{h^2} - 2\,\rho C\left(\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta t}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= \frac{-\lambda\Delta t/\rho C + h^2}{\lambda\Delta t/\rho C + h^2}T_{i,j-1} \\ &+ \frac{\lambda\Delta t/\rho C}{2\left(\lambda\Delta t/\rho C + h^2\right)}\left(T_{i-1,j-1}+T_{i-1,j}+T_{i+1,j-1}+T_{i+1,j}\right) \end{aligned}$$

Metoda sítí

Diferenční schemata pro parciální diferenciální rovnice vedení tepla (2 neznámé)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\frac{\partial u}{\partial t}$$

Schéma	Poměr mezi h a τ	Diferenční rovnice	Řád přesnosti
	$\tau \leqq \frac{a^2h^2}{2}$	$u_A = \frac{\tau}{a^2h^2}u_1 + (1 - \frac{2\tau}{a^2h^2})u_0 + \frac{\tau}{a^2h^2}u_2$	$\tau + h^2$
	libovolný	$-\frac{\tau}{a^2h^2}u_B + (1 + \frac{2\tau}{a^2h^2})u_A - \frac{\tau}{a^2h^2}u_C = u_0$	$\tau + h^2$
	libovolný	$-\frac{\tau}{2a^2h^2}u_B + (1 + \frac{\tau}{a^2h^2})u_A - \frac{\tau}{2a^2h^2}u_C = \frac{\tau}{2a^2h^2}u_1 + (1 - \frac{\tau}{a^2h^2})u_0 + \frac{\tau}{2a^2h^2}u_2$	$\tau^2 + h^2$

Metoda sítí

Výhody a nevýhody

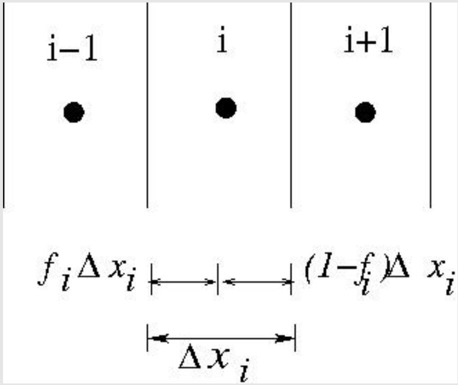
- Výhody: MS je velmi efektivní a rychlá pro lineární problémy na jednoduchých oblastech. (Jednoduché a malé úlohy).
- Nevýhody: Přesnost je omezena velikostí časového kroku. Pro složitější tvary oblastí je skoro nepoužitelná.

Metoda konečných objemů (MKO) - Finite Control Volume Method (FCVM)

Metoda konečných objemů

Základní myšlenka

- Metoda konečných objemů vychází z metody sítí. V MKO rozdělíme oblast na jednostlivé vrstvy (2D - plochy, 3D - objemy). V jedné vrstvě předpokládáme v daném časovém kroku konstantní teplotu, která je rovna teplotě ve vnitřním uzlu vrstvy (grid-point). Pozice uzlu v i-té vrstvě je popsána pomocí parametru f_i ($f_i \approx \tau$)



Metoda konečných objemů

Diskretizace transportní rovnice

Teplený tok (Fourierova rovnice):

$$q_i = -\lambda \frac{\Delta T_i}{\Delta x_i} = \frac{\Delta T_i}{\Delta r_i},$$

kde

$$r_i = \frac{\Delta x_i}{\lambda}$$

je teplotní rezistence. Celková teplotní rezistence mezi dvěma body:

$$r_{(i-1)\to i} = (1 - f_{i-1})r_{i-1} + (rx_i) + f_i r_i,$$

kde rx_i je teplotní rezistence mezi sousedními body.
Teplený tok můžeme zapsat ve tvaru:

$$q_i = \frac{1}{r_{(i-1)\to i}}(T_i - T_{i-1})$$

Metoda konečných objemů

Diskretizace bilanční rovnice - Časová diskretizace

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Dosazením diferenčního vztahu pro časovou derivaci dostaneme teplotu v i-tém bodě pro “nový” čas

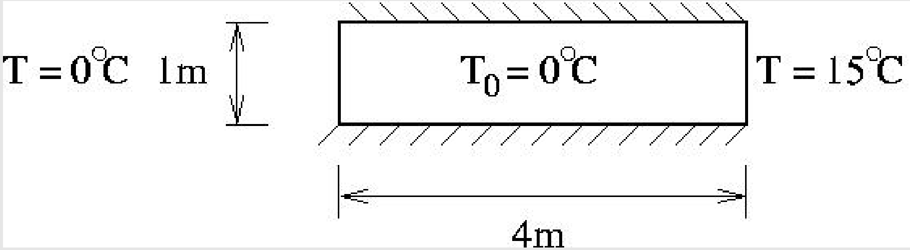
$$T_{i\mathrm{new}} = T_{i\mathrm{old}} - (q_{i+1} - q_i)_{\mathrm{old}} \frac{\Delta t}{\rho C \Delta x_i}.$$

Metoda konečných objemů

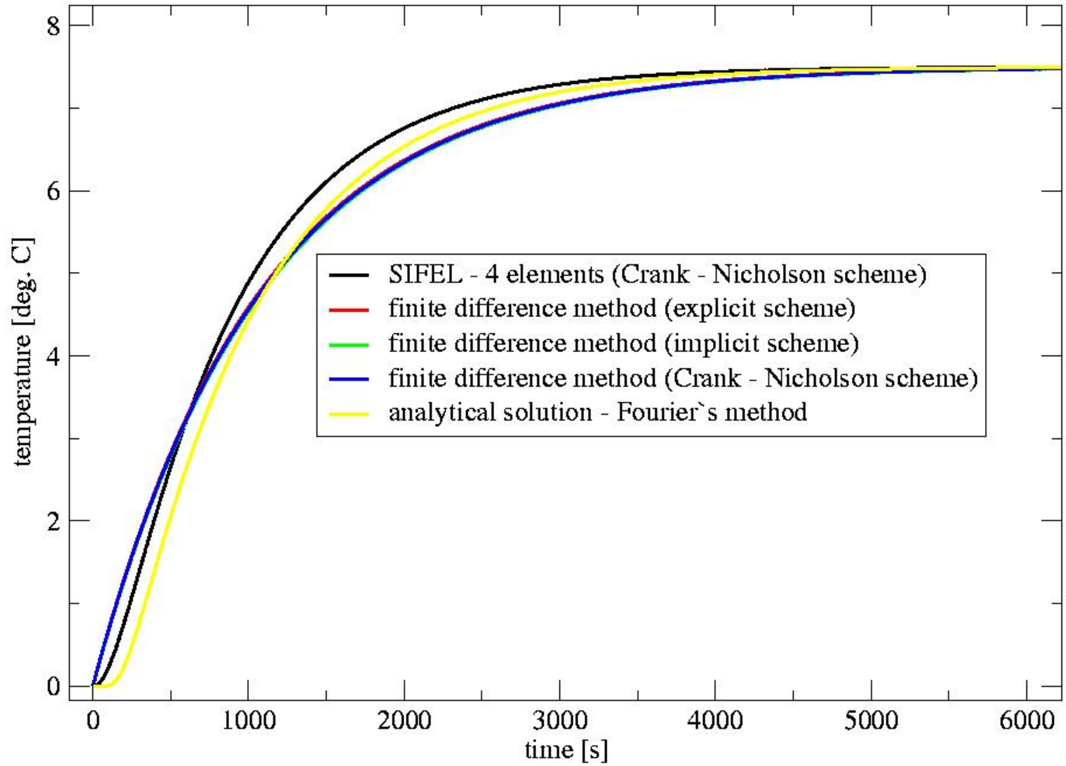
Výhody a nevýhody

- Výhody: MKO Řeší zvlášť transportní rovnici a rovnici bilanční (rovnice obsahují pouze první derivace). MKO je velmi efektivní a rychlá pro lineární problémy na jednoduchých oblastech
- Nevýhody: V porovnání s MKP je méně rozvinutá. Pro složitější tvary (oblasti) je méně vhodná.

Porovnání metod



$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1.5 \text{ W/(m.K)} \\
C &= 700 \text{ J/(kg.K)} \\
\rho &= 1 \text{ kg/m}^3 \\
\Delta t &= 18 \text{ s}
\end{aligned}
$$



8
6
4
2
0
temperature [deg. C]
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
time [s]
SIFEL - 4 elements (Crank - Nicholson scheme)
finite difference method (explicit scheme)
finite difference method (implicit scheme)
finite difference method (Crank - Nicholson scheme)
analytical solution - Fourier`s method