



České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Katedra mechaniky

Numerická analýza transportních procesů NTP2

Ing. Tomáš Krejčí, Ph. D.

místnost D2029

tel. 224 354 502

email: krejci@fsv.cvut.cz



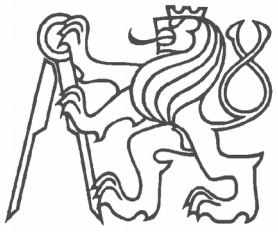
Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Internetové stránky předmětu

<http://mech.fsv.cvut.cz/~krejci/vyuka/NTP2/ntp2.html>

Harmonogram přednášek a cvičení:

Týden	Datum	Přednáška	Cvičení
1.	19. 2. 2018/ 21. 2. 2018	Úvod, transportní procesy, úvod do MKP	Úvod, zadání sem. práce, řešení soustavy rovnic
2.	26. 2./ 28. 2.	Galerkinova metoda - stacionární vedení tepla - 1D (MKP)	Stacionární vedení tepla - 1D
3.	5. 3./ 7. 3.	Stacionární vedení tepla - 2D (MKP)	Lokalizace, matice vodivosti (MKP)
4.	12. 3./ 14. 3.	Odpadá	Odpadá
5.	19. 3./ 21. 3.	Aproximační funkce a numerická integrace (MKP)	Stacionární vedení tepla - 2D
6.	26. 3./ 28. 3.	Konečné prvky - typy, aprox. funkce (MKP)	Stacionární vedení tepla - 2D
7.	2. 4./ 4. 4.	Nestacionární vedení tepla (MKP)	Nestacionární vedení tepla - 1D
8.	9. 4./ 11. 4.	Sdružené vedení tepla a vlhkosti, řešení Kunzelova modelu sdruženého vedení tepla a vlhkosti (MKP)	Nestacionární vedení tepla - 1D
9.	16. 4./ 18. 4.	Úvod do přesnosti MKP, generování sítí a řešení soustav lineárních rovnic	Program MKP pro řešení vedení tepla
10.	23. 4./ 25. 4.	Úvod metody konečných objemů MKO a metoda konečných diferencí (metoda sítí) MKD	Program MKP pro řešení vedení tepla
11.	30. 4./ 2. 5.	Úvod do metody hraničních prvků	Program MKP pro řešení vedení tepla
12.	7. 5./ 9. 5.	Rezerva	Rektorský den
13.	14. 5./ 16. 5.	Zkouškový test znalostí	Kontrola prací, Zápočet



Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Notace

Proměnné – pole teplot, posunů, vlhkosti

$$T, u, w$$

Matice, vektory

$$K, M, f, x$$

Funkce

$$\text{grad}(T), \sin(x)$$

Operátory

$$\nabla^T = \text{div} \dots \text{divergence}$$

$$\nabla = \text{grad} \dots \text{gradient}$$

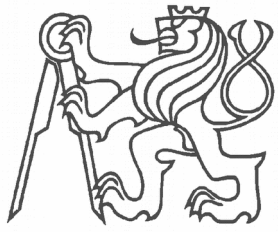
$$\Delta = \text{div}(\text{grad})$$



Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Matematické modelování fyzikálních problémů

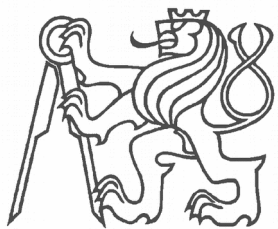
- Většina fyzikálních problémů (jevů) je popisována systémem parciálních diferenciálních rovnic.
 - úlohy dynamiky, mechaniky – desková rovnice, stěnová rovnice ...
 - transportní procesy – **vedení tepla, přenos vlhkosti**, transport solí ...
 - Maxwellovy rovnice (elektromagnetické pole), vlnová rovnice, proudění, informatika ...



Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Matematické modelování fyzikálních problémů

- Metody řešení parciálních diferenciálních rovnic
 - analytická řešení
 - semianalytická řešení – Fourierovy řady, Laplaceova transformace ...
 - numerické metody
 - metoda konečných diferencí (metoda sítí)
 - variační metody – Ritzova metoda, Galerkinova metoda, **MKP**
 - metoda hraničních prvků, metoda konečných objemů



Transportní procesy - přenos tepla a vlhkosti - systém rovnic

Konstitutivní rovnice (fyz. vlastnosti materiálů)

- retenční křivka (sorpční izoterma)
- vztahy pro tepelnou vodivost a kapacitu, difuzivitu
- převážně z experimentů

Transportní rovnice

- rovnice vedení tepla (Fourierův zákon) – konstitutivní rovnice?
- difúzní rovnice vlhkosti (Darcyho zákon, Fickův zákon)

Bilanční rovnice

- bilance hmotnosti
- bilance energie



Přenos tepla a vlhkosti

Stacionární úlohy

$$\nabla^T \lambda \nabla T = 0$$

... rovnice vedení tepla

Nestacionární úlohy

$$\nabla^T \lambda \nabla T + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

... rovnice vedení tepla

Nelineární nestacionární úlohy

- materiálové parametry a vztahy jsou obecně funkcemi neznámých polí teploty a vlhkosti



Úvod do metody konečných prvků

Greenova věta

$$\int_{\underline{V}} \int \int \text{grad} u \text{ grad} v \, dV = - \int_{\underline{V}} \int \int u \Delta v \, dV + \int_{\underline{S}} \int u \text{ grad} v \, dS$$

Per partes

$$\int u' v = u v - \int u v'$$



Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Úvod do metody konečných prvků

Většinu fyzikálních jevů lze popsat systémem parciálních diferenciálních rovnic.

Analytické řešení klasickými metodami na obecné oblasti je velmi obtížné či prakticky nemožné.

MKP (angl. FEM Finite Element Method) je nejčastěji užívaná, systematická a univerzální metoda pro numerické řešení problémů.

17. 2. 2014: Google „FEM“ > 36,5mil. odkazů; > 730 knih o MKP; výdaje 1mld. USD na FEM Software a výpočetní čas (2008)

19. 2. 2018: Google „FEM“ > 140mil. odkazů;



Historie metody konečných prvků

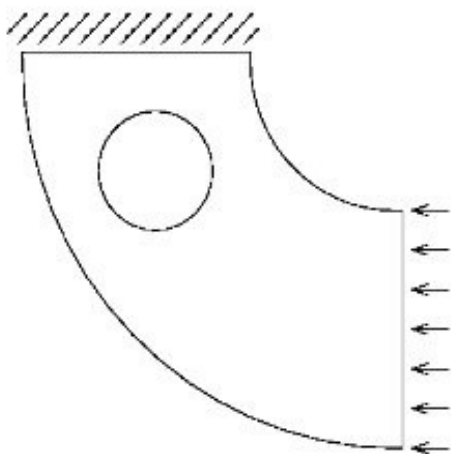
- 1943 Courant - aplikace variačních principů, položil základ matematické teorie MKP
- 1950 první inženýrská aplikace v letectví, Boeing&Bell. M.J.Turner, R.W.Clough (→ Berkeley), M.C.Martin publikovali jeden z prvních článků.
 - ▶ Berkeley: E. Wilson, R.L.Taylor a jejich PhD studenti: T.J.R. Hughes, C. Felipa, K.J. Bathe
 - ▶ Swansea: O.C. Zienkiewicz, B. Irons, R.Owen
- 1960 E. Wilson - první MKP program (freeware)
- 1965 Nastran; 1969 Ansys (hodnota společnosti ≈ 1.8 mld. \$); 1978 Abaqus
- dnes MKP aplikována pro řešení současných vědecko-technických problémů - komplexní návrh letadel, simulace výrobních procesů, nárazové testy automobilů, návrh spalovacích motorů, ochranných obálek jaderných reaktorů, seismická analýza přehrad, aplikace v lékařství - simulace provádění plastických operací, ...



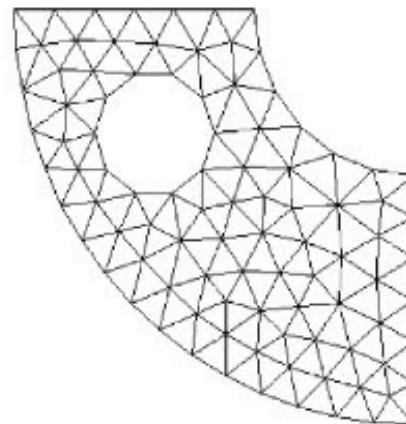
Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Idea metody konečných prvků

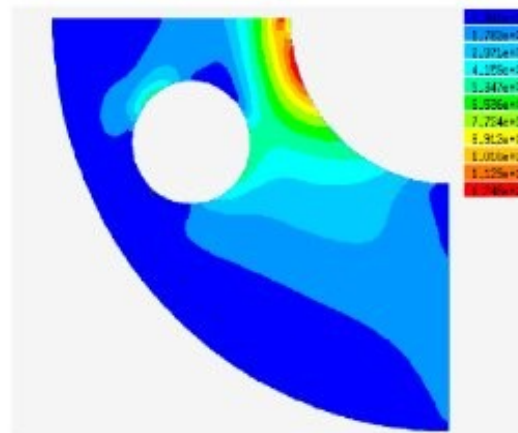
Problém, diferenciální rovnice



Rozdělení oblasti na konečné prvky



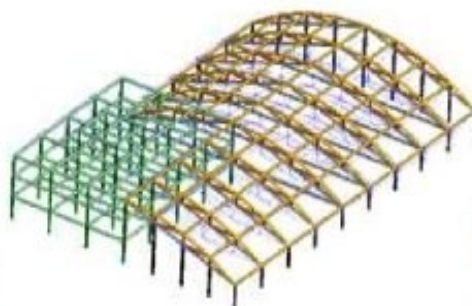
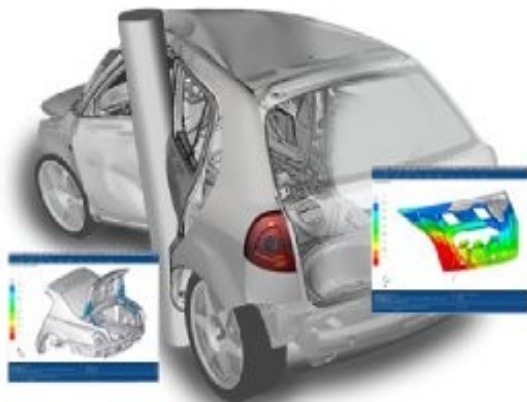
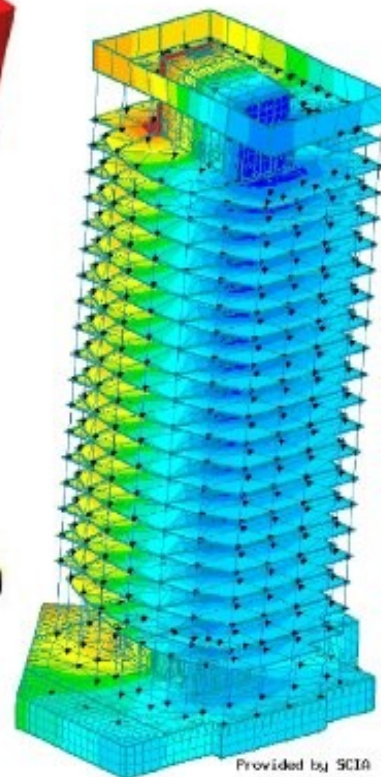
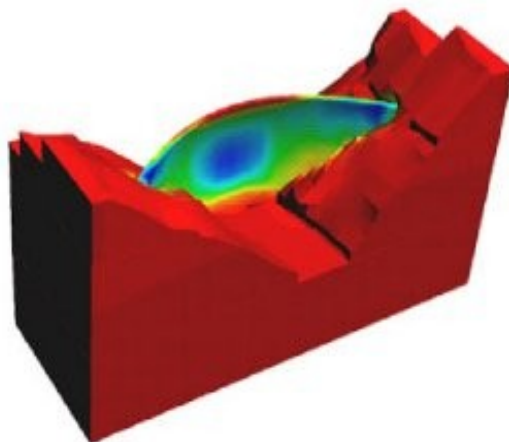
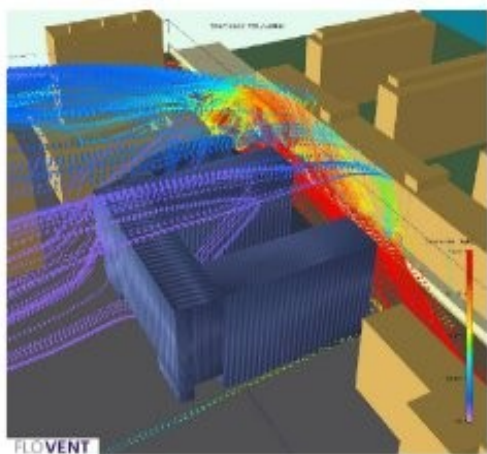
Aproximační, "slabé" řešení





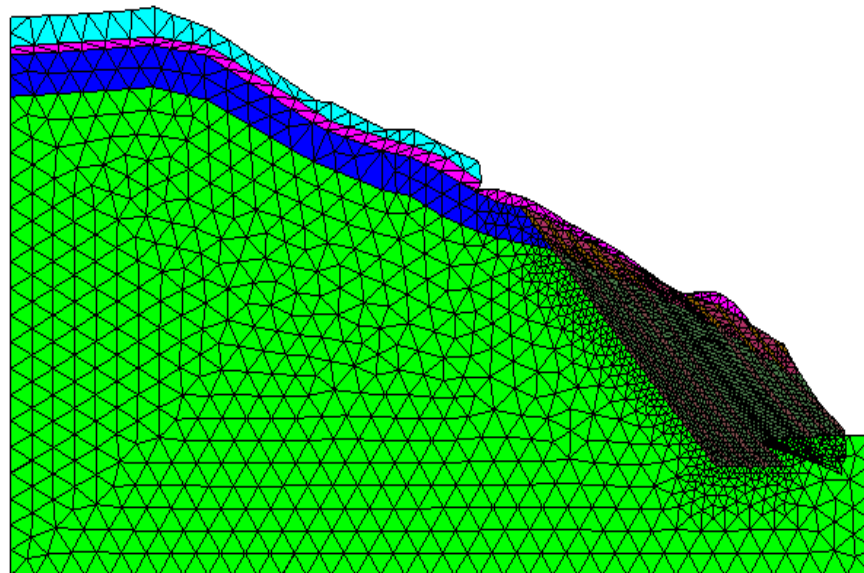
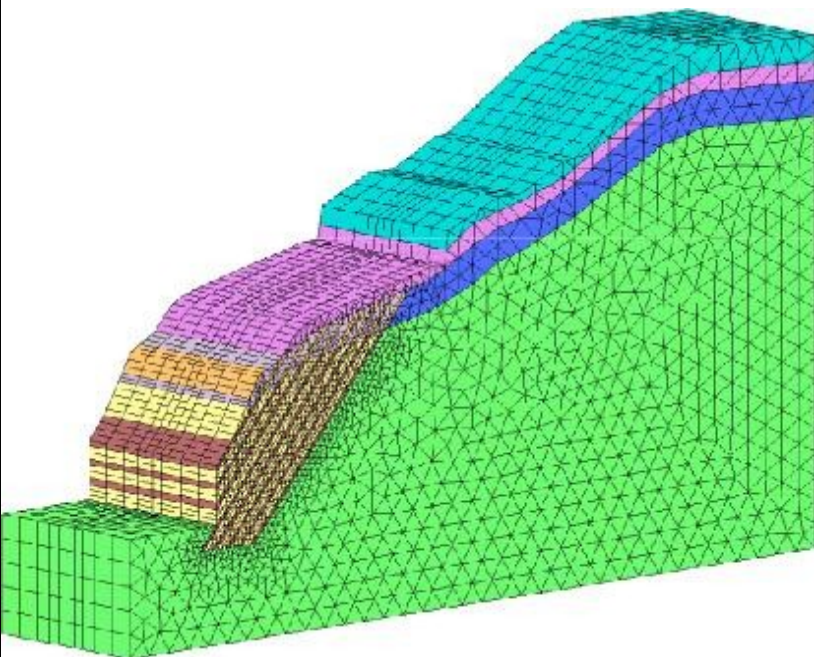
Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Příklady aplikace MKP (1)





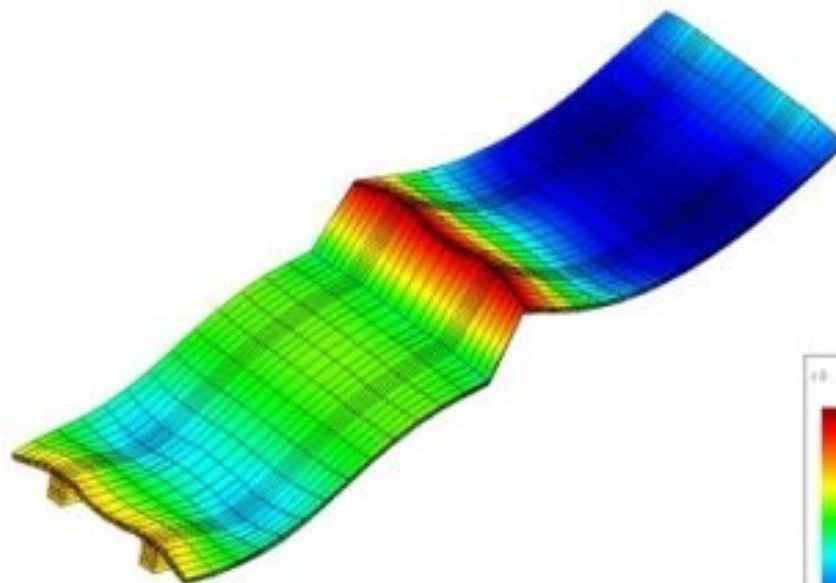
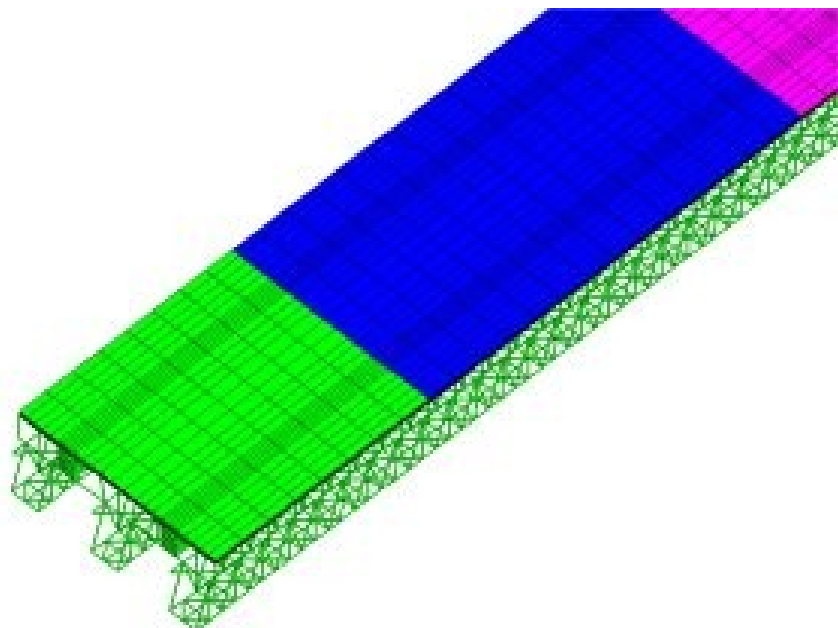
Příklady aplikace MKP (2)



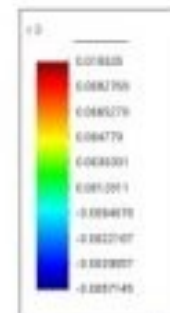


Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Příklady aplikace MKP (3)

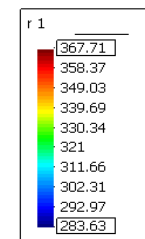
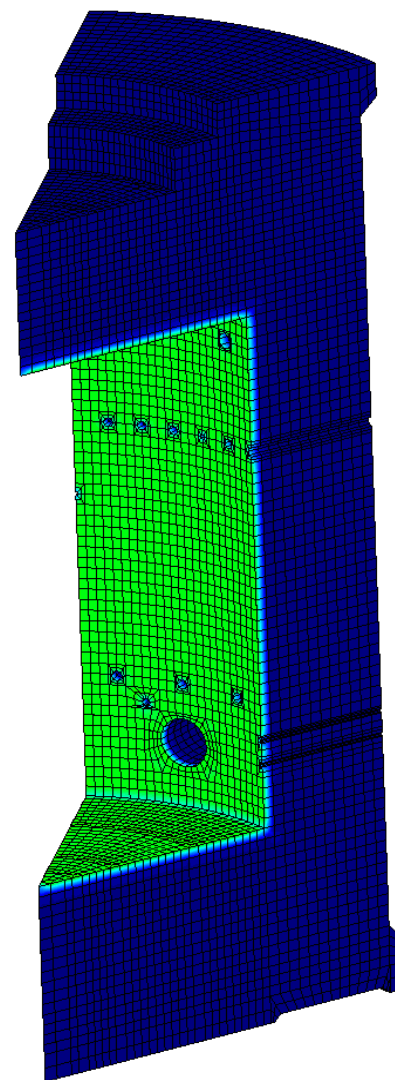
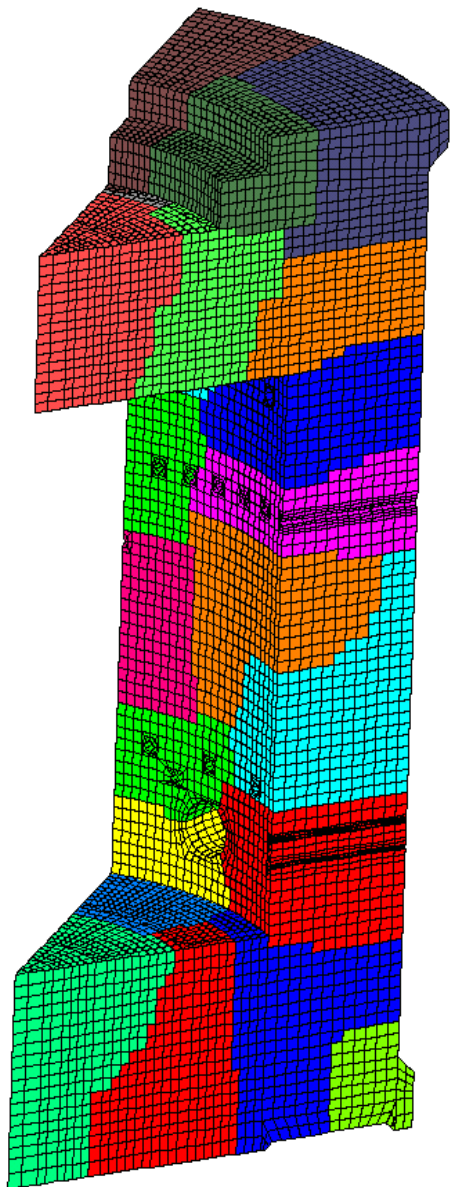


Obj. 11886-08
Cartus FEM at Chigiacentis, 1.2
Deflection (mm): Displacement of 0, Obj. 11886-08





Příklady aplikace MKP (4)





Numerická analýza transportních procesů – NTP2

Řešení soustavy algebraických lineárních rovnic

- Řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou konečných prvků vede na řešení soustavy algebraických rovnic
- Metody řešení
 - eliminace – **Gaussova metoda**, LU faktorizace (rozklad)
 - iterační metody – prostá iterace, Jacobiova metoda, Gaussova-Seidelova metoda, superrelaxační metoda, **metoda sdružených gradientů**