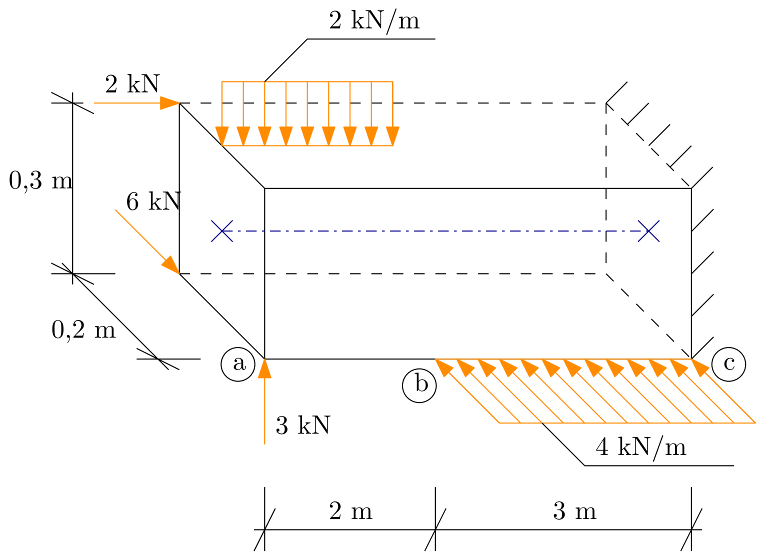
Vnitřní síly ve 3D

15. března 2020



Obrázek 1: Zatěžovací schéma.

Úkol: Určete analytické průběhy vnitřních sil na konstrukci a vykreslete jejich průběhy.

Řešení:

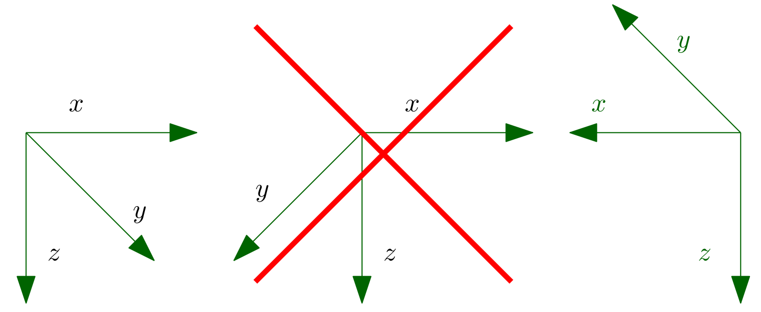
- Znaménka vnitřních sil jsou dána volbou souřadného systému. Proto musíme začít jeho volbou a respektovat následující pravidla:

  1. Systém musí být pravotočivý. Použijeme pravou ruku, palec, ukazováček a prostředníček umístíme nevulgárním způsobem do vzájemně kolmé polohy. Palec pak představuje osu x, ukazováček osu y a prostředníček osu z.
  2. Osu x volíme rovnoběžně se střednicí prutu.
  3. Osu z volíme v mechanice obvykle směrem dolů.

  Tato pravidla nám dávají možnost vybrat si ze dvou systémů na Obrázcích 2a a 2c.

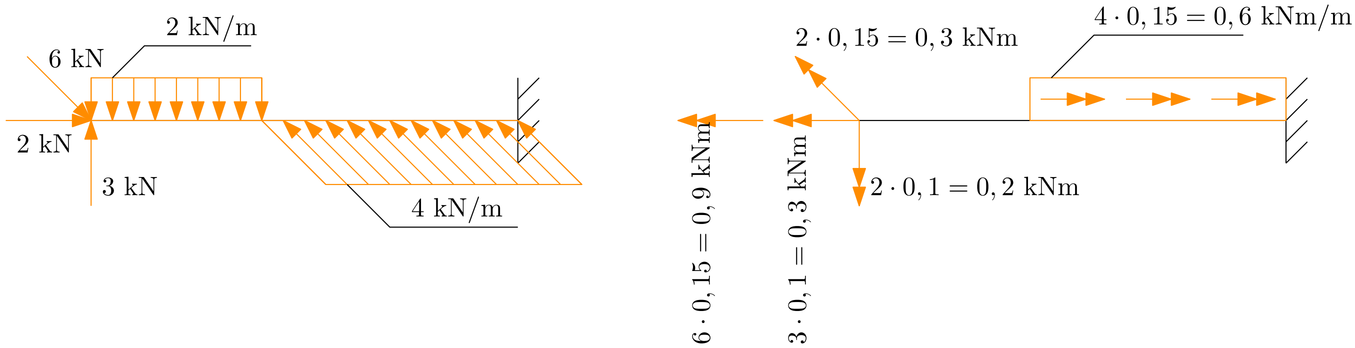
  Všimněte si souřadného systému na Obrázku 2b. Na první pohled by se zdálo, že všechna výše uvedená pravidla splňuje. Jedná se v podstatě o stejný systém jako na Obrázku 2a, ovšem špatně zakreslený, neboť neodpovídá prostorovému uspořádání danému v zadání úkolu. Takto chybně zakreslený souřadný systém vede ke špatné interpretaci výsledných vnitřních sil.

- Provedeme redukci zatížení ke střednici. Protože všech zatížení je mnoho, rozdělíme je do dvou schémat. Silové účinky každého zatížení nejprve přeneseme ke střednici a zakreslíme je do schématu na Obrázku 3 vlevo. Pokud je nutné silové zatížením posunout jiným směrem než ve směru svého působení, znamená to, že vůči střednici působí na nenulovém rameni. Hodnota zatížení krát příslušné



Obrázek 2: Volba souřadného systému.

rameno nám dává hodnotu odpovídajícího momentového účinku, který zakreslíme do schématu na Obrázku 3 vpravo.



Obrázek 3: Redukce zatížení ke střednici.

- Znaménka vnitřních sil. Na takto jednoduché konstrukci můžeme určit vnitřní síly, aniž bychom počítali reakce. Pokud ovšem s jejich výpočtem začneme od volného konce. Znaménka vnitřních sil se řídí pravidlem záporné či kladné plošky:
  - Postupujeme-li **proti kladnému směru** osy x, jsme na tzv. **kladné plošce** a kladné vnitřní síly mají **souhlasný** směr jako kladné poloosy souřadného systému.
  - Postupujeme-li **ve směru kladné poloosy** x, jsme na tzv. **záporné plošce** a kladné vnitřní síly mají **opačný** směr než kladné poloosy souřadného systému.
- Vnitřní síly v řezech. Pro ukázku si zvolíme souřadný systém na Obrázku 2a a určíme odpovídající hodnoty vnitřních sil v řezech. Abychom nepočítali reakce, budeme postupovat od volného konce. V tomto případě jsme tedy na tzv. záporné plošce a kladné vnitřní síly mají opačný směr než kladné poloosy souřadného systému. Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 1.

řez a	řez b	řez c
$N^a = -2$ kN	$N^b = -2$ kN	$N^c = -2$ kN
$V_y^a = -6$ kN	$V_y^b = -6$ kN	$V_y^c = -6 + 4 \cdot 3 = 6$ kN
$V_z^a = 3$ kN	$V_z^b = 3 - 2 \cdot 2 = -1$ kN	$V_z^c = -1$ kN
$M_x^a = 0,9 + 0,3 = 1,2$ kNm	$M_x^b = 1,2$ kNm	$M_x^c = 1,2 - 0,6 \cdot 3 = -0,6$ kNm
$M_y^a = 0,3$ kNm	$M_y^b = 0,3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 2,3$ kNm	$M_y^c = 2,3 - 1 \cdot 3 = -0,7$ kNm
$M_z^a = -0,2$ kNm	$M_z^b = -0,2 + 6 \cdot 2 = 11,8$ kNm	$M_z^c = 11,8 + 6 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 11,8$ kNm

Tabulka 1: Vnitřní síly v řezech.

- Výpočet analytických průběhů podle Schwedlerovy věty je uveden v Tabulkách 2 a 3. Znaménka spojitých silových zatížení f_x, f_y a f_z a spojitých momentových zatížení m_x, m_y a m_z se volí jako kladná, pokud jsou v souladu s kladnými směry zvoleného souřadného systému (bez ohledu na to, zda jsme na kladné či záporné plošce). Dejte pozor na to, že kladná posouvající síla V_z vyvolává **kladný** moment M_y, zatímco kladná síla V_y vyvolává **záporný** moment M_z!!!

$f_x(x) = 0$ kN/m $N(x) = -\int f_x(x)\mathrm{d}x = 0 + C_1$ $N(x=0) = C_1 = N^a = -2 \Rightarrow C_1 = -2$ kN $N(x) = -2$ kN	$m_x(x) = 0$ kNm/m $M_x(x) = -\int m_x(x)\mathrm{d}x = 0 + C_2$ $M_x(x=0) = C_2 = M_x^a = 1,2 \Rightarrow C_2 = 1,2$ kNm $M_x(x) = 1,2$ kNm
$f_z(x) = 2$ kN/m $V_z(x) = -\int f_z(x)\mathrm{d}x = -2x + C_3$ $V_z(x=0) = C_3 = V_z^a = 3 \Rightarrow C_3 = 3$ kN $V_z(x) = -2x + 3$ kN $m_y(x) = 0$ $M_y(x) = -\int m_y(x)\mathrm{d}x + \int V_z(x)\mathrm{d}x = -x^2 + 3x + C_5$ $M_y(x=0) = C_5 = M_y^a = 0,3 \Rightarrow C_5 = 0,3$ kNm $M_y(x) = -x^2 + 3x + 0,3$ kNm	$f_y(x) = 0$ kN/m $V_y(x) = -\int f_y(x)\mathrm{d}x = 0 + C_4$ $V_y(x=0) = C_4 = V_y^a = -6 \Rightarrow C_4 = -6$ kN $V_y(x) = -6$ kN $m_z(x) = 0$ $M_z(x) = -\int m_z(x)\mathrm{d}x - \int V_y(x)\mathrm{d}x = 6x + C_6$ $M_z(x=0) = C_6 = M_z^a = -0,2 \Rightarrow C_6 = -0,2$ kNm $M_z(x) = 6x - 0,2$ kNm

Tabulka 2: Analytické průběhy vnitřních sil na intervalu (a ;b) zleva

$f_x(x) = 0$ kN/m $N(x) = -\int f_x(x)\mathrm{d}x = 0 + D_1$ $N(x=0) = D_1 = N^b = -2 \Rightarrow D_1 = -2$ kN $N(x) = -2$ kN	$m_x(x) = 0,6$ kNm/m $M_x(x) = -\int m_x(x)\mathrm{d}x = -0,6x + D_2$ $M_x(x=0) = D_2 = M_x^a = 1,2 \Rightarrow D_2 = 1,2$ kNm $M_x(x) = -0,6x + 1,2$ kNm
$f_z(x) = 0$ kN/m $V_z(x) = -\int f_z(x)\mathrm{d}x = 0 + D_3$ $V_z(x=0) = D_3 = V_z^b = -1 \Rightarrow D_3 = -1$ kN $V_z(x) = -1$ kN $m_y(x) = 0$ $M_y(x) = -\int m_y(x)\mathrm{d}x + \int V_z(x)\mathrm{d}x = -x + D_5$ $M_y(x=0) = D_5 = M_y^b = 2,3 \Rightarrow D_5 = 2,3$ kNm $M_y(x) = -x + 2,3$ kNm	$f_y(x) = -4$ kN/m $V_y(x) = -\int f_y(x)\mathrm{d}x = 4x + D_4$ $V_y(x=0) = D_4 = V_y^b = -6 \Rightarrow D_4 = -6$ kN $V_y(x) = 4x - 6$ kN $m_z(x) = 0$ $M_z(x) = -\int m_z(x)\mathrm{d}x - \int V_y(x)\mathrm{d}x = -2x^2 + 6x + D_6$ $M_z(x=0) = D_6 = M_z^b = 11,8 \Rightarrow D_6 = 11,8$ kNm $M_z(x) = -2x^2 + 6x + 11,8$ kNm

Tabulka 3: Analytické průběhy vnitřních sil na intervalu (b; c) zleva

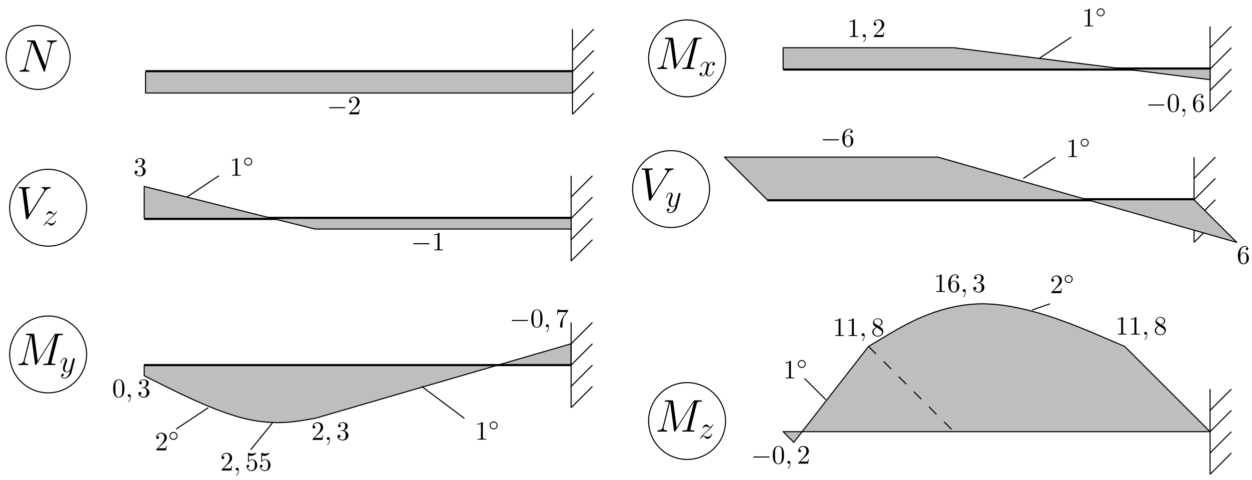
- Protože posouvající síla V_z protíná na intervalu (a; b) nulu, znamená to, že v daném řezu dosahuje ohybový moment M_y maxima, které určíme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} V_z(x) &= -2x + 3 = 0 \Rightarrow x_1^{MAX} = 1,5\mathrm{m} && (1) \\ M_y^{MAX} &= M_y(x_1^{MAX}) = -1,5^2 + 3 \cdot 1,5 + 0,3 = 2,55\mathrm{kNm} && (2) \end{aligned}$$

Obdobným způsobem zjistíme maximální hodnotu momentu M_z na intervalu (b; c):

$$\begin{aligned} V_y(x) &= 4x - 6 = 0 \Rightarrow x_2^{MAX} = 1,5\mathrm{m} && (3) \\ M_z^{MAX} &= M_z(x_2^{MAX}) = -2 \cdot 1,5^2 + 6 \cdot 1,5 + 11,8 = 16,3\mathrm{kNm} && (4) \end{aligned}$$

- Průběhy vnitřních sil jsou vykresleny na Obrázku 4. Pro správné grafické znázornění průběhu vnitřních sil je třeba dbát na následující zásady:
  - pro normálovou sílu je rozhodující znaménko,
  - posouvájící síly vykreslujeme ve směru příslušné osy (či proti ní) - V_z nahoru nebo dolů, zatímco V_y dopředu nebo dozadu,
  - ohybové momenty vykreslujeme na stranu tažených vláken - M_y nahoru nebo dolů, protože ohýbá nosník okolo zde vodorovné osy y, zatímco M_z dopředu či dozadu, protože ohýbá nosník okolo zde svislé osy z.



Obrázek 4: Průběhy vnitřních sil.