

**České vysoké učení technické v Praze**  
**Fakulta stavební**

Studentská vědecká a odborná činnost  
Akademický rok 2008/2009

**SROVNÁVACÍ STUDIE VÝSLEDKŮ ANALYTICKÉHO A  
NUMERICKÉHO VÝPOČTU ORIENTACE SMYKOVÉHO PÁSU  
podle Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity**

---

Jméno a příjmení studenta : Petr Havlásek

Ročník, obor : 5. roč., Konstrukce a dopravní stavby

Vedoucí práce : prof.Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Katedra : Katedra mechaniky

## **Anotace:**

*Cílem této práce je porovnání výsledků získaných analytickým výpočtem a numerickým výpočtem metodou konečných prvků. Zkoumán je vzorek, jehož materiál je popsán Druckerovou-Pragerovou podmínkou plasticity s nesdruženým zákonem plastického přetváření. Vzorek je podroben jednoosé tlakové zkoušce až do usmyknutí. Porovnáván je především sklon smykového pásu a pracovní diagram s ohledem na typ a jemnost sítě konečných prvků.*

## **Annotation:**

*The main goal of this work is the comparison between the results obtained from analytical calculation and numerical computation using the Finite Element Method. The scope is set on a sample subject to uniaxial compression test, until its failure. The material of this sample is described by Drucker-Prager yield function with non-associated plastic flow rule. Finite element meshes with different densities and characters are used, both resulting in the differences of the slope of the plastic band and the stress-strain diagram. These are then compared with the analytical results.*

## **Obsah:**

1	Úvod.....	2
1.1	Druckerův-Pragerův model plasticity .....	3
2	Analytický výpočet orientace smykového pásu pro Druckerovu – Pragerovu podmínku plasticity ve 2D .....	3
3	Výpočet chování vzorku při jednoosém stlačování pomocí SW .....	4
3.1	Materiálové parametry Druckerova-Pragerova modelu plasticity.....	4
3.2	Geometrie zkoumaných těles, sítě kon. prvků, okrajové podmínky .....	4
3.3	Zatěžování vzorku, řešení .....	7
3.4	Výsledky výpočtů – Drucker-Prager – Rovinná deformace.....	9
3.4.1	Zkouška řízená posunem – vliv typu sítě.....	9
3.4.2	Zkouška řízená nepřímo – vliv typu sítě .....	13
3.4.3	Zkouška řízená posunem – vliv směru pásu sítě kon. prvků .....	13
3.4.4	Zkouška řízená nepřímo – vliv směru pásu sítě kon. prvků.....	16
3.5	Porovnání analytického výpočtu orientace smykového pásu s výpočtem pomocí softwaru .....	17
3.6	Výsledky výpočtů – Drucker-Prager – Rovinná deformace.....	19
4	Závěr .....	20
5	Literatura .....	20

# 1 Úvod

Mnoho fyzikálních jevů a inženýrských úloh může být popstáno formou parciálních diferenciálních rovnic. Řešení těchto rovnic analyticky metodami pro libovorné tvary těles je téměř nemožné. Metoda konečných prvků (MKP nebo FEM) je numerický přístup vedoucí k přibližnému řešení těchto rovnic.

Řešení metodou konečných prvků je možné rozdělit do následujících kroků:

1) rozdělení zkmané oblasti na konečné prvky, 2) formulace rovnic pro jednotlivé elementy, 3) sestavení soustavy rovnic celého systému z dílčích rovnic pro jednotlivé elementy, 4) vyřešení soustavy rovnic, a konečně 5) vyhodnocení výsledků.

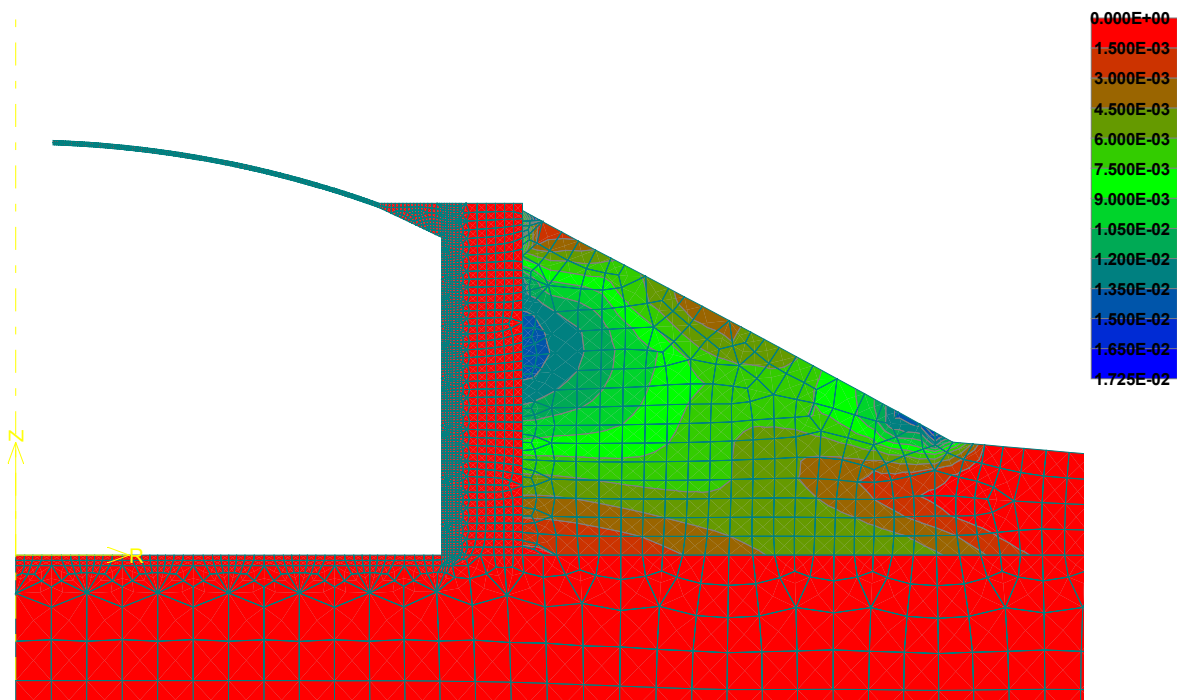
Rok od roku stoupající výpočetní síla superpočítačů, ale i běžných počítačů, a klesající cena výpočetní práce, činí dnes tuto metodu tak populární; kdysi prakticky neproveditelné výpočty jsou dnes touto metodou řešeny ve zlomkovém čase, navíc s každým rokem je tu možnost za stejné finanční náklady pořízení výpočetních nástrojů umožňujících ještě podrobnější podrobnější a rychlejší řešení. Z toho se dá usuzovat, že zlatá éra MKP, kterou nyní zažíváme, bude se vší pravděpodobností i nadále pokračovat.

Cílem této práce je prozkoumat vliv druhu a jemnosti sítě konečných prvků na výsledek výpočtu. Při nevhodně zvolené síti konečných prvků totiž může dojít ke zcela špatnému výpočtu a tím nesprávné interpretaci problému.

Předmětem práce je porovnat výsledky výpočtů MKP provedené na geometricky jednoduchém tělese, které je podrobno jednoosé tlakové zkoušce. Pro daný materiál, ze kterého je těleso vyrobeno, byl analyticky vypočten teoretický úhel, ve kterém by se mělo nastat usmyknutí. Tento úhel bude porovnán s úhly vypočtenými MKP na sítích různého charakteru a jemnosti dělení.

Krok 50, Loukov\_AL\_0001\_a\_in

Skaláry: izoplochy, základní materiál, in nodes, Principal Plastic Strain, Max., <0.000E+00;1.725E-02>[None]



Obr. 1: Motivace – vliv sítě na správné interpretování výsledků výpočtu metodou konečných prvků. Řešení stability obsypu. Hlavní plastické deformace vyneseny na zdeformované konstrukci. (Výstup z programu Atena 2D).

## 1.1 Druckerův-Pragerův model plasticity

Druckerův-Pragerův model plasticity je jeden z nejpoužívanějších modelů plasticity, je s oblibou používán pro modelování betonu v tlaku (pro komplexní simulování chování betonu je častěji používán tzv. model „fracture-plastic“, který v tlakové oblasti počítá s plasticitou a v tahové oblasti s rozvojem trhlin) a pro simulování chování zemin. Tento model plasticity lze zařadit do třídy modelů s vnitřním třením, jeho pevnost se oproti Misesovu modelu mění s hodnotou středního napětí. V této práci byl použit materiál, jehož chování je popsáno právě Druckerovou-Pragerovou podmínkou plasticity s nesdruženým zákonem plastického přetváření.

## 2 Analytický výpočet orientace smykového pásu pro Druckerovu – Pragerovu podmínku plasticity ve 2D

Vzhledem k omezenému rozsahu této práce zde neuvádím podrobné odvození výpočtu orientace smykového pásu. Postup odvození, popř. výsledky je možné nalézt v [4], [5], [6].

Při analýze se zavádí jednotkový vektor  $\mathbf{n}$ , který je kolmý ke smykové rovině. Odklon vektoru  $\mathbf{n}$  od svislice je dán úhlem  $\theta$  (obr. 2). Lokalizační podmínka je dána vztahem  $\det(\mathbf{Q}_{ep})=0$ , kde  $\mathbf{Q}_{ep}$  je akustický tenzor definovaný:  $\mathbf{Q}_{ep} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{ep} \cdot \mathbf{n}$ , a  $\mathbf{D}_{ep}$  je tenzor elastoplastické tuhosti.

Řešením, pro hlavní deviatorické napětí  $s_1 \geq s_2$  a  $s_3$  směřující kolmo k rovině, obdržíme vztah pro kritický plastický modul a pro úhel  $\theta$ .

Řešení pro úhel  $\theta$  vyjádřený pomocí hlavních deviatorických napětí:

$$(\tan \theta)^2 = -\frac{s_1 + \nu s_3 + \sqrt{J_2} (\alpha_\varphi + \alpha_\psi)(1 + \nu)}{s_2 + \nu s_3 + \sqrt{J_2} (\alpha_\varphi + \alpha_\psi)(1 + \nu)}$$

Řešení pro úhel  $\theta$  vyjádřený pomocí hlavních napětí:

$$(\tan \theta)^2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1 - (1 + \nu) \left( \frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{3} \sqrt{J_2} (\alpha_\varphi + \alpha_\psi) \right)}{\sigma_2 - \sigma_3 + (1 + \nu) \left( \frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{3} \sqrt{J_2} (\alpha_\varphi + \alpha_\psi) \right)}$$

Kritický plastický modul:

$$\frac{H_{crit}}{E} = \frac{1}{4k(1-\nu)} \left( 2(\alpha_\varphi - \alpha_\psi)^2 - (1-\nu) \left( \frac{s_3}{\sqrt{J_2}} + \alpha_\varphi + \alpha_\psi \right)^2 \right)$$

kde:  $\alpha_\varphi$  součinitel vnitřního tření  
 $\alpha_\psi$  součinitel dilatace  
 $J_2$  druhý invariant deviatoru napětí  
 $\nu$  Poissonovo číslo  
 $E$  Youngův modul pružnosti  
 $s$  hlavní deviatorické napětí  
 $k = \sqrt{\frac{1}{3} + 2\alpha_\psi^2}$

### 3 Výpočet chování vzorku při jednoosém stlačování pomocí SW

Zkoumaný problém byl řešen v programu OOFEM [2] v Linuxovém prostředí. Výpočet byl zadán do prostředí *non-linear static*, kde byl v závislosti na způsobu řízení zkoušky iteračně řešen.

#### 3.1 Materiálové parametry Druckerova-Pragerova modelu plasticity

Jak jsem se již výše zmínil, vycházel jsem z Druckerova-Pragerova modelu plasticity s nesdruženým zákonem plastického přetváření. Byla snaha určit parametry tak, aby co nejvěrněji vystihovaly chování skutečného materiálu – betonu. Při výpočtech jsem používal tři sady materiálových hodnot, jsou uvedeny v tabulce 1. Modul pružnosti, a Poissonovo číslo jsem odečetl z normy pro příslušné hodnoty pevnosti betonu v jednoosém tlaku.

Parametry Druckerova-Pragerova modelu plasticity – součinitel vnitřního tření  $\alpha_\varphi$  a mezní hodnotu napětí při namáhání čistým smykem  $\tau_0$  - jsem určil z podmínky plasticity  $3 \cdot \alpha_\varphi \cdot \sigma_m(\sigma) + \sqrt{J_2(\sigma)} - \tau_0 = 0$ , kde  $\sigma_m$  je střední napětí a  $J_2$  druhý invariant deviatoru napětí. Pro určení parametrů funkce plasticity ale jedna podmínka porušení (pevnost v jednoosém tlaku) nestačí. Jako druhou podmínku jsem zvolil pevnost v dvouosém tlaku, přičemž pevnost betonu v dvouosém tlaku (při rovinné napjatosti) je pro většinu betonů rovna 1,2 násobku pevnosti v jednoosém tlaku. Tím dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic, ze které snadno vypočteme dvě neznáme  $\alpha_\varphi$  a  $\tau_0$ .

Součinitel dilatace  $\alpha_\psi$ , který se u nesdruženého zákona plastického přetváření liší od součinitele vnitřního tření jsem u „středního“ a „pevného“ materiálu určil jako  $\alpha_\varphi/2$ , u měkkého materiálu hodnotou  $\alpha_\varphi/10$ . To proto, abych získal co nejrozmanitější hodnoty teoretického úhlu sklonu smykového pásu, který závisí jen na stavu napjatosti a součinitelích  $\alpha$ .

Pokud není uvedeno jinak, je použita sada materiálových parametrů v tabulce označená jako „střední“.

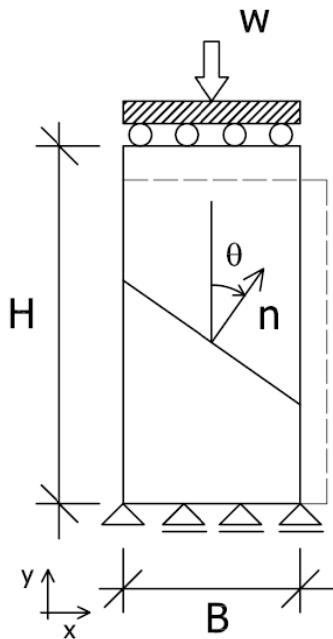
Tab. 1: Přehled hodnot parametrů Druckerova-Pragerova modelu plasticity.

model	E [GPa]	$\nu$	$f_c$ [MPa]	$f_{c \text{ biax}}$ [MPa]	$\alpha_\varphi$	$\alpha_\psi$	$\tau$ [Pa]	$H_{\text{crit max}}$ [Pa]	$H_{\text{crit}}/E$	$\alpha$ [°]
střední	33	0,2	38	45	7,7720E-02	3,8860E-02	1,8986E+07	5,3700E+07	-0,1222	45,804
pevný	37	0,2	50	65	1,0825E-01	5,4127E-02	2,3455E+07	1,1630E+08	-0,1038	47,473
měkký	31	0,2	25	28,75	6,6617E-02	6,6617E-03	1,2768E+07	1,2060E+08	-0,0843	44,228

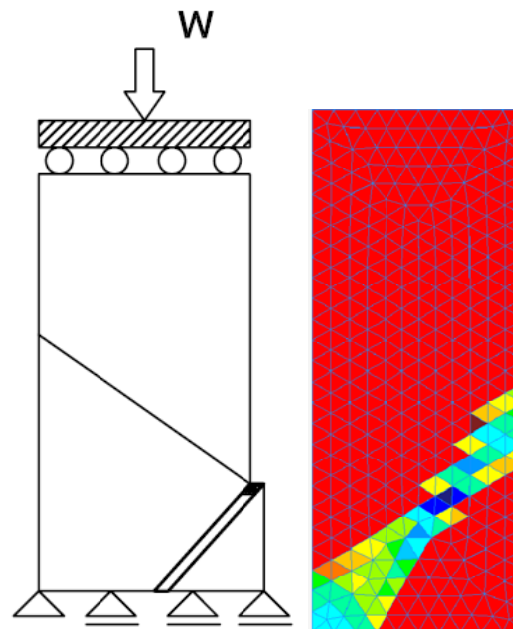
#### 3.2 Geometrie zkoumaných těles, sítě konečných prvků, okrajové podmínky

Geometrie zkoumaných těles je velmi jednoduchá, ve většině případů se jedná o obdélník se základnou šířky  $B = 100$  mm a výškou  $H = 300$  mm. Zatěžovací destičky, ke kterým je vzorek upevněn a kterými je současně stlačován, se mohou vůči sobě libovolně posouvat, nemohou se však pootáčet. Zkouška má za účel simulovat chování materiálu v jednoosém tlaku, proto je zvoleno v praxi nerealistické nulové tření mezi vzorkem a destičkami. Tímto je při stlačování (v elastické oblasti) dosaženo zdeformovaného tvaru, který je na Obr. 2 vyznačen čárkovanou čarou.

Poměr stran vzorku  $H:B = 3:1$  jsem zvolil z prostého důvodu: teoretický úhel lokalizace smykového pásu vychází blízky  $45^\circ$  a tedy při menším poměru stran, například  $H:B = 2:1$ , by smykový pás procházející zeslabeným prvkem v polovině výšky vzorku mohl procházet podstavou. Nedošlo by tedy k požadovanému usmyknutí napříč celým tělesem a obdržené výsledky by byly bezcenné (Obr. 3). Menší poměr stran byl použit jen v případě sítě konečných prvků s orientovanými pásy (viz. dále).



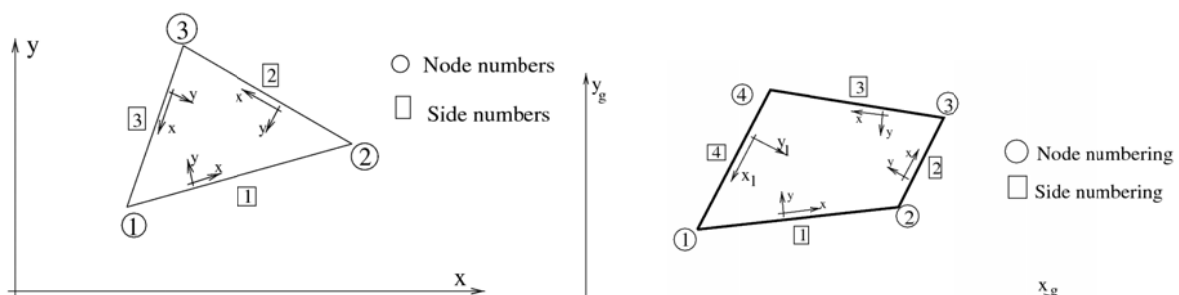
Obr. 2 Geometrie zkoumané konstrukce.



Obr. 3 Nežádoucí způsob usmyknutí konstrukce.

Při výpočtech v režimu 2D rovinná deformace byl použit jednak tříuzlový prvek s jedním integračním bodem a lineární aproximací a čtyřuzlový isoparametrický prvek s lineární aproximací a se čtyřmi integračními body (Obr. 4).

Pro výpočet simulující 2D rovinnou napjatost a 3D jsem použil „bricky“ – osmiuzlové 3D prvky s lineární aproximací a s osmi integračními body (Obr. 5). Důvodem k použití 3D prostředí a bricků byl fakt, že v programu OOFEM, nebyla dosud implementována rovinná napjatost pro DP model. Rovinná napjatost je proto simulována podporami, které umožňují svislý a vodorovný posun, znemožňují však posun ve směru kratší strany (ve směru osy  $y$  na obr. 10). Je důležité zmínit, že tyto podpory jsou umístěné jen na jedné stěně tělesa, jinak by se totiž opět jednalo o mód rovinné deformace. Samotné těleso bylo tvořeno jednou vrstvou bricků.



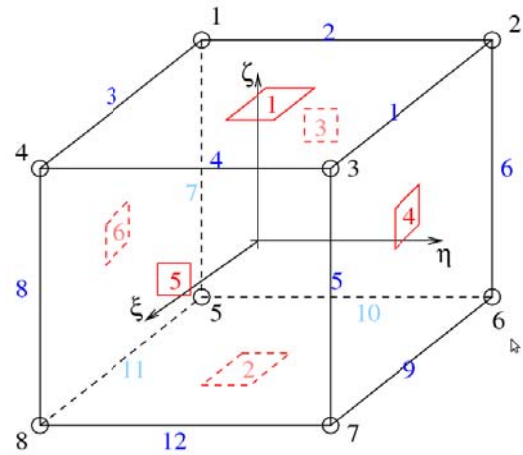
Obr. 4 Vlevo: konečný prvek „triplanestrain“, vpravo: konečný prvek „quad1planestrain“.

Ke generování rovinné sítě konečných prvků byly použity programy Matlab a T3D [7]. Matlab posloužil k napsání jednoduchého scriptu pro vygenerování pravidelné čtyřúhelníkové sítě konečných prvků (Obr. 6). Vytvořil jsem tři skupiny sítí: čtvercovou, obdélníkovou vertikální a horizontální. U obdélníkových sítí je poměr stran prvků 2:1.

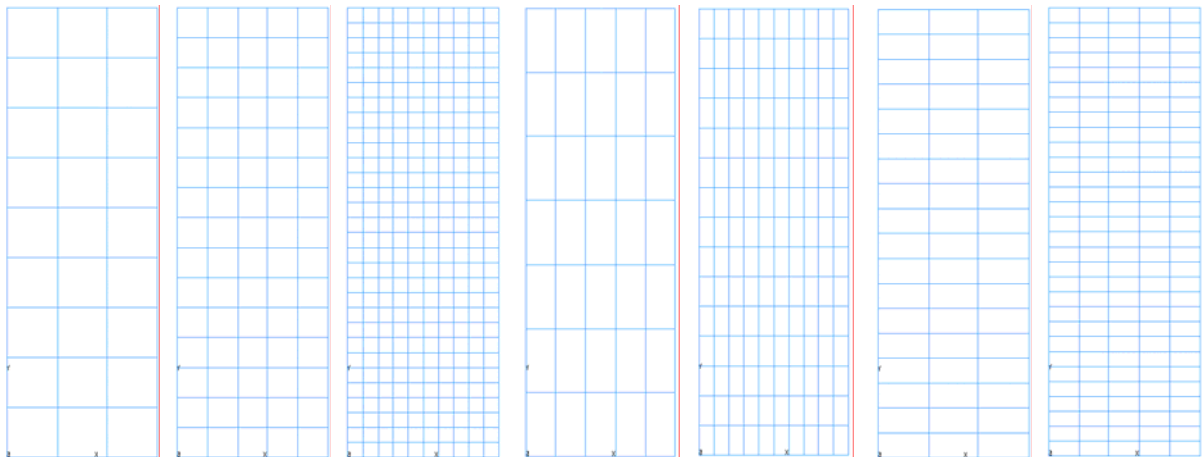
Pro vytvoření trojúhelníkové sítě konečných prvků jsem použil program T3D, podobně jako u Matlabu jsem vytvořil tři sady sítí konečných prvků (Obr. 7). Pro první sadu byla do programu zadána jen geometrie a velikost prvku, vznikla tedy téměř pravidelná síť, jejíž dominantní sklon je  $30^\circ$  od vodorovné.

Druhá sada se liší oproti první několika vhodně zvolenými body, které se staly uzly sítě a narušily tím výše zmíněnou pravidelnost. Třetí sada obsahovala pás konečných prvků, který byl od vodorovné skloněn o analyticky vypočtenou teoretickou hodnotu sklonu smykového pásu. Každá z těchto sad byla navíc zhotovena pro tři různé jmenovité velikosti konečných prvků: 40 mm (hrubá síť), 20 mm (střední) a 10 mm (jemná síť).

Navíc byla pro podrobnou analýzu úhlu porušení vytvořena sada sítí KP, u kterých se sklon pásu konečných prvků měnil po cca  $3^\circ$  (Obr. 8). Oproti ostatním sítím bylo v tomto případě použito pro pás jemnější dělení, než pro zbytek modelu.

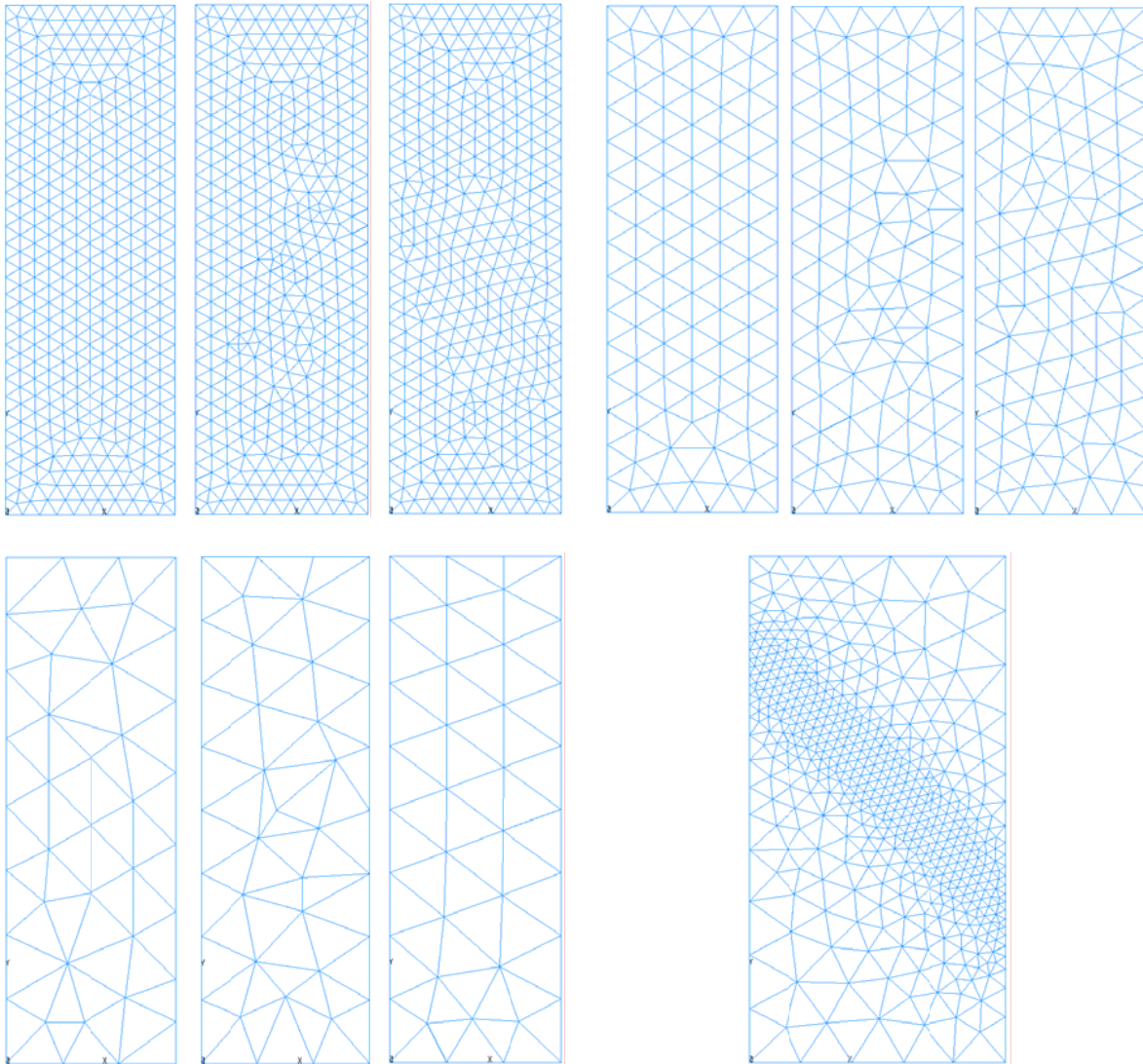


Obr. 5 Konečný prvek „LspaceBB“.



Obr. 6: Použité sítě konečných prvků – pravidelné čtyřúhelníkové sítě generované Matlabem.





Obr. 7: Použité sítě konečných prvků – trojúhelníkové sítě generované programem T3D. První trojice (jemná): velikost prvku 10, druhá (střední): 20, třetí (hrubá): 40mm.

Obr. 8: (vpravo dole): Jedna ze sítí konečných prvků s orientovaným pásem.

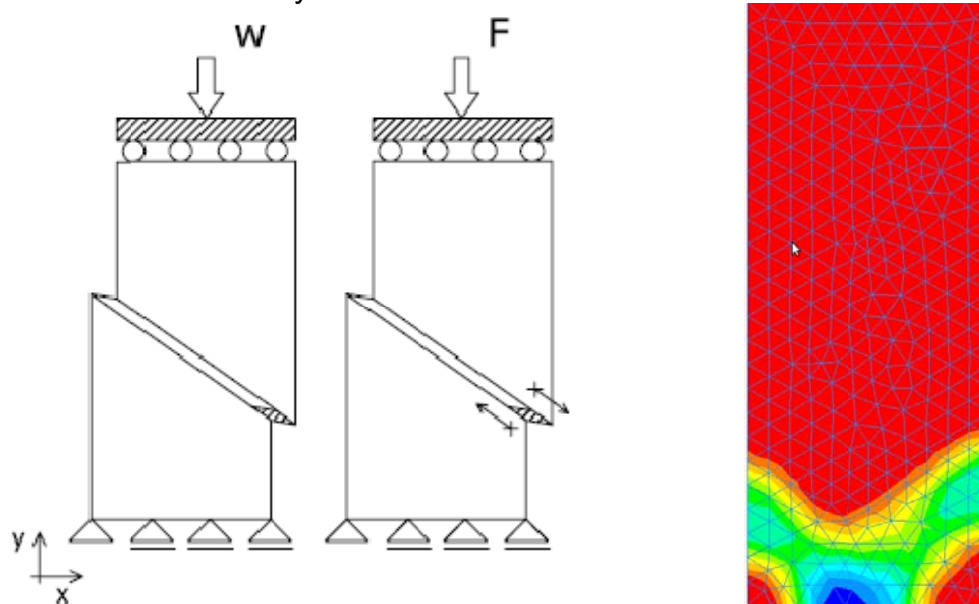
### 3.3 Zatěžování vzorku, řešení

Jak jsem se zmínil v úvodu této kapitoly, zatěžování je v programu OOFEM možné provádět více způsoby, zde bylo použito přímé řízení zkoušky posunem a řízení nepřímé (Obr 9). Při zatěžování posunem je použit Newton-Raphsonův iterační řešič, při nepřímém řízení metoda Arc-Length. Nyní stručně k nastavení úlohy zatížené posunem.

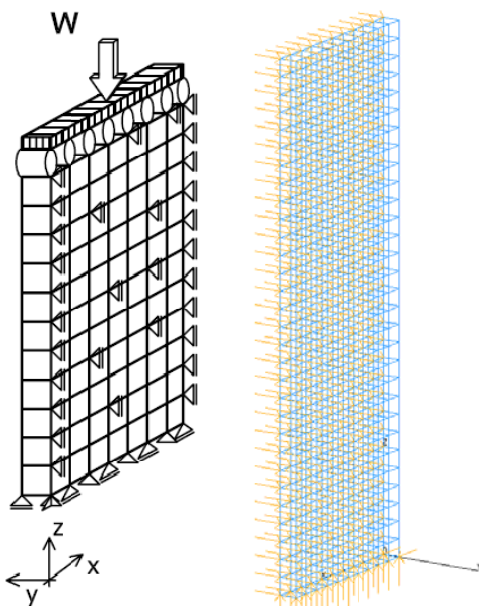
Vzorky zatěžované posunem jsem zatěžoval podle grafu na Obr.11. Pro vzorek s imperfekcí (geometrickým nebo materiálovým zeslabením) a pro vzorek dokonale homogenní byly použity odlišné zatěžovací diagramy. Až do hodnoty deformace, která je blízká mezní elastické deformaci při daném typu napjatosti, jsou oba zatěžovací diagramy stejné. Pro rovinnou deformaci a „střední“ pevnost vychází  $\varepsilon_{y,el,max} = -1.267 \cdot 10^{-3}$ . Od této deformace se zatěžování liší. Vzorky s imperfekcí jsou, jak se výpočty ukázalo, křehčí a ke ztrátě únosnosti dojde při relativně malém přírůstku deformace; oproti tomu vzorky bez imperfekce se chovají duktilněji a v pracovním diagramu je u nich možné pozorovat i mírně klesající větev za vrcholem pracovního diagramu.



Ke ztrátě únosnosti vzorků bez imperfekce dojde při deformaci o cca 100% větší, než u vzorků zeslabených.



Obr. 9: Vlevo: tlaková zkouška řízená posunem, uprostřed: zkouška řízená nepřímo. U obou je v pravé části znázorněn oslabený element, kterým prochází smyková plocha. Vpravo: důsledek nezeslabení sítě konečných prvků elementem s imperfekcí.



Obr. 10: Tlaková zkouška řízená posunem, režim rovinné napjatosti

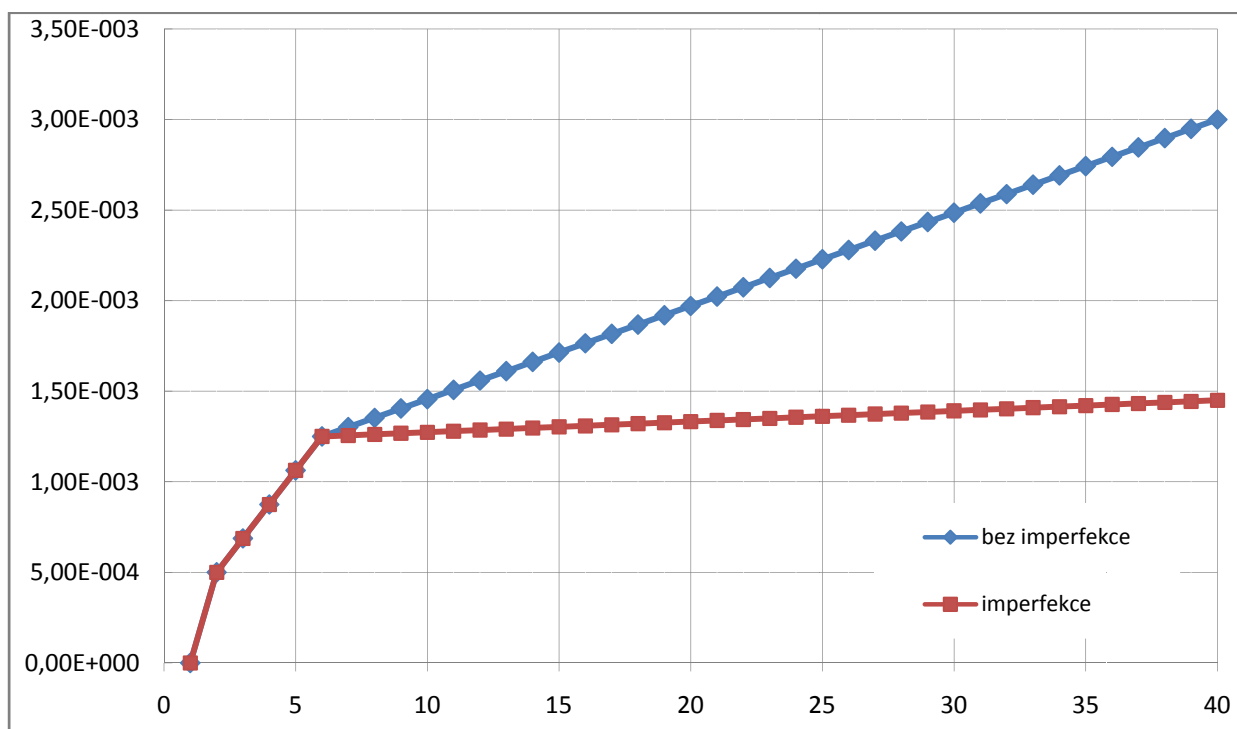
vznikl smykový pás jen u vzorků se sítí podle Obr. 8, popř Obr. 7 se skloněným pásem konečných prvků.

Zkouška řízená nepřímo bez zeslabeného prvku neběží; není totiž možné zaručit, aby výše zmíněné body byly na opačných stranách zplastizovaného pásu. I se zadaným zeslabeným prvkem nebylo u mnoha čtyřúhelníkových sítí a hrubých trojúhelníkových sítí přes veškeré snažení dosaženo hladkého průběhu výpočtu.

Zkouška řízená nepřímo má oproti zkoušce řízené posunem jednu velkou výhodu – je totiž možné přesně zjistit sestupnou větev v pracovním diagramu a to i tehdy, pokud dochází k tzv. „snap-backu“ (sestupná větev se přimyká k větvi vzestupné).

Kromě polohy a směru síly  $F$  je potřeba zadat i dva body a k nim příslušné směrové vektory, přičemž body musí ležet na opačných stranách smykového pásu a zadané vektory musí sledovat směr deformované konstrukce (obr 9 uprostřed). Body navíc musí navíc ležet blízko sobě.

Jak jsem zjistil, zadání imperfekce jednoho elementu na boční straně vzorku má pro výpočet naprosto zásadní význam. Pouze tak je možné zaručit, že smykový pás bude procházet šikmo napříč tělesem a nebude zabíhat do podstavy, či dokonce nedojde k „roztržení“ jedné z podstav vzorku, jako se stalo např. na Obr. 9 vpravo. Bez zadané imperfekce



Obr. 11: Průběh zatěžování: závislost vynucené relativní deformace na výpočetním kroku

### 3.4 Výsledky výpočtů – Drucker-Prager – Rovinná deformace

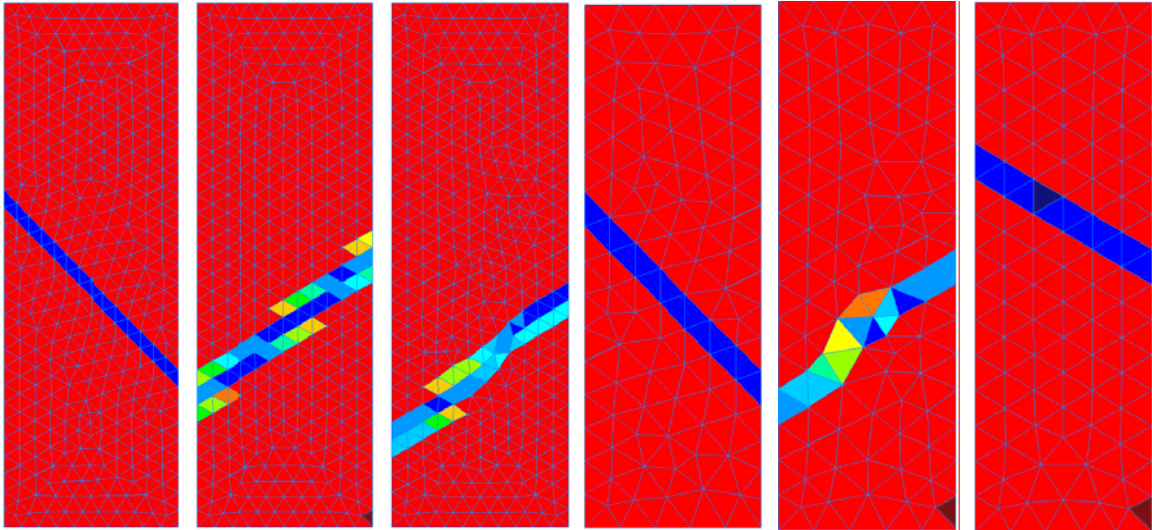
-2,802e-02  
-2,371e-02  
-2,140e-02  
-1,908e-02  
-1,677e-02  
-1,445e-02  
-1,214e-02  
-9,827e-03  
-7,513e-03  
-5,199e-03  
-2,885e-03

V této kapitole jsou zobrazeny výsledky všech podstatných výpočtů. Data byla vyhodnocována pomocí programů Extractor [2] a OOFEG [2]. Oba jsou nadstavbou základního výpočetního programu OOFEM. Extractor jsem použil pro získání párových hodnot síla + posun z výstupního textového souboru a tato data pak vykreslil do pracovního diagramu. OOFEG je grafický postprocesor, pomocí něhož jsem vytvořil většinu obrázků v této práci. Zejména jsou zde uvedené lokální, nezprůměrované hodnoty plastické deformace ve svislém směru. Lokální hodnoty dávají lepší přehled o průběhu smykového pásu a o vlivu sítě. Pro lepší odečtení hodnoty sklonu jsem ale používal vykreslení zprůměrovaných hodnot (např. Obr. 16). Plastické deformace na obrázcích v této kapitole jsou vykresleny v barevné škále (Obr. 12), jejíž hodnoty jsou spíše orientační, jedinečné pro každý model; modrá barva symbolizuje velkou plastickou deformaci a červená malou. Obrázky i se škálami z důvodu omezeného rozsahu práce nebylo možné uvést.

Obr. 12: Barevná škála isoploch plast. deformací

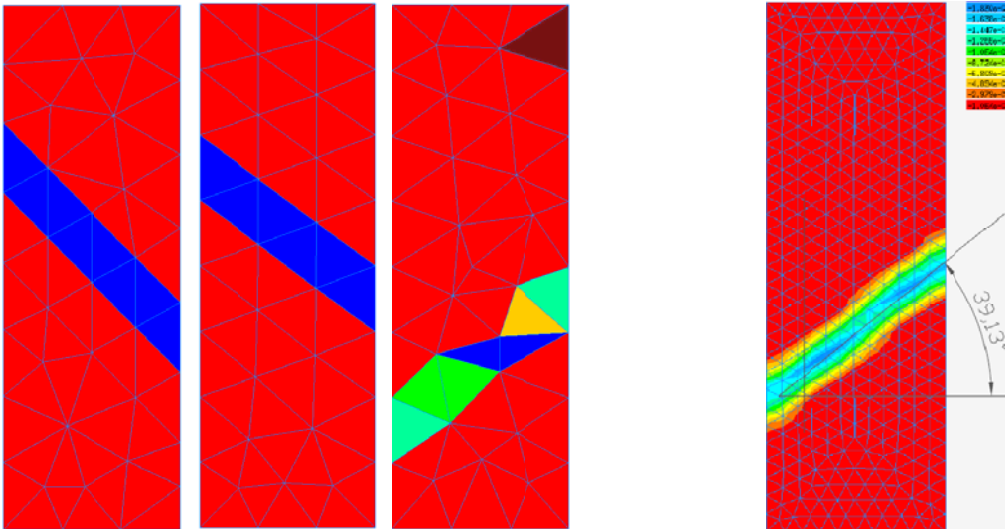
#### 3.4.1 Zkouška řízená posunem – vliv typu sítě

V této a následující kapitole jsou uvedeny výsledky získané výpočty na sítích z Obr. 6 a 7. Vzorky jsou zatíženy posunem (v 3.4.2 řízené nepřímo) a jsou s / bez imperfekce. Vzorky jsou ze „středního“ materiálu. Předmětem zkoumání je především křehkost či duktilita vzorku a způsob porušení.



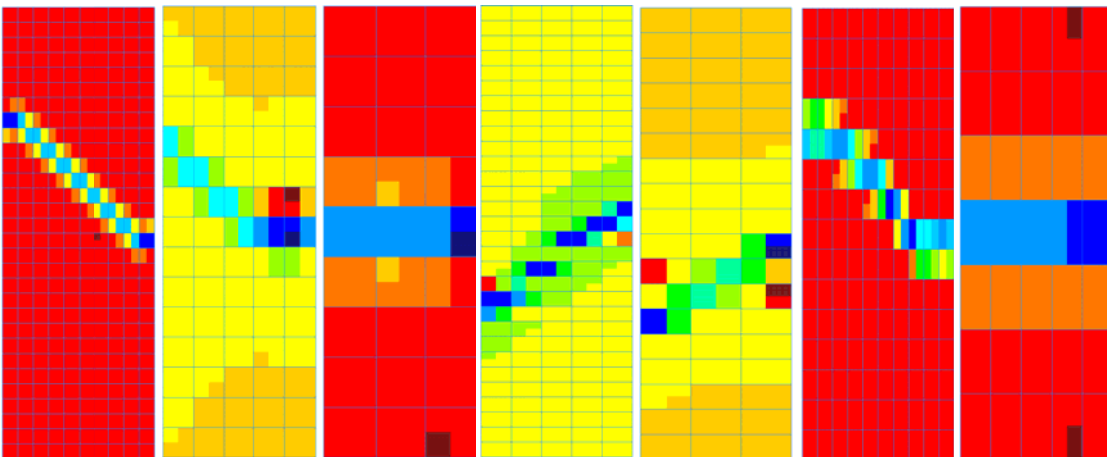
Obr. 13: (trojice vlevo) Lokální plastická deformace ve svislém směru. Zleva: jemná síť se smykovým pásem, jemná síť a jemná síť s náhodně vloženými body. Řízeno posunem, síť s imperfekcí.

Obr. 14: (trojice vpravo) ditto, jen pro střední síť.

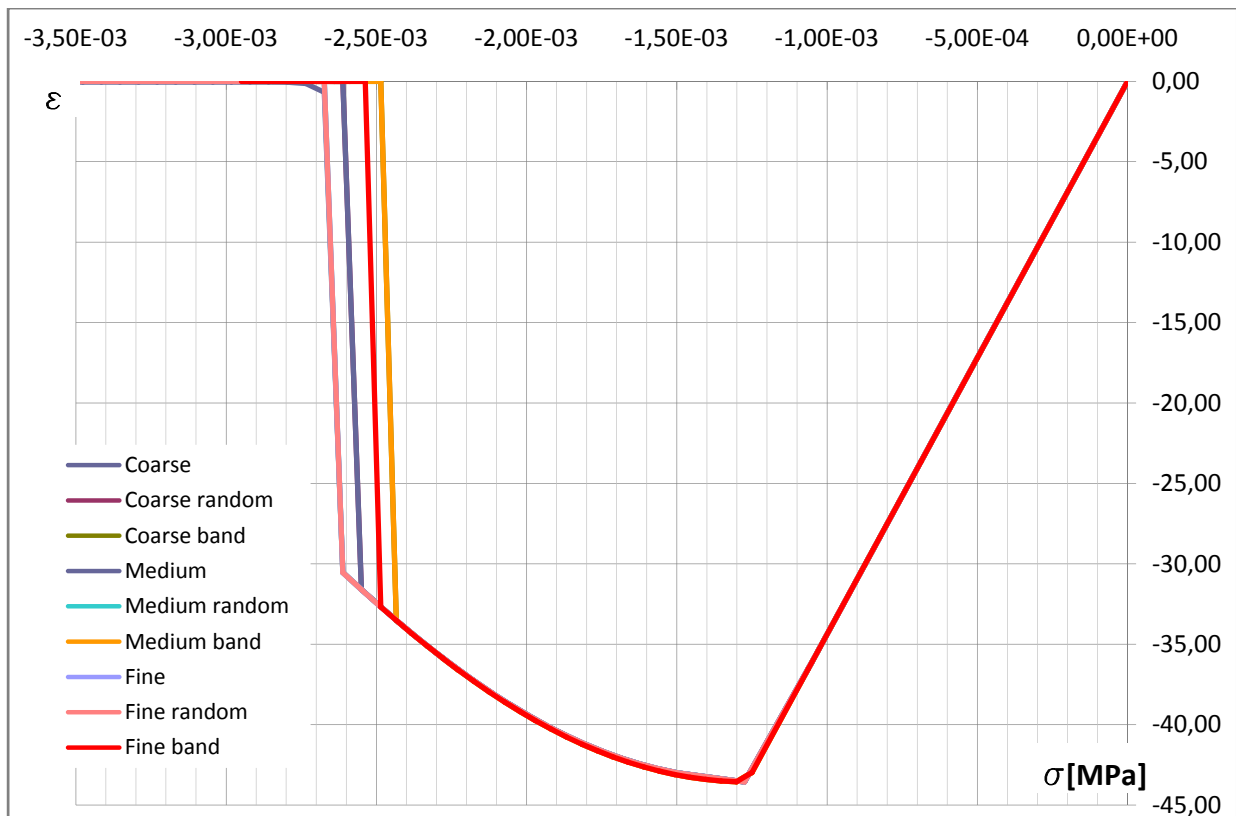


Obr. 15 (trojice vlevo): ditto, jen pro hrubou síť.

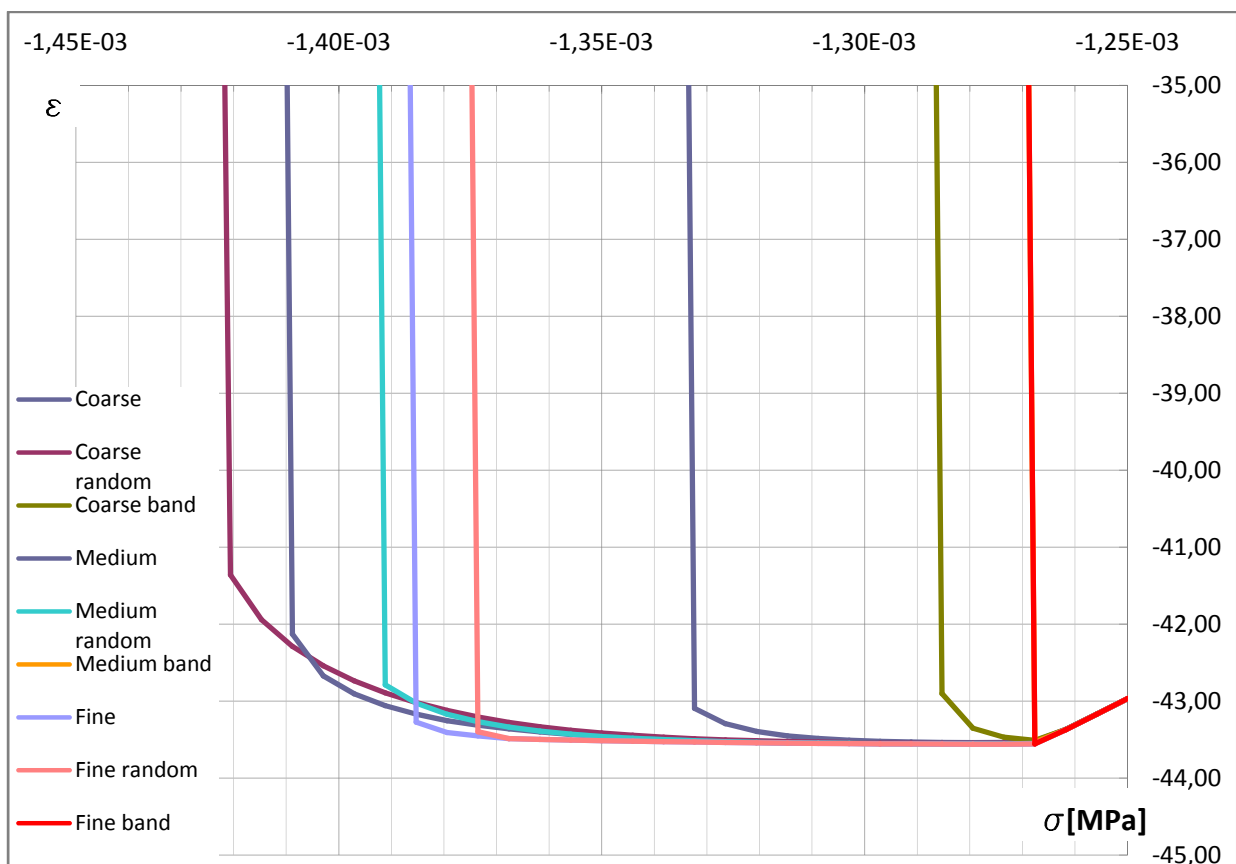
Obr. 16 (vpravo): Grafické určení sklonu smykového pásu pro jemnou síť, určeno na zprůměrovaných hodnotách plastické deformace.



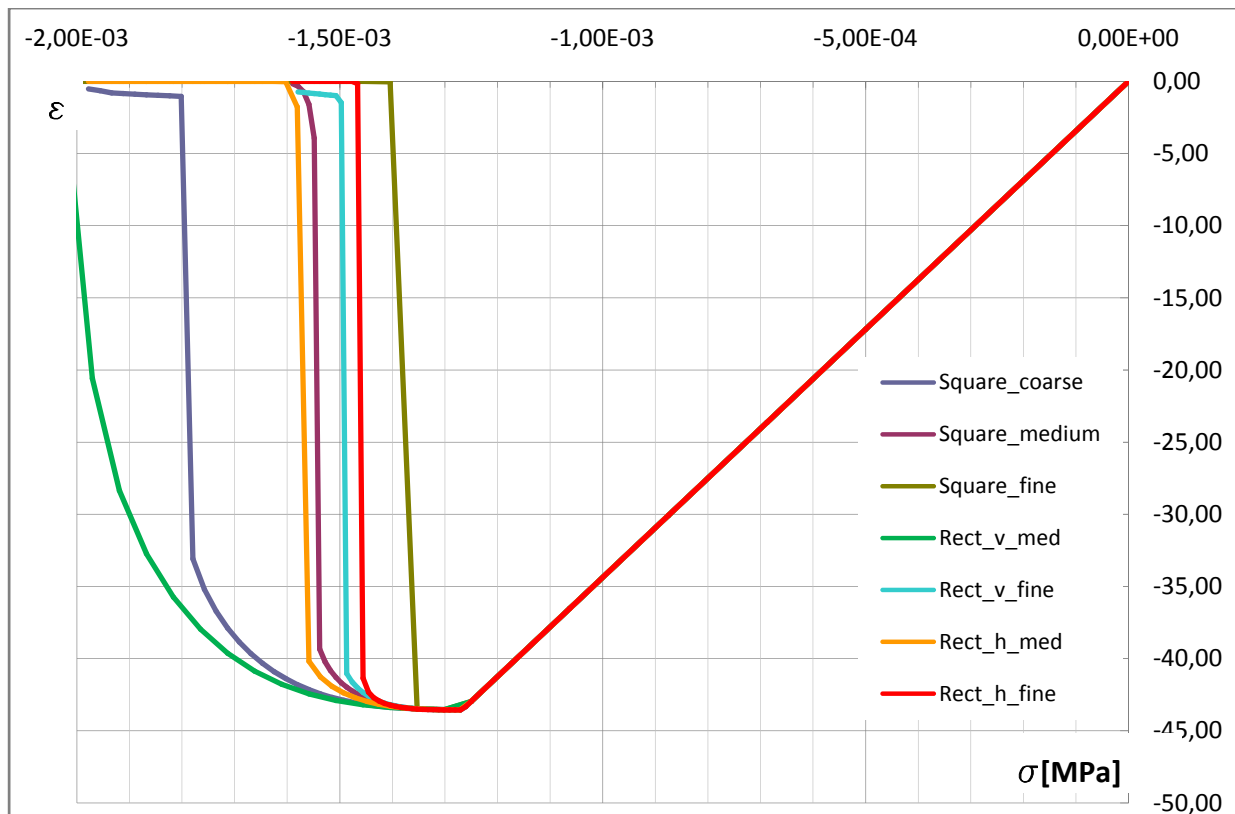
Obr. 17: Lokální plastická deformace ve svislém směru. Pravidelná čtyřúhelníková síť s imperfekcí.



Obr. 18: Pracovní diagram. Trojúhelníková síť prvků bez imperfekce, řízeno posunem. Střední pevnost.



Obr. 19: Detail vrcholu pracovního diagramu. Trojúhelníková síť prvků s imperfkcí, řízeno posunem. Střední pevnost materiálu. „Medium band“ dosahuje stejné pevnosti jako „Fine band“



Obr. 20: Pracovní diagram. Čtyřúhelníková síť prvků s imperfekcí, řízeno posunem. Střední pevnost materiálu.

### Komentáře a závěry:

Obr. 13, 14, 15:

- Pro skloněný pás KP o analyticky vypočtenou hodnotu lokalizuje deformace přesně do jednoho pásu konečných prvků.
- Bez náhodně vložených bodů lokalizuje deformace
  - u jemné sítě do několika vrstev konečných prvků
  - u střední a hrubé sítě jen do jedné vrstvy
  - pro hrubé pravidelné sítě je tedy úhel smykového pásu minimální (30°)
- U sítě s náhodně vloženými body je lokalizační úhel v intervalu od 30° do hodnoty analyticky vypočteného úhlu. Náhodně vložené body a jemnost sítě mají tedy příznivý vliv na správnost výsledků.

Obr. 17:

- U jemných sítí převládá tendence lokalizovat do skloněného pásu, u sítí hrubých do pásu příčného. V případě hrubých sítí nedojde ke klasickému způsobu porušení – usmyknutí, ale k příčnému roztažení.
- Síť ze svislých obdélníků podporuje lokalizování pod vyššími úhly, než síť z obdélníků vodorovných.

Obr. 18:

- Trojúhelníková síť bez imperfekce: nejdříve došlo k vytvoření plastického pásu u středně hrubé a hrubé sítě s orientovaným pásem (na grafu jsou v zákrytu), při dalším přitížení u jemné sítě s orientovaným pásem, pak u hrubé „náhodné“ sítě a střední sítě. Při dalším přitížení došlo ke zplastizování zbylých vzorků.



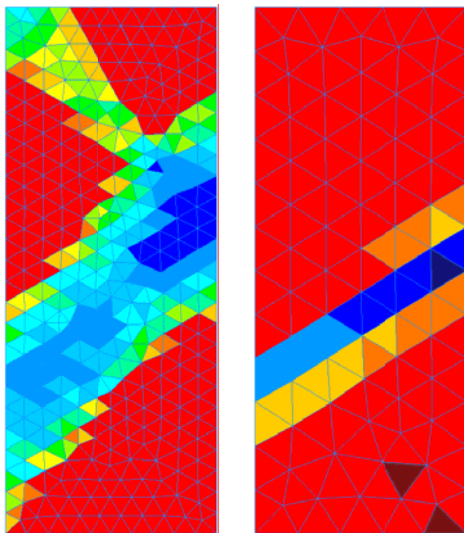
Obr. 19:

- Pracovní diagramy vzorků s imperfekcí pro trojúhelníkové sítě – porovnávání duktility. Nejkréhčí jsou sítě s jemnou a skloněnou sítí o teor. úhel, rozdíl mezi nejkréhčím a nejduktilnějším je cca 20%.
- Srovnání Obr 18 a 19: vzorek fine\_band (jemná trojúhelníková skloněná síť) má v případě nezeslabení imperfekcí o 100% vyšší duktilitu!

Obr. 20:

- Pracovní diagramy vzorků s imperfekcí pro čtyřúhelníkové sítě – porovnávání duktility. Řešení opět závisí na velikosti prvku. Tentokrát je rozdíl větší a je způsoben zcela odlišným způsobem porušení vzorku – příčné roztahení plastického pásu.

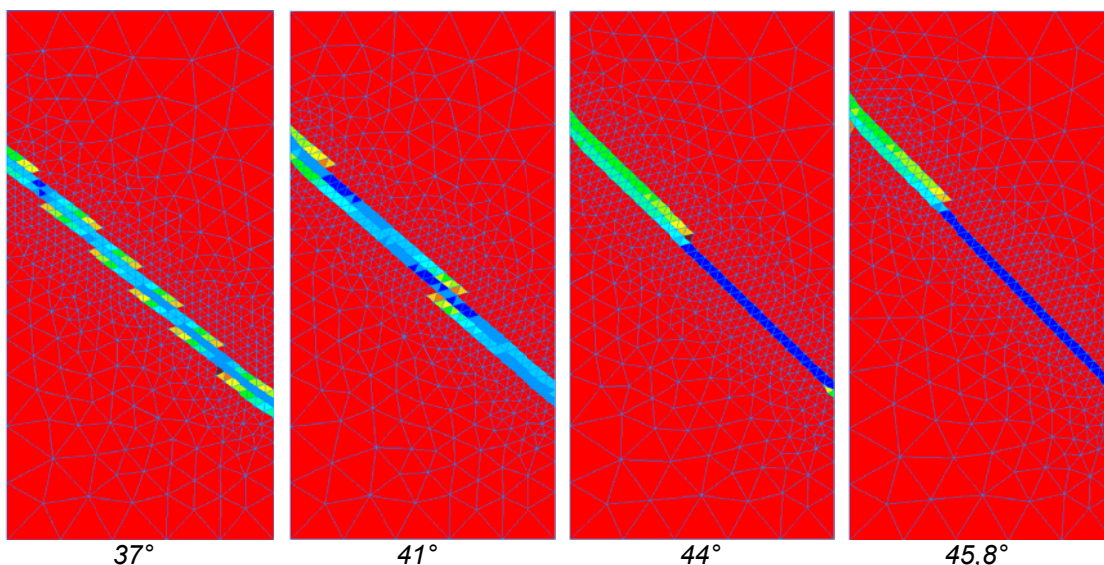
### 3.4.2 Zkouška řízená nepřímo – vliv typu sítě

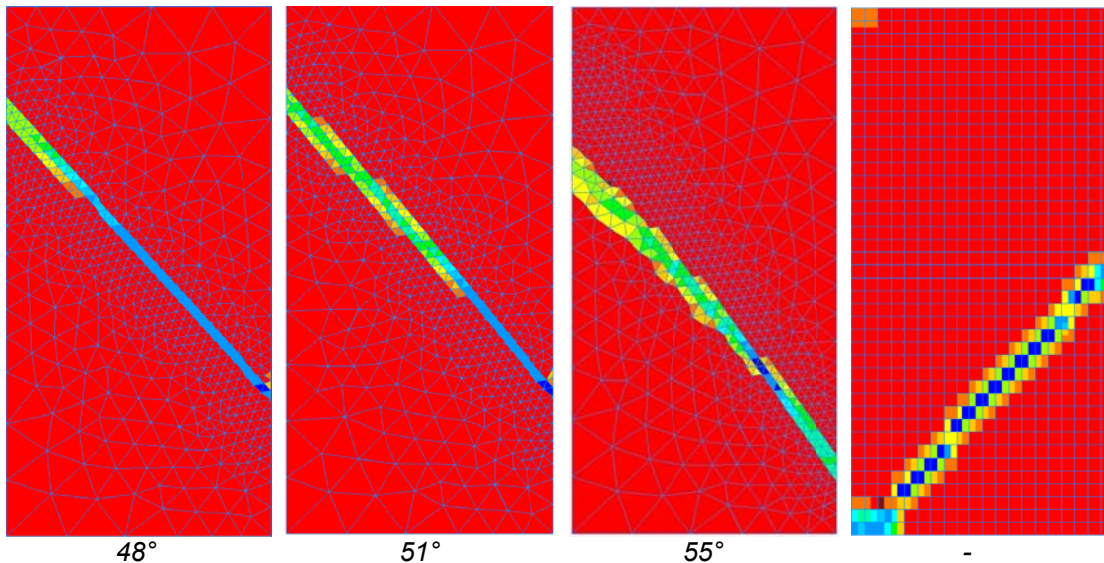


Obr. 21: Plastická deformace ve svislém směru. Zkouška řízená silou, vliv typu sítě.

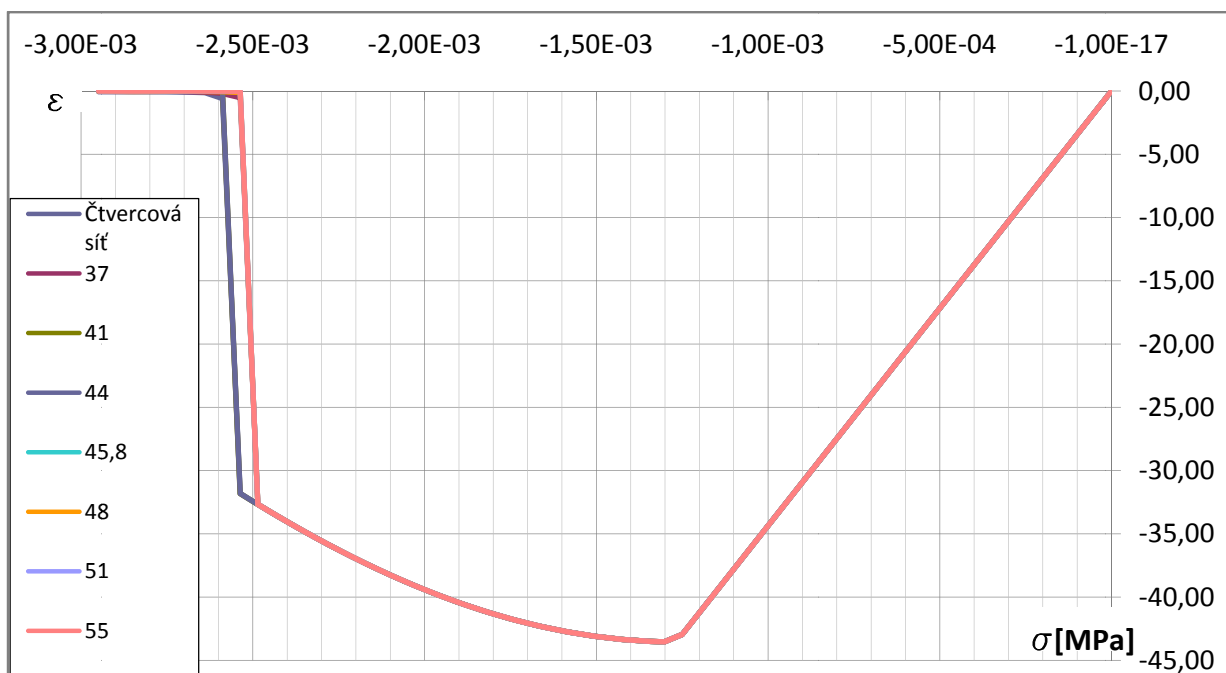
Jak je z obrázku 21 vidět, zkouška řízená nepřímo s metodou Arc-Length měla střídavé úspěchy, lze konstatovat, že ke správnému způsobu porušení došlo zvláště u sítí se skloněným pásem a u sítí pravidelných. Podobně jako v předchozí kapitole, jemnější, popř. síť se skloněným pásem znamená kréhčí chování

### 3.4.3 Zkouška řízená posunem – vliv směru pásu sítě konečných prvků





Obr. 22: Lokální hodnoty plastické deformace ve směru osy  $y$  (svislý směr) pro DP materiál se „střední pevností“ a imperfekcí. Hodnotou ve stupních je vyjádřen sklon pásu sítě konečných prvků.



Obr. 23: Pracovní diagram. Bez imperfekce, řízeno posunem. Střední pevnost.

### Komentáře a závěry:

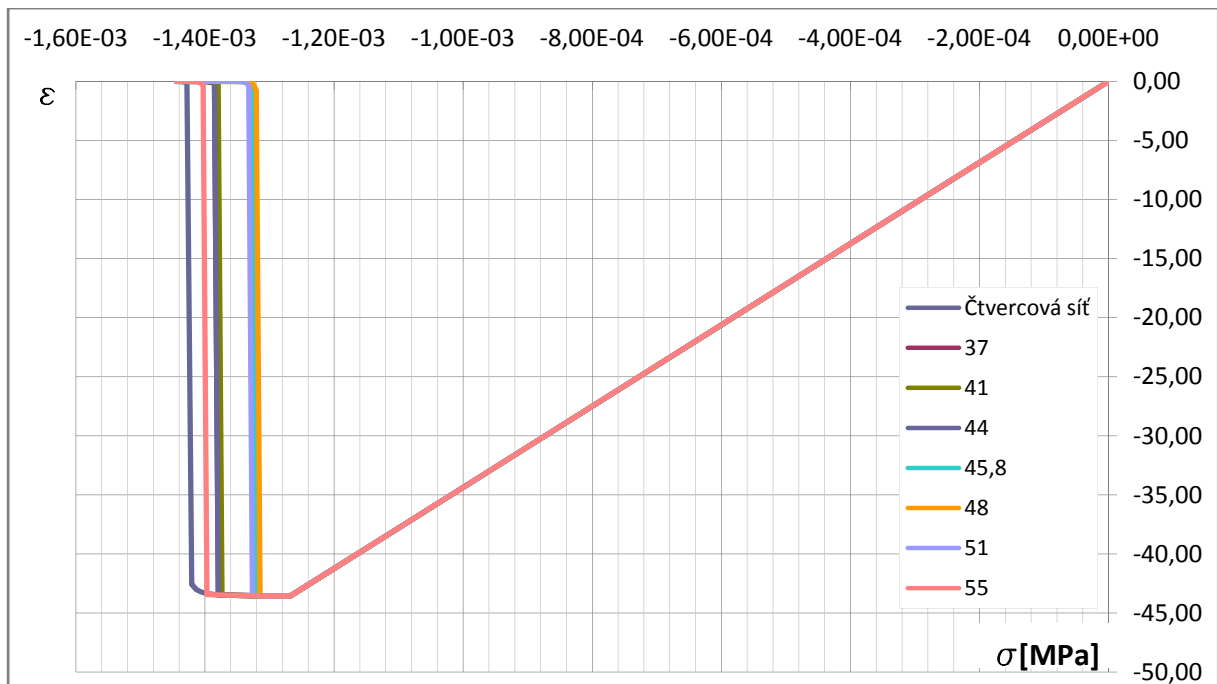
Obr. 22:

- Potvrzení shody výsledků analytického a numerického řešení sklonu smykového pásu. Nejužší smykový pás (přes nejméně prvků) vzniká při sklonu sítě  $45,8^\circ$ , což je teoreticky vypočtená hodnota. Na ostatních sítích je vidět snaha plastického pásu přiblížit se tomuto směru.

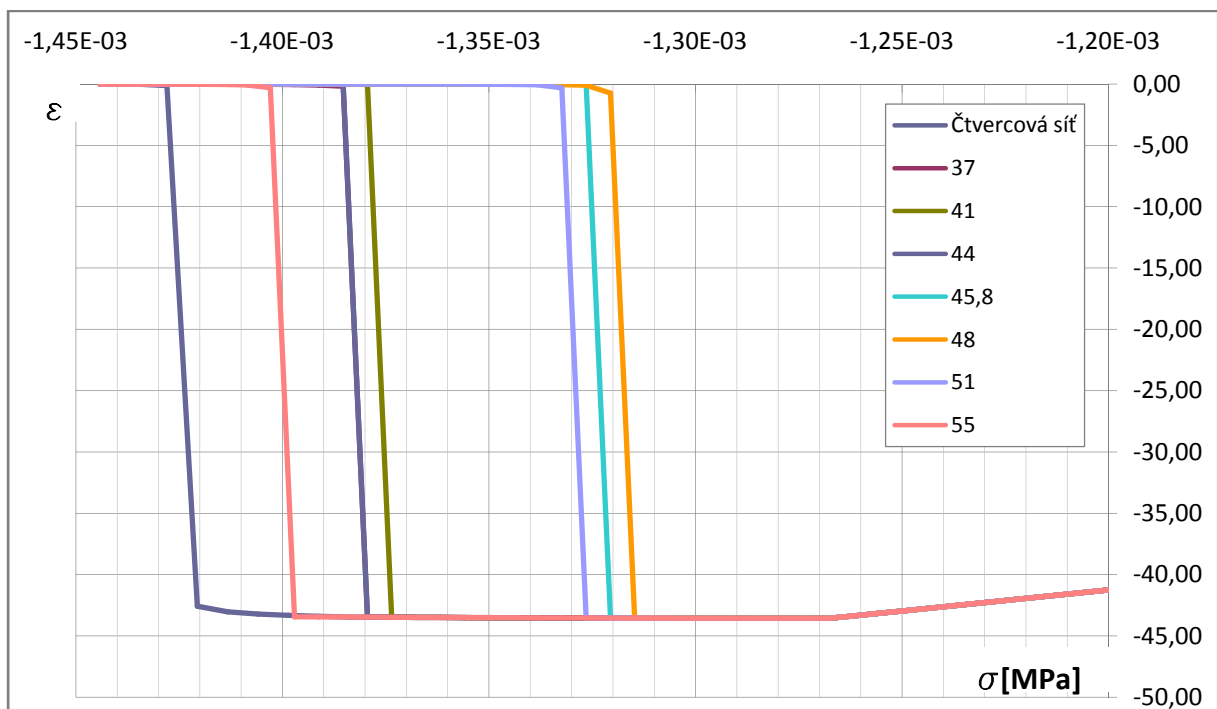
Obr. 23:

- Pracovní diagram bez imperfekce má podobný charakter jako v kapitole 3.4.1, chování je cca o 10% křehčí, než u čtvercové sítě bez imperfekce. Všechny skloněné sítě ztrácí únosnost při stejné deformaci.





Obr. 24: Pracovní diagram. S imperfekcí, řízeno posunem. Střední pevnost.



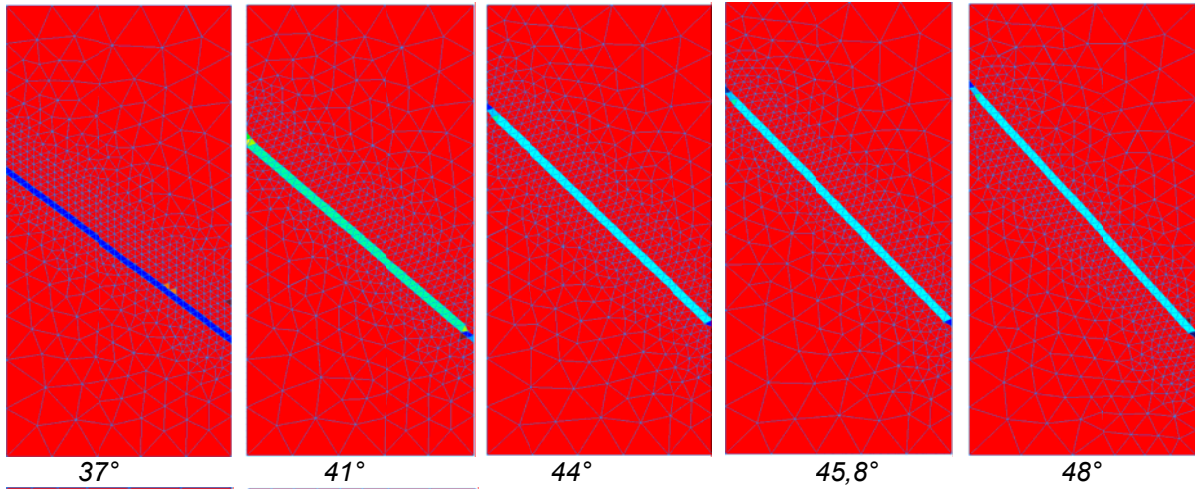
Obr. 25: Detail vrcholu pracovního diagramu. Vzorek s imperfekcí, řízeno posunem.

### Komentáře a závěry:

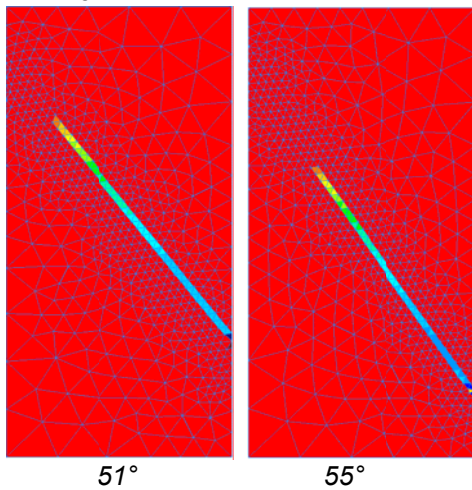
Obr. 24 a 25:

- Pracovní diagramy skloněných trojúhelníkových sítí (+ čtvercová síť pro srovnání). Nejkřehčí chování u sítí se sklonem 48° a 45,8° (teoretický úhel) a 51°. Ostatní vzorky jsou o cca 5% duktilnější. Nejpozději ztratí únosnost síť s pravidelnými čtverci.

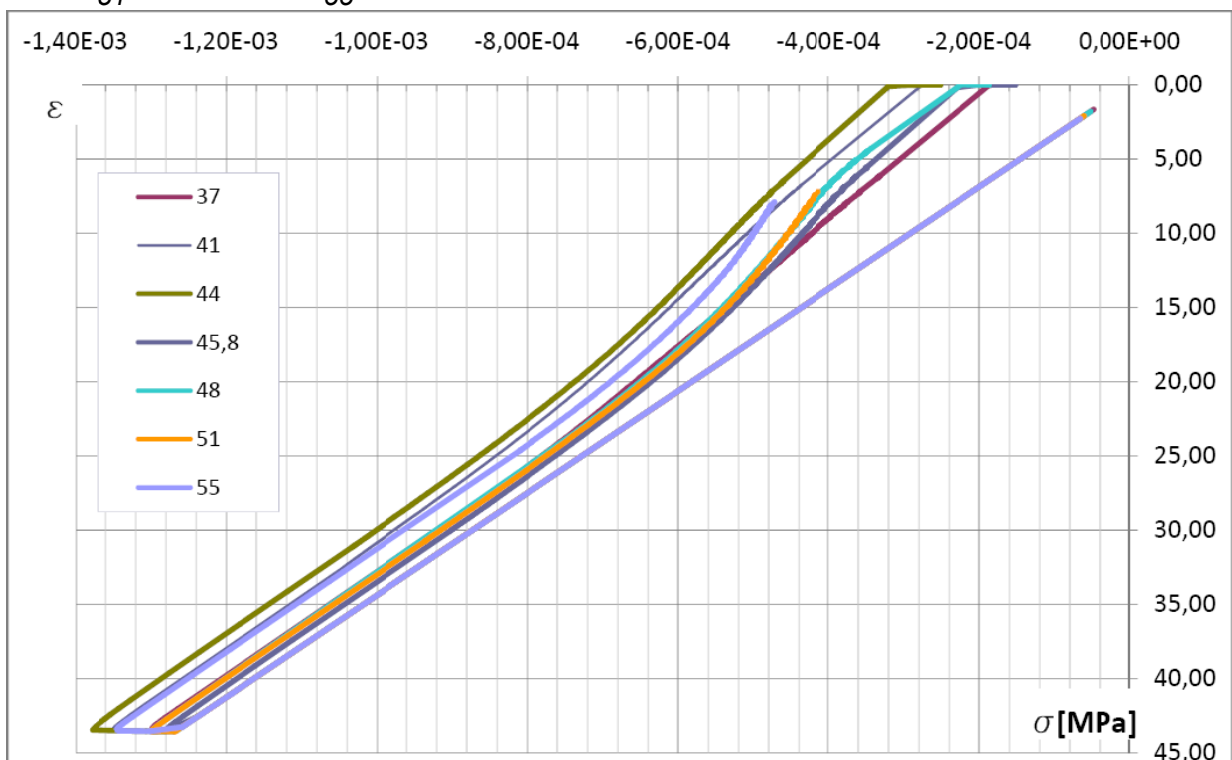
### 3.4.4 Zkouška řízená nepřímo – vliv směru pásu sítě konečných prvků

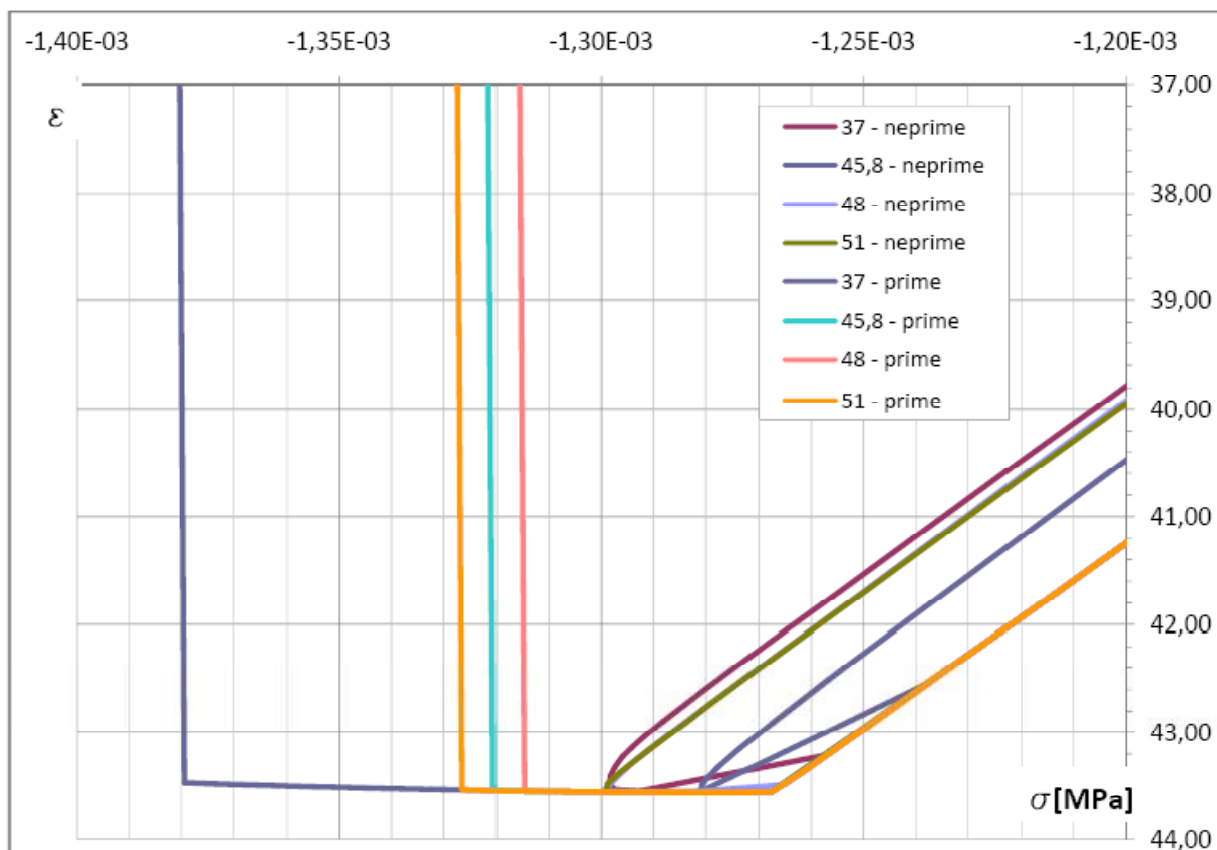


Obr. 26: Lokální hodnoty plastické deformace ve směru osy y (svislý směr) pro DP materiál se „střední pevností“ a imperfekcí. Hodnotou ve stupních je vyjádřen sklon pásu sítě konečných prvků. Stlačování řízeno silou.



Obr. 27: Pracovní diagram. S imperfekcí, řízeno silou. Střední pevnost. Stlačování řízeno silou.





Obr. 28: Pracovní diagram. Porovnání vrcholu pracovního diagramu přímém a nepřímém řízení zkoušky.

### Komentáře a závěry:

Obr. 26:

- Při řízení zkoušky nepřímo lokalizují všechny skloněné sítě do přímého úzkého pruhu o šířce jednoho prvku. Pouze z grafického výstupu není možné rozhodnout, jaký úhel se blíží teoretickému.

Obr. 27:

- Potvrzení shody analytického výpočtu s výpočtem MKP – úhel 45,8° a 48° lokalizují při nejmenší deformaci. Sestupná větev je u všech sítí přibližně rovnoběžná s větví vzestupnou.

Obr. 28:

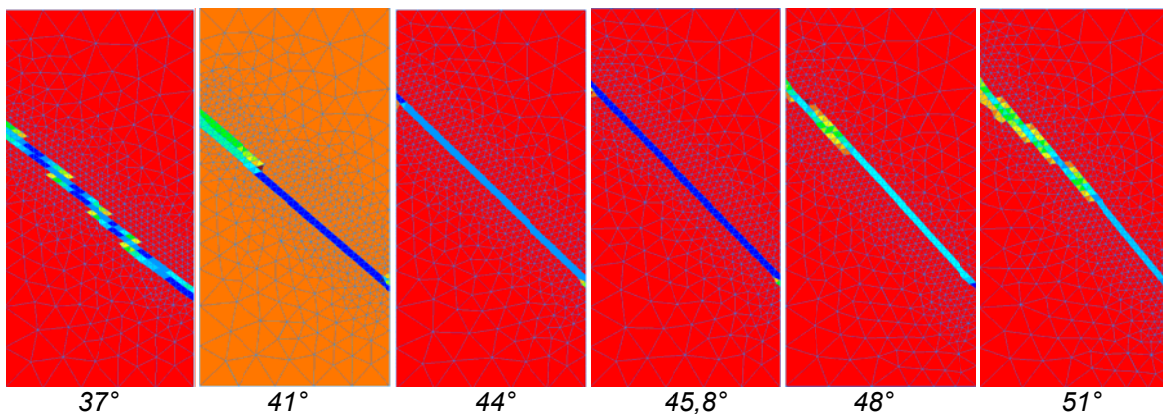
- Při řízení zkoušky nepřímo lokalizují vzorky dříve, než při přímém řízení.
- Graf 48\_neprime se překrývá s grafem 51\_neprime

### 3.5 Porovnání analytického výpočtu orientace smykového pásu s výpočtem pomocí softwaru

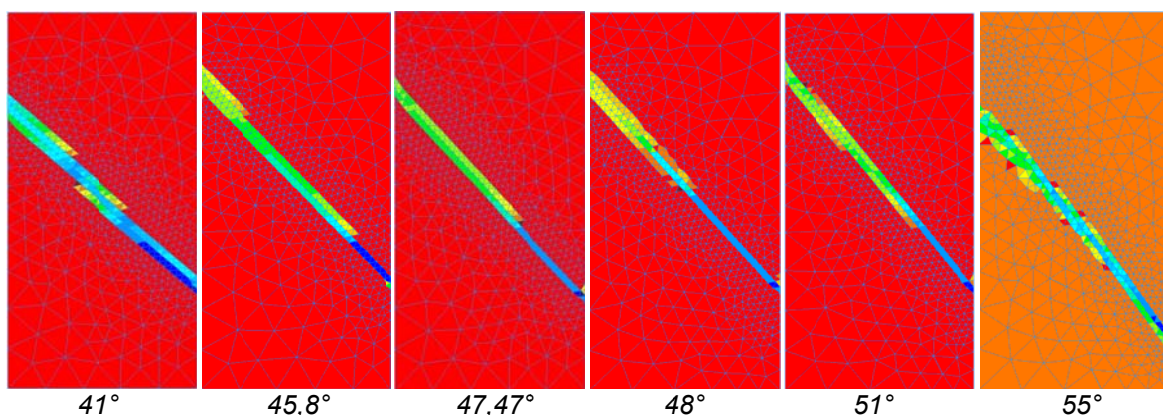
V této sekci jsou uvedeny výsledky přímého zatěžování dvou zbylých sad materiálových parametrů (model „měkký“ a „pevný“ z tab. 1).

Mód: rovinná deformace; použity jsou trojúhelníkové sítě s různě skloněným pásem konečných prvků + jemná pravidelná čtvercová síť.

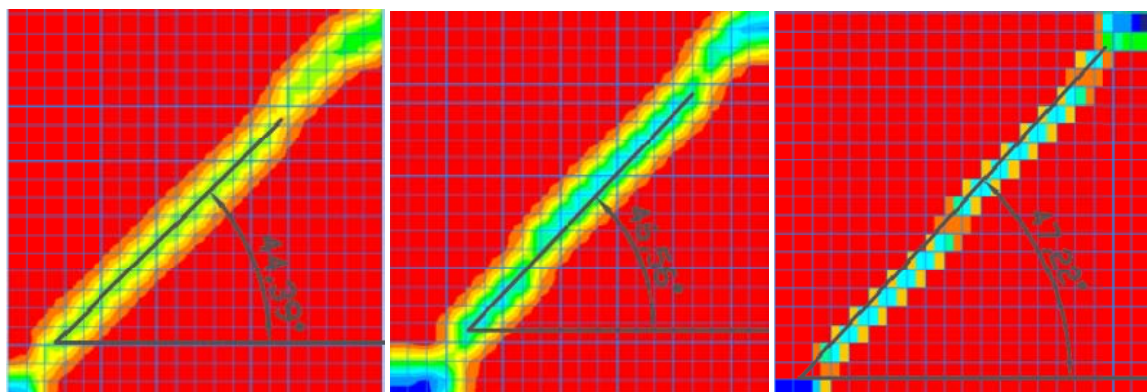




Obr. 29: Lokální hodnoty plastické deformace ve směru osy  $y$  (svislý směr) pro DP materiál s „malou pevností“. Hodnotou ve stupních je vyjádřen sklon pásu sítě konečných prvků. Teor. úhel  $44,23^\circ$ .



Obr. 30: Lokální hodnoty plastické deformace ve směru osy  $y$  (svislý směr) pro DP materiál s „vysokou pevností“. Hodnotou ve stupních je vyjádřen sklon pásu sítě konečných prvků. Teor. úhel  $47,47^\circ$ .



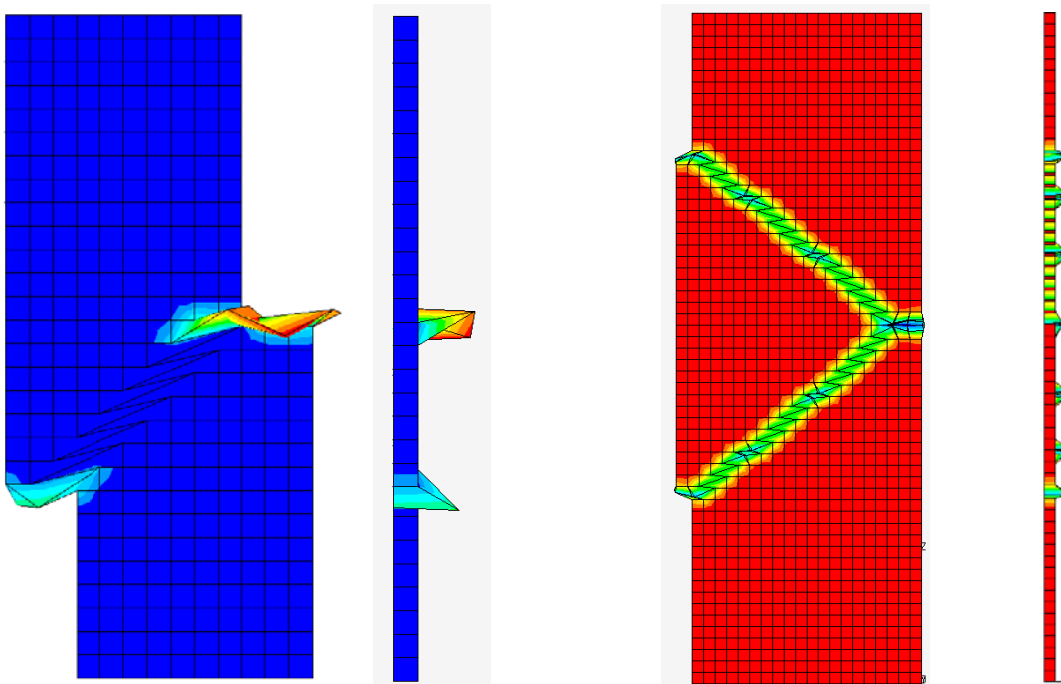
Obr. 31: Grafické určení úhlu smykového pásu pro měkký, střední a pevný materiál a jemnou čtvercovou síť konečných prvků.

### Komentáře a závěry:

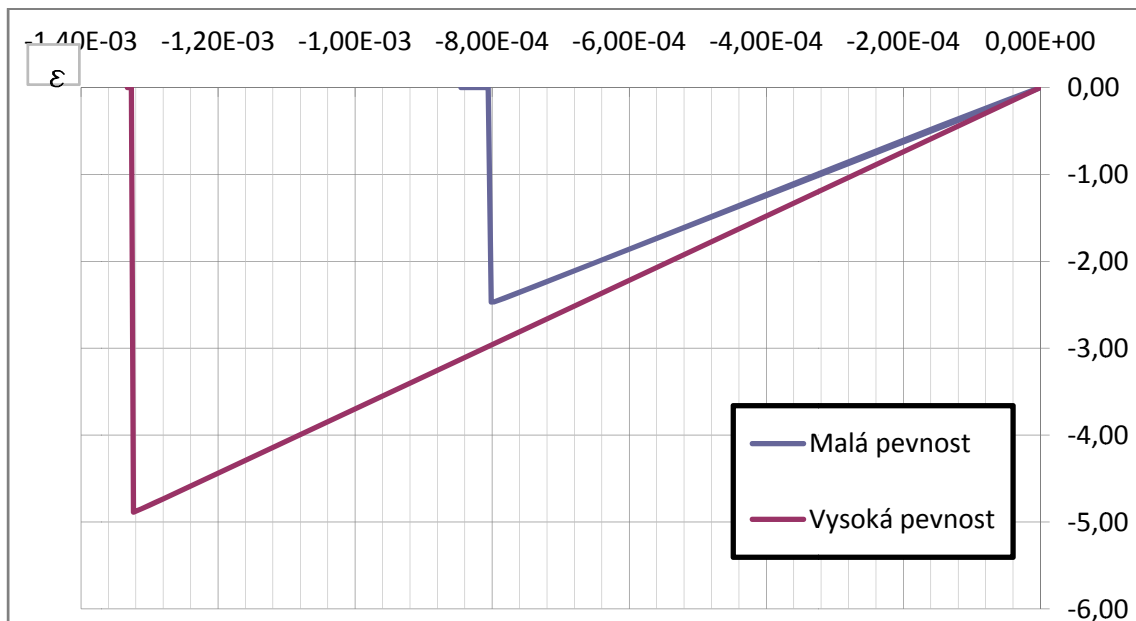
Obr. 29, 30 a 31:

- Dokumentace velmi dobré shody analytického a numerického výpočtu.

### 3.6 Výsledky výpočtů – Drucker-Prager – Rovinná deformace



Obr. 32: Zdeformovaný tvar vzorku při rovinné napjatosti. Vlevo: čelní pohled, vpravo: pohled ze strany. Při tomto pohledu jsou podpory na levé straně vzorku.



Obr. 33: Pracovní diagramy vzorku s malou a vysokou pevností při stavu rovinné napjatosti.

#### Komentáře a závěry:

Obr. 32:

- Za pozornost stojí boční pohled – značná příčná deformace prvků smykového pásu.

Obr. 33:

- Kontrola výpočtu: shoda vypočtených hodnot se změřenými hodnotami.

Malá pevnost:  $f_c = 25 \text{ MPa}$ ;  $\varepsilon_{z \text{ el max}} = -8.065 \cdot 10^{-4}$

Vysoká pevnost:  $f_c = 50 \text{ MPa}$ ;  $\varepsilon_{z \text{ el max}} = -1.351 \cdot 10^{-3}$

## 4 Závěr

Výsledky této studie ukazují velmi dobrou shodu mezi analyticky vypočteným úhlem a úhlem změřeným při jednoosé tlakové zatěžovací zkoušce. Ke shodě došlo při režimu rovinné deformace i při rovinné napjatosti (viz tab. 2).

Tab. 2: Porovnání vypočtených a změřených úhlů smykového pásu na čtvercové síti.

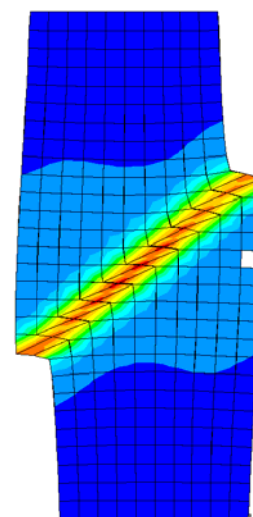
materiál	rovinná deformace		rovinná napjatost	
	$\alpha$ vypočtené [°]	$\alpha$ změřené[°]	$\alpha$ vypočtené [°]	$\alpha$ změřené[°]
měkký	44,228	44,39	42,175	42,3
střední	45,804	46,56	-	-
pevný	47,473	47,22	45,716	44,8

Současně tato práce dokumentuje podstatný vliv jemnosti dělení a charakteru sítě (sklon, pravidelnost, nepravidelnost) na vypočtený pracovní diagram.

Zcela zásadní se ukázal i vliv imperfekce. Imperfekce měla dvojí význam:

- i) pro zkoušku řízenou nepřímo je podmínkou chodu výpočtu
- ii) pro zkoušku řízenou posunem určuje imperfekce charakter chování vzorku – jeho křehkost či duktilitu.

Je důležité zdůraznit, že tyto poznatky se týkají jen některých modelů materiálů. U materiálu M4, který je nyní předmětem mého zájmu mají imperfekce sice vliv na pracovní diagram, smyková plocha ale zeslabeným prvkem nemusí vůbec procházet (Obr. 34).



Obr. 34: Zdeformovaný tvar vzorku popsaného materiálovým modelem M4. Smyková plocha neprochází imperfekcí.

## 5 Literatura

[1] Jirásek, M. Bažant, Z.P. *Inelastic Analysis of Structures*. John Wiley and Sons, Chichester, 2002.

[2] B. Patzák, OOFEM project home page, <http://www.oofem.org>, 2000.

[3] Jirásek M., Zeman J., *Přetváření a porušování materiálů*. České vysoké učení technické v Praze, Nakladatelství ČVUT, 2006.

[4] Jirásek M., *Mathematical analysis of strain localization*, Revue Européenne de Génie Civil, vol. 11, 2007, p. 977-991.

[5] Ottosen N., Runesson K., *Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity*, International Journal of Solids and Structures, vol. 27, 1991, p. 401-421.

[6] Rolshoven, S., *Nonlocal plasticity models for localized failure*, PhD thesis, 2003

[7] <http://ksm.fsv.cvut.cz/~dr/t3d.html>