



České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební

2010/2011

Soutěžní práce:

Elastica prutu v tlaku i tahu

Jméno a příjmení:	Karel Mikeš
Ročník:	2. ročník
Vedoucí práce:	Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.
Katedra:	Katedra stavební mechaniky

Abstrakt:

Zjednodušení v podobě teorie lineární pružnosti dává ve většině případů pro inženýrskou praxi dobré výsledky. Ale vzorce lineární pružnosti, které řeší vzpěr (stabilitu a vybočení) tlačných prutů neodpovídají naší praktické zkušenosti, která například připouští, aby se vetknutý tlačný prut ohnul pod úroveň vetknutí. Rádi bychom tedy popsali zmíněnou situaci pomocí nelineárních vztahů a přesvědčili se, zda se shodují s praktickou zkušeností. Zároveň není nezajímavé podívat se, zda takovýto popis platí jen pro tlačné pruty anebo je možné takto v jistých případech popsat i prut tažený, je vůbec možné aby prut namáhaný tahovou silou ztratil stabilitu a vybočil? Zjišťujeme, že v jistých situacích to možné je a k popisu lze použít obdobné vztahy jako pro prut tlačný. Zajímavé také je, že rovnicí ve stejném tvaru lze popsat i pohyb matematického kyvadla a řešení těchto dvou na prvních pohled naprosto nesouvisejících fyzikálních procesů mají docela patrnou analogii.

Obsah:

1. Tlačný prut
2. Rovnice pro tlačný prut
 - 2.1 Odvození pro vetknutý prut
 - 2.2 Odvození pro kyvadlo
 - 2.21 Pomocí silové rovnováhy
 - 2.22 Pomocí energetické bilance
 - 2.3 Analogie rovnic
3. Řešení
 - 3.1 Zjednodušení rovnice a analytické řešení
 - 3.2 Program pro numerické řešení
 - 3.3 Kategorie řešení
 - 3.4 Přehled kategorií řešení
4. Tažený prut
 - 4.1 Ztráta stability v tahu
 - 4.2 Elastica v tahu
- 5 Závěr
6. Literatura a jiné zdroje

1. Tlačený prut

V první části práce budeme analyzovat, chování prizmatického, ideálně přímého prutu, který je kolmo vetknutý do vodorovného podkladu a na jehož volný konec působí svisle dolů síla F . Na rozdíl od teorie lineární pružnosti vyučované v předmětu „Pružnost a pevnost“ budeme vybočení prutu uvažovat libovolně velké.

Předpokládejme, že známe: materiálové a průřezové charakteristiky prutu (E, I), délku prutu L a velikost působící síly F .

Gravitační pole uvažujme homogenní, vlastní hmotnost prutu zanedbejme.

2. Rovnice

Nejprve odvodíme rovnici, která bude popisovat zatížený prut, potom rovnici popisující pohyb matematického kyvadla a podíváme se na analogii obou rovnic.

2.1 Odvození rovnice pro vetknutý prut

Vycházeli jsme z definice derivace:

$$\frac{\partial M(s)}{\partial s} = \frac{M(s+ds) - M(s)}{ds} = \frac{F \cdot (r - dy) - Fr}{ds} = -F \frac{\partial y}{\partial s}$$

Kde moment a sílu lze vyjádřit jako: $M = EI\kappa = EI \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $F = mg$

A z geometrie situace plyne $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin(\varphi)$

Dostáváme rovnici:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + c_1 \sin(\varphi) = 0}$$

kde $c_1 = \frac{mg}{EI} = konst.$

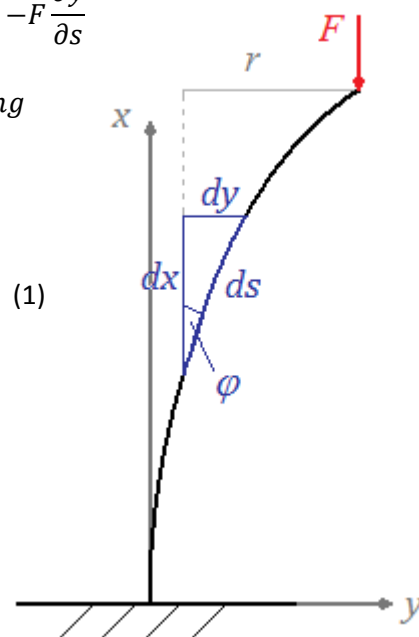
Podmínky:

Ve vetknutí je nulové pootočení tedy $\varphi(0) = 0$

Na volném konci je nulový moment tedy $M(L) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{(L)} = 0$

Úlohu budeme řešit jako počáteční, bude tedy potřebovat počáteční podmínky, proto zavedeme novou podmínku, tedy zvolíme počáteční hodnotu derivace

$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{(0)} = \varphi'_0 = \kappa_0$, která odpovídá křivosti ve vetknutí.



2.2 Odvození rovnice pro matematické kyvadlo

V rovině mějme hmotný bod zavěšený na závěsu zanedbatelné hmotnosti. Veškerá tření a odpor vzduchu zanedbejme.

2.21 Odvození rovnice pomocí silové rovnováhy:

Na hmotný bod představující matematické kyvadlo působí gravitační síla G a tahová síla vlákna T

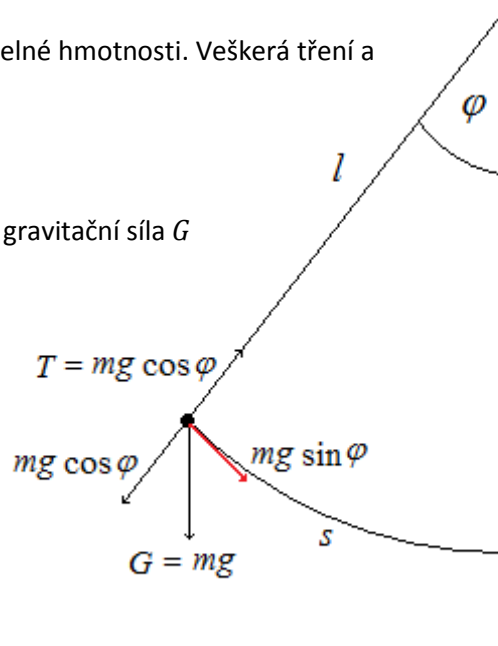
Výslednou sílu lze vyjádřit: $F = mg \sin(\varphi)$

Dále platí:

$$s = l\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = l \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



Z 2. Newtonova zákona $F = ma$ dostáváme rovnici:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c_2 \sin(\varphi) = 0$$

kde $c_2 = \frac{g}{l} = konst.$

Počáteční podmínky:

Známe počáteční polohu kyvadla $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$

A počáteční rychlost $v(0) = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{(0)} = v_0$

2.22 Odvození rovnice pomocí energetické bilance:

Předpokládejme, že nedochází k disipacím energie, pak je vnitřní energie ΔU systému konstantní.

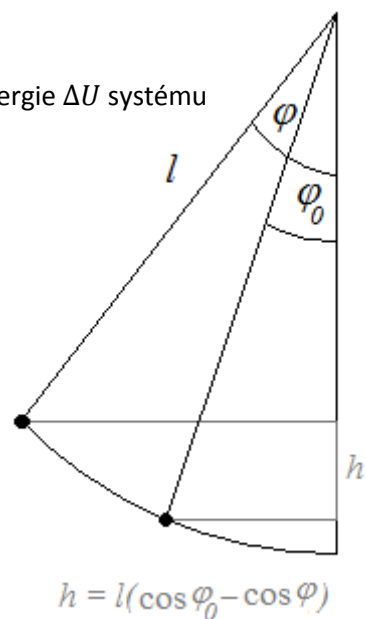
$$\Delta U = E_{k_{max}} = E_{p_{max}} \text{ tedy } \frac{1}{2}mv_{max}^2 = mgh$$

$$\Rightarrow l \frac{d\varphi}{dt} = v = \pm \sqrt{2gh}, \quad h = l(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} \text{ derivováním obou stran dostaneme}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-\frac{2g}{l}\sin\varphi}{2\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \text{ po vykrácení dostaneme}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$



Pro popis pohybu kyvadla dostáváme rovnici, která je ve stejném tvaru, jako rovnice popisující ohýbaný prut.

2.4 Analogie rovnic:

Je zajímavým faktem, že dva na první pohled nesouvisející fyzikální procesy jsou popsány stejnou matematickou rovnicí. Podívejme se blíže, v čem jsou obě situace analogické a jak se analogie projeví na řešení.

Prut:	Kyvadlo:
Rovnice: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + c_1 \sin(\varphi) = 0$	Rovnice: $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_2 \sin(\varphi) = 0$
Konstanta: $c_1 = \frac{mg}{EI} \quad [m^{-2}]$	Konstanta: $c_2 = \frac{g}{l} \quad [s^{-2}]$
Počáteční podmínky: $\varphi(0) = 0$	Počáteční podmínky: $\varphi(0) = 0$
$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right _{(0)} = \kappa_0$	$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right _{(0)} = v_0$

3 Řešení:

3.1 Zjednodušení rovnice – analytické řešení

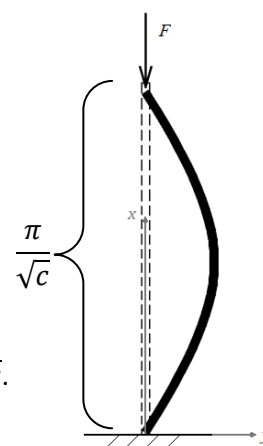
Pokud bychom uvažovali pouze malé úhly φ , (což pro prut znamená malá vybočení a tedy i malá pootočení a pro kyvadlo malý rozkmit) lze v rovnici použít zjednodušení $\sin(\varphi) \cong \varphi$. Tím dostáváme známou rovnici pro harmonický oscilátor: $\varphi'' + c\varphi = 0$ ta má známé analytické řešení a to funkce ve tvaru $\varphi(x) = A_1 \cos(\sqrt{c} x) + A_2 \sin(\sqrt{c} x)$.

U kyvadla toto řešení představuje harmonické kmity s úhlovou frekvencí \sqrt{c} . Prut se prohne do tvaru funkce sinus.

Analytické řešení takto zjednodušené rovnice však není předmětem této práce.

3.2 Program pro numerické řešení

Rovnice, kterou jsme odvodili, ale analyticky řešit nelze. Jsme tedy nuceni k numerickému řešení. Naším cílem je tedy program, který po zdání známých parametrů zjistí tvar prutu.



Interval $\langle 0, L \rangle$ rozdělíme na menší intervaly velikosti Δ na kterých funkci φ po částech nahradíme kvadratickou funkcí pomocí Taylorova rozvoje.

Funkční hodnotu funkce φ a hodnotu její derivace na počátku známe, hodnotu druhé derivace určíme ze vztahu (1): $\varphi''(0) = -c \sin(\varphi(0))$

Hodnoty pro další interval určíme ze vztahů:

$$\varphi(s + \Delta) = \varphi(s) + \varphi'(s) \cdot \Delta + \frac{1}{2} \varphi''(s) \cdot \Delta^2$$

$$\varphi'(s + \Delta) = \varphi'(s) + \varphi''(s) \cdot \Delta$$

$$\varphi''(s + \Delta) = -c \sin(\varphi(s + \Delta))$$

Souřadnice v jednotlivých intervalech lze spočítat ze vzorců:

$$s_n = s_{n-1} + \Delta$$

$$x(s + \Delta) = x(s) + \Delta \cos(\varphi(s))$$

$$y(s + \Delta) = y(s) + \Delta \sin(\varphi(s))$$

Nyní lze napsat program, který s použitím uvedených vzorců bude postupovat po prutu a ukládat potřebná data, dokud není splněno $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{(s_n)} = 0$. Potom platí $s_n = L$. Tím se program dostal na konec prutu a získal dostatek dat pro vykreslení jeho tvaru.

Problémem je, že do takto sestaveného programu je potřeba zadat κ_0 a až poté určí jaká délka L prodané charakteristiky (E, I) a sílu F této počáteční křivosti odpovídá. Pro naše potřeby musíme do programu zabudovat nějaký iterační algoritmus (v našem případě metodu půlení intervalu), který pro danou délku prutu L zjistí odpovídající κ_0 .

Nyní jsem schopni pro zadané charakteristiky prutu (E, I, L) a dané zatížení (F) zjistit počáteční křivost a vykreslit tvar prutu.

Přesnost programu:

Přesnost druhé části programu (když známe κ_0) lze vyjádřit následovně: pokud interval $\langle 0, L \rangle$ rozdělíme na n dílů délky $\Delta = \frac{L}{n}$, pak chyba daná Taylorovým rozvojem je $O(\Delta^3)$. Než algoritmus projde interval $\langle 0, L \rangle$ vyskytne se chyba n -krát. Celková chyba je tedy $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ a pro rostoucí n výsledek rychle konverguje.

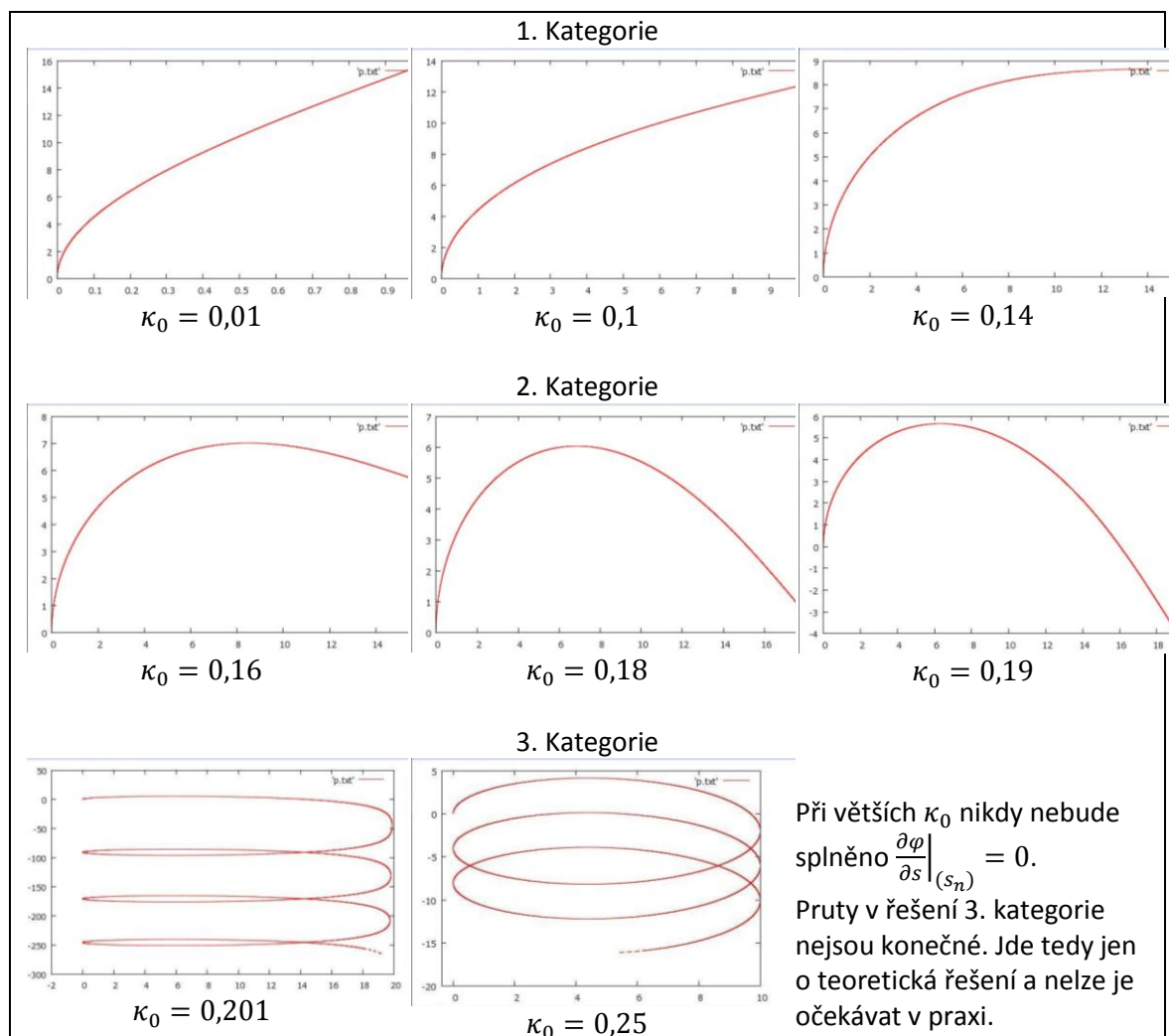
První část programu je jednak časově náročnější, ale hlavně pro dlouhé pruty, které se hodně ohýbají, hrozí velké nepřesnosti. Protože v takovém případě je délka L velice citlivá na změnu κ_0 . A při patřičně nevhodné kombinaci vstupních dat může nastat situace, že např.: přesnost deseti desetinných míst u L znamená sotva jedno desetinné místo u κ_0 . Takové případy je nutno řešit individuálním upravením programu. Pro pruty v rádech metrů dává program velice rychle dobré výsledky.

3.3 Kategorie řešení

Příklad: pro ocelový prut ($E = 210 \text{ GPa}$) o průměru $d = 3 \text{ cm}$ a sílu $F = 100 \text{ N}$ dostáváme

$$c = \frac{mg}{EI} = \frac{F}{E \frac{\pi d^4}{64}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2} \cong 0,01 \text{ m}^{-2}$$

Pak pro různé počáteční křivosti κ_0 dostáváme následující kategorie řešení:



Pro záporné počáteční křivosti dostáváme řešení symetrická podle osy y . To plyne z faktu, že znaménko křivosti se mění s orientací osy x . Totéž pro kyvadlo kde záporná počáteční rychlost znamená opačnou orientaci osy x .

Pojďme se nyní podívat podrobněji na jednotlivé kategorie, jejich analogická řešení pro kyvadlo a prozkoumat kritérium rozdělení.

1. Kategorie:

Pro malé počáteční křivosti se prut ohne tak, že $\varphi(L) < \frac{\pi}{2}$.

Pro kyvadlo platí $\varphi \in (-\alpha, \alpha)$, kde $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Tedy kyvadlo se kývá v části spodní půlkružnice.

Porovnáním $E_k = E_p$ dostaneme $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh' = mgl(1 - \cos(\alpha))$

odkud $v_0^2 = 2gl(1 - \cos(\alpha))$, $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gh}\right)$.

Pokud je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resp. $\varphi(L) = \frac{\pi}{2}$ pak z předešlého vztahu dostáváme podmínku $v_0^2 = 2gl$, pro prut obdobně $\kappa_0^2 = 2c$. Při splnění nastává hraniční situace mezi 1. a 2. kategorií, tedy případ kdy se kyvadlo kýve v celé dolní půlkružnici resp. prut se ohne tak, že má na konci vodorovnou tečnu.

2. Kategorie:

Pro větší počáteční křivosti se prut ohne tak, že $\varphi(L) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Pro kyvadlo platí $\varphi \in (-\alpha, \alpha)$, kde $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Tedy kyvadlo se kývá i nad spodní částí půlkružnice. Situaci popisují stejné vztahy jako první kategorii (pokud nepovažujeme za zajímavý přechod od 1. k 2. lze obě kategorie spojit v jednu).

3. Kategorie:

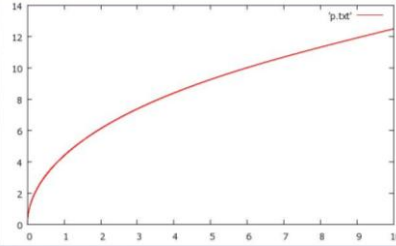
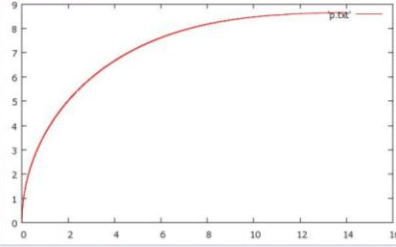
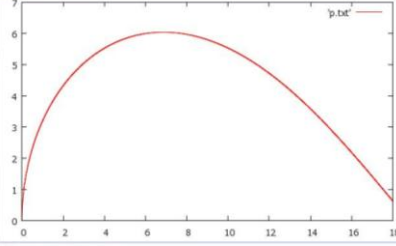
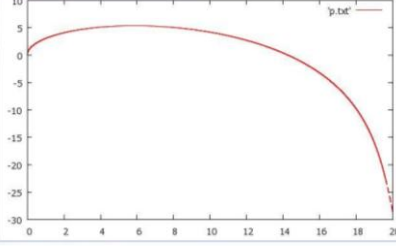
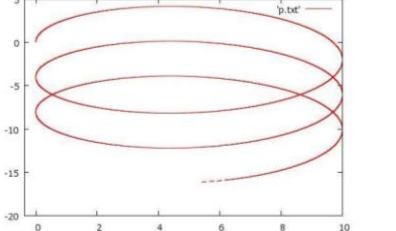
Při překročení kritické hodnoty κ_0 resp. v_0 již nikdy nebude splněno $\varphi' = 0$. To znamená, že neexistuje prut konečné délky, který by situaci splňoval. Pro kyvadlo to znamená, že se přehoupne přes polohu s max E_p a bude obíhat pořád dokola.

Kritická hodnota je dána podmínkami plynoucími ze vztahů popisující 1. a zároveň 2. kategorii.

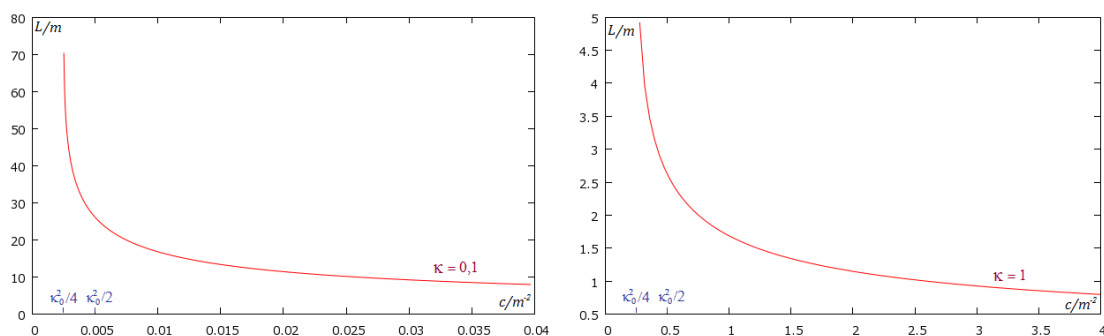
Tedy: $\kappa_0^2 = 4c$ resp. $v_0^2 = 4gl$. Zajímavé situace nastanou přesně při kritických hodnotách.

Prut se bude nekonečně ohýbat se vvislou asymptotou. Kyvadlo bude mít právě tolik energie, aby dosáhlo polohy s max E_p , ale v nekonečném čase.

3.4 Přehled kategorií řešení:

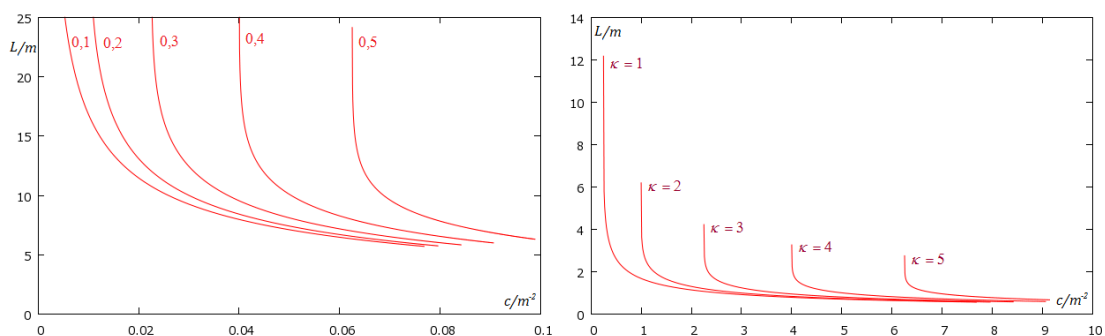
<p>1. Kategorie</p> $\kappa_0^2 < 2c$ $\varphi(L) < \frac{\pi}{2}$	
$\kappa_0^2 = 2c$ $\varphi(L) = \frac{\pi}{2}$	
<p>2. Kategorie</p> $\kappa_0^2 \in (2c, 4c)$ $\varphi(L) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	
$\kappa_0^2 = 4c$ $\varphi(L) = \pi$ <p>Řešení pro nekonečný prut</p>	
<p>3. Kategorie</p> $\kappa_0^2 > 4c$ <p>Řešení pro nekonečný prut</p>	

Následující grafy ukazují L jako funkci c při fixované počáteční křivosti. Hodnoty c rozdělující kategorie řešení jsou vyznačeny modře.



Na grafech, je vidět, jak s rostoucí délkou klesá potřeba síly k dosažení stejné počáteční křivosti.

Kombinací několika grafů lze vytvořit schéma, ze kterého lze přibližně odečíst počáteční křivost na základě délky a konstanty c .

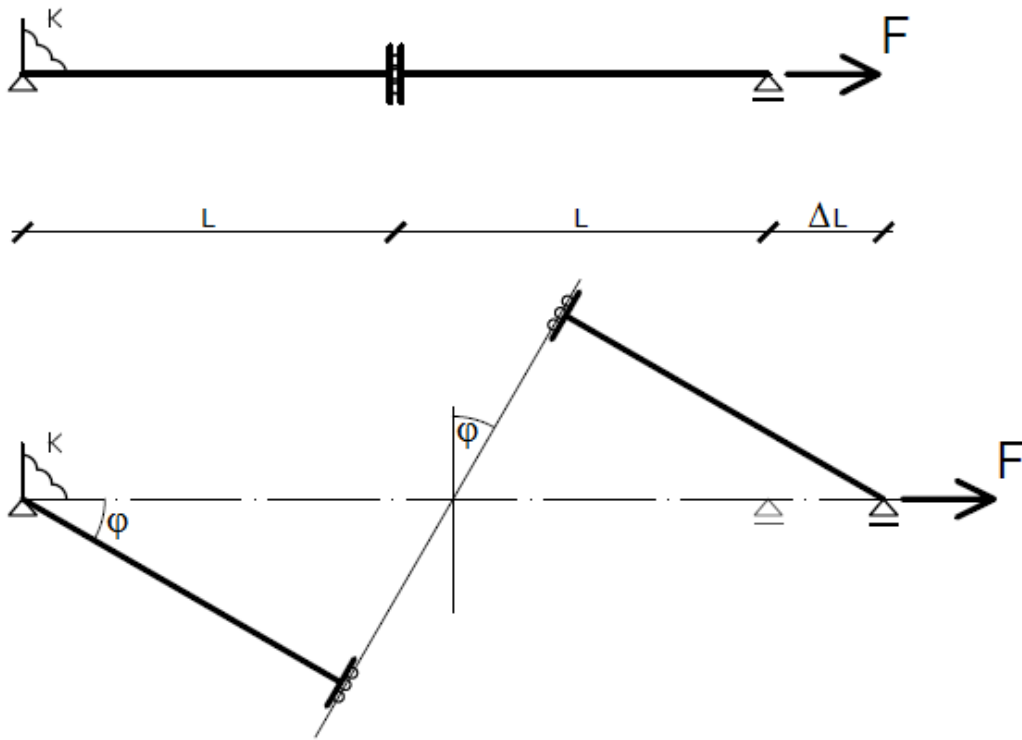


4. Tažený prut

Námětem ke zkoumání tlačných prutů bylo video, které mi zaslal profesor Milan Jirásek, s názvem „Structures buckling under tensile dead load“ na kterém profesor Davie Bigoni (University of Trento, Italy) demonstruje názorné ukázky ztráty stability tažených prutů.

4.1 Ztráta stability v tahu:

Představme si dokonale tuhý prut, namáhaný tahovou silou F , který je na koncích kloubově uložen. V kloubu je umístěna pružina tuhosti k , která brání samovolnému pootočení prutu. Prut je uprostřed přerušen. Přerušeni je nahrazeno oboustranně posuvným vetknutím, které umožňuje posun ve směru kolmém na osu prutu.



Nyní ukážeme, že existuje kritická síla F_{CR} , při níž dojde k bifurkaci a ztrátě stability taženého prutu.

Posun pravého konce lze z geometrie situace vyjádřit jako: $\Delta L = 2L \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)$

Energie potřebná k pootočení o úhel φ představuje energii pružiny $E_{PR} = \frac{1}{2} k \varphi^2$

Práce konaná vnější silou $E_F = F \cdot \Delta L = 2LF \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)$

Celková energie $E(\varphi) = E_{PR} - E_F = \frac{1}{2} k \varphi^2 - 2LF \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)$

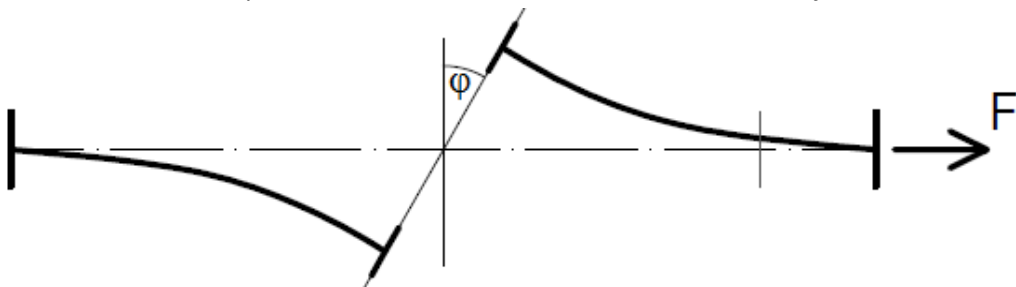
Celková energie je minimální pokud $\frac{dE(\varphi)}{d\varphi} = 0 \Rightarrow F = \frac{k \varphi \cos^2 \varphi}{2L \sin \varphi}$ pro $\varphi \neq 0$

Maximální možná síla při $\varphi = 0$ je právě síla kritická $F_{CR} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{k \varphi \cos^2 \varphi}{2L \sin \varphi} \right) = \frac{k}{2L}$

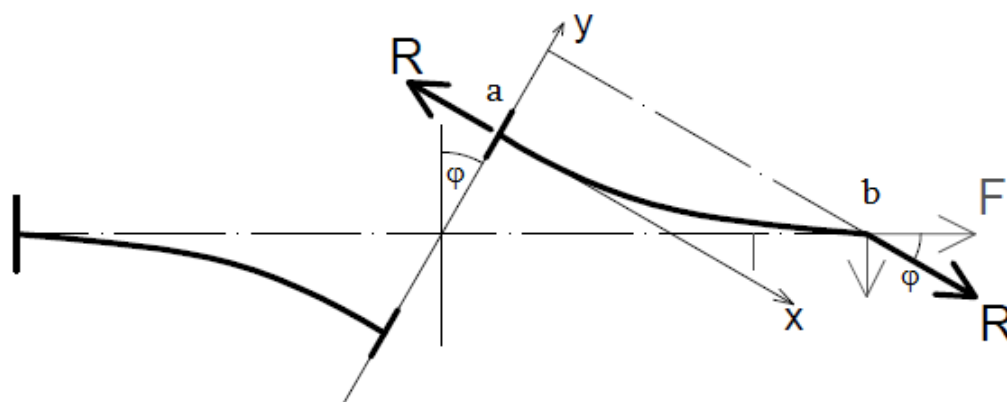
Tedy kritická síla pro vybočení je $F_{CR} = \frac{k}{2L}$.

4.2 Elastica v tahu:

Podobně se bude chovat i prut s konečnou tuhostí EI , dostaneme následující situaci



Protože vetknutí uprostřed přenáší sílu jen ve směru osy prutu, vznikne v něm silová reakce $R = F \cos(\varphi)$. Rozklad sil na je následující



Pokud zvolíme souřadnou soustavu, jako je naznačeno na obrázku, kde je počátek v bodě **a** dostáváme identickou situaci, kterou jsme popsali rovnicí (1). S tím rozdílem, že síla R působí v opačném směru. Prut lze tedy popsat obdobnou rovnicí

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{|R|}{EI} \sin(\varphi) = 0 \quad \text{kde velikost síly } |R| = F \cos(\varphi(l))$$

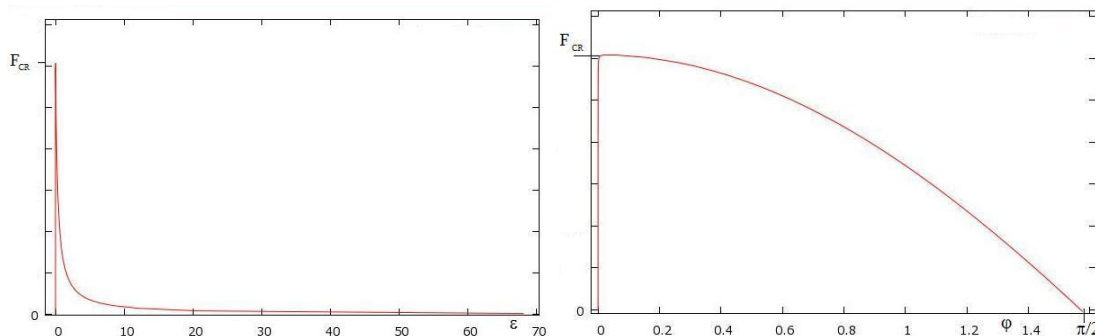
První počáteční podmínka zůstává stejná $\varphi(0) = 0$

Druhou podmínku (počáteční křivost) lze opět zvolit $\frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{(0)} = \varphi'_0 = \kappa_0$

Podmínka pro ukončení je pozměněna tím, že na konci není nulový moment, ale platí:

$$M(0) + M(l) + Ry(l) = 0 \quad \text{odkud lze vyjádřit } \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{(l)} = \kappa(l) = -\kappa_0 - \frac{F}{EI} \cos(\varphi(l))$$

Pokud pro prut dané délky postupně zvětšujeme sílu F a zaznamenáváme koncové pootočení $\varphi(l)$ a relativní potažení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{2l} = \frac{x(l)}{l \cos(\varphi)}$ dostaneme následující grafy



Na grafech je vidět změkčení které nestane po dosažení kritické síly. Tedy k dalšímu protahování stačí menší síla, na rozdíl od tlačného případu kdy je k většímu ohýbání potřeba sílu stále zvyšovat.

5 Závěr:

Součástí práce bylo vytvoření zmiňovaného programu v jazyce Pascal.

Pomocí vytvořeného programu jsme schopni jak pro tlačný tak pro tažený případ pro dané E, I, L, F získat data, která popisují deformovaný prut s požadovanou přesností.

Obrázky byly vytvořeny pomocí programu „Gnuplot“ na základě dat získaných vytvořeným programem.

6 Literatura a jiné zdroje:

Isaac Newton, The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy

Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc., Podklady pro předmět „Pružnost a pevnost“, FSV ČVUT

RNDr. Ladislav Hanyk, Ph.D., Podklady pro předmět „Programování pro fyziky“, MFF UK

Davie Bigoni, Video: Structures buckling under tensile dead load

http://www.ing.unitn.it/~bigoni/tensile_buckling.html

K tvorbě obrázků použít program Gnuplot, <http://www.gnuplot.info/>