

Statika stavebních konstrukcí I

Příklady

Ing. Milan Jirásek, PhD.

Ing. Petr Konvalinka

1993

Milí čtenáři,

otevíváte skriptum, určené pro studenty 2. ročníku oboru KD, které pokrývá první část třísemestrálního kursu statiky stavebních konstrukcí.

Při jeho zpracování jsme se snažili způsob výkladu této tradiční disciplíny poněkud modernizovat. Proto už při popisu nejjednodušších konstrukcí využíváme maticového zápisu. Výhodou zvoleného pojetí je, podle našeho názoru, možnost snadného zobecnění všech prezentovaných pojmů a vztahů při řešení složitějších typů konstrukcí.

Velkou zásluhu na tom, že toto skriptum mohlo vzniknout, má prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc, který s námi velmi obětavě konzultoval celý text. Za jeho pomoci bychom mu chtěli upřímně poděkovat. Náš dík patří také pracovníkovi Stavebního ústavu ČVUT Ing. Zdeňku Bittnarovi, CSc, za recenzi skriptu.

Doufáme, že toto skriptum studentům pomůže proniknout do tajů statiky a probudí v nich zájem o tento krásný obor. Ve snaze o další zkvalitnění výuky se obracíme na všechny čtenáře s prosbou, aby nám laskavě sdělili veškeré své připomínky a náměty.

Přejeme vám hodně radosti ze studia.

Praha 25.7.1989

Autoři

OBSAH

1.	ZATÍŽENÍ	7
1.1.	Klasifikace zatížení	7
1.1.1.	Klasifikace zatížení podle ČSN 730035	8
1.2.	Charakteristiky zatížení	10
1.2.1.	Normová hodnota zatížení	11
1.2.2.	Součinitel zatížení	11
1.3.	Historie zatížení	12
1.4.	Výpočet zatížení	13
2.	TAŽENÝ - TLAČENÝ PRUT	17
2.1.	Úvod	17
2.1.1.	Základní pojmy a předpoklady	17
2.1.2.	Soustava souřadnic	17
2.1.3.	Fyzikální rovnice taženého-tlačeného prutu	18
2.2.	Prut na přímce	22
2.2.1.	Základní veličiny	22
2.2.2.	Základní rovnice	23
2.2.3.	Matice tuhosti prutu	26
2.3.	Prut v rovině	27
2.3.1.	Základní veličiny	27
2.3.2.	Geometrické rovnice	29
2.3.3.	Statické rovnice	31
2.3.4.	Matice tuhosti prutu	33
2.4.	Prut v prostoru	35
3.	SOUSTAVA PRUTŮ	38
3.1.	Soustava prutů na přímce	38
3.1.1.	Základní veličiny	38
3.1.2.	Základní rovnice	39
3.1.3.	Matice tuhosti soustavy	41
3.2.	Prutová konstrukce na přímce	42
3.2.1.	Základní označení	42
3.2.2.	Základní rovnice	43
3.2.3.	Metody řešení základních rovnic	46
3.3.	Rovinná soustava prutů	51
3.3.1.	Základní veličiny a rovnice	51
3.3.2.	Matice tuhosti soustavy	55
3.4.	Rovinná prutová konstrukce	58
3.4.1.	Základní veličiny a rovnice	58
3.4.2.	Matice tuhosti konstrukce	60
4.	PRINCIPY MECHANIKY	65
4.1.	Princip virtuálních posunutí	65
4.1.1.	Princip virtuálních posunutí pro soustavy tuhých prvků	65
4.1.2.	Princip virtuálních posunutí pro soustavy poddajných prvků ..	69

4.2.	Princip virtuálních sil	74
4.3.	Princip minima potenciální energie	77
5.	STATICKY URČITÉ PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE	83
5.1.	Úvod	83
5.2.	Výpočet reakcí	85
5.2.1.	Výpočet reakcí z podmínek rovnováhy	85
5.2.2.	Výpočet reakcí užitím principu virtuálních posunutí	86
5.3.	Výpočet osových sil	88
5.3.1.	Metoda bodů styčných	88
5.3.2.	Metoda průsečná	93
5.4.	Výpočet styčnickových posunů	96
5.4.1.	Výpočet posunů řešením geometrických rovnic	96
5.4.2.	Výpočet posunů užitím principu virtuálních sil	99
5.4.3.	Vliv změny teploty a předepsaných posunů	101
6.	STATICKY NEURČITÉ PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE	103
6.1.	Výpočet deformační metodou	103
6.1.1.	Vliv silových účinků	103
6.1.2.	Vliv předepsaných posunů	107
6.1.3.	Vliv teplotních změn	110
6.2.	Automatizace výpočtu	114
6.2.1.	Základní kroky automatizovaného výpočtu	114
6.2.2.	Příprava vstupních údajů	114
6.2.3.	Uložení matice tuhosti v paměti počítače	115
6.2.4.	Řešení soustavy lineárních rovnic	120
6.3.	Ukázkový program	121
6.3.1.	Úvod	121
6.3.2.	Vstupní údaje	121
6.3.3.	Dynamické přidělování paměti	122
6.3.4.	Struktura programu	125
6.3.5.	Přehled důležitých proměnných	126
6.3.6.	Komentovaný výpis programu	127
6.3.7.	Příklad řešení rozsáhlejší úlohy	142
6.4.	Kontrola výsledků	147
6.4.1.	Kontrola rovnováhy	147
6.4.2.	Kontrola kompatibility	151
7.	OHÝBANÝ NOSNÍK	158
7.1.	Vnitřní síly	158
7.1.1.	Vnitřní síly prutu v prostoru	158
7.1.2.	Vnitřní síly prutu v rovině	159
7.1.3.	Vztahy mezi vnitřními silami a zatížením	160
7.2.	Výpočet vnitřních sil	161
7.2.1.	Výpočet vnitřních sil v určitém průřezu	161
7.2.2.	Výpočet a grafické znázornění průběhů vnitřních sil	164
7.3.	Přímé nosníky	165
7.3.1.	Konzola	165
7.3.2.	Prostý nosník	167
7.3.3.	Nosník s převislými konci	170

7.4.	Lomené nosníky	173
7.5.	Složené soustavy	175
	DODATKY	181
A .	Přehled značek	181
B .	Vektory a matice	182
C .	Kinematika malých rotací	183
	LITERATURA	187

1. ZATÍŽENÍ

Na stavební konstrukce působí člověk i prostředí množstvím vlivů, které souhrmně nazýváme **z a t í ž e n í**. Podmínkou vzniku zatížení je existence zdroje zatížení a existence konstrukce, která je schopna toto zatížení přenášet.

Pod pojmem zatížení rozumíme jednak **v n ě j š í s í l y**, vznikající odporem konstrukce proti fyzikálním jevům na ni působícím (vítr, gravitace a další), a také ostatní **v l i v y** (změny teploty, dotvarování a jiné), které se sice neprojevují vnějšími silami, avšak - podobně jako vnější síly - vyvolávají v konstrukci **v n í t ř n í s í l y**.

Aby bylo možné zavést do výpočtu stavebních konstrukcí zatížení, je nutné znát povahu jevu, který zatížení vyvolává. Je také nutné znát způsob vyšetřování, metodu výpočtu a další okolnosti (podrobněji v [4]).

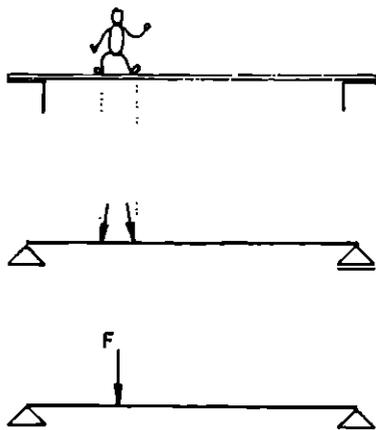
1.1. KLASIFIKACE ZATÍŽENÍ

Zatížení stavebních konstrukcí lze rozdělit na dva druhy :

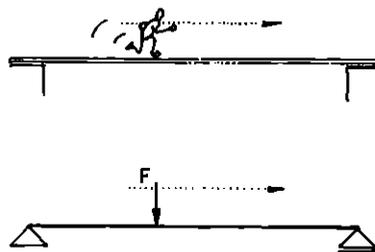
- statické
- dynamické

Pro pochopení rozdílů mezi těmito dvěma druhy zatížení si představme lávku jako konstrukci a člověka jako zdroj zatížení.

Statické zatížení je takové, kdy člověk stojí v klidu na lávce (obr. 1.1). Statické pohyblivé zatížení vznikne v případě, že se člověk pohybuje po lávce tak pomalu, že nedojde k jejímu rozkmitání (obr. 1.2).

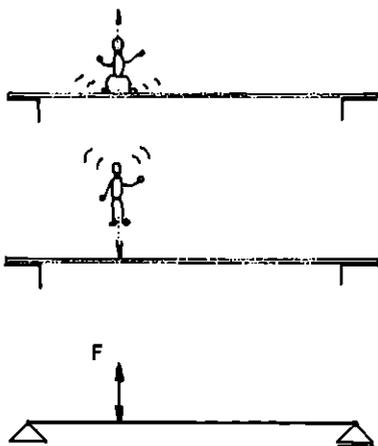


Obr. 1.1

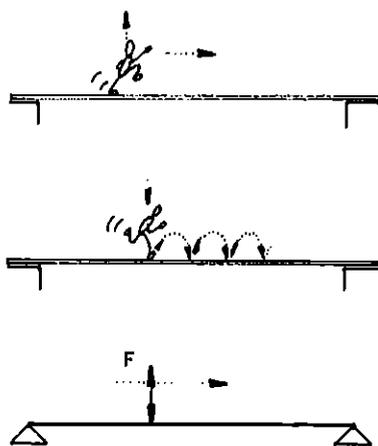


Obr. 1.2

Dynamické zatížení lze interpretovat jako zatížení člověkem, který se pohybuje na místě ve vertikálním směru (obr. 1.3). Dynamické pohyblivé zatížení je takové, kdy dojde k rozkmitání lávky pohybem člověka ve směru osy lávky tak, jak je to ukázáno na obr. 1.4.



Obr. 1.3



Obr. 1.4

Je zřejmé, že o druhu zatížení rozhodují vlastnosti konstrukce. Toto tvrzení lze vysvětlit porovnáním pohybu člověka po lávce a po mostě. Zatímco rychlý pohyb člověka po lávce je třeba klasifikovat jako dynamické pohyblivé zatížení, v případě stejného pohybu člověka po mostě nejsou, vzhledem k velké hmotnosti mostu, vyvozeny téměř žádné dynamické účinky a jedná se o statické pohyblivé zatížení. Je to dáno schopností konstrukce přenést toto v porovnání s velkou hmotností konstrukce velmi malé zatížení.

1.1.1. Klasifikace zatížení podle ČSN 730035

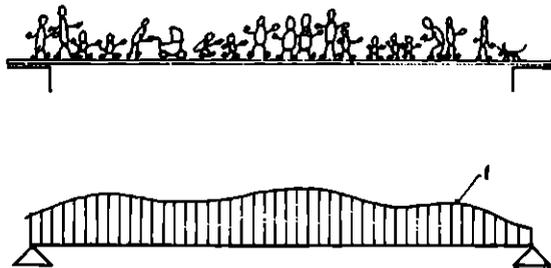
Při výpočtech nosných stavebních konstrukcí vycházíme z ustanovení ČSN 730035 "Zatížení stavebních konstrukcí". Tato norma shrnuje zkušenosti projektantů - statiků, výsledky laboratorních zkoušek a údaje meteorologů a stavení, jakým způsobem zavést působení zatížení do výpočtu stavebních konstrukcí.

Zatížení stavebních konstrukcí lze rozdělit :

a) podle rozsahu kontaktu zatížení s konstrukcí na :

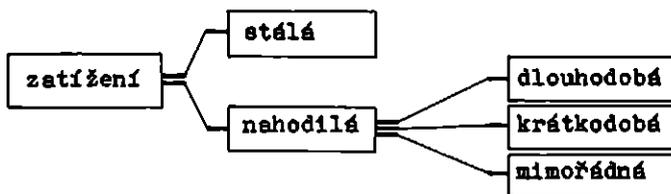
- soustředěná zatížení
- spojitá zatížení

Soustředěná zatížení jsou taková zatížení, jejichž kontaktní plocha má vzhledem k rozměrům konstrukce omezenou velikost (osemělá břemena a podobně). Spojitá zatížení jsou taková, jejichž kontaktní plocha má rozměr blízký rozměrům konstrukce (zatížení vlastní tíhou, větrem, sněhem a jiná) (obr. 1.5).



Obr. 1.5

b) podle doby trvání na (obr. 1.6) :



Obr. 1.6

Stálá zatížení jsou taková, jejichž velikost, směr, orientace i poloha jsou po celou dobu užívání konstrukce neměnné. Nahodilá zatížení jsou taková, jejichž velikost, směr, orientace a poloha se mění.

Za stálá zatížení lze například považovat :

- tíhu nosných konstrukcí a všech trvalých součástí
- trvale působící tlaky hornin, sypkých hmot a kapalin a další

Za nahodilá dlouhodobá zatížení se považují :

- tíhy všech částí konstrukce, které lze přemístit
- tíhy trvale osazených strojů a zařízení
- teplotní dlouhodobé účinky a další

Za nahodilá krátkodobá zatížení se považují :

- tíhy osob, nábytku a lehkého zařízení
- zatížení větrem, sněhem a námrazou
- zatížení krátkodobými účinky teplotních změn a další

Za nahodilá mimořádná zatížení se považují :

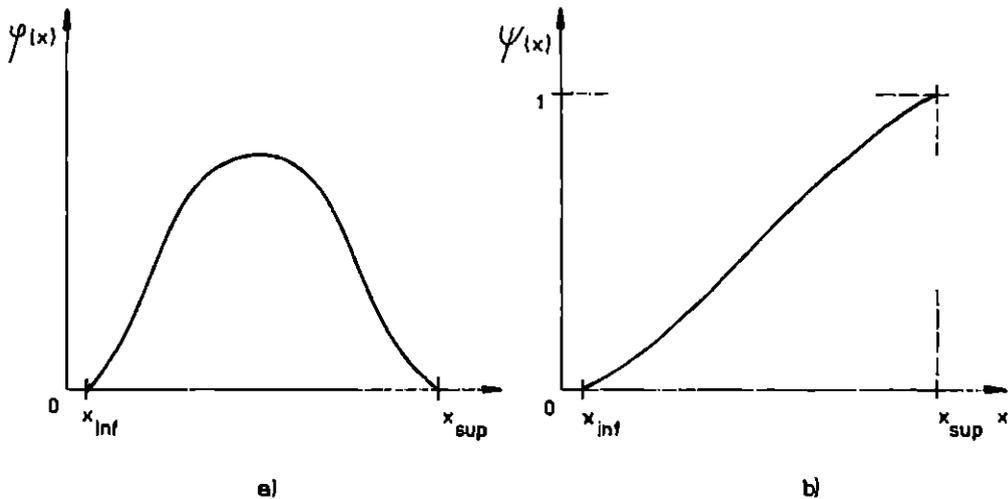
- účinky zemětřesení a jiných seismických vlivů
- účinky trhacích prací a tlakových vln a další.

1.2. CHARAKTERISTIKY ZATÍŽENÍ

Aby bylo možné popsat zatížení, je nutné znát jeho čtyři základní vlastnosti, kterými jsou :

- v ý s k y t
 - i n t e n z i t a
 - t r v á n í
 - o p a k o v á n í
- zatížení se na konstrukci buď vyskytuje nebo nevyskytuje
 - je popsána hodnotou zatížení F
 - vyskytuje-li se zatížení na konstrukci, trvá jeho výskyt určitou dobu, která je menší nebo právě rovna životnosti konstrukce
 - zatížení se může na konstrukci vyskytovat opakovaně. Jednotlivé výskyty na sebe mohou spojitě navazovat, nebo mezi nimi mohou být i nulové hodnoty.

Tyto vlastnosti jsou funkcemi času a místa, ve kterém se konstrukce nalézá a mají náhodný charakter. Lze je popsat náhodnými funkcemi (obr. 1.7).



Obr. 1.7

Na obr. 1.7 je rozdělení náhodné veličiny x . Levá část obrázku a) zobrazuje hustotu pravděpodobnosti - což je funkce popisující průběh pravděpodobnosti výskytu hodnot náhodné veličiny x . Pravá část obrázku b) je distribuční funkce - což je výchozí funkce při popisu rozdělení pravděpodobnosti výskytu a pohybuje se v intervalu $0 \leq \Psi(x) \leq 1$. Body označené x_{inf} a x_{sup} jsou nejmenší, respektive největší teoreticky možné hodnoty náhodné veličiny x .

Při popisu zatížení je třeba přihlídnout také k dalším okolnostem jako jsou údaje o chování zatížení, časový průběh a vývoj zatížení, předpokládaná životnost konstrukce a specifické vlastnosti konstrukce i celého objektu. Je možné je sledovat pomocí různých metod, které mají společný statistický základ (podrobněji v [5]).

1.2.1. Normová hodnota zatížení

Pro stanovení normových hodnot zatížení F_n platí zatím pouze všeobecné zásady, které jsou upraveny ČSN 730035 a ČSN 730031.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že normová hodnota zatížení je dána nikoli statisticky, ale deterministicky. V tabulce 1.1 jsou uvedeny normové hodnoty užitečných rovnoměrných zatížení stropních a střešních konstrukcí.

číslo	místnosti a prostory	normové zatížení kN.m^{-2}
1.	byty, chodby, předsíně, ubytovny, hotely, školky, jesle, internáty, sanatoria, nemocnice, polikliniky, ordinace a další	1,5
2.	pokoje a kancelářské místnosti, administrativní budovy, školy a jiná zařízení pro výuku a další	2,0
3.	dvorany, chodby a schodiště školských zařízení, jídelny, kavárny, společenské sály, nádraží, divadla, kina, kluby, haly tribuny a další	4,0
4.	dvorany, chodby a schodiště v budovách uvedených pod body 1. a 2. s výjimkou školských zařízení, posluchárny, sály jídelen, kaváren a restaurací a další	3,0
5.	knihovny, archivy, jeviště divadel, nástupiště veřejné dopravy, chodby a schodiště k tribunám všeho druhu a další	5,0
6.	terasy a ploché střechy a) v místech kde nedochází k velkému shlukování lidí b) v místech kde je možnost shlukování lidí	2,0 4,0
7.	balkóny	2,0 (4,0)

Tab. 1.1

1.2.2. Součinitel zatížení

Při výpočtu a navrhování stavebních konstrukcí předepisuje ČSN 730035 používat výpočtové hodnoty zatížení. V článku 1.2 a v odstavci 1.2.1. jsme pro normové hodnoty zatížení uvedli tabulku 1.1. Výpočtová hodnota zatížení je dána výrazem

$$F_v = \gamma_f \cdot F_n, \quad (1.1)$$

ve kterém γ_f je tzv. součinitel zatížení.

Součinitel zatížení vyjadřuje možné nepříznivé odchylky zatížení od normové hodnoty F_n způsobené náhodnou proměnlivostí zatížení, nebo odchylkami od běžného provozu. Hodnoty součinitele zatížení γ_f pro užitná rovnoměrná zatížení stropů, střech a schodišť jsou uvedeny v tabulce 1.2.

číslo	normové hodnoty užitného rovnoměrného zatížení v kN.m^{-2}	součinitel zatížení γ_f
1.	menší než 2,0	1,4
2.	větší nebo rovny 2,0 a menší než 5,0	1,3
3.	větší nebo rovny 5,0	1,2

Tab. 1.2

Hodnoty součinitele zatížení γ_f pro tíhu konstrukcí, stavebních výrobků a zemin jsou uvedeny v tabulce 1.3.

číslo	konstrukce, stavební výrobky, zemin	součinitel zatížení γ_f
1.	Konstrukce a výrobky : a) kovové, dřevěné a zděné b) betonové	1,1 1,1
2.	Konstrukce a výrobky z lehkých betonů a izolační, vyrovnávací nebo povrchové vrstvy (lepenky, násypy, potěry): a) zhotovené ve výrobně b) zhotovené na staveništi	1,2 1,3
3.	Zemní násypy ulehle nebo zhutnělé	1,1
4.	Zemní násypy neulehle	1,2

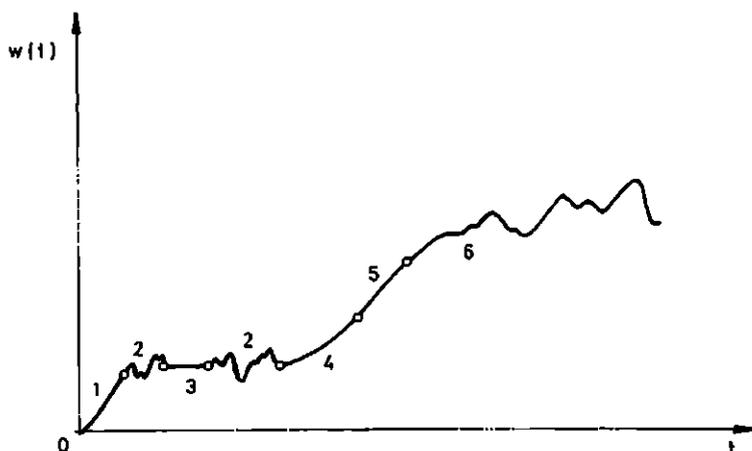
Tab. 1.3

V tabulce 1.3 vyjadřuje součinitel zatížení γ_f možné náhodné odchylky tíhy stavebních konstrukcí, výrobků a zemin od uvažované normové hodnoty.

1.3. HISTORIE ZATÍŽENÍ

Pod pojmem historie zatížení rozumíme časový postup a pořadí, podle nichž zatížení na konstrukci začínají nebo přestávají působit. Je popsána časovým průběhem, který je v některých částech deterministický, zčásti má náhodný charakter (obr. 1.8)

Na obrázku 1.8 je uveden příklad jednoduché historie zatížení železobetonového dílce, která je popsána průhybem uprostřed rozpětí. Oblast 1 - popisuje zvedání dílce z formy ve výrobně, 2 - dynamické účinky při dopravě, 3 - dílec



Obr. 1.8

na skládce, 4 - vyzdívání příček, 5 - kladení podlah, 6 - nahodilé krátkodobé zatížení.

K historii zatížení je třeba přihlídnout v případech, kdy se jedná o rekonstrukce a sanace objektů a konstrukcí a také v případech, kdy se ve výpočtu uplatňují geometrická a fyzikální nelinearita, případně reologické vlastnosti materiálů.

1.4. VÝPOČET ZATÍŽENÍ

Při výpočtu zatížení stavebních konstrukcí je třeba znát, kromě hodnot normových zatížení a součinitelů zatížení, také plošné a objemové hmotnosti některých stavebních materiálů (tab. 1.4, tab. 1.5). Dále je třeba znát statické schéma konstrukce, její rozměry, materiálové složení a účel, ke kterému bude užívána.

číslo	stavební materiály a výrobky	plošná tíže kN/m ²
1.	asfaltové lepenky hadrové 500/H " s posypem	0,005 0,016
2.	PVC linolea tl. do 2 mm	0,015
3.	střešní krytiny - plech tl. 0,6 mm - tašky jednoduché	0,350 0,550
4.	živičné krytiny tavené k podkladu	0,250

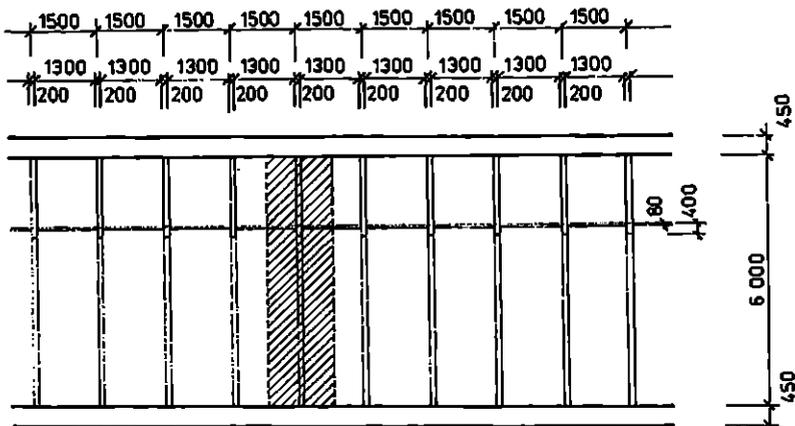
Tab. 1.4

číslo	stavební materiály a výrobky	objemová tíha kN/m ³
1.	dřevo - borovice, smrk, modřín, dub	5,0
2.	desky dřevotřískové	7,5
3.	stavební ocel	78,5
4.	zeminy - pro násypy	20,0
5.	cihly plné pálené	18,0
6.	malty a omítky - cementové - vápenné	21,0 18,0
7.	betony značky 400 a vyšší, vyztužené	25,0
8.	dlažby a mezeniny - cementové - teracové - kamenné dlažby	23,0 23,0 26,0
9.	lehčené betony - škvárobeton - pórobeton - keramzitbeton	15,0 6,0 10,0
10.	azbestocementové výrobky	18,0
11.	skladované materiály - uhlí - dřevo palivové - brambory - obilí	12,5 5,0 7,5 8,0

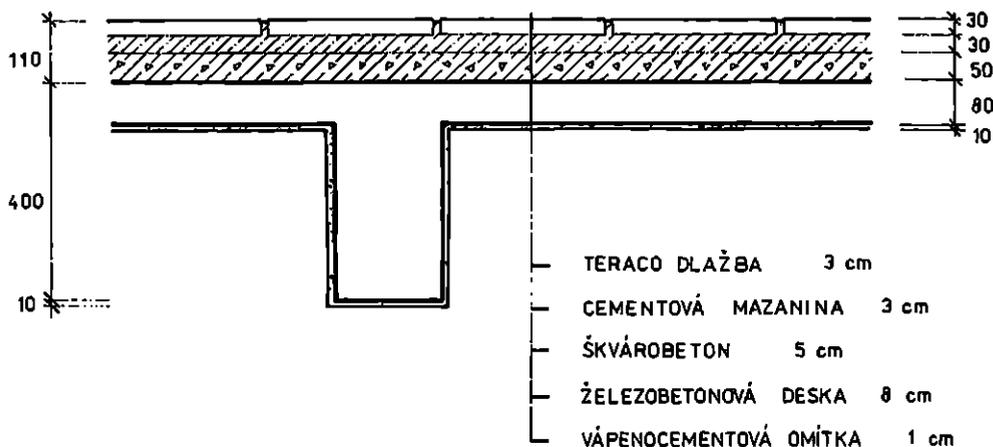
Tab. 1.5

Příklad 1.1

Určete zatížení typického trámu monolitické železobetonové konstrukce, jejíž výkres tvaru a řez je uveden na obr. 1.9. Jedná se o budovu školy. Rozměry a materiálové složení jsou patrné z obr. 1.9.



Obr. 1.9 a)



Obr. 1.9 b)

Řešení : Ze zadání je patrné, že nosná konstrukce stropu budovy je složena z trámů a desky a je provedena jako monolitická železobetonová. Při výpočtu budeme postupovat tak, že nejprve vypočteme zatížení, které přenáší deska a potom zatížení, které přenáší trám. K výpočtu zatížení musíme znát plochu, ze které se zatížení na trám přenáší. Tato plocha je v obr. 1.9 a vyšrafována.

1) zatížení desky (části desky o rozměrech 1 x 1 m)

teraco dlažba	tl. 0,03 m	0,03.23	1,2	0,83
cementová mezenina	tl. 0,03 m	0,03.23	1,3	0,90
škvárobeton	tl. 0,05 m	0,05.15	1,3	0,98
železobetonová deska	tl. 0,08 m	0,08.25	1,1	2,20
vápencementová omítka	tl. 0,01 m	0,01.20	1,3	0,26
celkem stálé zatížení kN/m^2		$f_n = 4,33$	γ_f	$f_v = 5,17$

Vypočítali jsme stálé zatížení 1 m^2 desky, a to jak jeho normovou hodnotu, kterou značíme f_n , tak i výpočtovou f_v . Nyní je třeba určit hodnotu nahodilého zatížení (tab. 1.1). V této tabulce najdeme pod pořadovým číslem 2 a 3 hodnoty nahodilého zatížení v kN/m^2 . Z nich budeme uvažovat tu nepříznivější, která má velikost $4,0 \text{ kN/m}^2$.

$$\text{celkem nahodilé zatížení } \text{kN/m}^2 \quad f_n = 4,0 \quad \gamma_f = 1,3 \quad f_v = 5,2$$

Hodnotu součinitele γ_f pro nahodilé zatížení jsme určili z tab. 1.2. Celkové zatížení desky tedy bude :

$$\text{celkové zatížení desky v } \text{kN/m}^2 \quad f_n = 8,33 \quad f_v = 10,37$$

Určením zatížení desky jsme si připravili půdu pro výpočet zatížení trámu. Zatímco zatížení desky jsme počítali na 1 m^2 plochy desky, zatížení trámu budeme počítat na 1 m délky trámu. Znamená to tedy, že budeme muset násobit hodnoty zatížení od desky šířkou zatěžovacího pruhu, příslušejícího trámu.

2) zatížení trámu (1 m délky trámu)

od desky	4,33.1,5	6,50	-	-
	5,17.1,5	-	-	7,76
vlastní tíha trámu ze železobetonu	0,2.(0,4-0,08).25	1,60	1,1	1,76
omítka na bocích trámu (omítka spodní části trámu byla započtena do zatížení desky)	0,01.2.(0,4-0,08).20	0,13	1,3	0,17
celkem stálé zatížení kN/m		$f_n = 8,23$	γ_f	$f_v = 9,69$

Stejně jako u zatížení desky je třeba určit velikost nahodilého zatížení. Určíme jej stejně jako v předcházejícím případě z tab. 1.1. Ovšem tuto hodnotu je třeba vynásobit šířkou zatěžovacího pruhu 1,5 m (odpovídá to i rozměrově $\text{kN/m}^2 \cdot \text{m} = \text{kN/m}$). Součinitel zatížení γ_f určíme podobně jako v předchozím z tab. 1.2.

nahodilé zatížení	4,0.1,5	6,0	1,3	7,80
celkem nahodilé zatížení		$f_n = 6,0$	γ_f	$f_v = 7,80$
celkové zatížení trámu v kN/m		$f_n = 14,23$		$f_v = 17,49$

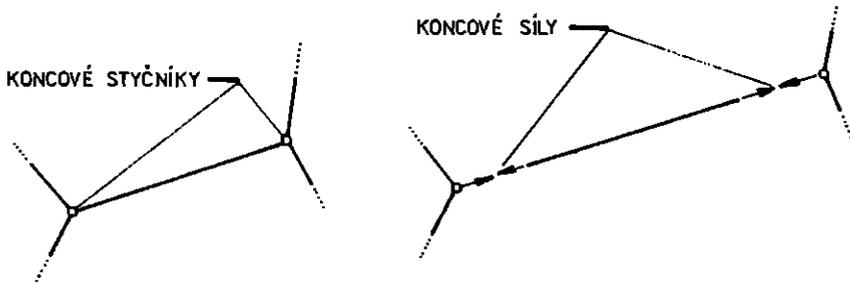
Ve výpočtu statických veličin trámu budeme tedy uvažovat spojitě rovnoměrné zatížení f o velikosti 17,5 (hodnotu 17,49 jsme zaokrouhlili nahoru) kN/m.

2. TAŽENÝ - TLAČENÝ PRUT

2.1. ÚVOD

2.1.1. Základní pojmy a předpoklady

V předmětu "Statika stavebních konstrukcí" se zaměříme zejména na statickou analýzu prutových konstrukcí. Prutovou konstrukcí rozumíme konstrukci složenou z podlouhlých prvků - prutů. Místa, ve kterých jsou jednotlivé pruty navzájem spojeny nebo ve kterých jsou pruty připojeny k podporám, nazýváme styčnickými. Každý prut konstrukce je tedy ve svých koncových průřezech připojen ke dvěma styčnickům. Z hlediska daného prutu mluvíme o jeho koncových styčnicích. Zbytek konstrukce působí na koncové průřezy prutu tzv. koncovými silami. Podle zákona akce a reakce působí koncovými silami rovněž prut na koncové styčnický (obr. 2.1).



Obr. 2.1

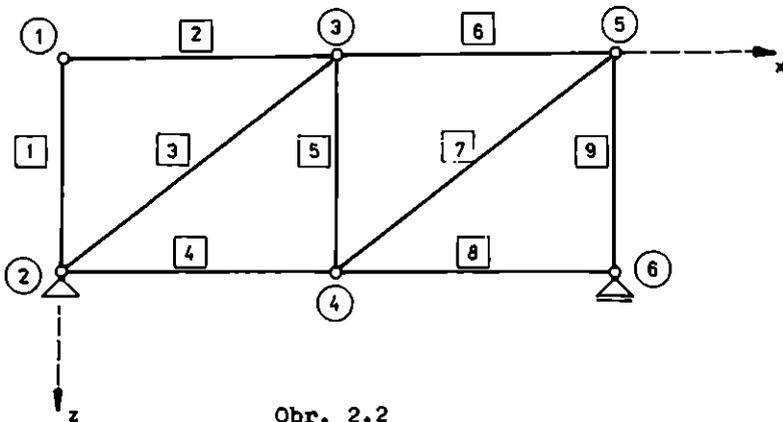
Zkoumat budeme zatím jen konstrukce složené z přímých prizmatických prutů z lineárně pružného materiálu. V obecném případě mohou být pruty namáhány kombinací tahu-tlaku, ohybu, smyku a kroucení. S výjimkou poslední kapitoly se však v I.dílu těchto skript omezíme na konstrukce, jejichž pruty jsou namáhány jen tahem nebo tlakem. Navíc budeme předpokládat, že konstrukce je zatížena pouze ve styčnicích.

2.1.2. Soustava souřadnic

Při popisu prostorové konstrukce budeme pracovat s pravouhlou pravotočivou soustavou souřadnic x, y, z . Souřadnicové osy x, y volíme vodorovné; osa z je svislá, přičemž kladná poloosa z je orientována dolů.

Při popisu rovinné konstrukce zavedeme v rovině konstrukce vodorovnou souřadnicovou osu x a svislou souřadnicovou osu z . Pro konstrukci na přímce postačí zavést jedinou souřadnicovou osu - osu x .

Počet styčnicků zkoumané konstrukce označíme n_s , počet prutů n_p . Styčnický i pruty očíslováme, tj. styčnickům přiřadíme čísla $1, 2, \dots, n_s$, prutům čísla $1, 2, \dots, n_p$. Čísla styčnicků budeme zpravidla uvádět v kroužcích, čísla prutů ve čtverečcích (obr.2.2). Prut můžeme specifikovat buď jeho číslem, nebo čísly



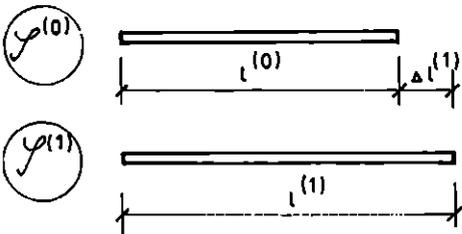
Obr. 2.2

jeho koncových styčniců. Například prut [8] na obr.2.2 můžeme označit také jako prut ④ - ⑥ nebo jako prut ⑥ - ④. Koncové průřezy prutu budeme někdy označovat čísly styčniců, k nimž jsou připojeny. Budeme tedy hovořit například o koncovém průřezu ④ prutu [8].

Soustava souřadnic užívaná při popisu celé konstrukce se nazývá globální. Popisujeme-li určitý prut konstrukce, můžeme vedle globální soustavy souřadnic použít také souřadnicovou soustavu lokální, pro kterou osa x splývá se střednicí prutu. V této kapitole budeme pracovat pouze s globální soustavou souřadnic.

2.1.3. Fyzikální rovnice taženého-tlačeného prutu

Dříve než přikročíme k analýze celé konstrukce, budeme se zabývat jejím základním prvkem - prutem. Při vyšetřování prutu (a později i celé konstrukce) budeme všechny relativní veličiny, jako je např. protažení prutu nebo změna jeho teploty, vztahovat k určitému počátečnímu stavu $\mathcal{Y}^{(0)}$. Za tento stav je výhodné zvolit přirozený stav, ve kterém se nechází prut za zvolené referenční teploty $t^{(0)}$, nepůsobí-li na něj žádné vnější účinky. Délku prutu ve stavu $\mathcal{Y}^{(0)}$ označíme $l^{(0)}$.



Obr. 2.3

Po osazení prutu do konstrukce se působením zatížení stav prutu mění. Okamžitý stav, který hodláme podrobit zkoumání, označíme $\mathcal{Y}^{(1)}$, příslušnou teplotu $t^{(1)}$ a délku prutu $l^{(1)}$ (obr. 2.3).

Změnou teploty rozumíme rozdíl

$$\Delta t^{(1)} = t^{(1)} - t^{(0)}, \quad (2.1)$$

zetímco rozdíl

$$\Delta l^{(1)} = l^{(1)} - l^{(0)} \quad (2.2)$$

nezveme protažením prutu a podíl

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\Delta l^{(1)}}{l^{(0)}} = \frac{l^{(1)} - l^{(0)}}{l^{(0)}} \quad (2.3)$$

relativním protažením prutu. Protože budeme zkoumat zpravidla jen jeden okamžitý stav, budeme místo podrobného označení $\Delta t^{(1)}$, $\Delta l^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)}$ používat stručnějš-
šího Δt , Δl , ε . Počáteční délku prutu $l^{(0)}$ budeme značit stručně l .

Kdyby se prut mohl volně deformovat, došlo by při změně teploty o Δt k je-
ho relativnímu protažení o

$$\varepsilon^{(t)} = \alpha_t \cdot \Delta t, \quad (2.4)$$

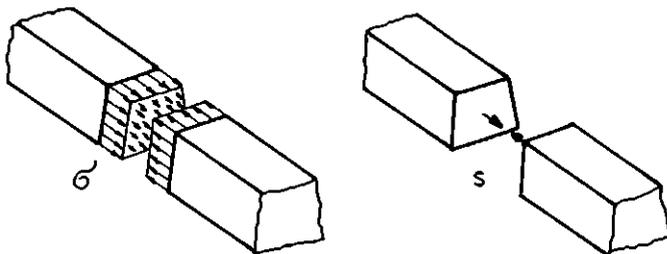
kde α_t je součinitel teplotní roztažnosti materiálu prutu. Je-li však prut sou-
částí konstrukce, závisí jeho protažení na přemístění styčnic, k nimž je připo-
jen. Jeho skutečné relativní protažení ε se proto bude lišit od relativního
protažení $\varepsilon^{(t)}$ způsobeného změnou teploty a v prutu vznikne stav jednoosé na-
pjatosti, který lze charakterizovat normálovým napětím σ (konstantním po prů-
řezu l po délce prutu). Pro lineárně pružný materiál je podle Hookeova zákona

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon^{(t)}), \quad (2.5)$$

kde E je Youngův modul pružnosti. Výslednicí normálového napětí v libovolném
průřezu (obr.2.4) je osová síla

$$S = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \cdot A, \quad (2.6)$$

kde A je plošný obsah průřezu (stručněji průřezová plocha).



Obr. 2.4

Dosadíme-li (2.5) do (2.6) a vyjádříme-li relativní protažení ε , $\varepsilon^{(t)}$
pomocí absolutních protažení Δl , $\Delta l^{(t)}$ podle (2.3), získáme fyzikální rovnici
taženého-tlačeného prutu

$$S = \frac{EA}{l} \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)}). \quad (2.7)$$

Konstantu

$$k = \frac{EA}{l} \quad (2.8)$$

nezávámé tuhostí prutu v tahu-tlaku a její převrácenou hodnotu

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{EA} \quad (2.9)$$

poddajností prutu v tahu-tlaku. S označením (2.8) můžeme fyzikální rovnici prutu (2.7) přepsat do tvaru

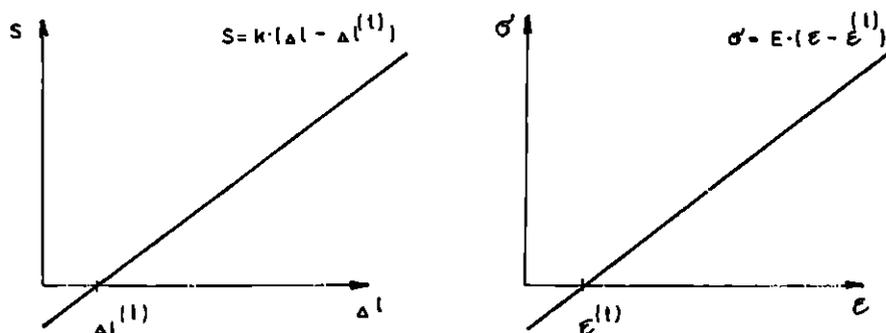
$$S = k \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)}) , \quad (2.10)$$

formálně podobného Hookeovu zákonu (2.5), který představuje fyzikální rovnici materiálu.

Změnu teploty Δt považujeme za známou, takže i protažení způsobené změnou teploty (stručně teplotní protažení)

$$\Delta l^{(t)} = \varepsilon^{(t)} \cdot l = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \quad (2.11)$$

je v každém konkrétním případě známou konstantou. Fyzikální rovnice prutu (2.10) tedy popisuje závislost mezi osovou silou S a protažením Δl , podobně jako fyzikální rovnice materiálu (2.5) popisuje závislost mezi normálovým napětím σ a relativním protažením ε (obr.2.5).



Obr. 2.5

Příklad 2.1 Vypočtete tuhost ocelového prutu o délce 2,0 m a průřezové ploše 1200 mm². (Modul pružnosti oceli $E = 210$ GPa.)

Řešení : $E = 210 \text{ GPa} = 210 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$

$$A = 1200 \text{ mm}^2 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$l = 2,0 \text{ m}$$

$$k = \frac{EA}{l} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}}{2} \text{ Nm}^{-1} = 126 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$$

Výsledek : Tuhost prutu je 126 MNm⁻¹.

Příklad 2.2 Prut o tuhosti 126 MNm⁻¹ byl protažen o 3,0 mm. Jak velká osová síla v prutu vznikla?

Řešení : $k = 126 \text{ MNm}^{-1} = 126 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$

$$\Delta l = 3,0 \text{ mm} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$S = k \cdot \Delta l = 126 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 378 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Výsledek : V prutu vznikla osová síla 378 kN.

Příklad 2.3 Prut z příkladu 2.1 byl zahřát o 15°C . Vypočtete jeho absolutní a relativní protažení, není-li roztahování prutu nijak omezeno. (Součinitel teplotní roztažnosti oceli $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.)

Řešení :

$$\Delta t = 15^\circ\text{C} = 15 \text{ K}$$

$$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$l = 2,0 \text{ m}$$

$$\varepsilon(t) = \alpha_t \cdot \Delta t = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 15 = 0,18 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l(t) = l \cdot \varepsilon(t) = 2 \cdot 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Výsledek : Prut se protáhl o 0,36 mm, relativní protažení je 0,18 ‰.

Příklad 2.4 Prut z příkladu 2.1 byl zahřát o 15°C , přičemž jeho konce byly upevněny tak, aby bylo zabráněno protahování prutu. Jaká osová síla v prutu vznikla ?

Řešení :

$$k = 126 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1} \quad (\text{viz příklad 2.1})$$

$$\Delta l(t) = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\text{viz příklad 2.3})$$

$$\Delta l = 0$$

$$S = k \cdot (\Delta l - \Delta l(t)) = - 126 \cdot 10^6 \cdot 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ N} = - 45,36 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Výsledek : V prutu vznikla osová síla -45,4 kN.

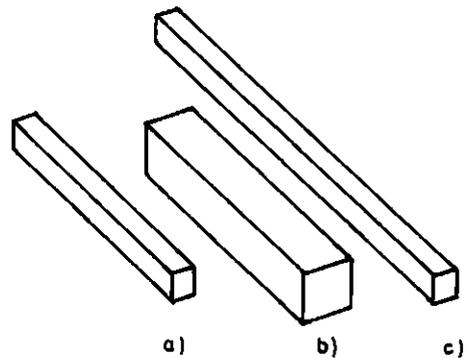
==== C V I Č E N Í ====

Cvičení 2.1 Který z prutů na obr. 2.6 má největší tuhost, jsou-li všechny pruty vyrobeny ze stejného materiálu ?

Cvičení 2.2 Prut o délce 3,0 m a průřezové ploše $0,12 \text{ m}^2$ je vyroben z betonu o modulu pružnosti 20 GPa. Vypočtete tuhost prutu.

Cvičení 2.3 Při jakém protažení vznikne v prutu ze cvičení 2.2 tlaková osová síla o velikosti 400 kN ?

Cvičení 2.4 Prut ze cvičení 2.2 byl stlačen o 0,18 mm. K jaké změně teploty přitom muselo dojít, nevzniklo-li v prutu žádné napětí ?



Obr. 2.6

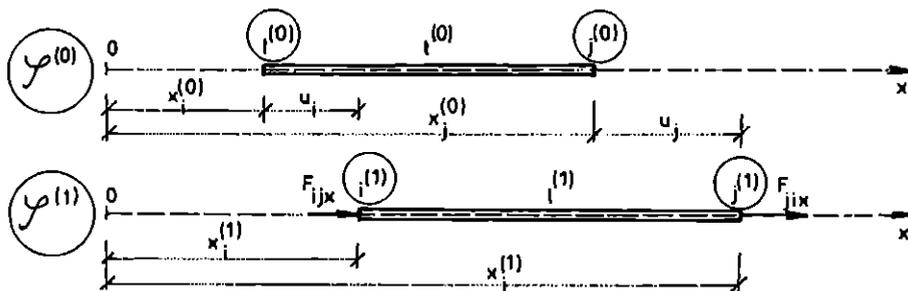
- 2.1 Největší tuhost má prut na obr. b).
- 2.2 Tuhost prutu je 800 MNm^{-1} .
- 2.3 Při protažení o $-0,5 \text{ mm}$, tj. při stlačení o $0,5 \text{ mm}$.
- 2.4 Muselo dojít k ochlazení o 5°C .

2.2. PRUT NA PŘÍMCE

2.2.1. Základní veličiny

Abychom získali úplnou informaci o okamžitém stavu vyšetřovaného prutu, musíme popsat jeho přemístění, deformaci a napjatost. Dále je třeba znát vnější účinky působící na daný prut, ať už silové nebo nesilové.

Zkoumejme nejprve případ, kdy střednice prutu musí (vzhledem k vazbám nebo v důsledku symetrie) v okamžitém stavu ležet na stejné přímce jako ve stavu počátečním. Tuto přímku ztotožníme s osou x (obr. 2.7).



Obr. 2.7

Polohu koncových průřezů i , j v počátečním stavu $\mathcal{A}^{(0)}$ můžeme popsat souřadnicemi $x_i^{(0)}$, $x_j^{(0)}$. Podobně ve vyšetřovaném okamžitém stavu $\mathcal{A}^{(1)}$ popíšeme polohu přemístěných koncových průřezů souřadnicemi $x_i^{(1)}$, $x_j^{(1)}$. Přemístění prutu je pak charakterizováno tzv. koncovými posuny, tj. posuny koncových průřezů

$$\begin{aligned} u_i &= x_i^{(1)} - x_i^{(0)}, \\ u_j &= x_j^{(1)} - x_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Koncové posuny sdružíme do vektoru koncových posunů

$$\underline{r} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \quad (2.13)$$

Deformaci prutu můžeme kvantifikovat jedinou veličinou - protažením Δl , napjatost rovněž jedinou veličinou - osovou silou S . Obě tyto veličiny byly

zavedeny již v článku 2.1.

Vnější silové účinky na prut jsou dány koncovými silami F_{1jx} , F_{j1x} (viz obr. 2.7), které sdružíme do vektoru koncových sil

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} F_{1jx} \\ F_{j1x} \end{Bmatrix}. \quad (2.14)$$

Zdůrazněme, že jak koncové síly, tak i koncové posuny jsou kladné, jsou-li shodně orientovány s kladnou poloosou x .

Z vnějších nesilových účinků připustíme pouze změnu teploty. Místo veličiny Δt však budeme teplotní vlivy popisovat přímo protažením od teploty $\Delta l^{(t)}$, které na Δt závisí podle vztahu (2.11).

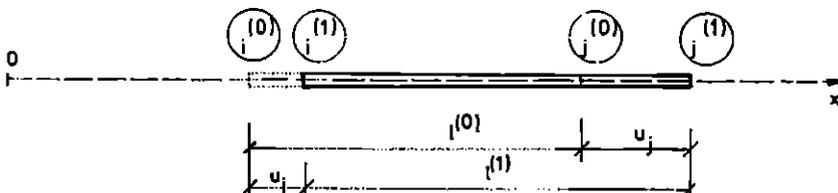
J E V	V E L I Č I N Y	
	označení	název
přemístění	u_i, u_j	koncové posuny
deformace	Δl	protažení
napjatost	S	osová síla
vnější účinky	F_{1jx}, F_{j1x}	koncové síly
	$\Delta l^{(t)}$	tepl. protažení

Přehled veličin užívaných při popisu okamžitého stavu taženého-tlačeného prutu na přímce je uveden v tabulce 2.1. Tyto veličiny ovšem nejsou navzájem nezávislé. Vztahy mezi nimi jsou popsány tzv. základními rovnicemi, které dělíme do tří skupin - na rovnice geometrické, fyzikální a statické.

Tab. 2.1

2.2.2. Základní rovnice

Geometrické rovnice obecně popisují závislost deformace na přemístění. Pro prut na přímce snadno vyjádříme protažení Δl pomocí koncových posunů u_i, u_j .



Obr. 2.8

Stačí si uvědomit, že podle obr. 2.8

$$l^{(0)} + u_j = u_i + l^{(1)} \Rightarrow \Delta l = l^{(1)} - l^{(0)} = u_j - u_i \quad (2.15)$$

Geometrická rovnice prutu na přímce má tedy tvar

$$\Delta l = u_j - u_i \quad (2.16)$$

nebo v maticovém zápisu

$$\Delta l = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} , \quad (2.17)$$

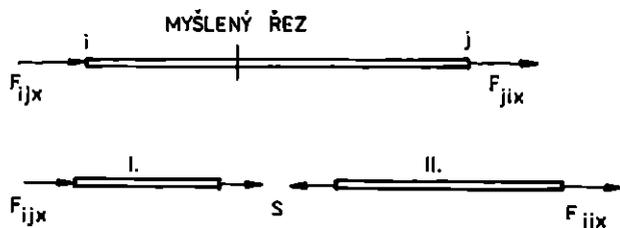
kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

je tzv. geometrické matice taženého-tlačeného prutu na přímce.

Statické rovnice jsou obecně podmínkami rovnováhy vnitřních a vnějších sil. Je třeba si uvědomit, že dělení sil na vnitřní a vnější je relativní a závisí na tom, jaký objekt právě zkoumáme. Za vnitřní síly totiž považujeme síly vznikající uvnitř zkoumaného objektu, zatímco vnějšími silami rozumíme síly působící mezi tímto objektem a jeho okolím. Koncové síly mají tudíž z hlediska prutu charakter vnějších sil, z hlediska celé konstrukce však nikoliv.

Pro prut na přímce jsou tedy statické rovnice podmínkami rovnováhy mezi koncovými silami F_{ijx} , F_{jix} a osovou silou S . Při jejich odvození užitíme obratu známého jako princip řezu: Prut přeručíme ve zvoleném průřezu myšleným řezem a vzájemné působení obou oddělených částí nahradíme osovou silou S (obr. 2.9).



Obr. 2.9

Pro obě oddělené části zapíšeme silové podmínky rovnováhy ve směru osy x :

$$\begin{aligned} \text{I.} & : F_{ijx} + S = 0 , \\ \text{II.} & : -S + F_{jix} = 0 . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Převědeme-li v (2.19) osovou sílu na pravou stranu, získáme statické rovnice taženého-tlačeného prutu na přímce

$$\begin{aligned} F_{ijx} & = - S , \\ F_{jix} & = S , \end{aligned} \quad (2.20)$$

které lze zapsat také v maticovém tvaru

$$\begin{Bmatrix} F_{1jx} \\ F_{j1x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot S, \quad \text{neboli } \underline{f} = \underline{A} \cdot S, \quad (2.21)$$

kde

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

je tzv. statická matice taženého-tlačeného prutu na přímce.

ROVNICE	Z Á P I S	
	skalární	maticový
geometrické	$\Delta l = u_j - u_1$	$\Delta l = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon}$
fyzikální	$S = k \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)})$	-
statické	$F_{1jx} = -S$ $F_{j1x} = S$	$\underline{f} = \underline{A} \cdot S$

Tab. 2.2

Fyzikální rovnice jsou obecně vztahy mezi veličinami popisujícími napjatost a deformaci. Pro tažený-tlačený prut je fyzikální rovnice jediná a popisuje vztah mezi osovou silou S a protažením Δl . Její tvar byl odvozen již v odstavci 2.1.3. (viz rovnice (2.10)).

Přehled základních rovnic pro tažený-tlačený prut na přímce je uveden v tabulce 2.2.

Všimněte si, že statická matice \underline{A} a geometrická matice \underline{E} jsou navzájem transponované:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \underline{A}^T. \quad (2.23)$$

Tato souvislost není náhodná, ale zcela zákonitá. Vysvětlíme ji sice až později, ale již nyní budeme statickou matici místo \underline{A} značit obvykle \underline{E}^T .

	$\underline{\epsilon}$	
$\underline{\epsilon}$	\underline{E}	\underline{s}
	\underline{f}	

Tab. 2.3

	u_1	u_j	
Δl	-1	1	S
	F_{1jx}	F_{j1x}	

Tab. 2.4

Geometrické a statické rovnice můžeme zachytit současně v tzv. geometrické tabulce, jejíž obecná podoba je zachycena v tab. 2.3. Vektory $\underline{\epsilon}$, \underline{s} jsou přitom vektory deformace a vnitřních sil, které pro tažený-tlačený prut mají jen po jednom prvku ($\underline{\epsilon} = \{\Delta l\}$,

$\underline{s} = \{S\}$). Tab. 2.4 je geometrickou tabulkou taženého-tlačeného prutu na přímce. V jejím řádku čtete geometrickou rovnici

$$\Delta l = -1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_j, \quad (2.24)$$

ve sloupcích statické rovnice

$$\begin{aligned} F_{1jx} &= -1 \cdot S, \\ F_{j1x} &= 1 \cdot S. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.2.3. Matice tuhosti prutu

Spojením základních rovnic získáme vztahy mezi koncovými silami a koncovými posuny:

$$\underline{f} = \underline{B}^T \cdot \underline{S}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \underline{S} = k \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)}) \end{array} \quad (2.26)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \Delta l = \underline{B} \cdot \underline{r} \end{array}$$

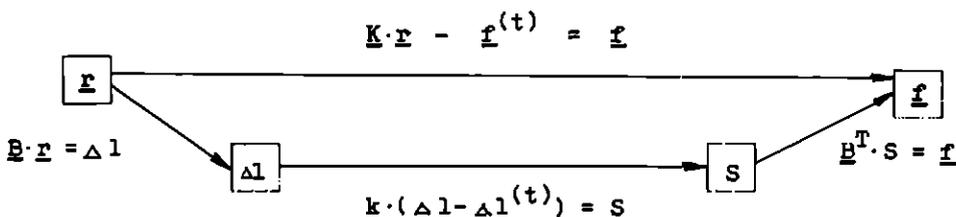
$$\underline{f} = \underline{B}^T \cdot k \cdot (\underline{B} \cdot \underline{r} - \Delta l^{(t)}) \quad (2.27)$$

Matici $\underline{K} = \underline{B}^T \cdot k \cdot \underline{B}$ nazveme maticí tuhosti taženého-tlačeného prutu na přímce, vektor $\underline{f}^{(t)} = \underline{B}^T \cdot k \cdot \Delta l^{(t)}$ vektorem koncových sil od změny teploty.

Se zavedeným označením můžeme vztah (2.27) přepsat do tvaru

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{r} - \underline{f}^{(t)} \quad (2.28)$$

Strukturu základních rovnic znázorňuje schéma na obr. 2.10:



Obr. 2.10

Příklad 2.5

Odvoďte obecný tvar matice tuhosti taženého-tlačeného prutu na přímce

- skalárním postupem,
- maticovým postupem.

Řešení : a) Do statických rovnic dosadíme z rovnic fyzikálních a geometrických (klademe přitom $\Delta l^{(t)} = 0$):

$$F_{ijx} = -S = -k \cdot \Delta l = -k \cdot (u_j - u_i) = k \cdot u_i - k \cdot u_j,$$

$$F_{jix} = S = k \cdot \Delta l = k \cdot (u_j - u_i) = -k \cdot u_i + k \cdot u_j.$$

Získané vztahy přepíšeme maticově:

$$\begin{Bmatrix} F_{ijx} \\ F_{jix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}, \text{ neboli } \underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{r}.$$

- Matice tuhosti prutu byla definována vztahem $\underline{K} = \underline{B}^T \cdot k \cdot \underline{B}$. Po roznásobení dostáváme

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot k \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Příklad 2.6 Sestavte matici tuhosti prutu z příkladu 2.1, chápaného jako prut na přímce.

Řešení: Tuhost prutu z příkladu 2.1 je $k = 126 \text{ MNm}^{-1}$. Dosažením do obecného tvaru matice tuhosti prutu na přímce (2.29) dostaneme

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 126 & -126 \\ -126 & 126 \end{bmatrix} \text{ MNm}^{-1} .$$

Příklad 2.7 Jaké koncové síly působí na prut z příkladu 2.1, posune-li se jeho levý koncový průřez o 5 mm a pravý koncový průřez o 8 mm ve směru střednice prutu doprava ?

Řešení: Do vztahu mezi koncovými silami a koncovými posuny (2.28) dosadíme matici tuhosti prutu \underline{K} vypočtenou v předcházejícím příkladu, vektor koncových posunů

$$\underline{r} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

a vektor koncových sil od teploty $\underline{f}^{(t)} = \underline{0}$ (změna teploty nebyla v zadání příkladu uvedena, považujeme ji tedy za nulovou). Vypočteme tak vektor koncových sil

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} 126 & -126 \\ -126 & 126 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \end{Bmatrix} \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m} = \begin{Bmatrix} -378 \\ 378 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 \text{ N} .$$

Koncové síly tedy mají hodnoty $F_{1jx} = -378 \text{ kN}$, $F_{j1x} = 378 \text{ kN}$. Záporné znaménko koncové síly určuje, že tato síla je orientována proti kladné poloose x (doleva). Vypočtené koncové síly včetně správné orientace jsou graficky znázorněny na obr.2.11.

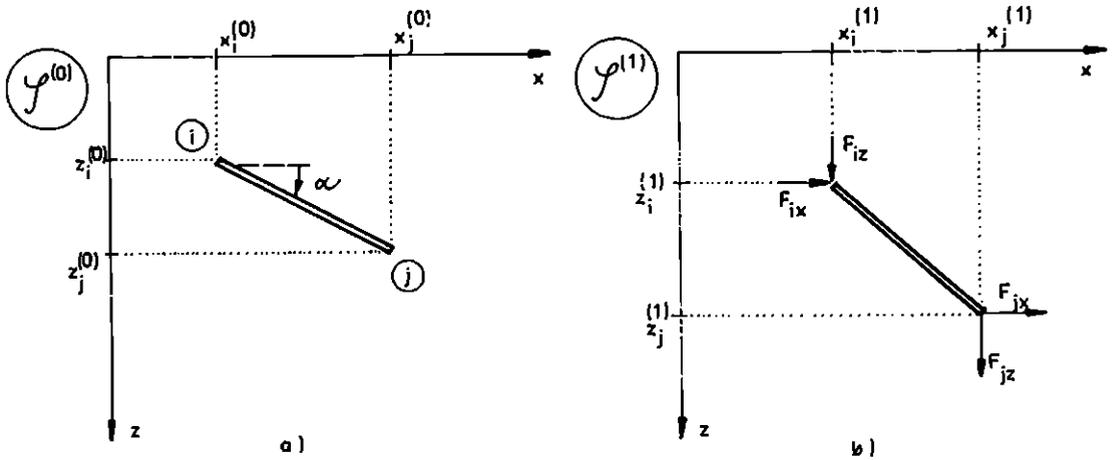


Obr. 2.11

2.3. PRUT V ROVINĚ

2.3.1. Základní veličiny

Prutem v rovině rozumíme prut, jehož koncové průřezy se mohou přemisťovat pouze v jisté rovině, kterou opatříme soustavou souřadnic x, z . Polohu prutu v počátečním stavu $\mathcal{A}^{(0)}$ popíšeme souřadnicemi koncových průřezů (přesněji řečeno souřadnicemi těžišť koncových průřezů) $x_1^{(0)}$, $z_1^{(0)}$, $x_j^{(0)}$, $z_j^{(0)}$ (obr.2.12a)



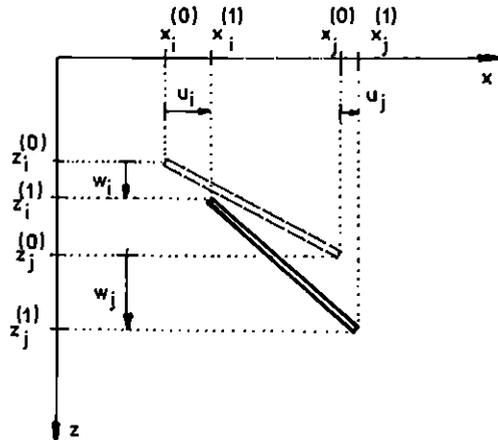
Obr. 2.12

polohu ve vyšetřovaném stavu $\varphi^{(1)}$ souřadnicemi $x_1^{(1)}$, $z_1^{(1)}$, $x_j^{(1)}$, $z_j^{(1)}$ (obr.2.12b). Přemístění prutu lze charakterizovat vodorovnými a svislými složkami koncových posunů (obr.2.13)

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, \\ w_1 &= z_1^{(1)} - z_1^{(0)}, \\ u_j &= x_j^{(1)} - x_j^{(0)}, \\ w_j &= z_j^{(1)} - z_j^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

které sdružíme do vektoru koncových posunů

$$\underline{r} = \{u_1, w_1, u_j, w_j\}^T. \quad (2.31)$$



Obr. 2.13

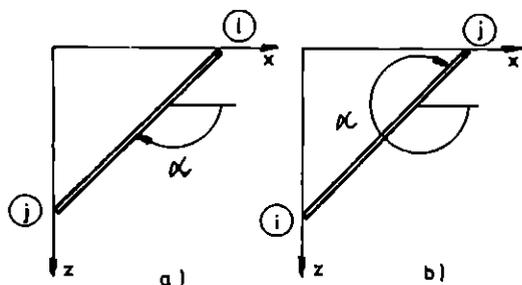
Podobně vnější silové účinky na prut popíšeme vodorovnými a svislými složkami koncových sil (obr.2.12b), které sdružíme do vektoru koncových sil

$$\underline{f} = \{F_{1jx}, F_{1jz}, F_{j1x}, F_{j1z}\}^T. \quad (2.32)$$

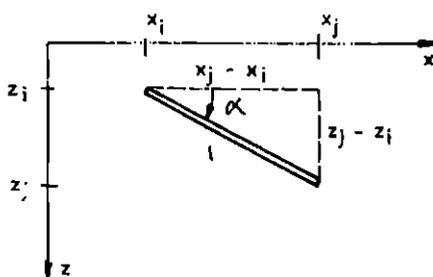
Při popisu deformace, napjatosti a teplotních účinků užíváme pro tažený-tlačený prut vždy stejných veličin Δl , S , $\Delta l^{(t)}$ bez ohledu na to, zda se jedná o prut na přímce, v rovině nebo v prostoru.

Užitečnou pomocnou charakteristikou počátečního stavu prutu v rovině je vedle jeho délky také orientovaný směrový úhel α , což je úhel, který svírá polopřímka \overline{ij} s kladnou poloosou x , měřený ve smyslu otáčení hodinových ručiček (obr.2.12a).

Důležité upozornění: Orientovaný směrový úhel α může nabývat hodnot od 0° do 360° a závisí na volbě pořadí koncových styčniců. Například pro prut na obr.2.14a je $\alpha = 135^\circ$, zvolíme-li však opačné pořadí koncových styčniců (obr.2.14b), pak



Obr. 2.14



Obr. 2.15

bude orientovaný směrový úhel $\alpha = 315^\circ$.

Z obr. 2.15 je zřejmé, že ze souřadnic koncových průřezů v počátečním stavu x_1, z_1, x_j, z_j (vypouštíme horní index ⁽⁰⁾) lze vypočítat počáteční délku prutu podle vzorce

$$l = \sqrt{(x_j - x_1)^2 + (z_j - z_1)^2} \quad (2.33)$$

a tzv. směrové kosiny (kosinus a sinus orientovaného směrového úhlu) podle vzorců

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_j - x_1}{l}, \\ \sin \alpha &= \frac{z_j - z_1}{l}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.3.2. Geometrické rovnice

Odvození geometrických rovnic pro prut v rovině je poněkud obtížnější než pro prut na přímce. Délku prutu ve vyšetřovaném stavu $l^{(1)}$ můžeme analogicky k (2.33) zapsat jako

$$l^{(1)} = \sqrt{(x_j^{(1)} - x_1^{(1)})^2 + (z_j^{(1)} - z_1^{(1)})^2} \quad (2.35)$$

a s uvážením vztahů (2.30) vyjádřit v závislosti na souřadnicích koncových průřezů ve výchozím stavu a koncových posunech:

$$l^{(1)} = \sqrt{(x_j - x_1 + u_j - u_1)^2 + (z_j - z_1 + w_j - w_1)^2}. \quad (2.36)$$

Podle (2.34) je

$$\begin{aligned} x_j - x_1 &= l \cdot \cos \alpha, \\ z_j - z_1 &= l \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2.37)$$

takže po dosezení do (2.36) můžeme psát

$$\begin{aligned} l^{(1)} &= \sqrt{(l \cdot \cos \alpha + u_j - u_1)^2 + (l \cdot \sin \alpha + w_j - w_1)^2} = \\ &= l \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{u_j - u_1}{l} \cdot \cos \alpha + 2 \cdot \frac{w_j - w_1}{l} \cdot \sin \alpha + \left(\frac{u_j - u_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{w_j - w_1}{l}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Závislost protažení prutu na jeho koncových posunech je tedy dána nelineárním vztahem

$$\Delta l = l \cdot \left(\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{u_j - u_1}{l} \cdot \cos \alpha + 2 \cdot \frac{w_j - w_1}{l} \cdot \sin \alpha + \left(\frac{u_j - u_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{w_j - w_1}{l} \right)^2} - 1 \right) \quad (2.39)$$

Nelineární charakter geometrické rovnice by ovšem značně zkomplikoval veškeré výpočty. V běžných případech bývají posuny styčniců konstrukce velmi malé ve srovnání s rozměry konstrukce. Vyjdeme-li tedy z předpokladu malých posunů, tj. z předpokladu

$$u_1 \ll l, \quad w_1 \ll l, \quad u_j \ll l, \quad w_j \ll l, \quad (2.40)$$

můžeme (2.39) přepsat do tvaru

$$\Delta l = l \cdot \left(\sqrt{1 + \delta} - 1 \right), \quad (2.41)$$

kde

$$\delta = 2 \cdot \frac{u_j - u_1}{l} \cdot \cos \alpha + 2 \cdot \frac{w_j - w_1}{l} \cdot \sin \alpha + \left(\frac{u_j - u_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{w_j - w_1}{l} \right)^2 \quad (2.42)$$

je veličina řádově menší než 1. Pro $\delta \ll 1$ je ovšem se zanedbáním členů řádu δ^2

$$\sqrt{1 + \delta} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \delta,$$

takže po dosazení do (2.41) můžeme s uvažováním (2.42) psát

$$\begin{aligned} \Delta l &\approx l \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \delta - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \delta = \\ &= (u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{(u_j - u_1)^2}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(w_j - w_1)^2}{l}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Zanedbáme-li ještě na pravé straně rovnice (2.43) kvadratické členy, které jsou vzhledem k předpokladu (2.40) řádově menší než zbylé lineární členy, získáme přibližný lineární vztah mezi protažením prutu a koncovými posuny

$$\Delta l \approx (u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha. \quad (2.44)$$

Tento vztah je lineární geometrickou rovnicí taženého-tlačeného prutu v rovině. Místo znaku přibližné rovnosti budeme psát obyčejnou rovnost. Maticově lze geometrickou rovnicí zapsat ve tvaru

$$\Delta l = \left[-\cos \alpha, -\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix}, \quad (2.45)$$

neboli

$$\Delta l = \underline{B} \cdot \underline{r}, \quad (2.46)$$

$$\text{kde } \underline{E} = [-\cos \alpha, -\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha] \quad (2.47)$$

je geometrická matice taženého-tlačeného prutu v rovině.

Příklad 2.8

Vypočtete protažení prutu na obr.2.16

při koncových posunech $u_1 = 2 \text{ mm}$,

$w_1 = 12 \text{ mm}$, $u_j = 3 \text{ mm}$, $w_j = 14 \text{ mm}$

a) podle přesné geometrické rovnice,

b) podle lineární geometrické rovnice.

Řešení: Nejprve vypočteme směrové kosiny podle (2.33), (2.34):

$$x_j - x_1 = (3,1 - 1,5) \text{ m} = 1,6 \text{ m}$$

$$z_j - z_1 = (1,7 - 0,5) \text{ m} = 1,2 \text{ m}$$

$$l = \sqrt{1,6^2 + 1,2^2} \text{ m} = 2,0 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{1,6}{2,0} = 0,8$$

$$\sin \alpha = \frac{1,2}{2,0} = 0,6$$

a) Výpočet protažení podle přesné geometrické rovnice (2.39):

$$\frac{u_j - u_1}{1} = \frac{3 - 2}{2} \cdot 10^{-3} = 0,5 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{w_j - w_1}{1} = \frac{14 - 12}{2} \cdot 10^{-3} = 1,0 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \Delta l &= 2 \cdot \left(\sqrt{1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 + 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 + 0,5^2 \cdot 10^{-6} + 1^2 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) = \\ &= 2 \cdot \left(\sqrt{1,00200125} - 1 \right) \text{ m} = \underline{\underline{2,00124 \text{ mm}}} \end{aligned}$$

b) Výpočet protažení podle lineární geometrické rovnice (2.44):

$$\Delta l = \left((3-2) \cdot 0,8 + (14-12) \cdot 0,6 \right) \text{ mm} = \underline{\underline{2,0 \text{ mm}}}$$

Porovnáním výsledků zjistíme, že chyba vzniklá užitím lineární geometrické rovnice činí v daném případě asi 0,06 %, je tedy zcela zanedbatelná.

2.3.3. Statické rovnice

Statické rovnice pro tažený-tlačený prut v rovině odvodíme opět na základě principu řezu (obr.2.17). Pro každou z částí oddělených myšleným řezem můžeme napsat dvě silové podmínky rovnováhy:

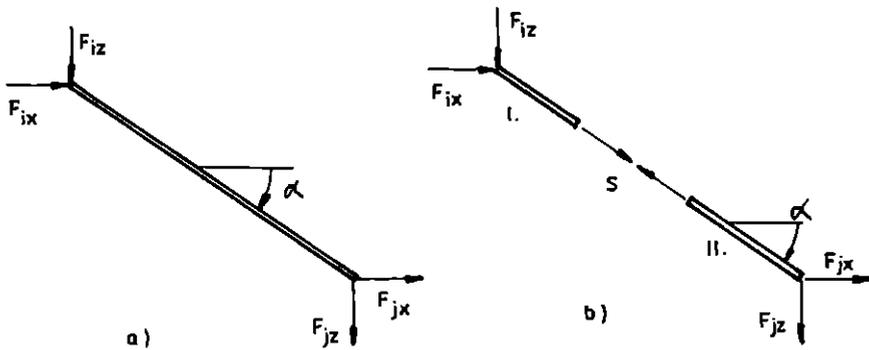
$$\text{I. } F_{ijx} + S \cdot \cos \alpha = 0, \quad ,$$

$$F_{ijz} + S \cdot \sin \alpha = 0, \quad ,$$

(2.48)

$$\text{II. } F_{jix} - S \cdot \cos \alpha = 0, \quad ,$$

$$F_{jiz} - S \cdot \sin \alpha = 0. \quad .$$



Obr. 2.17

Převedením členů obsahujících osovou sílu S na pravou stranu získáme statické rovnice:

$$\begin{aligned}
 F_{1jx} &= -S \cdot \cos \alpha \\
 F_{1jz} &= -S \cdot \sin \alpha \\
 F_{j1x} &= S \cdot \cos \alpha \\
 F_{j1z} &= S \cdot \sin \alpha
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{pmatrix} F_{1jx} \\ F_{1jz} \\ F_{j1x} \\ F_{j1z} \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot S
 \quad (2.49)$$

$$\underline{f} = \underline{B}^T \cdot S$$

Statická matice

$$\underline{B}^T = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

vyšla, podobně jako pro prut na přímce, jako transponovaná ke geometrické matici (viz (2.47)). Proto jsme ji rovnou označili \underline{B}^T místo \underline{A} .

	u_1	w_1	u_j	w_j	
$\Delta 1$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	S
	F_{1jx}	F_{1jz}	F_{j1x}	F_{j1z}	

Tab. 2.5

Podobně jako pro prut na přímce lze rovněž sestavit geometrickou tabulku, z níž je možno vyčíst zároveň geometrické i statické rovnice. Obecný tvar geometrické tabulky taženého-tlačeného prutu v rovině je zachycen v tab.2.5.

Příklad 2.9

Sestavte geometrickou tabulku pro prut na obr.2.16 a přečtěte z ní geometrické a statické rovnice.

Řešení: Směrové kosiny prutu na obr.2.16 $\cos \alpha = 0,8$, $\sin \alpha = 0,6$ byly vypočteny již v příkladu 2.8. Dosezením do obecného tvaru geometrické tabulky (tab.2.5) získáme geometrickou tabulku uvažovaného prutu (tab.2.6).

	u_1	w_1	u_j	w_j	
$\Delta 1$	$-0,8$	$-0,6$	$0,8$	$0,6$	S
	F_{1jx}	F_{1jz}	F_{j1x}	F_{j1z}	

Tab. 2.6

V prostředním řádku této tabulky se nacházejí koeficienty geometrické rovnice

$$\Delta l = -0,8 \cdot u_1 - 0,6 \cdot w_1 + 0,8 \cdot u_j + 0,6 \cdot w_j ,$$

ve sloupcích koeficienty statických rovnic

$$F_{1jx} = -0,8 \cdot S ,$$

$$F_{1jz} = -0,6 \cdot S ,$$

$$F_{jix} = 0,8 \cdot S ,$$

$$F_{jiz} = 0,6 \cdot S .$$

2.3.4. Matice tuhosti prutu

Fyzikální rovnice taženého-tlačeného prutu má pro prut na přímce, v rovině l v prostoru tvar

$$S = k \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)}) . \quad (2.51)$$

Spojením geometrické rovnice (2.45), fyzikální rovnice (2.51) a statických rovnic (2.49) získáme podobně jako v odstavci 2.2.3. vztahy mezi koncovými silami a koncovými posuny, které lze zapsat v maticovém tvaru

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{r} - \underline{f}^{(t)} . \quad (2.52)$$

Matice tuhosti prutu v rovině

$$\underline{K} = \underline{E}^T \cdot k \cdot \underline{E} \quad (2.53)$$

má nyní ovšem čtyři řádky a čtyři sloupce a vektor koncových sil od teploty

$$\underline{f}^{(t)} = \underline{E}^T \cdot k \cdot \Delta l^{(t)}$$

má čtyři složky.

Příklad 2.10 Odvoďte obecný tvar matice tuhosti prutu v rovině
 a) skalárním postupem,
 b) maticovým postupem.

Řešení: Budeme postupovat stejně jako v příkladu 2.5.

a) Skalární odvození :

$$\begin{aligned} F_{1jx} &= -S \cdot \cos \alpha = -k \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha = -k \cdot ((u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha = \\ &= k \cdot \cos^2 \alpha \cdot u_1 + k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot w_1 - k \cdot \cos^2 \alpha \cdot u_j - k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot w_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{1jz} &= -S \cdot \sin \alpha = -k \cdot \Delta l \cdot \sin \alpha = -k \cdot ((u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot u_1 + k \cdot \sin^2 \alpha \cdot w_1 - k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot u_j - k \cdot \sin^2 \alpha \cdot w_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{jix} &= S \cdot \cos \alpha = k \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha = k \cdot ((u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha = \\ &= -k \cdot \cos^2 \alpha \cdot u_1 - k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot w_1 + k \cdot \cos^2 \alpha \cdot u_j + k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot w_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{jiz} &= S \cdot \sin \alpha = k \cdot \Delta l \cdot \sin \alpha = k \cdot ((u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= -k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot u_1 - k \cdot \sin^2 \alpha \cdot w_1 + k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot u_j + k \cdot \sin^2 \alpha \cdot w_j \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{ijx} \\ F_{ijz} \\ F_{jix} \\ F_{jiz} \end{Bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix}$$

b) Maticové odvození:

$$\underline{K} = \underline{B}^T \cdot k \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot k \cdot [-\cos \alpha, -\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha] =$$

$$= k \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Příklad 2.11

Sestavte matici tuhosti prutu na obr.2.16. Tuhost prutu uvažujte hodnotou $k = 126 \text{ MNm}^{-1}$.

Řešení: Matici tuhosti získáme nejnázřejší dosažením konkrétních hodnot tuhosti a směrových kosinů do (2.54). V daném případě je

$$k = 126 \text{ MNm}^{-1},$$

$$\cos \alpha = 0,8,$$

$$\sin \alpha = 0,6,$$

takže

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 80,64 & 60,48 & -80,64 & -60,48 \\ 60,48 & 45,36 & -60,48 & -45,36 \\ -80,64 & -60,48 & 80,64 & 60,48 \\ -60,48 & -45,36 & 60,48 & 45,36 \end{bmatrix} \text{ MNm}^{-1}.$$

Příklad 2.12

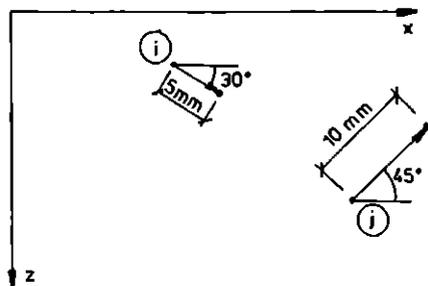
Vypočtete koncové síly, které působí na prut z obr.2.16, dojde-li k posunům jeho koncových styčniců podle obr.2.18. Tuhost prutu je stejně jako v předcházejícím příkladu 126 MNm^{-1} .

Řešení:

Nejprve vypočteme vodorovné a svislé složky koncových posunů:

$$u_1 = 5 \text{ mm} \cdot \cos 30^\circ = 4,33 \text{ mm}$$

$$w_1 = 5 \text{ mm} \cdot \cos 60^\circ = 2,50 \text{ mm}$$



Obr. 2.18

$$u_j = 10 \text{ mm} \cdot \cos 45^\circ = 7,07 \text{ mm}$$

$$w_j = -10 \text{ mm} \cdot \cos 45^\circ = -7,07 \text{ mm}$$

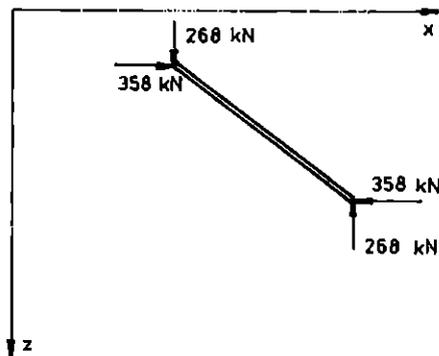
Matice tuhosti prutu byla sestavena v příkladu 2.11. Změna teploty nebyla v zadání předepsána, považujeme ji proto za nulovou. Je tedy $\underline{f}^{(t)} = \underline{0}$ a podle (2.52) vypočteme vektor koncových sil jako součin matice tuhosti prutu a vektoru koncových posunů:

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{r} = \begin{bmatrix} 80,64 & 60,48 & -80,64 & -60,48 \\ 60,48 & 45,36 & -60,48 & -45,36 \\ -80,64 & -60,48 & 80,64 & 60,48 \\ -60,48 & -45,36 & 60,48 & 45,36 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 4,33 \\ 2,50 \\ 7,07 \\ -7,07 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 357,84 \\ 268,38 \\ -357,84 \\ -268,38 \end{Bmatrix}$$

Tuhosti jsme dosadili v MNm^{-1} , koncové posuny v mm , koncové síly tudíž vyšly v kN , neboť

$$\text{MNm}^{-1} \cdot \text{mm} = 10^6 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 10^{-3} \cdot \text{m} = 10^3 \text{ N} = \text{kN} \quad .$$

Vypočtené koncové síly jsou znázorněny na obr.2.19. Všimněte si, že jejich orientace odpovídá znaménkové konvenci. Kladné koncové síly jsou souhlasně orientovány s kladnými poloosami souřadnic, tj. působí doprava a dolů.



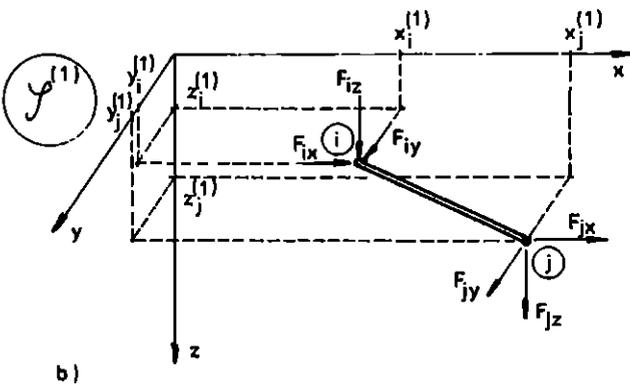
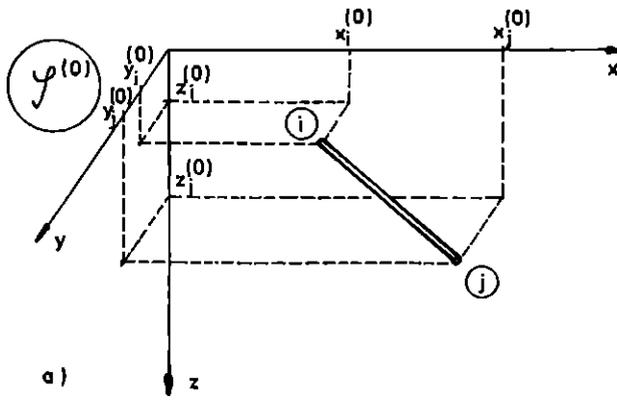
Obr. 2.19

2.4. PRUT V PROSTORU

Popis taženého-tlačeného prutu, který se přemísťuje bez jakýchkoli omezení v prostoru, je zcela analogický rovinnému případu (viz obr.2.20). Proto zde uvedeme jen stručný přehled základních veličin a pojmů, zatímco odvození příslušných vztahů ponecháme čtenáři jako cvičení.

Přemístění prutu v prostoru popíšeme pomocí koncových posunů

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1^{(1)} - x_1^{(0)} & , & & u_j &= x_j^{(1)} - x_j^{(0)} & , \\ v_1 &= y_1^{(1)} - y_1^{(0)} & , & & v_j &= y_j^{(1)} - y_j^{(0)} & , \\ w_1 &= z_1^{(1)} - z_1^{(0)} & , & & w_j &= z_j^{(1)} - z_j^{(0)} & . \end{aligned} \quad (2.55)$$



Obr. 2.20

keré sdružíme do vektoru koncových posunů

$$\underline{r} = \{u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j\}^T \quad (2.56)$$

Vnější silové účinky popíšeme pomocí koncových sil (obr.2.20b), které sdružíme do vektoru koncových sil

$$\underline{f} = \{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}\}^T \quad (2.57)$$

Pomocnou charakteristikou polohy prutu jsou směrové úhly α, β, γ , což jsou úhly, které svírá orientovaná osa prutu \vec{ij} s kladnými poloosami x, y, z . Jsou-li dány souřadnice koncových styčnic $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$ (horní index $^{(0)}$ vypouštíme), lze délku prutu a směrové kosiny vypočítat podle vzorců

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_j - x_i & (2.58) & & \cos \alpha &= \frac{\Delta x}{l} \\ \Delta y &= y_j - y_i & & & \cos \beta &= \frac{\Delta y}{l} \\ \Delta z &= z_j - z_i & & & \cos \gamma &= \frac{\Delta z}{l} \end{aligned}$$

Směrové kosiny zkráceně označíme $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$ místo $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

Závěrem uvádíme obecný tvar geometrické matice taženého-tlačeného prutu v prostoru

$$\underline{E} = [-c_\alpha, -c_\beta, -c_\gamma, c_\alpha, c_\beta, c_\gamma] \quad (2.59)$$

a matice tuhosti taženého-tlačeného prutu v prostoru

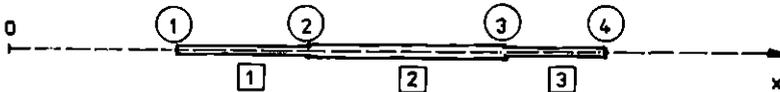
$$\underline{K} = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} c_\alpha^2 & c_\alpha \cdot c_\beta & c_\alpha \cdot c_\gamma & -c_\alpha^2 & -c_\alpha \cdot c_\beta & -c_\alpha \cdot c_\gamma \\ c_\beta \cdot c_\alpha & c_\beta^2 & c_\beta \cdot c_\gamma & -c_\beta \cdot c_\alpha & -c_\beta^2 & -c_\beta \cdot c_\gamma \\ c_\gamma \cdot c_\alpha & c_\gamma \cdot c_\beta & c_\gamma^2 & -c_\gamma \cdot c_\alpha & -c_\gamma \cdot c_\beta & -c_\gamma^2 \\ -c_\alpha^2 & -c_\alpha \cdot c_\beta & -c_\alpha \cdot c_\gamma & c_\alpha^2 & c_\alpha \cdot c_\beta & c_\alpha \cdot c_\gamma \\ -c_\beta \cdot c_\alpha & -c_\beta^2 & -c_\beta \cdot c_\gamma & c_\beta \cdot c_\alpha & c_\beta^2 & c_\beta \cdot c_\gamma \\ -c_\gamma \cdot c_\alpha & -c_\gamma \cdot c_\beta & -c_\gamma^2 & c_\gamma \cdot c_\alpha & c_\gamma \cdot c_\beta & c_\gamma^2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

3. SOUSTAVA PRUTŮ

3.1. SOUSTAVA PRUTŮ NA PŘÍMCE

3.1.1. Základní veličiny

V minulé kapitole jsme se zabývali popisem prutu, nyní přikročíme k popisu celé soustavy prutů spojených ve styčnicích. Začneme nejjednodušším případem - soustavou prutů na přímce. Příklad takové soustavy je uveden na obr. 3.1.



Obr. 3.1

Počet styčniců označíme obecně n_s , počet prutů n_p . Pro soustavu na obr. 3.1 je $n_s = 4$, $n_p = 3$. Všimněte si, že za styčnice považujeme i koncové průřezy prutů, ke kterým není připojen žádný jiný prut.

Přemístění soustavy prutů popíšeme posuny u_1, u_2, \dots, u_{n_s} jejich styčniců, které sdružíme do vektoru styčnickových posunů

$$\underline{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_s}\}^T \quad (3.1)$$

Stejně jako koncové posuny jsou i styčnickové posuny kladné, jsou-li shodně orientovány s kladnou poloosou x .

Deformaci soustavy prutů budeme charakterizovat vektorem deformace

$$\underline{\epsilon} = \{\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_{n_p}\}^T, \quad (3.2)$$

jehož složkami jsou protažení jednotlivých prutů. Obdobně zavedeme i vektor teplotní deformace $\underline{\epsilon}^{(t)}$.

Napjatost soustavy prutů popisuje vektor osových sil

$$\underline{s} = \{S_1, S_2, \dots, S_{n_p}\}^T, \quad (3.3)$$

jehož složkami jsou osové síly v jednotlivých prutech.

Již v úvodu 2.kapitoly jsme zavedli předpoklad, že vnější síly působí na konstrukci jen ve styčnicích. Vnější silové účinky na soustavu prutů na přímce tedy lze charakterizovat vektorem styčnickových sil

$$\underline{f} = \{F_{1x}, F_{2x}, \dots, F_{n_s x}\}^T, \quad (3.4)$$

jehož složkami jsou vnější síly působící na jednotlivé styčnice ve směru osy x . Považujeme je za kladné, jsou-li shodně orientovány s kladnou poloosou x .

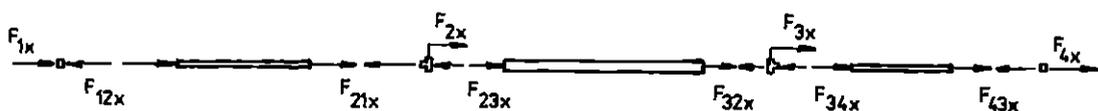
Přehled základních veličin užívaných při popisu okamžitého stavu soustavy prutů

přemístění	\underline{r}	u_1, u_2, \dots, u_{n_s}	styčnickové posuny
deformace	\underline{e}	$\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_{n_p}$	protažení prutů
napjatost	\underline{s}	S_1, S_2, \dots, S_{n_p}	osové síly
vnější účinky	\underline{f}	$F_{1x}, F_{2x}, \dots, F_{n_s x}$	styčnickové síly
	$\underline{e}(t)$	$\Delta l_1(t), \dots, \Delta l_{n_p}(t)$	teplotní protažení

Tab. 3.1

na přímce podává tabulka 3.1.

Je zřejmé, že koncové posuny každého prutu jsou shodné se styčnickovými posuny jeho koncových styčnicků. Jaký je však vztah mezi koncovými silami a styčnickovými silami? Koncové síly charakterizovaly vnější silové účinky na prut, z hlediska celé soustavy však již nemají charakter vnějších sil, neboť působí mezi styčnickými a pruty, tedy uvnitř soustavy. Pro soustavu prutů z obr. 3.1 jsou koncové a styčnickové síly rozkresleny na obr. 3.2.



Obr. 3.2

Aby byla celá soustava v rovnováze, musí být v rovnováze i síly působící na každý styčnick. Například z podmínky rovnováhy styčnickových a koncových sil působících na styčnick (2) plyne

$$F_{2x} = F_{21x} + F_{23x} \quad (3.5)$$

Obdobně lze postupovat i pro ostatní styčnick. Vztah mezi koncovými a styčnickovými silami tedy můžeme symbolicky zapsat ve tvaru

$$F_{ix} = \sum_j F_{ijx} \quad (3.6)$$

kde ovšem koncovou sílu F_{ijx} položíme rovnu nule pro všechny dvojice styčnicků (i), (j), které nejsou spojeny prutem.

3.1.2. Základní rovnice

Základní rovnice pro soustavu prutů získáme v podstatě spojením základních rovnic pro jednotlivé pruty. Statické rovnice jsou ovšem podmínkami rovnováhy mezi vnějšími a vnitřními silami, v případě soustavy prutů tedy mezi silami styčnickovými a osovými. Získáme je tak, že do podmínek rovnováhy ve styčnicích (3.6) dosadíme vyjádření koncových sil pomocí sil osových, které

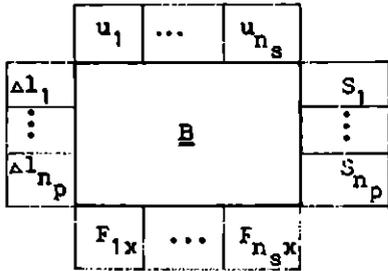
jsme odvodili v článku 2.2 z podmínek rovnováhy jednotlivých prutů (viz (2.20)). Geometrické rovnice lze obecně zapsat v maticovém tvaru

$$\underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} \quad (3.7)$$

a statické rovnice ve tvaru

$$\underline{f} = \underline{A} \cdot \underline{s} , \quad (3.8)$$

kde \underline{B} je geometrická a \underline{A} statická matice soustavy prutů. Uvidíme, že opět platí



Tab. 3.2

$$\underline{A} = \underline{B}^T , \quad (3.9)$$

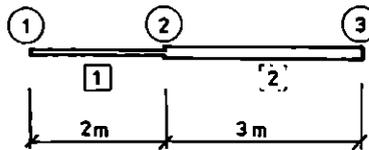
neboli geometrická a statická matice jsou vzájemně transponované. Proto můžeme geometrické a statické rovnice zaznamenat současně do geometrické tabulky soustavy prutů, jejíž obecná podoba je zachycena v tab. 3.2. V řádcích této tabulky čteme geometrické a ve sloupcích statické rovnice.

Příklad 3.1

Zapište geometrické a statické rovnice pro soustavu prutů na přímce na obr. 3.3 a sestavte geometrickou tabulku soustavy.

Řešení: Spojením geometrických rovnic jednotlivých prutů získáme geometrické rovnice soustavy:

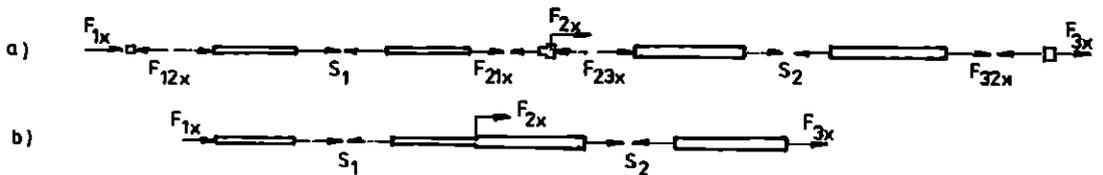
$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= u_2 - u_1 \\ \Delta l_2 &= u_3 - u_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$



Obr. 3.3

$$\begin{aligned} E &= 210 \text{ GPa} \\ A_1 &= 1200 \text{ mm}^2 \\ A_2 &= 2000 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Statické rovnice soustavy prutů bychom mohli získat dosažením statických rovnic jednotlivých prutů (tj. vztahů mezi koncovými a osovými silami) do rovnic (3.6). Jednodušší je ale jiný postup: Pruty přerušíme myšlenými řezy a vzájemné působení oddělených částí nahradíme osovými silami (obr. 3.4). Z podmínek rovnováhy



Obr. 3.4

jednotlivých částí, na které se soustava rozpadla, pak plynou bezprostředně statické rovnice dané soustavy

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -S_1 \\ F_{2x} &= S_1 - S_2 \\ F_{3x} &= S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

	u_1	u_2	u_3	
l_1	-1	1	0	S_1
l_2	0	-1	1	S_2
	F_{1x}	F_{2x}	F_{3x}	

Tab. 3.3

Porovnáním maticového zápisu geometrických rovnic (3.10) a statických rovnic (3.11) zjistíme, že geometrická a statická matice soustavy jsou skutečně navzájem transponované. Prvky těchto matic uspořádáme do geometrické tabulky (tab. 3.3), z níž lze přečíst zároveň geometrické i statické rovnice.

Fyzikální rovnice soustavy prutů lze obecně zapsat v maticovém tvaru

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}(t)) \quad (3.12)$$

Matice \underline{D} se nazývá maticí tuhostí prutů, neboť, jak uvidíme, jsou jejími prvky tuhosti jednotlivých prutů.

Pozor - rozlišujte termín "matice tuhostí prutů" a termín "matice tuhosti prutu", který byl zaveden v předcházející kapitole. Zanedlouho bude zaveden ještě termín "matice tuhosti soustavy prutů".

Příklad 3.2 Zapište fyzikální rovnice pro soustavu prutů na přímce na obr. 3.3.

Řešení: Fyzikální rovnice soustavy prutů získáme spojením fyzikálních rovnic jednotlivých prutů soustavy:

$$\begin{aligned} S_1 &= k_1 \cdot (\Delta l_1 - \Delta l_1(t)) \\ S_2 &= k_2 \cdot (\Delta l_2 - \Delta l_2(t)) \end{aligned} \quad \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta l_1(t) \\ \Delta l_2(t) \end{Bmatrix} \right)$$

Vidíme, že matice tuhostí prutů je diagonální a jejími prvky jsou tuhosti

$$k_1 = \frac{EA_1}{l_1} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}}{2,0} \text{ Nm}^{-1} = 126 \text{ MNm}^{-1},$$

$$k_2 = \frac{EA_2}{l_2} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3}}{3,0} \text{ Nm}^{-1} = 140 \text{ MNm}^{-1}.$$

3.1.3. Matice tuhosti soustavy

Podobně jako v odstavci 2.2.3. lze spojením základních rovnic (3.7), (3.8) a (3.12) odvodit vztah mezi styčnickovými silami a styčnickovými posuny

$$\underline{f} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{r} - \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{e}(t) \quad (3.13)$$

Matici $\underline{K} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}$ nazveme maticí tuhosti soustavy prutů, vektor $\underline{f}(t) = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{e}(t)$ vektorem styčnickových sil od teploty.

Vzťah (3.13) můžeme s tímto označením přepsat do tvaru

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{r} - \underline{f}^{(t)}, \quad (3.14)$$

který je formálně zcela shodný s obdobným vzťahem (2.52) pro prut.

Příklad 3.3 Sestavte matici tuhosti soustavy prutů z obr. 3.3

- a) skalárním postupem,
b) maticovým postupem.

Řešení: a) Položíme $\Delta l_1^{(t)} = \Delta l_2^{(t)} = 0$ a dosadíme do statických rovnic (3.11) z fyzikálních rovnic (viz příklad 3.2) a geometrických rovnic (3.10):

$$F_{1x} = -S_1 = -k_1 \cdot \Delta l_1 = -k_1 \cdot (u_2 - u_1) = k_1 \cdot u_1 - k_1 \cdot u_2$$

$$F_{2x} = S_1 - S_2 = k_1 \cdot \Delta l_1 - k_2 \cdot \Delta l_2 = k_1 \cdot (u_2 - u_1) - k_2 \cdot (u_3 - u_2) =$$

$$= -k_1 \cdot u_1 + (k_1 + k_2) \cdot u_2 - k_2 \cdot u_3$$

$$F_{3x} = S_2 = k_2 \cdot \Delta l_2 = k_2 \cdot (u_3 - u_2) = -k_2 \cdot u_2 + k_2 \cdot u_3$$

Získané vztahy přepíšeme maticově:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

b) Podle definice je $\underline{K} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}$:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 126 & -126 & 0 \\ -126 & 266 & -140 \\ 0 & -140 & 140 \end{bmatrix} \text{ MNm}^{-1}$$

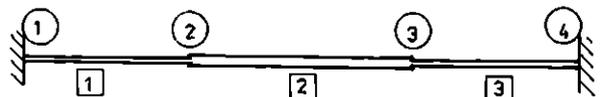
3.2. PRUTOVÁ KONSTRUKCE NA PŘÍMCE

3.2.1. Základní označení

Aby soustava prutů mohla přenášet zatížení, je třeba ji vhodně podepřít. Předepsáním vazeb vzniká ze soustavy prutů prutová konstrukce. Na obr. 3.5 je příklad prutové konstrukce na přímce, která vznikla

ze soustavy prutů na obr. 3.1 připojením styčniců ① a ④ k pevnému základu.

Tím, že jsme předepsali vnější vazby ve styčnicích ① a ④, staly se z posunů u_1 a u_4 těchto styčniců známé veličiny. Označíme je proto \bar{u}_1 a \bar{u}_4 ,



Obr. 3.5

abychom zdůraznili, že jejich hodnoty jsou předepsány. Posuny nepodepřených styčniců naproti tomu nejsou předem známy.

Pro soustavu prutů jsme všechny styčnickové posuny zapisovali do jediného vektoru. Při popisu konstrukce je však výhodné vytvořit z posunů nepodepřených styčniců vektor neznámých styčnickových posunů \underline{r} a posuny podepřených styčniců uspořádat do vektoru předepsaných styčnickových posunů $\underline{\bar{r}}$. Například pro konstrukci na obr.3.5 je

$$\underline{r} = \{u_2, u_3\}^T, \quad \underline{\bar{r}} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_4\}^T.$$

Poznámka: Dosud jsme symbolem \underline{r} označovali vektor obsahující všechny styčnickové posuny. Bude-li hrozit nedorozumění, budeme tento vektor napříště označovat $\hat{\underline{r}}$, abychom ho odlišili od právě zavedeného vektoru neznámých styčnickových posunů. Obdobně budeme tam, kde je to nutné, rozlišovat geometrickou matici soustavy $\hat{\underline{B}}$ a geometrickou matici konstrukce \underline{B} , matici tuhosti soustavy $\hat{\underline{K}}$ a matici tuhosti konstrukce \underline{K} a podobně.

Je-li styčnic podepřen, nemůže být odpovídající styčnicková síla předepsána. Tato síla je totiž předem neznámou reakcí v podpoře. Naopak síly působící na nepodepřené styčnice jsou předepsány (ať už nulovou nebo nenulovou hodnotou) a představují zatížení konstrukce. Jakožto předepsané veličiny označíme tyto síly pruhem - např. $\bar{F}_{2x}, \bar{F}_{3x}$ pro konstrukci na obr. 3.5. Podobně jako styčnickové posuny seskupíme i styčnickové síly do vektoru předepsaných styčnickových sil (vektoru zatížení) $\underline{\bar{f}}$ a vektoru neznámých styčnickových sil (vektoru reakcí), který označíme \underline{f}_r . Pro konstrukci na obr.3.5 je

$$\underline{\bar{f}} = \{\bar{F}_{2x}, \bar{F}_{3x}\}^T, \quad \underline{f}_r = \{F_{1x}, F_{4x}\}^T.$$

Povšimněte si, že neznámým styčnickovým posunům odpovídají předepsané styčnickové síly a naopak.

3.2.2. Základní rovnice

Geometrické rovnice soustavy prutů (3.7) formálně přepíšeme do tvaru

$$\underline{e} = \hat{\underline{B}} \cdot \hat{\underline{r}}. \quad (3.15)$$

Rozdělíme-li složky vektoru styčnickových posunů $\hat{\underline{r}}$ do vektoru neznámých styčnickových posunů \underline{r} a vektoru předepsaných styčnickových posunů $\underline{\bar{r}}$, můžeme odpovídajícím způsobem rozdělit sloupce geometrické matice soustavy prutů $\hat{\underline{B}}$ do matice \underline{B} příslušné vektoru \underline{r} a matice $\underline{\bar{B}}$ příslušné vektoru $\underline{\bar{r}}$ a zapsat geometrické rovnice konstrukce

$$\underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}}. \quad (3.16)$$

Matici \underline{B} nazveme geometrickou maticí konstrukce a matici $\underline{\bar{B}}$ geometrickou maticí vazeb.

Příklad 3.4

Zapište geometrické rovnice a sestavte geometrickou matici konstrukce a vazeb pro konstrukci na obr.3.5.

Řešení: Geometrické rovnice pro soustavu prutů na obr.3.1 (ze které konstrukce na obr.3.5 vznikla) získáme podobně jako v příkladu 3.1 spojením geometrických rovnic jednotlivých prutů:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= u_2 - u_1 \\ \Delta l_2 &= u_3 - u_2 \\ \Delta l_3 &= u_4 - u_3 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Podopřeme-li styčníky ① a ④, budou posuny u_1 a u_4 předepsány, a proto je označíme pruhem. Členy na pravé straně geometrických rovnic pek přeskupíme tak, aby předepsané posuny \bar{u}_1 , \bar{u}_4 následovaly ež po neznámých posunech u_2 , u_3 :

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= u_2 - \bar{u}_1 \\ \Delta l_2 &= u_3 - u_2 \\ \Delta l_3 &= -u_3 + \bar{u}_4 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_4 \end{pmatrix}$$

Geometrická matice konstrukce

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

vznikla z geometrické matice soustavy prutů vyškrtnutím těch sloupců, které odpovídají předepsaným styčníkovým posunům.

Geometrická matice vazeb

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vznikla z geometrické matice soustavy prutů vyškrtnutím těch sloupců, které odpovídají neznámým styčníkovým posunům.

Statické rovnice soustavy prutů (3.8) formálně přepíšeme do tvaru

$$\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{A}} \cdot \underline{s} \quad (3.17)$$

Pro konstrukci přeskupíme statické rovnice tak, aby v první skupině byly rovnice obsahující předepsané styčníkové síly (zatižení) a ve druhé rovnice obsahující neznámé styčníkové síly (reakce). V maticovém tvaru můžeme psát

$$\begin{aligned} \underline{\hat{f}} &= \underline{A} \cdot \underline{s} , \\ \underline{f}_R &= \underline{A}_R \cdot \underline{s} , \end{aligned} \quad (3.18)$$

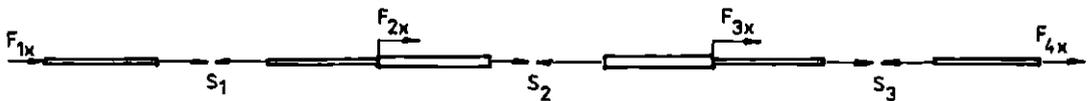
kde \underline{A} je statická matice konstrukce a \underline{A}_R statická matice reakcí.

Příklad 3.5

Zapište statické rovnice a sestavte statickou matici konstrukce a reakcí pro konstrukci na obr.3.5.

Řešení: Vnitřní a vnější síly pro soustavu prutů na obr.3.1 jsou rozkresleny na obr. 3.6. Podobně jako v příkladu 3.1 odvodíme statické rovnice

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= -S_1 \\
 F_{2x} &= S_1 - S_2 \\
 F_{3x} &= S_2 - S_3 \\
 F_{4x} &= S_3
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{pmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$



Obr. 3.6

Jsou-li síly \bar{F}_{2x} , \bar{F}_{3x} předepsané, F_{1x} , F_{4x} neznámé, zapíšeme statické rovnice v pořadí

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{2x} &= S_1 - S_2 \\
 \bar{F}_{3x} &= S_2 - S_3
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{pmatrix} \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{3x} \end{pmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= -S_1 \\
 F_{4x} &= S_3
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{pmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

Statická matice konstrukce

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vznikla ze statické matice soustavy prutů vyškrtnutím těch řádků, které odpovídají neznámým styčnickovým silám.

Statická matice reakcí

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vznikla ze statické matice soustavy prutů vyškrtnutím těch řádků, které odpovídají předepsaným styčnickovým silám.

Ze způsobu, jekým se sestavuje statická a geometrická matice konstrukce, je zřejmé, že tyto matice jsou navzájem transponované. Totéž platí pro statickou matici reakcí a geometrickou matici vazeb. Strukturu geometrických a statických rovnic pro konstrukci nejlépe objasní geometrická tabulka konstrukce (tab.3.5), která vznikne z geometrické tabulky soustavy prutů (tab.3.4) vhodným přeskupením sloupců.

V geometrické tabulce konstrukce následují sloupce odpovídající předepsaným posunům \underline{e} a neznámým silám až po sloupcích odpovídajících neznámým posunům a předepsaným silám.

	$\hat{\underline{E}}$	
\underline{e}	$\hat{\underline{B}} = \hat{\underline{A}}^T$	\underline{s}
	$\hat{\underline{f}}$	

Tab. 3.4

	\underline{r}	$\bar{\underline{E}}$	
\underline{e}	$\underline{B} = \underline{A}^T$	$\bar{\underline{B}} = \underline{A}_r^T$	\underline{s}
	\underline{f}	\underline{f}_r	

Tab. 3.5

Příklad 3.6 Sestavte geometrickou tabulku konstrukce na obr.3.5.

Řešení je patrné z tab.3.6 (geometrická tabulka soustavy prutů na obr.3.1) a z tab.3.7 (geometrická tabulka konstrukce na obr.3.5):

	u_1	u_2	u_3	u_4	
$\Delta 1_1$	-1	1	0	0	S_1
$\Delta 1_2$	0	-1	1	0	S_2
$\Delta 1_3$	0	0	-1	1	S_3
	F_{1x}	F_{2x}	F_{3x}	F_{4x}	

Tab. 3.6

	u_2	u_3	\bar{u}_1	\bar{u}_4	
$\Delta 1_1$	1	0	-1	0	S_1
$\Delta 1_2$	-1	1	0	0	S_2
$\Delta 1_3$	0	-1	0	1	S_3
	\bar{F}_{2x}	\bar{F}_{3x}	F_{1x}	F_{4x}	

Tab. 3.7

3.2.3. Metody řešení základních rovnic

Seznámili jsme se s celou řadou veličin charakterizujících stav konstrukce. Tyto veličiny ovšem nejsou navzájem nezávislé - vztahy mezi nimi popisují základní rovnice. Již víme, že některé veličiny jsou předepsány, jiné neznámé. Základní úlohou, s níž se setkáváme ve staticce stavebních konstrukcí, je výpočet neznámých veličin řešením základních rovnic.

Úloha bývá zpravidla formulována takto:

Jsou dány geometrické a materiálové charakteristiky konstrukce \underline{B} , $\underline{\bar{B}}$, \underline{D} ,
 zatížení nepodepřených styčnic $\underline{\bar{F}}$,
 posuny podepřených styčnic $\underline{\bar{r}}$,
 a teplotní změny $\underline{e}^{(t)}$.

Úkolem je vypočítat reakce v podepřených styčnicích \underline{f}_R ,
 vnitřní síly \underline{s} ,
 deformace \underline{e} ,
 a posuny nepodepřených styčnic \underline{r} .

Pro výpočet neznámých veličin jsou k dispozici základní rovnice

$$\begin{aligned}
 \text{geometrické} & \quad \underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}} \quad , \\
 \text{fyzikální} & \quad \underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)}) \\
 \text{a statické} & \quad \underline{\bar{F}} = \underline{B}^T \cdot \underline{s} \quad , \\
 & \quad \underline{f}_R = \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{s} \quad .
 \end{aligned}$$

● I. ŘEŠENÍ STATICKY URČITÉ ÚLOHY

Je-li statická matice konstrukce $\underline{A} = \underline{B}^T$ čtvercová, jedná se o staticky určitou úlohu - počet předepsaných styčnicových sil je pak stejný jako počet neznámých vnitřních sil. Vnitřní síly lze tudíž vypočítat ze statických rovnic, ovšem za předpokladu, že statická matice konstrukce je regulární. Singularita statické matice konstrukce indikuje tzv. výjimečný případ, který je zpravidla důsledkem nesprávného podepření konstrukce a v praxi je tudíž nepřipustný.

Staticky určitou úlohu řešíme postupně:

- A) ze statických rovnic určíme vnitřní síly a reakce $\left\{ \begin{array}{l} \underline{B}^T \cdot \underline{s} = \underline{\bar{F}} \Rightarrow \underline{s} \\ \underline{f}_R = \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{s} \end{array} \right.$
- B) z fyzikálních rovnic vypočteme deformace $\underline{D} \cdot \underline{e} = \underline{s} + \underline{D} \cdot \underline{e}^{(t)} \Rightarrow \underline{e}$
- C) z geometrických rovnic stanovíme posuny $\underline{B} \cdot \underline{r} = \underline{e} - \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}} \Rightarrow \underline{r}$

● II. ŘEŠENÍ STATICKY NEURČITÉ ÚLOHY DEFORMAČNÍ METODOU

Z teorie pružnosti víme, že existují dvě základní varianty řešení staticky neurčitých úloh - deformační a silová. Neznačíme stručně postup při řešení deformační metodou, při jejímž odvození lze plně využít maticového zápisu. Navíc, jak uvidíme později, má tato metoda řadu praktických výhod.

Při řešení staticky neurčité úlohy nelze řešit některou skupinu základních rovnic nezávisle na ostatních, ale je třeba všechny rovnice vhodným způsobem zkombinovat. Dosaďme tedy do statických rovnic z fyzikálních a geometrických:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{F}} &= \underline{B}^T \cdot \underline{s} \\ &\quad \downarrow \\ \underline{s} &= \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)}) \\ &\quad \downarrow \\ \underline{e} &= \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Po dosažení a přeskupení jednotlivých členů získáme rovnice deformační metody

$$\underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{r} = \underline{\bar{F}} + \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{e}^{(t)} - \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}} \quad (3.21)$$

Zavedeme následující označení a terminologii:

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} && \dots \text{ matice tuhosti konstrukce} \\ \underline{\bar{F}}^{(t)} &= \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{e}^{(t)} && \dots \text{ vektor zatížení od teplotních změn} \\ \underline{\bar{F}}^{(r)} &= - \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}} && \dots \text{ vektor zatížení od předepsaných posunů} \end{aligned}$$

Rovnice deformační metody můžeme s tímto označením přepsat do přehledného tvaru

$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{\bar{F}} + \underline{\bar{F}}^{(t)} + \underline{\bar{F}}^{(r)} \quad (3.22)$$

Na pravé straně rovnic (3.22) jsou pouze známé veličiny, takže jde o soustavu lineárních rovnic pro neznámé styčnickové posuny \underline{r} . Maticí soustavy je matice tuhosti konstrukce, která je vždy čtvercová a pro stabilní konstrukce regulární. Právou stranu, tj. součet $\underline{\bar{F}} + \underline{\bar{F}}^{(t)} + \underline{\bar{F}}^{(r)}$, nazýváme vektorem transformovaného zatížení.

Postup při výpočtu deformační metodou:

A) z rovnic deformační metody vypočteme neznámé posuny	$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{\bar{F}} + \underline{\bar{F}}^{(t)} + \underline{\bar{F}}^{(r)}$
	\downarrow
	\underline{r}
B) dosažením do geometrických rovnic získáme deformace	$\underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}}$
C) dosažením do fyzikálních rovnic určíme vnitřní síly	$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)})$
D) dosažením do statických rovnic vypočteme reakce	$\underline{f}_r = \underline{B}^T \cdot \underline{s}$

Příklad 3.7

Jaké osové síly vzniknou v prutech sloupu na obr.3.7a ?
K jakému posunu vrcholu sloupu dojde ?

Poznámka: Není-li v zadání příkladu řeč o změnách teploty ani předepsaných posunech, budeme předpokládat, že tyto veličiny jsou nulové.

Řešení: Osu x a očíslování styčniců a prutů zavedeme podle obr. 3.7b. Základní rovnice pro příslušnou soustavu prutů (viz obr.3.3) již byly odvozeny v příkladech 3.1 a 3.2. Uvážíme, že v konstrukci na obr.3.7 jsou styčnice ① a ② volné, zatímco styčník ③ je podepřen, a položíme

$$\underline{r} = \{u_1, u_2\}^T,$$

$$\underline{\bar{u}} = \{\bar{u}_3\} = \{0\},$$

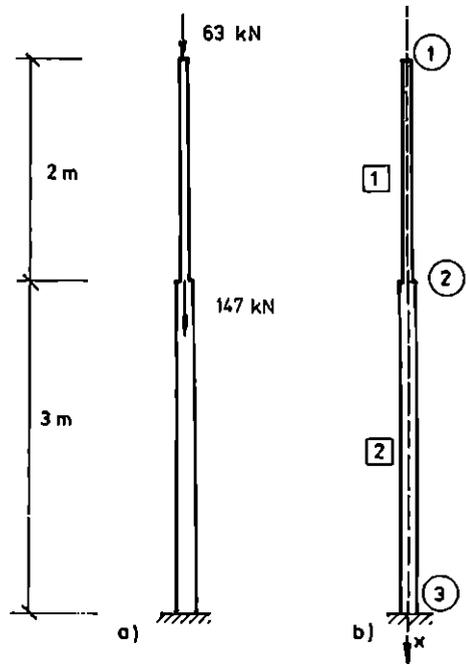
$$\underline{\bar{F}} = \{\bar{F}_{1x}, \bar{F}_{2x}\}^T = \{63 \text{ kN}, 147 \text{ kN}\}^T$$

$$\underline{f}_r = \{F_{3x}\}$$

$$\underline{e}^{(t)} = \{\Delta l_1(t), \Delta l_2(t)\}^T = \{0, 0\}^T$$

$$\underline{e} = \{\Delta l_1, \Delta l_2\}^T,$$

$$\underline{s} = \{S_1, S_2\}^T.$$



Obr. 3.7

Počet neznámých osových sil je roven počtu předepsaných styčnickových sil, takže úloha je staticky určitá. Řešení provedeme ve třech krocích:

A) Výpočet osových sil a reakcí ze statických rovnic.

$$\underline{B}^T \underline{s} = \underline{\bar{F}} \Rightarrow \underline{s}$$

$$-S_1 = \bar{F}_{1x} \quad S_1 = -\bar{F}_{1x} = -63 \text{ kN}$$

$$S_1 - S_2 = \bar{F}_{2x} \quad S_2 = S_1 - \bar{F}_{2x} = (-63 - 147) \text{ kN} = -210 \text{ kN}$$

$$\underline{f}_r = \underline{B}^T \underline{s}$$

$$F_{3x} = S_2 = -210 \text{ kN}$$

B) Výpočet deformací z fyzikálních rovnic

$$\underline{D} \cdot \underline{e} = \underline{s} + \underline{D} \cdot \underline{e}^{(t)} \Rightarrow \underline{e}$$

$$k_1 \cdot \Delta l_1 = S_1 \quad \Delta l_1 = \frac{S_1}{k_1} = \frac{-63 \cdot 10^3}{126 \cdot 10^6} \text{ m} = -0,5 \text{ mm}$$

$$k_2 \cdot \Delta l_2 = S_2 \quad \Delta l_2 = \frac{S_2}{k_2} = \frac{-210 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} \text{ m} = -1,5 \text{ mm}$$

C) Výpočet posunů z geometrických rovnic

$$\underline{B} \cdot \underline{r} = \underline{e} - \underline{B} \cdot \underline{\bar{u}} \Rightarrow \underline{r}$$

$$u_2 - u_1 = \Delta l_1$$

$$-u_2 = \Delta l_2$$

$$u_2 = -\Delta l_2 = 1,5 \text{ mm}$$

$$u_1 = u_2 - \Delta l_1 = (1,5 - (-0,5)) \text{ mm} = 2,0 \text{ mm}$$

Příklad 3.8

Sestavte matici tuhosti konstrukce z obr.3.5.

(Tuhosti prutů jsou $k_1 = 126 \text{ MNm}^{-1}$, $k_2 = 140 \text{ MNm}^{-1}$, $k_3 = 210 \text{ MNm}^{-1}$.)

Řešení: Geometrická matice konstrukce z obr.3.5 byla již sestavena v příkladu 3.4. Matice tuhosti prutů má na diagonále tuhosti jednotlivých prutů:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 126 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{bmatrix} \text{ MNm}^{-1}.$$

Matici tuhosti konstrukce můžeme vypočítat roznásobením

$$\underline{K} = \underline{E}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

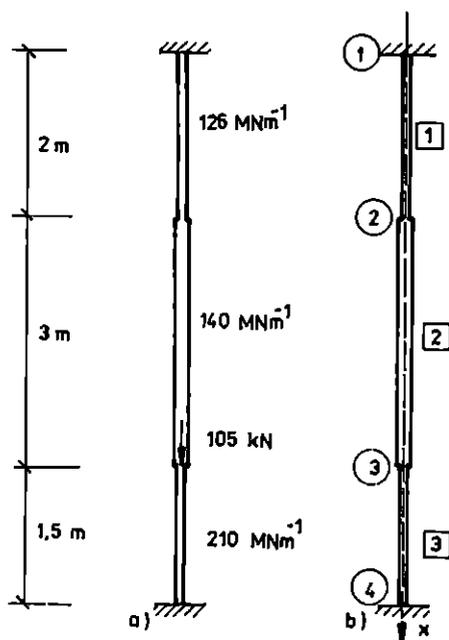
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 \\ 0 & -k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 266 & -140 \\ -140 & 350 \end{bmatrix} \text{ MNm}^{-1}$$

Příklad 3.9

Jaké osové síly vzniknou v jednotlivých

prutech sloupu na obr.3.8a, jestliže vzdálenost paty a vrcholu sloupu se nezmění? Jaké reakce vzniknou v podporách?

Řešení: Osu x a očíslování styčniců a prutů zavedeme podle obr. 3.8b. Úloha je staticky neurčitá (počet neznámých osových sil S_1, S_2, S_3 je větší než počet předepsaných styčnickových sil $\bar{F}_{2x} = 0, \bar{F}_{3x} = 105 \text{ kN}$), takže ji budeme řešit deformační metodou. Matice tuhosti konstrukce byla sestavena v předcházejícím příkladu, změny teploty a předepsaná přemístění mají nulové hodnoty, takže na pravé straně rovnic deformační metody bude pouze vektor předepsaných styčnickových sil



Obr. 3.8

$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 105 \end{Bmatrix} \text{ kN} .$$

Výpočet neznámých veličin provedeme v krocích podle obecného postupu:

- A) Výpočet neznámých posunů z rovnic deformační metody.

$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{F} + \underline{F}^{(t)} + \underline{F}^{(r)} \Rightarrow \underline{r}$$

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 266 \cdot u_2 - 140 \cdot u_3 &= 0 & u_2 &= 0,2 \\ -140 \cdot u_2 + 350 \cdot u_3 &= 105 & u_3 &= 0,38 \end{aligned}$$

Síly jsme dosazovali v kN, tuhosti v MNm^{-1} , posuny tedy vyšly v mm.

- B) Výpočet deformací dosažením do geometrických rovnic.

$$\underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{E} \cdot \underline{F}$$

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= u_2 = 0,2 \text{ mm} \\ \Delta l_2 &= u_3 - u_2 = (0,38 - 0,2) \text{ mm} = 0,18 \text{ mm} \\ \Delta l_3 &= -u_3 = -0,38 \text{ mm} \end{aligned}$$

- C) Výpočet osových sil dosažením do fyzikálních rovnic.

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)})$$

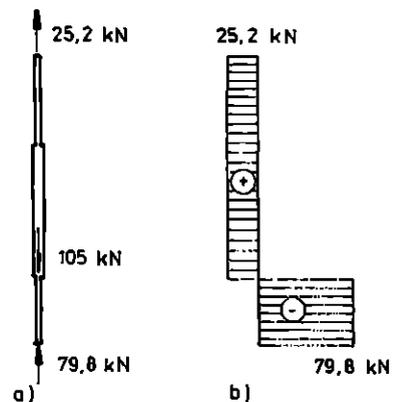
$$\begin{aligned} S_1 &= k_1 \cdot \Delta l_1 = 126 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 25,2 \text{ kN} \\ S_2 &= k_2 \cdot \Delta l_2 = 140 \cdot 10^6 \cdot 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 25,2 \text{ kN} \\ S_3 &= k_3 \cdot \Delta l_3 = 210 \cdot 10^6 \cdot (-0,38 \cdot 10^{-3}) \text{ N} = -79,8 \text{ kN} \end{aligned}$$

- D) Výpočet reakcí dosažením do statických rovnic.

$$\underline{f}_r = \underline{B}^T \cdot \underline{s}$$

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -S_1 = -25,2 \text{ kN} \\ F_{2x} &= S_3 = -79,8 \text{ kN} \end{aligned}$$

Výsledky: Vnější síly působící na konstrukci jsou znázorněny na obr.3.9a. Reakce F_{1x} , F_{2x} vyšly se záporným znaménkem, jsou tedy orientovány proti kladné poloose x. Osově síly jsou zachyceny na obr.3.9b. Kladné znaménko označuje tah, záporné tlak.



Obr. 3.9

3.3.1. Základní veličiny a rovnice

Spojením prutů v rovině vzniká rovinná soustava prutů (obr.3.10a). Předpokládáme, že pruty jsou ve styčnicích spojeny kloubově, a že vnější síly působí na soustavu jen ve styčnicích. Pruty soustavy jsou pak namáhány pouze tahem-tlakem.

Přemístění rovinné soustavy prutů je popsáno vektorem styčnickových posunů

$$\hat{\underline{r}} = \{ u_1, w_1, u_2, w_2, \dots, u_{n_s}, w_{n_s} \}^T,$$

kteřý se skládá z vodorovných a svislých složek posunů jednotlivých styčniců (obr.3.10b).

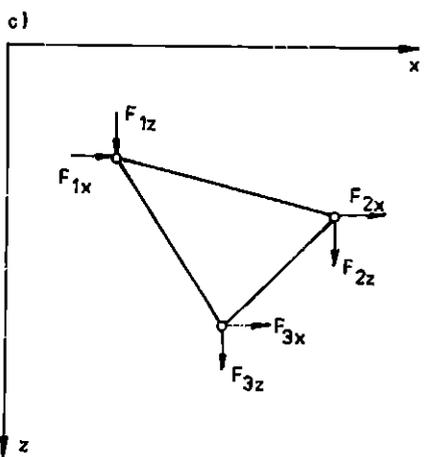
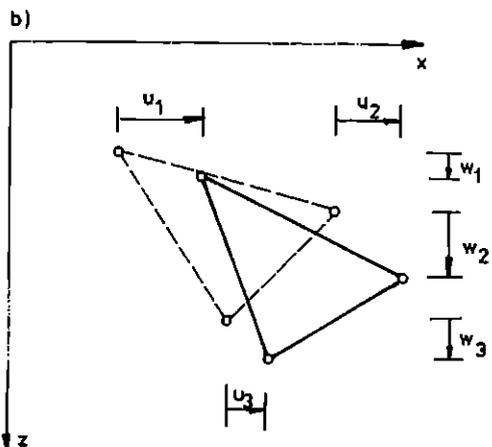
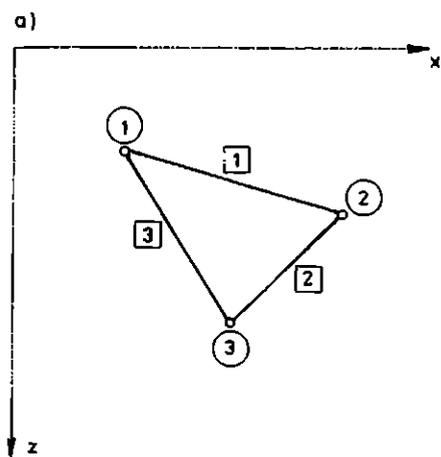
Vnější silové účinky na rovinnou soustavu prutů jsou dány vektorem styčnickových sil

$$\hat{\underline{f}} = \{ F_{1x}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2z}, \dots, F_{n_s x}, F_{n_s z} \}^T,$$

kteřý obsahuje vodorovné a svislé složky vnějších sil působících na jednotlivé styčnický (obr.3.10c).

Deformace rovinné soustavy prutů je stejně jako pro soustavu prutů na přímce popsána vektorem deformace \underline{e} (viz (3.2)) a napjatost vektorem osových sil \underline{g} (viz (3.3)).

Rovněž obecný zápis základních rovnic je pro soustavu prutů na přímce a v rovině zcela stejný (viz (3.7), (3.8), (3.12)).



Příklad 3.10

Zapište geometrické rovnice a sestavte geometrickou matici pro soustavu prutů na obr.3.10a.

Řešení: Pro každý prut zvolíme pořadí jeho koncových styčniců a zapišeme je do tabulky prutů (tab.3.8).

prut	koncové styčnický	
1	1	2
2	2	3
3	1	3

Tab. 3.8

Obr. 3.10

Pořadí koncových styčníků volíme pro každý prut libovolně, ale zvolené pořadí musíme zachovat po celou dobu výpočtu. Závísí na něm totiž hodnota úhlu α pro daný prut. Pro volbu pořadí koncových styčníků popsanou tabulkou 3.8 jsou orientované směrové úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jednotlivých prutů soustavy vyznačeny v obr.3.11.

Pro každý prut můžeme nyní zapsat geometrickou rovnici, s jejímž obecným tvarem

$$\Delta l = (u_j - u_i) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_i) \cdot \sin \alpha$$

jsme se seznámili již v článku 2.3. Pro každý prut musíme samozřejmě dosadit správně čísla jeho koncových styčníků (jednoznačně určená zvoleným pořadím) a odpovídající hodnotu orientovaného směrového úhlu α . Například pro prut 1 dosezujeme $i=1, j=2, \alpha = \alpha_1$. Získáme tak první geometrickou rovnici

$$\Delta l_1 = (u_2 - u_1) \cdot \cos \alpha_1 + (w_2 - w_1) \cdot \sin \alpha_1.$$

Obdobně lze sestavit i geometrické rovnice zbývajících dvou prutů

$$\Delta l_2 = (u_3 - u_2) \cdot \cos \alpha_2 + (w_3 - w_2) \cdot \sin \alpha_2,$$

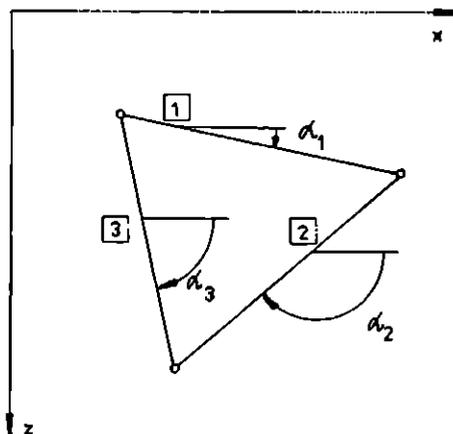
$$\Delta l_3 = (u_3 - u_1) \cdot \cos \alpha_3 + (w_3 - w_1) \cdot \sin \alpha_3.$$

Zapišeme-li geometrické rovnice v maticovém tvaru

$$\begin{matrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ -\cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 & 0 & \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{matrix},$$

získáme geometrickou matici soustavy \underline{B} .

Vidíme, že v m -tém řádku geometrické matice soustavy prutů se ocitly prvky geometrické matice m -tého prutu. Geometrickou maticí soustavy tedy můžeme sestavit přímo z geometrických matic jednotlivých prutů, aniž bychom museli skalárně rozepisovat geometrické rovnice. Prvky geometrické matice m -tého prutu je přitom třeba umístit do m -tého řádku geometrické matice soustavy, a to do těch sloupců, jejichž čísla jsou dána pořadím posunů koncových styčníků daného prutu ve vektoru styčnickových posunů $\underline{\hat{x}}$. Procesu umísťování prvků matice prutu do matice soustavy říkáme lokalizace. Čísla sloupců, do kterých prvky lokalizujeme, jsou tzv. kódové čísla prutu (adresy).

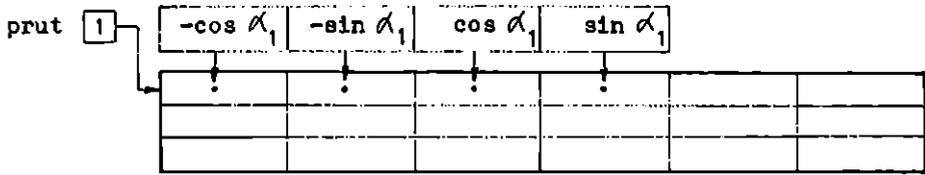


Obr. 3.11

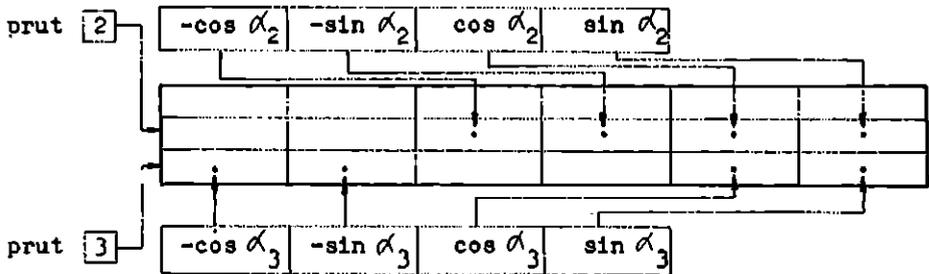
Příklad 3.11

Sestavte geometrickou maticí soustavy prutů na obr.3.10a lokalizací.

Řešení: Koncové posuny prutu [1] u_1, w_1, u_2, w_2 jsou 1., 2., 3. a 4. složkou vektoru styčnickových posunů \hat{f} . Kódovými čísly prutu [1] jsou tedy čísla 1,2,3,4. Prvky geometrické matice prutu [1] proto lokalizujeme do sloupců 1,2,3,4 prvního řádku geometrické matice soustavy:



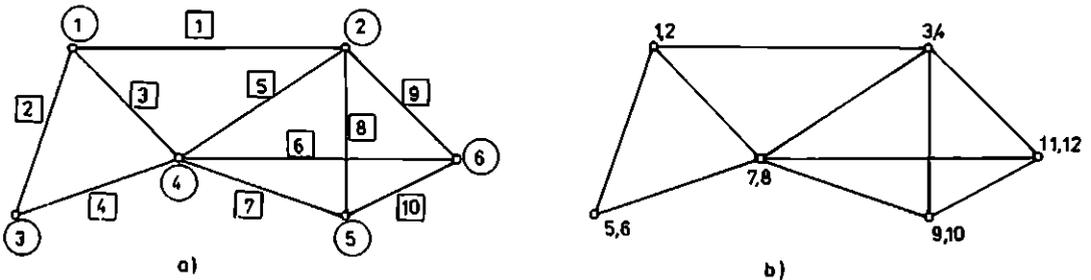
Podobně postupujeme i pro prut [2] (kódová čísla 3,4,5,6) a prut [3] (kódová čísla 1,2,5,6):



Po doplnění neobsazených míst nulami získáme geometrickou matici soustavy \hat{B} shodnou s výsledkem příkladu 3.10.

Kódová čísla prutu udávají pořadí styčnickových posunů koncových styčnicků tohoto prutu ve vektoru styčnickových posunů \hat{f} . Nazveme-li kódovými čísly styčnicků čísla udávající pořadí posunů tohoto styčnicku ve vektoru \hat{f} , lze říci, že kódová čísla prutu vzniknou spojením kódových čísel jeho koncových styčnicků v patřičném pořadí. Postup při určení kódových čísel ilustruje následující příklad.

Příklad 3.12 Určete kódová čísla jednotlivých prutů pro soustavu prutů na obr. 3.12a. (Pruty [6] a [8] se míjejí - nejsou spojeny.)



Obr. 3.12

Řešení: Pro každý prut zvolíme pořadí jeho koncových styčnicků a sestavíme první tři sloupce tabulky prutů (tab.3.8). Styčnickové posuny očís-

lujeme ve stejném pořadí jako styčníky a pořadí posunů přepíšeme k jednotlivým styčnicům (obr.3.12b). V každém styčnicu znamená první (nižší) číslo pořadí vodorovného posunu a druhé (vyšší) číslo pořadí svislého posunu daného styčnicu ve vektoru \hat{f} .

Tím jsme získali kódová čísla styčniců. Pro každý prut nyní opíšeme kódová čísla jeho koncových styčniců v příslušném pořadí do tabulky prutů.

číslo prutu	koncové styčnice		kódová čísla			
1	1	2	1	2	3	4
2	1	3	1	2	5	6
3	1	4	1	2	7	8
4	3	4	5	6	7	8
5	4	2	7	8	3	4
6	4	6	7	8	11	12
7	4	5	7	8	9	10
8	2	5	3	4	9	10
9	2	6	3	4	11	12
10	5	6	9	10	11	12

Tab. 3.8

Při odvození statických rovnic soustavy prutů v rovině vycházíme opět z podmínek rovnováhy styčniců. Napíšeme-li pro každý styčnic silovou podmínku rovnováhy ve vodorovném a svislém směru, získáme lineární vztahy mezi složkami vektorů \hat{f} a \underline{s} , které lze maticově zapsat ve tvaru

$$\hat{f} = \hat{A} \cdot \underline{s} \quad (3.23)$$

kde \hat{A} je statická matice soustavy.

Příklad 3.13 Zapište statické rovnice a sestavte statickou matici soustavy prutů na obr.3.10a.

Řešení: Vnější a vnitřní síly rozkreslíme podle obr.3.13 a zapíšeme podmínky rovnováhy všech sil působících na jednotlivé styčnice:

$$F_{1x} + S_1 \cdot \cos \alpha_1 + S_3 \cdot \cos \alpha_3 = 0$$

$$F_{1z} + S_1 \cdot \sin \alpha_1 + S_3 \cdot \sin \alpha_3 = 0$$

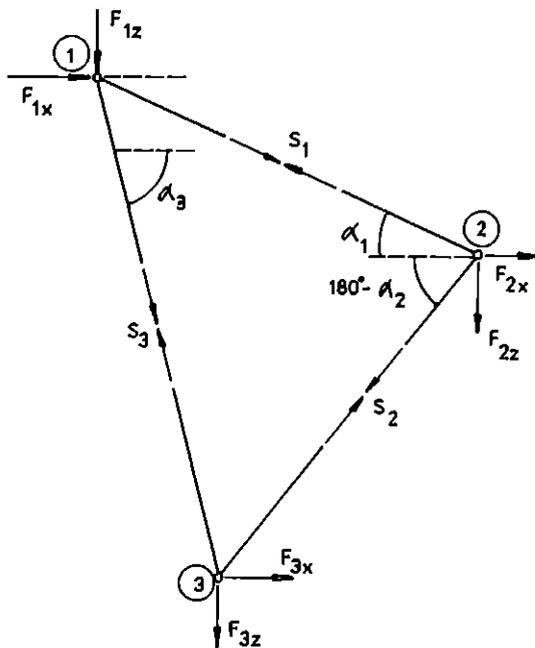
$$F_{2x} - S_1 \cdot \cos \alpha_1 - S_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha_2) = 0$$

$$F_{2z} - S_1 \cdot \sin \alpha_1 + S_2 \cdot \sin(180^\circ - \alpha_2) = 0$$

$$F_{3x} - S_3 \cdot \cos \alpha_3 + S_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha_2) = 0$$

$$F_{3z} - S_3 \cdot \sin \alpha_3 - S_2 \cdot \sin(180^\circ - \alpha_2) = 0$$

Uvědomíme si, že $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$,
 a podmínky rovnováhy přepíšeme do maticového tvaru (3.23):



Obr. 3.13

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_1 & 0 & -\cos \alpha_3 \\ -\sin \alpha_1 & 0 & -\sin \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & -\cos \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_1 & -\sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \sin \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix}$$

Porovnáme-li statickou matici soustavy s geometrickou maticí, která byla sestavena v příkladu 3.10, zjistíme, že jsou opět navzájem transponované. Statickou matici bychom tudíž mohli sestavit také lokalizací, tentokrát by se však prvky statických matic jednotlivých prutů lokalizovaly do sloupců statické matice soustavy.

Fyzikální rovnice pro soustavu prutů v rovině vzniknou stejně jako pro soustavu prutů na přímce pouhým sloučením fyzikálních rovnic jednotlivých prutů. S maticovým tvarem jejich zápisu

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}(t)) \quad (3.24)$$

jsme se seznámili již v článku 3.1.

3.3.2. Matice tuhosti soustavy

Základní rovnice pro rovinnou soustavu prutů mají formálně zcela stejný tvar jako základní rovnice pro soustavu prutů na přímce. Proto i zde platí

$$\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{K}} \cdot \underline{\hat{r}} - \underline{\hat{f}}(t), \quad (3.25)$$

kde $\underline{\hat{K}} = \underline{\hat{B}}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{\hat{B}}$ je matice tuhosti soustavy prutů

a $\underline{\hat{f}}(t) = \underline{\hat{B}}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{e}(t)$ vektor styčnickových sil od teploty.

Příklad 3.14

Vypočítejte matici tuhosti rovinné soustavy prutů z obr.3.14. Všechny tři pruty mají průřezovou plochu 1600 mm^2 a jsou vyrobeny z materiálu o modulu pružnosti 210 GPa.

Řešení: Nejprve vypočteme tuhosti prutů:

$$E = 210 \text{ GPa} = 210 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$$

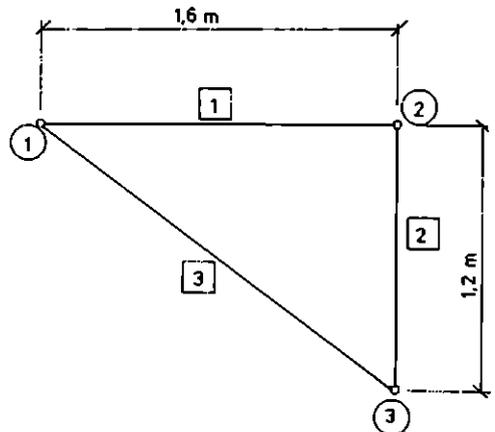
$$A = 1600 \text{ mm}^2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$EA = 210 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 336 \text{ MN}$$

$$l_1 = 1,6 \text{ m} \quad \dots \quad k_1 = \frac{336}{1,6} \text{ MNm}^{-1} = 210 \text{ MNm}^{-1}$$

$$l_2 = 1,2 \text{ m} \quad \dots \quad k_2 = \frac{336}{1,2} \text{ MNm}^{-1} = 280 \text{ MNm}^{-1}$$

$$l_3 = 2,0 \text{ m} \quad \dots \quad k_3 = \frac{336}{2,0} \text{ MNm}^{-1} = 168 \text{ MNm}^{-1}$$



Obr. 3.14

Soustava prutů na obr.3.14 je zvláštním případem soustavy prutů na obr.3.10a. Její geometrickou matici \hat{B} získáme, dosadíme-li do geometrické matice soustavy odvozené v příkladu 3.10 pro obecné hodnoty orientovaných směrových úhlů konkrétní hodnoty směrových kosinů $\cos \alpha_1 = 1$, $\cos \alpha_2 = 0$, $\cos \alpha_3 = 0,8$,
 $\sin \alpha_1 = 0$, $\sin \alpha_2 = 1$, $\sin \alpha_3 = 0,6$.

Matice tuhostí prutů je jak známo diagonální, přičemž na diagonále jsou zepsány tuhosti jednotlivých prutů. Matici tuhosti soustavy tedy můžeme vypočítat násobením podle definice:

$$\hat{K} = \hat{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \hat{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & -0,6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & 168 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \quad \frac{MN}{m}$$

$$= \begin{bmatrix} 317,5 & 80,6 & -210,0 & 0 & -107,5 & -80,6 \\ 80,6 & 60,4 & 0 & 0 & -80,6 & -60,5 \\ -210,0 & 0 & 210,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 280,0 & 0 & -280,0 \\ -107,5 & -80,6 & 0 & 0 & 107,5 & 80,6 \\ -80,6 & -60,5 & 0 & -280,0 & 80,6 & 340,5 \end{bmatrix} \quad MNm^{-1}$$

Výpočet matice tuhosti podle definice byl i pro velmi jednoduchou soustavu tří prutů poměrně pracný. Pro větší soustavy by pracnost výpočtu neúnosně vzrůstala. Například pro soustavu z obr.3.12 by bylo třeba násobit matice typu (12,10), (10,10) a (10,12). Naštěstí existuje daleko efektivnější metoda, která spočívá v sestavení matice tuhosti soustavy lokalizací prvků matic tuhosti jednotlivých prutů. Postup je velmi jednoduchý:

- Kódová čísla prutu se napíší k řádkům i sloupcům matice tuhosti prutu
- a každý prvek se pak lokalizuje do toho řádku a sloupce matice tuhosti soustavy, jehož číslo je dáno kódovým číslem řádku a sloupce, ve kterém se původně (tj. v matici tuhosti prutu) nachází.

Na rozdíl od postupu při sestavování geometrické matice se však nyní může stát, že se do stejného místa matice tuhosti soustavy lokalizuje několik prvků, pocházejících z různých matic tuhosti prutů. Příspěvky od jednotlivých prutů se pak sčítají.

Obecný tvar matice tuhosti taženého-tlačeného prutu v rovině

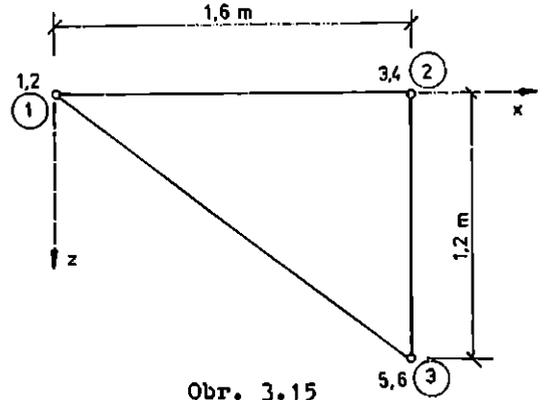
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ & & c^2 & c \cdot s \\ \text{sym} & & & s^2 \end{bmatrix} \cdot k \quad , \quad \text{kde} \quad \begin{array}{l} c = \cos \alpha , \\ s = \sin \alpha , \\ k = EA/l , \end{array} \quad (3.26)$$

byl odvozen již v příkladu 2.10. Pro každý prut musíme do (3.26) dosadit správně jeho tuhost a směrové kosiny, při jejichž výpočtu lze užít vzorců (2.33), (2.34). Všimněte si, že při praktickém výpočtu stačí vyčíslit pouze tři prvky matice tuhosti prutu ($k \cdot c^2$, $k \cdot c \cdot s$, $k \cdot s^2$) a pak již jen vhodně měnit znaménka.

Příklad 3.15

Sestavte matici tuhosti soustavy prutů na obr.3.14 lokalizací pomocí kódových čísel. Tuhosti prutů přeberte z příkladu 3.14.

Řešení: Výpočet pomocných hodnot pro sestavení matic tuhosti jednotlivých prutů lze nejpřehledněji provést v tabulce styčnicků (tab.3.9) a tabulce prutů (tab.3.10). Soustavu souřadnic zavedeme podle obr.3.15 a souřadnice styčnicků zapíšeme do tabulky. Očíslujeme styčnickové posuny a k jednotlivým styčnickům přiřepíšeme jejich kódová čísla.



Obr. 3.15

styčník číslo	souřadnice		kódová čísla
	x	z	
1	0,0	0,0	1 2
2	1,6	0,0	3 4
3	1,6	1,2	5 6

Tab. 3.9

Do tabulky prutů pak pro jednotlivé pruty zapíšeme kódová čísla a souřadnice jejich koncových styčnicků a vypočteme souřadnicové rozdíly, délku prutu a směrové kosiny:

$$\Delta x = x_j - x_i \quad \Delta z = z_j - z_i$$

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$$

$$c = \cos \alpha = \frac{\Delta x}{l} \quad s = \sin \alpha = \frac{\Delta z}{l}$$

prut číslo	koncové styčníky	kódová čísla	geometrické charakteristiky						tuhost				
			x_i	z_i	x_j	z_j	Δx	Δz	l	c	s	EA	k
1	1 2	1 2 3 4	0,0	0,0	1,6	0,0	1,6	0,0	1,6	1,0	0,0	336	210
2	2 3	3 4 5 6	1,6	0,0	1,6	1,2	0,0	1,2	1,2	0,0	1,0	336	280
3	1 3	1 2 5 6	0,0	0,0	1,6	1,2	1,6	1,2	2,0	0,8	0,6	336	168

Tab. 3.10

Na základě údajů z tabulky prutů sestavíme matici tuhosti jednotlivých prutů podle (3.26). K řádkům a sloupcům přiřepíšeme kódová čísla prutu:

1	1	2	3	4	2	3	4	5	6	3	1	2	5	6
1	210	0	-210	0	3	0	0	0	0	1	107,5	80,6	-107,5	-80,6
2	0	0	0	0	4	0	280	0	-280	2	80,6	60,5	-80,6	-60,5
3	-210	0	210	0	5	0	0	0	0	5	-107,5	-80,6	107,5	80,6
4	0	0	0	0	6	0	-280	0	280	6	-80,6	-60,5	80,6	60,5

Jednotlivé prvky matic tuhosti prutů lokalizujeme do matice tuhosti soustavy na pozice určené kódovými čísly:

$\hat{\mathbf{K}}$	1	2	3	4	5	6
1	210 107,5	80,6	-210		-107,5	-80,6
2	80,6	60,5			-80,6	-60,5
3	-210		210			
4				280		-280
5	-107,5	-80,6			107,5	80,6
6	-80,6	-60,5		-280	80,6	280 60,5

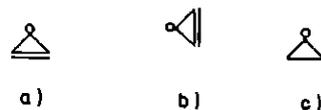
Nulové prvky samozřejmě není třeba lokalizovat. Sečtením příspěvků od jednotlivých prutů a doplněním nul na neobsazené pozice získáme matici tuhosti soustavy. V daném případě se sčítá pouze na pozici (1,1) a (6,6). Výslednou matici proto již explicitně nevypisujeme.

3.4. ROVINNÁ PRUTOVÁ KONSTRUKCE

3.4.1. Základní veličiny a rovnice

Předepsáním vnějších vazeb vznikne z rovinné soustavy prutů rovinná prutová konstrukce.

Nepodepřený kloubový styčník se v rovině může posouvat ve dvou směrech - říkáme, že má dva stupně volnosti. Vnější vazba může odebrat jeden z těchto stupňů volnosti (pak mluvíme o posuvném kloubovém podepření - obr.3.16 a,b), nebo oba stupně volnosti (pak jde o pevné kloubové podepření - obr.3.16c).

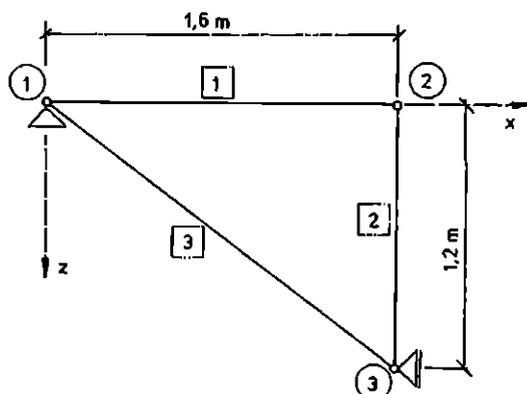


Obr. 3.16

Styčnickové posuny při zkoumání konstrukce opět rozdělíme do vektoru neznámých styčnickových posunů $\underline{\mathbf{r}}$ a vektoru předepsaných styčnickových posunů $\underline{\bar{\mathbf{r}}}$. Například pro konstrukci na obr.3.17 je

$$\underline{\mathbf{r}} = \{u_2, w_2, w_3\}^T,$$

$$\underline{\bar{\mathbf{r}}} = \{\bar{u}_1, \bar{w}_1, \bar{u}_3\}^T.$$



Obr. 3.17

Všimněte si, že složky vektorů \underline{r} , \overline{r} jsou uspořádány ve stejném pořadí jako ve vektoru \hat{r} (vektoru všech styčnickových posunů).

Styčnickové síly rovněž rozdělíme na síly předepsané (zatížení) a neznámé (reakce). Abychom zdůraznili, že neznámé styčnickové síly mají charakter reakcí, budeme je od nynějška označovat písmenem R místo F. Například styčnickové síly ve styčnicku ① konstrukce na obr.3.17 označíme R_{1x} , R_{1z} . Neznámé styčnickové síly sdružíme do vektoru reakcí \underline{r}_r , předepsané styčnickové síly do vektoru zatížení \underline{r} . Pro konstrukci na obr.3.17 je

$$\underline{r}_r = \{R_{1x}, R_{1z}, R_{3x}\}^T, \quad \underline{r} = \{\overline{F}_{2x}, \overline{F}_{2z}, \overline{F}_{3z}\}^T.$$

Dále by bylo možné téměř doslova opakovat vše, co bylo řečeno v článku 3.2. Připomněte si tvar základních rovnic pro konstrukci, definice matice tuhosti konstrukce, vektoru zatížení od teploty a vektoru zatížení od předepsaných posunů. Zopakujte si také postup při řešení staticky určitých úloh a při řešení staticky neurčitých úloh deformační metodou. Vše potřebné naleznete v odstavci 3.2.3.

Příklad 3.16

Sestavte geometrickou tabulku konstrukce na obr.3.17, geometrickou matici konstrukce a geometrickou matici vazeb. Posuďte statickou určitost konstrukce.

Řešení:

Geometrickou tabulku příslušné soustavy prutů sestavíme na základě výsledků příkladu 3.10. Podobně jako v příkladu 3.14 dosadíme konkrétní hodnoty směrových kosinů

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= 1, \quad \sin \alpha_1 = 0, \\ \cos \alpha_2 &= 0, \quad \sin \alpha_2 = 1, \\ \cos \alpha_3 &= 0,8, \quad \sin \alpha_3 = 0,6. \end{aligned}$$

	u_1	w_1	u_2	w_2	u_3	w_3	
Δl_1	-1	0	1	0	0	0	S_1
Δl_2	0	0	0	-1	0	1	S_2
Δl_3	-0,8	-0,6	0	0	0,8	0,6	S_3
	F_{1x}	F_{1z}	F_{2x}	F_{2z}	F_{3x}	F_{3z}	

Tab. 3.11

Geometrickou tabulku konstrukce získáme přeskupením sloupců geometrické tabulky soustavy tak, aby sloupce odpovídající předepsaným styčnickovým posunům následovaly až za sloupce odpovídajícími neznámým styčnickovým posunům.

	u_2	w_2	w_3	\overline{u}_1	\overline{w}_1	\overline{u}_3	
Δl_1	1	0	0	-1	0	0	S_1
Δl_2	0	-1	1	0	0	0	S_2
Δl_3	0	0	0,6	-0,8	-0,6	0,8	S_3
	F_{2x}	F_{2z}	F_{3z}	R_{1x}	R_{1z}	R_{3x}	

Tab. 3.12

Z geometrické tabulky konstrukce (tab.3.12) snadno vyčteme

geometrickou matici konstrukce a geometrickou matici vazeb:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \underline{\overline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Geometrická (a tedy i statická) matice konstrukce je čtvercová, takže konstrukce je staticky určitá. Na první pohled je rovněž vidět, že geometrická matice konstrukce je regulární - výjimečný případ nenastává.

3.4.2. Matice tuhosti konstrukce

Příklad 3.17 Vypočtete (podle definice) matici tuhosti konstrukce na obr.3.17. Tuhosti prutů přeberte z příkladu 3.14.

Řešení: Podle definice je matice tuhosti konstrukce $\underline{K} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}$, kde \underline{B} je geometrická matice konstrukce a \underline{D} matice tuhostí prutů. Geometrickou matici konstrukce jsme sestavili v předcházejícím příkladu, matice tuhostí prutů je diagonální s tuhostmi prutů $k_1 = 210 \text{ MNm}^{-1}$, $k_2 = 280 \text{ MNm}^{-1}$ a $k_3 = 168 \text{ MNm}^{-1}$ na diagonále. Je tedy

$$\underline{K} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & 168 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & -280 & 280 \\ 0 & 0 & 100,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & -280 \\ 0 & -280 & 340,5 \end{bmatrix} \text{ MNm}^{-1} .$$

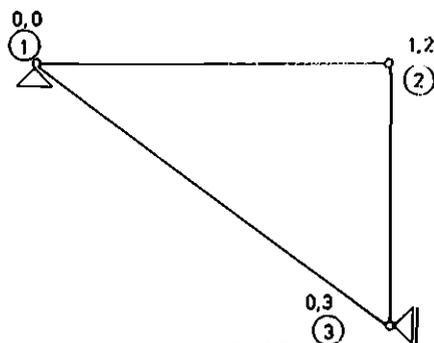
Poznámka: Matici tuhosti konstrukce jsme mohli získat také redukcí matice tuhosti příslušné soustavy prutů, která byla sestavena v příkladu 3.15. Vyškrtneme-li v této matici sloupce odpovídající předepsaným styčnickovým posunům a řádky odpovídající neznámým styčnickovým silám (tj. první, druhý a pátý řádek a sloupec), získáme vskutku výsledek shodný s výsledkem příkladu 3.17.

Matice tuhosti konstrukce lze získat podobně jako matici tuhosti soustavy lokalizací prvků matice tuhosti jednotlivých prutů. Podle předchozí poznámky stačí spočítat pouze prvky v těch řádcích a sloupcích matice tuhosti soustavy, které odpovídají předepsaným silám a neznámým posunům.

Uvědomte si, že 1-tý sloupec matice tuhosti konstrukce odpovídá 1-té složce vektoru neznámých styčnickových posunů \underline{r} , zatímco 1-tý sloupec matice tuhosti soustavy odpovídal 1-té složce vektoru všech styčnickových posunů $\hat{\underline{r}}$. Chceme-li tedy sestavit matici tuhosti konstrukce lokalizací pomocí kódových čísel, musejí kódová čísla styčnicku označovat pořadí vodorovného a svislého posunu tohoto styčnicku ve vektoru neznámých styčnickových posunů. Je-li styčnick podepřen, je v závislosti na typu vazby předepsán jeho vodorovný nebo svislý posun (nebo oba). Předepsaný posun není složkou vektoru neznámých styčnickových posunů, přiřadíme mu proto kódové číslo 0. Prvky matice tuhosti prutu ležící v řádku nebo sloupci s nulovým kódovým číslem pak při lokalizaci prostě přeskočíme.

Příklad 3.18 Sestavte matici tuhosti konstrukce na obr.3.17 lokalizací. Tuhosti prutů přeberte z příkladu 3.14.

Řešení: V příkladu 3.15 jsme sestavili lokalizační pomocí kódových čísel matici tuhosti odpovídající soustavě prutů z obr.3.14. Postup při sestavování matice tuhosti konstrukce se bude lišit pouze přidělením kódových čísel jednotlivým styčnickovým posunům. Kódová čísla označující pořadí ve vektoru neznámých styčnickových posunů jsou připsána nad čísla styčníků na obr.3.18. První číslo vždy odpovídá vodorovnému posunu, druhé svislému posunu.



Obr. 3.18

Matice tuhosti jednotlivých prutů můžeme převzít z příkladu 3.15, řádky a sloupce však opatříme novými kódovými čísly. Do matice tuhosti konstrukce lokalizujeme jen ty prvky, pro které je kódové číslo řádku i sloupce nenulové. Řádky a sloupce s nulovým kódovým číslem tedy můžeme předem škrtnout.

1	0	0	1	2
0	210	0	-210	0
0	0	0	0	0
1	-210	0	210	0
2	0	0	0	0

2	1	2	0	3
1	0	0	0	0
2	0	280	0	-280
0	0	0	0	0
3	0	-280	0	280

3	0	0	0	3
0	107,5	80,6	-107,5	-80,6
0	80,6	60,5	-80,6	-60,5
0	-107,5	-80,6	107,5	80,6
3	-80,6	-60,5	80,6	60,5

K	1	2	3
1	210		
2		280	-280
3		-280	280 60,5

Sečtením příspěvků od jednotlivých prutů a doplněním nul na neobsazené pozice získáme hledanou matici tuhosti konstrukce

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & -280 \\ 0 & 0 & 340,5 \end{bmatrix} \text{ MNm}^{-1} .$$

Příklad 3.19

Jaké osové síly vzniknou v konstrukci na obr.3.17 zatížené podle obr.3.19 ? Jak se posunou její styčníky ?

Užijte a) postup pro řešení staticky určitých úloh,

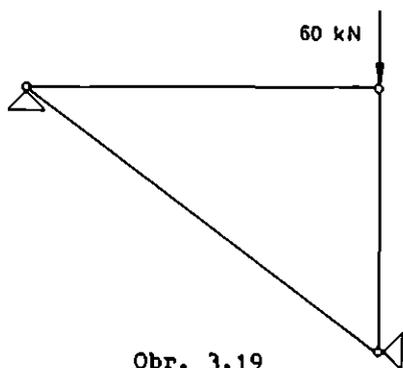
b) deformační metodu.

Tuhosti prutů jsou stejně jako v příkladu 3.14

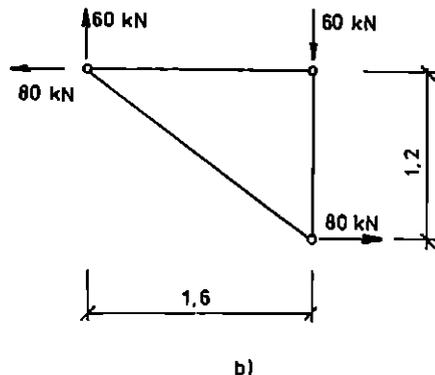
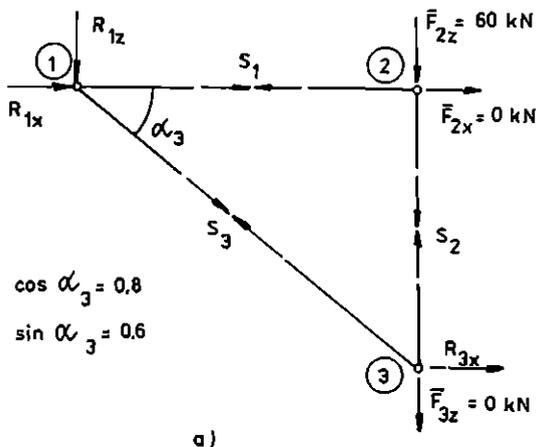
$$k_1 = 210 \text{ MNm}^{-1},$$

$$k_2 = 280 \text{ MNm}^{-1},$$

$$k_3 = 168 \text{ MNm}^{-1}.$$



Obr. 3.19



Obr. 3.20

a) Řešení staticky určité úlohy

A) Výpočet osových sil a reakcí ze statických rovnic

Zatížení, reakce a osové síly rozkreslíme podle obr.3.20a. Z podmínek rovnováhy styčniců v nepodepřených směrech můžeme vypočítat osové síly:

$$\underline{B}^T \cdot \underline{s} = \underline{F} \Rightarrow \underline{s}$$

$$\textcircled{2} \quad \rightarrow \quad S_1 = \bar{F}_{2x}$$

$$S_1 = \bar{F}_{2x} = 0$$

$$\downarrow \quad -S_2 = \bar{F}_{2z}$$

$$S_2 = -\bar{F}_{2z} = -60 \text{ kN}$$

$$\textcircled{3} \quad \downarrow \quad S_2 + 0,6 \cdot S_3 = \bar{F}_{3z}$$

$$S_3 = \frac{1}{0,6} \cdot (\bar{F}_{3z} - S_2) = 100 \text{ kN}$$

Reakce určíme z podmínek rovnováhy styčniců v podepřených směrech:

$$\underline{f}_R = \underline{B}^T \cdot \underline{s}$$

$$\textcircled{1} \quad \rightarrow \quad R_{1x} = -S_1 - 0,8 \cdot S_3 = -80 \text{ kN}$$

$$\downarrow \quad R_{1z} = -0,6 \cdot S_3 = -60 \text{ kN}$$

$$\textcircled{3} \quad \rightarrow \quad R_{3x} = 0,8 \cdot S_3 = 80 \text{ kN}$$

Osové síly i reakce jsme vypočetli ze statických rovnic konstrukce, tj. z podmínek rovnováhy styčniců. Podmínky rovnováhy konstrukce jako celku můžeme využít ke kontrole správnosti výpočtu:

$$\Sigma \rightarrow R_{1x} + \bar{F}_{2x} + R_{3x} = (-80 + 0 + 80) \text{ kN} = 0$$

$$\downarrow R_{1z} + \bar{F}_{2z} + \bar{F}_{3z} = (-60 + 60 + 0) \text{ kN} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 1,6 \cdot R_{1z} + 1,2 \cdot R_{3x} = (-1,6 \cdot 60 + 1,2 \cdot 80) \text{ kNm} = 0$$

Vnější síly působící na konstrukci (obr.3.20b) jsou tedy skutečně v rovnováze.

B) Výpočet deformací z fyzikálních rovnic

$$\underline{D} \cdot \underline{e} = \underline{s} + \underline{D} \cdot \underline{e}(t) \Rightarrow \underline{e}$$

$$k_1 \cdot \Delta l_1 = S_1 \quad \Delta l_1 = \frac{S_1}{k_1} = 0$$

$$k_2 \cdot \Delta l_2 = S_2 \quad \Delta l_2 = \frac{S_2}{k_2} = \frac{-60 \cdot 10^3}{280 \cdot 10^6} \text{ m} = -0,214 \text{ mm}$$

$$k_3 \cdot \Delta l_3 = S_3 \quad \Delta l_3 = \frac{S_3}{k_3} = \frac{100 \cdot 10^3}{168 \cdot 10^6} \text{ m} = 0,595 \text{ mm}$$

C) Výpočet posunů z geometrických rovnic

$$\underline{B} \cdot \underline{r} = \underline{e} - \underline{B} \cdot \underline{r} \Rightarrow \underline{r}$$

$$u_2 = \Delta l_1 \quad u_2 = \Delta l_1 = 0$$

$$-w_2 + w_3 = \Delta l_2$$

$$0,6 w_3 = \Delta l_3$$

$$w_3 = \frac{1}{0,6} \cdot \Delta l_3 = \frac{0,595}{0,6} \text{ mm} = 0,992 \text{ mm}$$

$$w_2 = w_3 - \Delta l_2 = (0,992 + 0,214) \text{ mm} = 1,206 \text{ mm}$$

Poznámka: Geometrickou maticí konstrukce \underline{B} jsme převzeli z příkladu 3.16.

b) Řešení deformační metodou

Matice tuhosti konstrukce byla sestavena v příkladech 3.17 a 3.18. Teplotní změny a předepsané posuny jsou nulové, takže na pravé straně rovnic deformační metody bude pouze vektor zatížení.

A) Výpočet neznámých styčnickových posunů z rovnic deformační metody

$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{\bar{F}} \Rightarrow \underline{r}$$

Dosaďme-li tuhosti v MNm^{-1} , síly v kN, vyjdou posuny v mm.

$$\begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 280 & -280 \\ 0 & -280 & 340,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2z} \\ \bar{F}_{3z} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 210 \cdot u_2 &= 0 & u_2 &= 0 \\ 280 \cdot w_2 - 280 \cdot w_3 &= 60 & \Rightarrow & w_2 = 1,206 \text{ mm} \\ -280 \cdot w_2 + 340,5 \cdot w_3 &= 0 & & w_3 = 0,992 \text{ mm} \end{aligned}$$

B) výpočet deformací dosazením do geometrických rovnic

$$\underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{B} \cdot \underline{\bar{r}}$$

$$\Delta l_1 = u_2 = 0$$

$$\Delta l_2 = -w_2 + w_3 = (-1,206 + 0,992) \text{ mm} = -0,214 \text{ mm}$$

$$\Delta l_3 = 0,6 \cdot w_3 = 0,6 \cdot 0,992 \text{ mm} = 0,595 \text{ mm}$$

C) Výpočet osových sil dosažením do fyzikálních rovnic

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)})$$

$$S_1 = k_1 \cdot \Delta l_1 = 0$$

$$S_2 = k_2 \cdot \Delta l_2 = 280 \cdot 10^6 \cdot (-0,214) \cdot 10^{-3} \text{ N} = -59,9 \text{ kN}$$

$$S_3 = k_3 \cdot \Delta l_3 = 168 \cdot 10^6 \cdot 0,595 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 100,0 \text{ kN}$$

D) Výpočet reakcí dosažením do statických rovnic

by proběhl stejně jako v bodu A) postupu pro řešení staticky určitých úloh.

Výsledky: Prut [1] nebude namáhán, v prutu [2] vznikne tlaková osová síla 60 kN a v prutu [3] tahová osová síla 100 kN. Styčnick [2] se posune svisle o 1,2 mm, styčnick [3] rovněž svisle o 1,0 mm.

Poznámky: 1) Výpočet podobných úloh je rozumné provádět s přesností asi na 3-4 platná místa. Vlivem zaokrouhlovacích chyb jsme při výpočtu deformační metodou získali osovou sílu S_2 s chybou 0,1 kN. Taková chyba je z inženýrského hlediska zanedbatelná, neboť činí méně než 0,2 %. Chyby způsobené nepřesnou znalostí zatížení, geometrických a materiálových charakteristik konstrukce apod. jsou zpravidla mnohem větší.

2) Ve výsledcích jsme posuny uvedli zaokrouhlené na desetiny milimetru, neboť s větší přesností je běžnými přístroji těžko lze měřit. V průběhu výpočtu ovšem pracujeme s přesnějšími hodnotami posunů, protože deformace a následně i osové síly počítáme vlastně z rozdílu posunů. Kdybychom například při výpočtu protažení Δl_2 použili zaokrouhlené hodnoty $w_2 = 1,2 \text{ mm}$, $w_3 = 1,0 \text{ mm}$, lišila by se takto vypočtená osová síla

$$\begin{aligned} S_2 &= k_2 \cdot \Delta l_2 = k_2 \cdot (w_3 - w_2) = 280 \cdot 10^6 \cdot (1,0 - 1,2) \cdot 10^{-3} \text{ N} = \\ &= -56,0 \text{ kN} \end{aligned}$$

od přesné hodnoty $S_2 = -60 \text{ kN}$ o téměř 7 %.

4. PRINCIPY MECHANIKY

4.1. PRINCIP VIRTUÁLNÍCH POSUNUTÍ

4.1.1. Princip virtuálních posunutí pro soustavy tuhých prvků

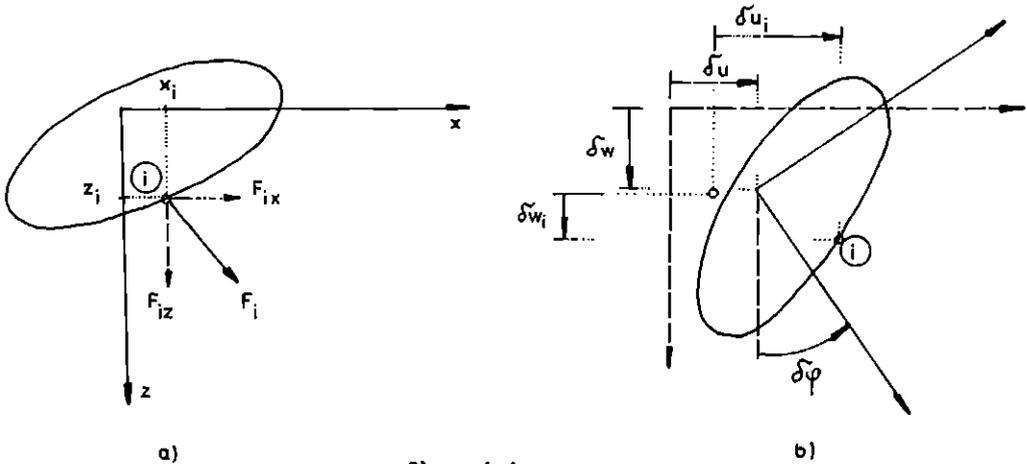
Formulaci principu virtuálních posunutí (PVP) uvedeme nejprve jen pro soustavy tuhých prvků, tj. tuhých desek v rovině nebo tuhých těles v prostoru:

- Vnější síly působící na soustavu tuhých prvků jsou v rovnováze
- právě tehdy, když
- virtuální práce těchto sil je při libovolném virtuálním přemístění nulová.

Virtuálním přemístěním přitom rozumíme myšlenou nekonečně malou změnu polohy jednotlivých prvků soustavy. Pracujeme-li se soustavou tuhých prvků, nemůže při virtuálním přemístění dojít k deformaci prvků. Virtuální přemístění každého tuhého prvku je proto charakterizováno konečným počtem parametrů, které odpovídají stupňům volnosti prvku.

Příklad 4.1 Pro tuhou desku v rovině ukažte, že PVP je ekvivalentní s běžnými podmínkami rovnováhy.

Řešení: Virtuální přemístění tuhé desky v rovině lze složit například z virtuálního pootočení kolem zvoleného počátku souřadnic o úhel $\delta\varphi$ a virtuálního posunutí o δu ve směru osy x a o δw ve směru osy z (obr.4.1).



Obr. 4.1

Označme \bar{F}_{ix} , \bar{F}_{iz} , $i = 1, 2, \dots, n$, složky jednotlivých sil působících na desku a x_i , z_i , $i = 1, 2, \dots, n$ souřadnice jejich působišť (obr.4.1a). Posunou-li se tato působišť při virtuálním přemístění desky o δu_i ve vodorovném a o δw_i ve svislém směru (obr.4.1b), vykonají síly působící na desku virtuální práci

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_i (F_{1x} \cdot \delta u_1 + F_{1z} \cdot \delta w_1) \quad (4.1)$$

Virtuální posunutí $\delta u_1, \delta w_1, i = 1, 2, \dots, n$, však nejsou navzájem nezávislá. Podle dodatku C je lze vyjádřit v závislosti na veličinách $\delta u, \delta w, \delta \varphi$, charakterizujících virtuální přemístění celé desky (obr.4.1b):

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \delta u + z_1 \cdot \delta \varphi, \\ \delta w_1 &= \delta w - x_1 \cdot \delta \varphi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vztah pro výpočet virtuální práce (4.1) lze s uvážením (4.2) upravit na tvar

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \sum_i [F_{1x} \cdot (\delta u + z_1 \cdot \delta \varphi) + F_{1z} \cdot (\delta w - x_1 \cdot \delta \varphi)] = \\ &= \sum_i F_{1x} \cdot \delta u + \sum_i F_{1z} \cdot \delta w + \sum_i (F_{1x} \cdot z_1 - F_{1z} \cdot x_1) \cdot \delta \varphi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Má-li pro libovolné virtuální přemístění (tj. pro libovolnou kombinaci hodnot $\delta u, \delta w, \delta \varphi$) platit $\delta W_{\text{ext}} = 0$, musí být

$$\begin{aligned} \sum_i F_{1x} &= 0, \\ \sum_i F_{1z} &= 0, \\ \sum_i (F_{1x} \cdot z_1 - F_{1z} \cdot x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

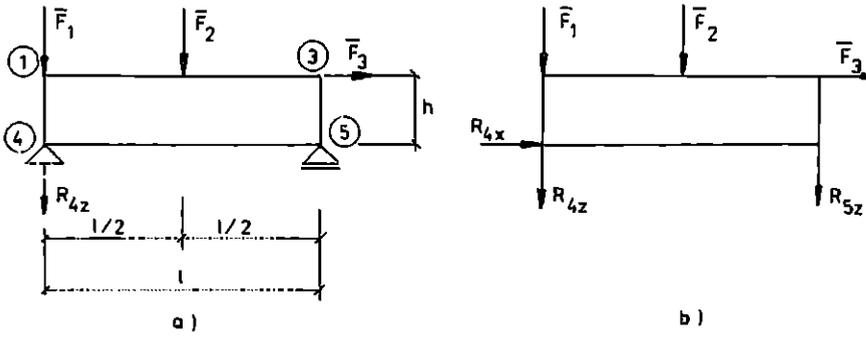
První dvě z rovnic (4.4) představují silové podmínky rovnováhy všech sil působících na tuhou desku, třetí rovnice je momentovou podmínkou rovnováhy zapsanou k počátku souřadnic.

Z podmínky nulovosti virtuální práce jsme tedy odvodili běžné podmínky rovnováhy tuhé desky v rovině (dvě silové a jednu momentovou). Lze ovšem postupovat i obráceně: Jsou-li podmínky rovnováhy (4.4) splněny, je zřejmé pro libovolnou kombinaci hodnot $\delta u, \delta w, \delta \varphi$ výraz na pravé straně (4.3) roven nule, neboli virtuální práce je nulová při libovolném virtuálním přemístění.

Připustíme-li zcela obecné virtuální přemístění, získáme aplikací PVP tytéž rovnice jako sestavením obvyklých podmínek rovnováhy. Užitečnost PVP však spočívá především v tom, že použijeme-li vhodné speciálně zvolené virtuální přemístění, můžeme získat podmínku rovnováhy ve výhodném tvaru, např. podmínku obsahující jen jedinou neznámou sílu (reakci).

Příklad 4.2 Aplikací PVP sestavte podmínku rovnováhy pro výpočet reakce R_{4z} tuhé desky na obr.4.2a.

Řešení: Všechny vnější síly (zatižení i reakce) působící na desku jsou vyznačeny na obr.4.2b. Kdybychom desce udělili zcela obecné virtuální přemístění popsané třemi nezávislými parametry, získali bychom podobně



Obr. 4.2

jako v předcházejícím příkladu tři podmínky rovnováhy, ze kterých bychom mohli vypočítat tři neznámé složky reakcí R_{4x} , R_{4z} a R_{5z} .

Zajímá-li nás však pouze jediná složka reakcí, stačí sestavit jedinou podmínku rovnováhy, obsahující z neznámých reakcí pouze tu, kterou chceme vypočítat. Pvp dává dobrý návod, jak tuto podmínku sestavit. Stačí totiž udělit desce takové virtuální přemístění, při kterém ty složky reakcí, jež nás nezajímají, nekonejí virtuální práci. Posuny působišť těchto reakcí ve směru jejich paprsků musí být tudíž nulové, což odpovídá podepření příslušnými vazbami podle obr.4.3. Můžeme si též představit, že na podepřené konstrukci uvolníme pouze tu vazbu, která odpovídá hledané složce reakcí, a virtuální přemístění udělíme tak, aby bylo v souladu se zbylými vazbami. V daném případě se jedná o virtuální pootočení kolem bodu ⑤ o úhel $\delta\varphi$, jemuž odpovídají virtuální posuny působišť jednotlivých vnějších sil



Obr. 4.3

$$\begin{aligned} \delta w_1 &= 1 \cdot \delta\varphi, & \delta w_2 &= \frac{1}{2} \cdot \delta\varphi, & \delta u_3 &= -h \cdot \delta\varphi, \\ \delta u_4 &= 0, & \delta w_4 &= 1 \cdot \delta\varphi, & \delta w_5 &= 0. \end{aligned}$$

Virtuální práce při tomto virtuálním přemístění

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \bar{F}_1 \cdot \delta w_1 + \bar{F}_2 \cdot \delta w_2 + \bar{F}_3 \cdot \delta u_3 + \\ &+ R_{4x} \cdot \delta u_4 + R_{4z} \cdot \delta w_4 + R_{5z} \cdot \delta w_5 = \\ &= \bar{F}_1 \cdot 1 \cdot \delta\varphi + \bar{F}_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta\varphi - \bar{F}_3 \cdot h \cdot \delta\varphi + R_{4z} \cdot 1 \cdot \delta\varphi = \\ &= (\bar{F}_1 \cdot 1 + \bar{F}_2 \cdot \frac{1}{2} - \bar{F}_3 \cdot h + R_{4z} \cdot 1) \cdot \delta\varphi \end{aligned}$$

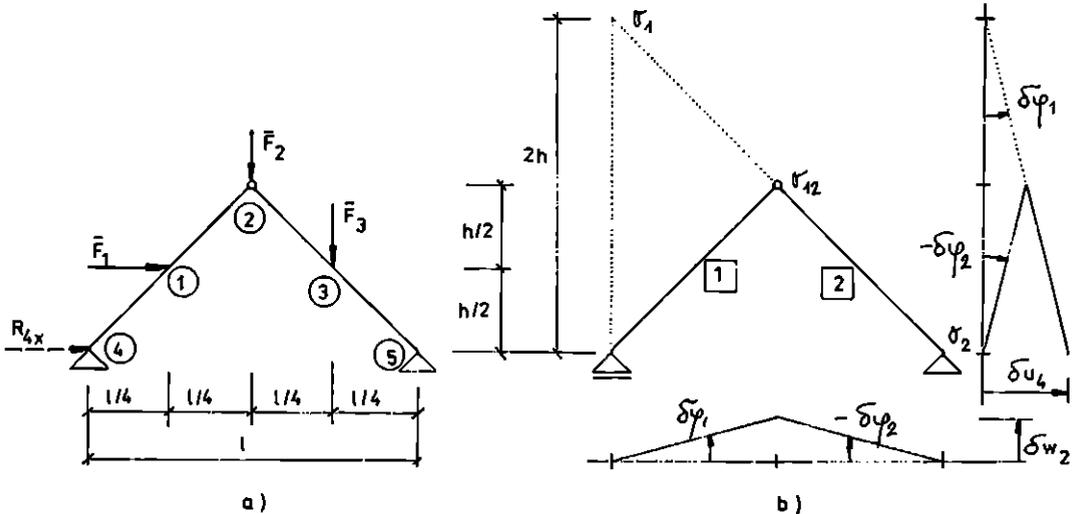
musí být podle Pvp pro libovolné $\delta\varphi$ rovna nule. Nutně tedy musí být

$$\bar{F}_1 \cdot 1 + \bar{F}_2 \cdot \frac{1}{2} - \bar{F}_3 \cdot h + R_{4z} \cdot 1 = 0, \quad (4.5)$$

což je hledaná podmínka rovnováhy obsahující jedinou neznámou -
 - reakci R_{4x} .

Rovnici (4.5) jsme mohli získat také jako momentovou podmínku rovnováhy k bodu (5). Postup využívající Pvp se může zdát v daném případě zbytečně komplikovaný. Při řešení složitějších úloh však zdaleka ne vždy lze interpretovat rovnici odvozenou aplikací Pvp jako názorně představitelnou podmínku rovnováhy. Tuto skutečnost dokládá následující příklad.

Příklad 4.3 Aplikací Pvp sestavte podmínku rovnováhy pro výpočet reakce R_{4x} trojkloubového oblouku na obr.4.4a.

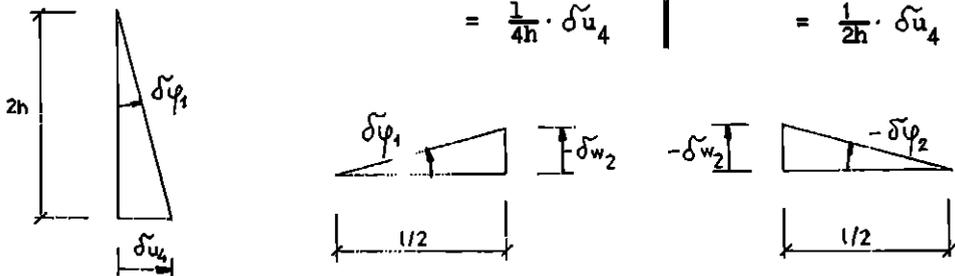


Obr. 4.4

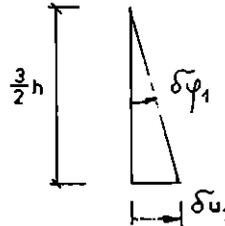
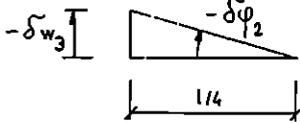
Řešení: Odstraněním vazby odpovídající hledané reakci, tj. umožněním vodorovného posunu v levé podpoře, vznikne z konstrukce mechanismus s jedním stupněm volnosti, jehož virtuální přemístění lze charakterizovat jedním parametrem, např. virtuálním posunem δu_4 levé podpory. Podle zásad uvedených v dodatku C najdeme absolutní středy otáčení o_1, o_2 tuhých prvků [1], [2], z nichž je mechanismus složen a relativní střed otáčení o_{12} (obr.4.4b). Podle geometrických vztahů platných pro malé rotace (viz dodatek C) vyjádříme virtuální pootočení prvků [1], [2] a virtuální posuny působišť jednotlivých vnějších sil v závislosti na vybraném parametru δu_4 :

$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{2h} \cdot \delta u_4 \quad \left| \quad -\delta w_2 = \frac{1}{2} \cdot \delta\varphi_1 = \left| \quad -\delta\varphi_2 = \frac{1}{1/2} (-\delta w_2) \right. \right.$$

$$= \frac{1}{4h} \cdot \delta u_4 \quad \left| \quad = \frac{1}{2h} \cdot \delta u_4 \right.$$



$$\delta w_3 = \frac{1}{4} \cdot \delta \varphi_2 = -\frac{1}{8h} \cdot \delta u_4 \quad \parallel \quad \delta u_1 = \frac{3}{2} \cdot h \cdot \delta \varphi_1 = \frac{3}{4} \cdot \delta u_4$$



Připomeňme, že posuny jsou kladné doprava a dolů, pootočení proti smyslu hodinových ručiček.

Virtuální práci vnějších sil nyní vyjádříme v závislosti na vybraném parametru δu_4 :

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \bar{F}_1 \cdot \delta u_1 + \bar{F}_2 \cdot \delta w_2 + \bar{F}_3 \cdot \delta w_3 + R_{4x} \cdot \delta u_4 = \\ &= \bar{F}_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \delta u_4 - \bar{F}_2 \cdot \frac{1}{4h} \cdot \delta u_4 - \bar{F}_3 \cdot \frac{1}{8h} \cdot \delta u_4 + R_{4x} \cdot \delta u_4 = \\ &= \left(\frac{3}{4} \cdot \bar{F}_1 - \frac{1}{4h} \cdot \bar{F}_2 - \frac{1}{8h} \cdot \bar{F}_3 + R_{4x} \right) \cdot \delta u_4 \end{aligned}$$

Podle FVP musí být $\delta W_{\text{ext}} = 0$ pro libovolné δu_4 , takže nutně

$$\frac{3}{4} \cdot \bar{F}_1 - \frac{1}{4h} \cdot \bar{F}_2 - \frac{1}{8h} \cdot \bar{F}_3 + R_{4x} = 0 \quad (4.6)$$

Rovnice (4.6) je hledanou podmínkou rovnováhy obsahující jedinou neznámou - reakci R_{4x} . Snadno však ověříte, že ji nelze získat jako jednoduchou podmínku rovnováhy celé konstrukce nebo některé její části. Klasickým způsobem by tedy bylo třeba při odvozování rovnice (4.6) kombinovat několik jednoduchých podmínek rovnováhy. Princip virtuálních posunutí umožňuje tuto rovnici sestavit přímo, aniž bychom museli přemýšlet o tom, které podmínky rovnováhy kombinovat a jak z nich vyloučit ostatní neznámé.

4.1.2. Princip virtuálních posunutí pro soustavy poddajných prvků

Princip virtuálních posunutí lze zobecnit pro soustavy složené z poddajných prvků, při jejichž virtuálním přemístění může dojít i k jejich deformaci:

- Vnější síly působící na soustavu poddajných prvků jsou v rovnováze s vnitřními silami
- právě tehdy, když
- virtuální práce vnějších sil je při libovolném virtuálním přemístění rovna virtuální práci vnitřních sil na odpovídajících virtuálních deformacích.

Virtuální deformace jsou myšlené nekonečně malé deformace, ke kterým by došlo při virtuálním přemístění soustavy. Zkoumáme-li speciálně soustavu taže-

ných - tlačných prutů, stačí se omezit na takové virtuální stavy, při kterých dochází pouze k rovnoměrnému protahování či stlačování jednotlivých prutů. Virtuální přemístění lze pak popsat vektorem virtuálních styčnickových posunů $\underline{\delta \hat{r}}$, jehož složkami jsou virtuální posuny jednotlivých styčnicků ve směru souřadnicových os, a virtuální deformaci vektorem virtuálních deformací $\underline{\delta \tilde{e}}$, jehož složkami jsou virtuální protažení jednotlivých prutů. Závislost virtuálních deformací na virtuálních přemístěních

$$\underline{\delta \tilde{e}} = \hat{\underline{B}} \cdot \underline{\delta \hat{r}} \quad (4.7)$$

je dána týmiž geometrickými rovnicemi, jako závislost skutečných deformací na skutečných přemístěních.

Virtuální práce vnějších sil δW_{ext} je myšlená práce, kterou by vykonaly skutečné vnější síly na virtuálních přemístěních. V případě soustavy tažených-tlačných prutů tuto práci konají skutečné styčnickové síly $\underline{\hat{f}}$ na virtuálních styčnickových posunech $\underline{\delta \hat{r}}$. Je tedy

$$\delta W_{\text{ext}} = \underline{\hat{f}}^T \cdot \underline{\delta \hat{r}} \quad (4.8)$$

Virtuální práce vnitřních sil δW_{int} je myšlená práce, kterou by vykonaly skutečné vnitřní síly na virtuálních deformacích. V případě soustavy tažených-tlačných prutů tuto práci konají skutečné osové síly \underline{s} na virtuálních protaženích $\underline{\delta \tilde{e}}$. Je tedy

$$\delta W_{\text{int}} = \underline{s}^T \cdot \underline{\delta \tilde{e}} \quad (4.9)$$

Podmínku rovnosti virtuální práce vnějších a vnitřních sil

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \quad (4.10)$$

lze pro soustavu tažených-tlačných prutů s uvažováním (4.8) a (4.9) zapsat ve tvaru

$$\underline{\hat{f}}^T \underline{\delta \hat{r}} = \underline{s}^T \underline{\delta \tilde{e}} \quad (4.11)$$

Dosadíme-li do (4.11) vyjádření virtuálních deformací pomocí virtuálních přemístění podle (4.7), získáme po úpravě podmínku

$$(\underline{\hat{f}}^T - \underline{s}^T \cdot \hat{\underline{B}}) \cdot \underline{\delta \hat{r}} = 0 \quad (4.12)$$

která má podle Fvp být splněna pro libovolné virtuální přemístění, tj. pro libovolný vektor $\underline{\delta \hat{r}}$. Výraz v závorce tedy nutně musí být roven nulovému vektoru, tj. musí platit

$$\underline{\hat{f}}^T = \underline{s}^T \cdot \hat{\underline{B}} \quad (4.13)$$

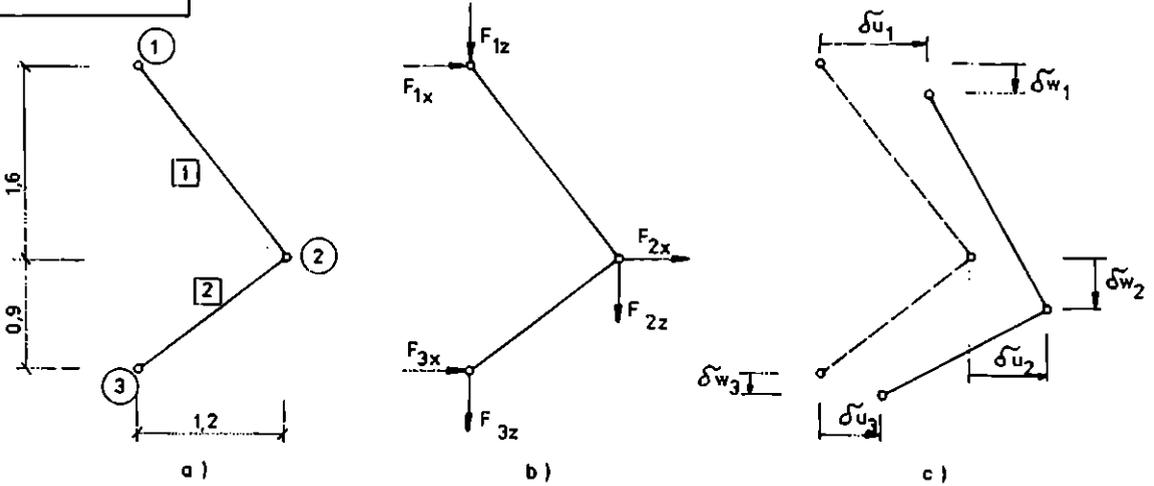
neboli

$$\underline{\hat{f}} = \hat{\underline{B}}^T \cdot \underline{s} \quad (4.14)$$

Rovnice (4.14) jsou ovšem statickými rovnicemi soustavy. Ukázali jsme, že tyto rovnice lze odvodit z principu virtuálních posunutí. Opačným postupem by bylo možno dokázat, že jsou-li splněny rovnice (4.14), je pro libovolné virtuální přemístění virtuální práce vnějších sil rovna virtuální práci vnitřních sil. Princip virtuálních posunutí je tedy ekvivalentní se statickými rovnicemi. Zároveň jsme také ukázali, proč je statická matice transponovaná ke geometrické.

Příklad 4.4

Aplikací PVP odvoďte statické rovnice pro soustavu na obr.4.5a.



Obr. 4.5

Řešení: Virtuální práci vnějších sil

$$\delta W_{\text{ext}} = F_{1x} \cdot \delta u_1 + F_{1z} \cdot \delta w_1 + F_{2x} \cdot \delta u_2 + F_{2z} \cdot \delta w_2 + F_{3x} \cdot \delta u_3 + F_{3z} \cdot \delta w_3$$

konejší styčnickové síly (obr.4.5b) na virtuálních styčnickových posunech (obr.4.5c), virtuální práci vnitřních sil

$$\delta W_{\text{int}} = S_1 \cdot \delta \Delta l_1 + S_2 \cdot \delta \Delta l_2$$

konejší osové síly na virtuálních protaženích prutů. Virtuální protažení lze vyjádřit v závislosti na virtuálních styčnickových posunech pomocí geometrických rovnic (viz (2.44))

$$\delta \Delta l_1 = (\delta u_2 - \delta u_1) \cdot 0,6 + (\delta w_2 - \delta w_1) \cdot 0,8$$

$$\delta \Delta l_2 = (\delta u_3 - \delta u_2) \cdot (-0,8) + (\delta w_3 - \delta w_2) \cdot 0,6$$

Do obecného tvaru geometrické rovnice taženého-tlačeného prutu v rovině (2.44) jsme přitom dosadili

pro prut $\boxed{1} = \textcircled{1} - \textcircled{2}$ $\cos \alpha = \frac{1,2}{2,0} = 0,6$, $\sin \alpha = \frac{1,6}{2,0} = 0,8$

a pro prut $\boxed{2} = \textcircled{2} - \textcircled{3}$ $\cos \alpha = \frac{-1,2}{1,5} = -0,8$, $\sin \alpha = \frac{0,9}{1,5} = 0,6$.

Podmínku rovnosti virtuální práce vnějších a vnitřních sil tedy můžeme

zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
 & F_{1x} \cdot \delta \tilde{u}_1 + F_{1z} \cdot \delta \tilde{w}_1 + F_{2x} \cdot \delta \tilde{u}_2 + F_{2z} \cdot \delta \tilde{w}_2 + F_{3x} \cdot \delta \tilde{u}_3 + F_{3z} \cdot \delta \tilde{w}_3 = \\
 & = S_1 \cdot [(\delta \tilde{u}_2 - \delta \tilde{u}_1) \cdot 0,6 + (\delta \tilde{w}_2 - \delta \tilde{w}_1) \cdot 0,8] + \\
 & + S_2 \cdot [(\delta \tilde{u}_3 - \delta \tilde{u}_2) \cdot (-0,8) + (\delta \tilde{w}_3 - \delta \tilde{w}_2) \cdot 0,6] .
 \end{aligned}$$

Po přeskupení jednotlivých členů získáme podmínku

$$\begin{aligned}
 & (F_{1x} + 0,6 \cdot S_1) \cdot \delta \tilde{u}_1 + (F_{1z} + 0,8 \cdot S_1) \cdot \delta \tilde{w}_1 + \\
 & + (F_{2x} - 0,6 \cdot S_1 - 0,8 \cdot S_2) \cdot \delta \tilde{u}_2 + (F_{2z} - 0,8 \cdot S_1 + 0,6 \cdot S_2) \cdot \delta \tilde{w}_2 + \\
 & + (F_{3x} + 0,8 \cdot S_2) \cdot \delta \tilde{u}_3 + (F_{3z} - 0,6 \cdot S_2) \cdot \delta \tilde{w}_3 = 0 ,
 \end{aligned}$$

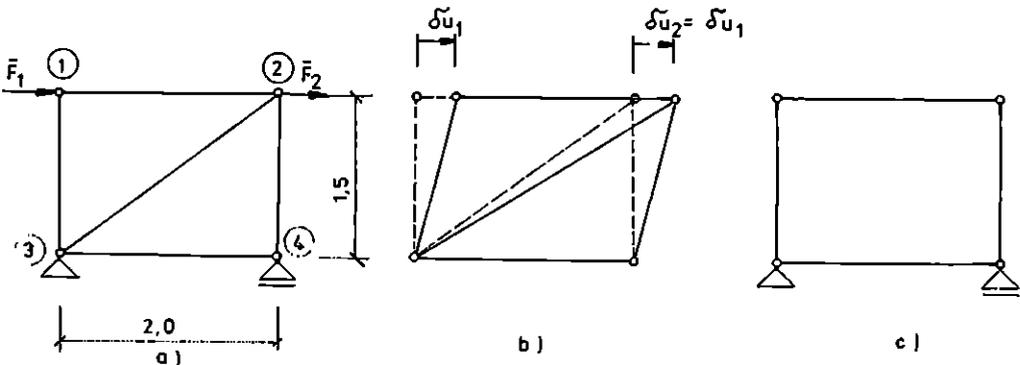
kteřá má být splněna pro libovolnou kombinaci virtuálních styčnickových posunů $\delta \tilde{u}_1, \delta \tilde{w}_1, \delta \tilde{u}_2, \delta \tilde{w}_2, \delta \tilde{u}_3, \delta \tilde{w}_3$. Musí proto platit

$$\begin{aligned}
 F_{1x} + 0,6 \cdot S_1 &= 0 & , & & F_{1z} + 0,8 \cdot S_1 &= 0 & , \\
 F_{2x} - 0,6 \cdot S_1 - 0,8 \cdot S_2 &= 0 & , & & F_{2z} - 0,8 \cdot S_1 + 0,6 \cdot S_2 &= 0 & , \\
 F_{3x} + 0,8 \cdot S_2 &= 0 & , & & F_{3z} - 0,6 \cdot S_2 &= 0 & .
 \end{aligned}$$

To jsou ovšem statické rovnice dané soustavy prutů.

Soustavu všech statických rovnic soustavy prutů jsme samozřejmě schopni odvodit i jednodušším způsobem, než aplikací PVP. Užitečnost tohoto principu se však plně projeví v případě, že nás zajímá pouze hodnota jediné statické veličiny, např. reakce (viz příklady 4.2, 4.3) nebo osová síla v určitém prutu. Aplikací PVP lze totiž sestavit rovnici obsahující z neznámých veličin pouze tu, která nás zajímá.

Příklad 4.5 Aplikací PVP sestavte rovnici pro výpočet osová síly v diagonále (šikmém prutu) konstrukce na obr.4.6a.



Obr. 4.6

Řešení:

Příslušné soustavě prutů udělíme takové virtuální přemístění, aby ty neznámé statické veličiny, které nás nezajímají, nekonalý virtuální práci. Nemají-li reakce konat virtuální práci vnějších sil, musejí být virtuální posuny jejich působišť ve směru jejich paprsků nulové, což odpovídá zachování předepsaných vnějších vazeb. Nemají-li osově síly konat virtuální práci vnitřních sil, musejí být virtuální protežení příslušných prutů nulová.

Virtuální posuny styčniců proto volíme tak, aby byly v souladu s vnějšími vazbami a aby zůstala zachována délka všech prutů s výjimkou toho, ve kterém chceme vypočítat osovou sílu (obr.4.6b). Můžeme si též představit, že zkoumaný prut z konstrukce vyjmeme a na ostatní pruty pohlížíme jako na dokonale tuhé (obr.4.6c). Vznikne tak mechanismus s jedním stupněm volnosti, kterému udělíme virtuální přemístění. Protože však zkoumaný prut ve skutečnosti v konstrukci je, dojde při virtuálním přemístění k jeho virtuálnímu protežení.

Uvažované virtuální přemístění můžeme popsat například virtuálním posunem δu_1 styčnicu ① (obr.4.6b). Virtuální posun δu_2 styčnicu ② musí být roven δu_1 , aby nedošlo k virtuální deformaci prutu ① - ②, ostatní složky vektoru virtuálních styčnicových posunů jsou nulové. Virtuální práci vnějších sil lze zapsat jako

$$\delta W_{\text{ext}} = \bar{F}_1 \cdot \delta u_1 + \bar{F}_2 \cdot \delta u_2 = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \cdot \delta u_1 .$$

Virtuální přemístění bylo voleno tak, aby virtuální protežení všech prutů s výjimkou diagonály byla nulová. Virtuální protežení diagonály vyjádříme pomocí geometrické rovnice

$$\delta \Delta l = (\delta u_3 - \delta u_2) \cos \alpha + (\delta w_3 - \delta w_2) \sin \alpha ,$$

kam dosadíme směrové kosiny prutu ② - ③

$$\cos \alpha = \frac{x_3 - x_2}{l} = \frac{-2,0}{2,5} = -0,8 ,$$

$$\sin \alpha = \frac{z_3 - z_2}{l} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$$

a virtuální posuny $\delta u_3 = \delta w_2 = \delta w_3 = 0$, $\delta u_2 = \delta u_1$. Virtuální práce vnitřních sil je tedy

$$\delta W_{\text{int}} = S \cdot \delta \Delta l = S \cdot 0,8 \cdot \delta u_1 ,$$

kde S označuje hledanou osovou sílu v diagonále. Z podmínky rovnosti virtuální práce vnějších a vnitřních sil

$$(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \cdot \delta u_1 = 0,8 \cdot S \cdot \delta u_1 ,$$

která má být splněna pro libovolnou hodnotu virtuálního posunu δu_1 , pak plyne rovnice pro výpočet osově síly

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0,8 \cdot S .$$

4.2. PRINCIP VIRTUÁLNÍCH SIL

Princip virtuálních sil (PVs) je duálním principem k principu virtuálních posunutí (PVP), se kterým jsme se seznámili v předcházejícím článku. Oba principy bývají souhrnně nazývány principem virtuálních prací (PVP).

Zatímco PVP pracuje se skutečnými statickými veličinami (vnitřními a vnějšími silami) a virtuálními geometrickými veličinami (posuny a deformacemi), PVs pracuje naopak se skutečnými geometrickými a virtuálními statickými veličinami.

Princip virtuálních sil lze obecně formulovat takto:

- Deformace soustavy poddajných prvků jsou v souladu
- s přemístěním této soustavy (jsou kompatibilní)
- právě tehdy, když
- doplňková virtuální práce vnějších sil je rovna
- doplňkové virtuální práci vnitřních sil
- pro libovolnou rovnovážnou soustavu virtuálních
- vnějších a vnitřních sil.

Virtuálními vnějšími a vnitřními silami přitom rozumíme myšlené nekonečně malé síly, které jsou navzájem v rovnováze uvnitř i na hranici prvků soustavy. Při zkoumání soustavy tažených-tlačených prutů budeme virtuální vnější síly zavádět pouze ve styčnicích, takže budou vznikat virtuální osově síly konstantní po délce každého prutu. Virtuální vnější síly můžeme tudíž popsat vektorem virtuálních styčnickových sil $\underline{\delta f}$, virtuální vnitřní síly vektorem virtuálních osových sil $\underline{\delta s}$. Vektory $\underline{\delta f}$ a $\underline{\delta s}$ jsou vázány statickými rovnicemi

$$\underline{\delta f} = \hat{A} \cdot \underline{\delta s} , \quad (4.15)$$

kde \hat{A} je statická matice soustavy.

Doplňková virtuální práce vnějších sil δW_{ext}^* je myšlená práce, kterou by vykonaly virtuální vnější síly na skutečných přemístěních. Pro soustavu tažených-tlačených prutů je dána předpisem

$$\delta W_{\text{ext}}^* = \underline{\delta f}^T \cdot \hat{r} , \quad (4.16)$$

kde \hat{r} je vektor skutečných styčnickových posunů.

Doplňková virtuální práce vnitřních sil δW_{int}^* je myšlená práce, kterou by vykonaly virtuální vnitřní síly na skutečných deformacích. Pro soustavu tažených-tlačených prutů je dána předpisem

$$\delta W_{\text{int}}^* = \underline{\delta s}^T \cdot \underline{e} , \quad (4.17)$$

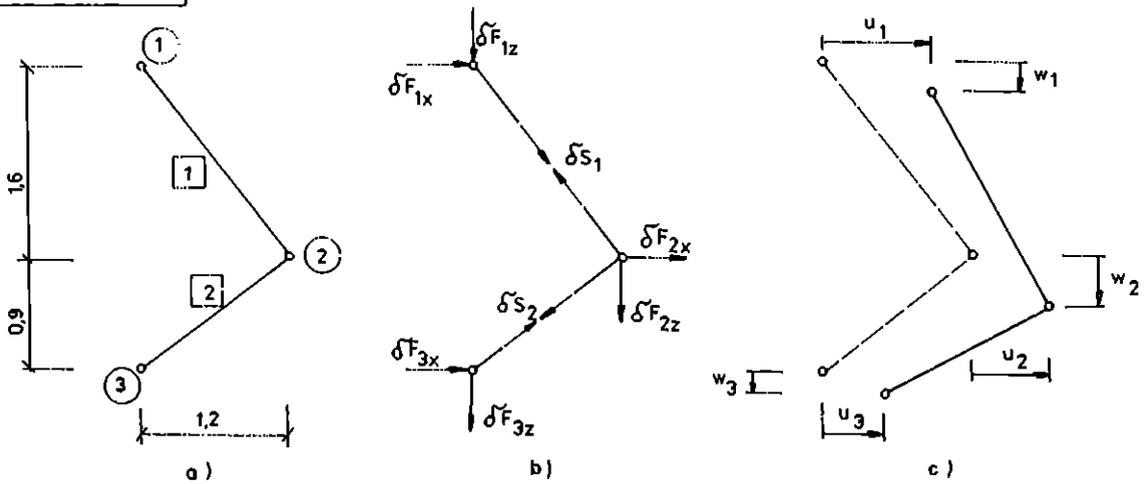
kde \underline{e} je vektor skutečných deformací.

V článku 4.1.2 jsme ukázali, že princip virtuálních posunutí je ekvivalentní se statickými rovnicemi. Zcela analogicky lze ukázat, že princip virtuálních sil je ekvivalentní s geometrickými rovnicemi

$$\underline{e} = \hat{A}^T \cdot \hat{r} , \quad (4.18)$$

kde $\hat{A}^T = \hat{B}$ je samozřejmě geometrická matice. Zároveň se tak znovu potvrzuje, že statická a geometrická matice musí být navzájem transponované.

Příklad 4.6 Aplikací PVs odvoďte geometrické rovnice pro soustavu na obr.4.7a.



Obr. 4.7

Řešení: Doplnkovou virtuální práci vnějších sil

$$\delta W_{\text{ext}}^* = \delta F_{1x} \cdot u_1 + \delta F_{1z} \cdot w_1 + \delta F_{2x} \cdot u_2 + \delta F_{2z} \cdot w_2 + \delta F_{3x} \cdot u_3 + \delta F_{3z} \cdot w_3$$

konají virtuální styčnickové síly (obr.4.7b) na styčnickových posunech (obr.4.7c), doplnkovou virtuální práci vnitřních sil

$$\delta W_{\text{int}}^* = \delta S_1 \cdot \Delta l_1 + \delta S_2 \cdot \Delta l_2$$

konají virtuální osově síly na protaženích prutů. Virtuální síly musejí splňovat podmínky rovnováhy styčníků (statické rovnice)

$$\begin{aligned} \delta F_{1x} &= -0,6 \cdot \delta S_1 & , & & \delta F_{1z} &= -0,8 \cdot \delta S_1 & , \\ \delta F_{2x} &= 0,6 \cdot \delta S_1 + 0,8 \cdot \delta S_2 & , & & \delta F_{2z} &= 0,8 \cdot \delta S_1 - 0,6 \cdot \delta S_2 & , \\ \delta F_{3x} &= -0,8 \cdot \delta S_2 & , & & \delta F_{3z} &= 0,6 \cdot \delta S_2 & . \end{aligned}$$

Podmínka rovnosti doplnkové virtuální práce vnějších a vnitřních sil

$$\begin{aligned} & -0,6 \cdot \delta S_1 \cdot u_1 - 0,8 \cdot \delta S_1 \cdot w_1 + (0,6 \cdot \delta S_1 + 0,8 \cdot \delta S_2) \cdot u_2 + \\ & + (0,8 \cdot \delta S_1 - 0,6 \cdot \delta S_2) \cdot w_2 - 0,8 \cdot \delta S_2 \cdot u_3 + 0,6 \cdot \delta S_2 \cdot w_3 = \\ & = \delta S_1 \cdot \Delta l_1 + \delta S_2 \cdot \Delta l_2 & , \end{aligned}$$

kterou lze upravit na tvar

$$\delta S_1 \cdot (0,6 \cdot u_1 + 0,8 \cdot w_1 - 0,6 \cdot u_2 - 0,8 \cdot w_2 + \Delta l_1) +$$

$$+ \delta S_2 \cdot (-0,8 \cdot u_2 + 0,6 \cdot w_2 + 0,8 \cdot u_3 - 0,6 \cdot w_3 + \Delta l_2) = 0 ,$$

má být podle PVs splněna pro libovolný virtuální silový stav, tj. pro libovolnou kombinaci hodnot $\delta S_1, \delta S_2$. Položíme-li výrazy v závorkách rovny nule, získáme geometrické rovnice

$$\Delta l_1 = -0,6 \cdot u_1 - 0,8 \cdot w_1 + 0,6 \cdot u_2 + 0,8 \cdot w_2 ,$$

$$\Delta l_2 = 0,8 \cdot u_2 - 0,6 \cdot w_2 - 0,8 \cdot u_3 + 0,6 \cdot w_3 .$$

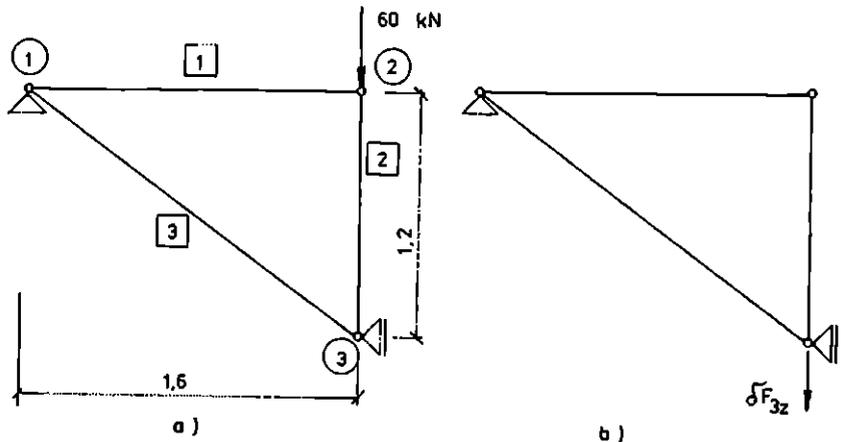
Podobně jako PVP je i PVs vhodné užít zejména tehdy, zajímá-li nás jediná neznámá veličina. Představme si například, že jsme na dané prutové konstrukci vypočítali nebo jinak zjistili velikosti osových sil. Vydělíme-li každou osovou silu tuhostí příslušného prutu, získáme protažení tohoto prutu. Styčnickové posuny bychom nyní mohli vypočítat řešením geometrických rovnic. Pokud nás však zajímá pouze jeden styčnickový posun (např. maximální průhyb uprostřed nosníku), můžeme se vtipným užitím PVs vyhnout sestavování a řešení geometrických rovnic.

Příklad 4.7 Aplikací PVs vypočtete svislý posun styčnicku ③ konstrukce na obr.4.8a.

$$k_1 = 210 \text{ MNm}^{-1}$$

$$k_2 = 280 \text{ MNm}^{-1}$$

$$k_3 = 168 \text{ MNm}^{-1}$$



Obr. 4.8

Řešení: V příkladu 3.19 jsme pro stejnou konstrukci a stejné zatížení ze statických rovnic vypočítali osové síly

$$S_1 = 0 , \quad S_2 = -60 \text{ kN} , \quad S_3 = 100 \text{ kN}$$

a z fyzikálních rovnic protažení

$$\Delta l_1 = 0 , \quad \Delta l_2 = -0,214 \text{ mm} , \quad \Delta l_3 = 0,595 \text{ mm} .$$

Při výpočtu styčnickového posunu w_3 nyní místo geometrických rovnic použijeme princip virtuálních sil.

Virtuální silový stav zvolme tak, aby virtuální vnější síly konaly doplňkovou virtuální práci pouze na tom neznámém posunu, který nás zajímá. Na konstrukci proto necháme působit jedinou virtuální vnější sílu δF_{3z} , jejíž působíště a směr odpovídají hledanému posunu w_3 (obr.4.8b). V podporách vzniknou virtuální reakce, jejichž velikosti nás nezajímají, protože ve výrazu pro výpočet doplňkové virtuální práce vnějších sil jsou virtuální reakce násobeny nulovými hodnotami předepsaných posunů. Ze statických rovnic konstrukce (tj. podmínek rovnováhy styčniců v nepodepřených směrech)

$$\delta S_1 = 0 ,$$

$$- \delta S_2 = 0 ,$$

$$\delta S_2 + 0,6 \cdot \delta S_3 = \delta F_{3z}$$

(viz obr.4.9) stanovíme virtuální osové síly odpovídající zvoleným virtuálním vnějším silám

$$\delta S_1 = 0 , \quad \delta S_2 = 0 ,$$

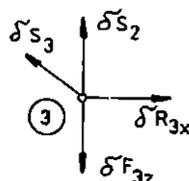
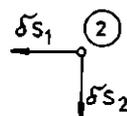
$$\delta S_3 = \frac{1}{0,6} \cdot \delta F_{3z} .$$

Podmínka rovnosti doplňkové virtuální práce vnějších a vnitřních sil

$$\begin{aligned} \delta F_{3z} \cdot w_3 &= \delta S_1 \cdot \Delta l_1 + \delta S_2 \cdot \Delta l_2 + \delta S_3 \cdot \Delta l_3 = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot \delta F_{3z} \cdot \Delta l_3 \end{aligned}$$

musí být podle PVS splněna pro libovolnou hodnotu δF_{3z} . Musí tedy platit

$$w_3 = \frac{1}{0,6} \cdot \Delta l_3 = \frac{1}{0,6} \cdot 0,595 \text{ mm} = 0,992 \text{ mm} .$$



Obr. 4.9

4.3. PRINCIP MINIMA

POTENCIÁLNÍ ENERGIE

S projevy principu minima potenciální energie se setkáváme doslova na každém kroku. Například kulička v jamce je v rovnovážné poloze na dně jamky, kyvadlo je ve stavu stabilní rovnováhy tehdy, je-li jeho těžiště v nejnižší možné poloze apod. Ve všech obdobných případech je ze všech geometricky přípustných stavů zkoumaného objektu (tj. z těch stavů, které respektují předepsané vazby) stabilním rovnovážným stavem ten, ve kterém má potenciální energie objektu minimální hodnotu.

V uvedených případech byla potenciální energie dána pouze polohou objektu

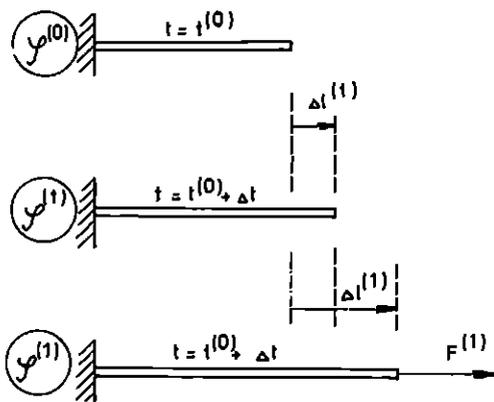
v tíhovém poli. Chceme-li princip minima potenciální energie rozšířit na obecnější případ, musíme do energetické bilance zahrnout i tzv. potenciální energii deformace. Jestliže je totiž těleso deformováno působením vnějších sil, konají tyto síly práci, která se v pružném tělese akumuluje a může být opět uvolněna. Například lučičník při napínání luku koná práci, která se mění nejprve v potenciální energii deformace luku a po uvolnění tětiny v kinetickou energii šípů. Potenciální energii deformace E_{int} rozumíme práci, kterou je třeba vykonat při přetváření pružného tělesa z počátečního nenapjatého stavu do stavu zkoumaného.

Představme si, že přímý prut z lineární pružného materiálu se z počátečního stavu $\varphi^{(0)}$ vlivem teplotních změn protáhl o $\Delta l^{(t)}$ a z tohoto nenapjatého stavu $\varphi^{(t)}$ byl pak působením postupně vzrůstající síly F protažen až na výslednou hodnotu $\Delta l^{(1)}$ (obr.4.10). Vnější síla, která se v průběhu tohoto procesu měnila v závislosti na okamžité hodnotě protažení Δl podle vzorce

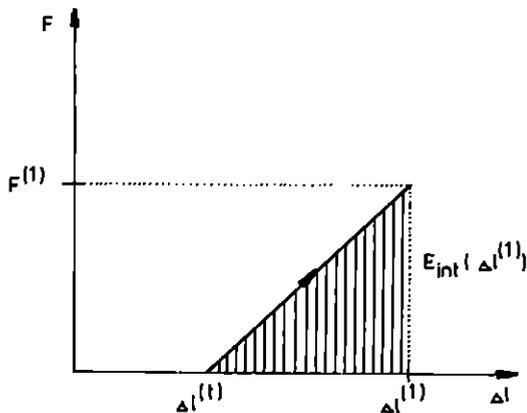
$$F(\Delta l) = k \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)}) \quad (4.19)$$

vykonala práci

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_{\Delta l^{(t)}}^{\Delta l^{(1)}} F(\Delta l) d\Delta l = \int_{\Delta l^{(t)}}^{\Delta l^{(1)}} k \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)}) d\Delta l = \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta l^{(1)} - \Delta l^{(t)})^2 \quad (4.20) \end{aligned}$$



Obr. 4.10



Obr. 4.11

Potenciální energii deformace taženého-tlačeného prutu lze proto vyjádřit jako funkci celkového protažení vzorcem

$$E_{int}(\Delta l^{(1)}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta l^{(1)} - \Delta l^{(t)})^2 \quad (4.21)$$

Názorný význam potenciální energie deformace je patrný z obr.4.11.

Potenciální energie deformace soustavy tažených-tlačených prutů je součtem potenciálních energií deformace jednotlivých prutů soustavy:

$$E_{int}(\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_{n_p}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_i^{n_p} k_i \cdot (\Delta l_i - \Delta l_i^{(t)})^2 \quad (4.22)$$

Maticově lze pravou stranu (4.22) zapsat jako

$$\left\{ \Delta l_1 - \Delta l_1^{(t)}, \Delta l_2 - \Delta l_2^{(t)}, \dots, \Delta l_{n_p} - \Delta l_{n_p}^{(t)} \right\} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_{n_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta l_1 - \Delta l_1^{(t)} \\ \Delta l_2 - \Delta l_2^{(t)} \\ \vdots \\ \Delta l_{n_p} - \Delta l_{n_p}^{(t)} \end{Bmatrix},$$

takže vztah (4.22) lze přepsat do tvaru

$$E_{int}(\underline{e}) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)})^T \cdot \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)}) \quad (4.23)$$

Příklad 4.8

Vyjádřete potenciální energii deformace pro konstrukci na obr.4.12 v závislosti na neznámých styčnickových posunech. Předepsané styčnickové posuny a teplotní změny jsou nulové.

Řešení:

Potenciální energii deformace lze snadno vyjádřit v závislosti na protaženích prutů:

$$E_{int}(\Delta l_1, \Delta l_2) = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot \Delta l_2^2.$$

Protažení prutů lze ovšem vyjádřit v závislosti na styčnickových posunech pomocí geometrických rovnic

$$\Delta l_1 = 0,8 \cdot u_2 + 0,6 \cdot w_2,$$

$$\Delta l_2 = u_2.$$

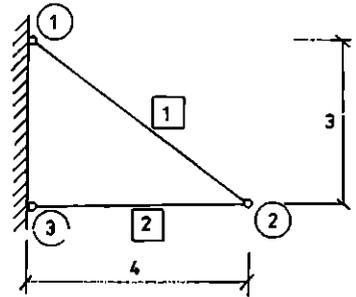
Při sestavení geometrických rovnic jsme uvážili, že předepsané styčnickové posuny jsou nulové.

Závislost potenciální energie deformace na neznámých styčnickových posunech je tedy v daném případě dána funkcí

$$\begin{aligned} E_{int}(u_2, w_2) &= \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (0,8 \cdot u_2 + 0,6 \cdot w_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot u_2^2 = \\ &= (0,32 \cdot k_1 + 0,5 \cdot k_2) \cdot u_2^2 + 0,48 \cdot k_1 \cdot u_2 \cdot w_2 + 0,18 \cdot k_1 \cdot w_2^2. \end{aligned}$$

Vedle potenciální energie deformace, někdy též nazývané potenciální energií vnitřních sil, je třeba do energetických úvah zahrnout také tzv. potenciální energii vnějších sil. Při přemístění působiště totiž vnější síla vykoná určitou práci a tím se sníží její schopnost práci konat, neboli její potenciální energie. Pro konstrukci zatíženou pouze ve styčnicích definujeme potenciální energii vnějších sil předpisem

$$E_{ext}(\underline{r}) = - \underline{F}^T \cdot \underline{r}, \quad (4.24)$$



Obr. 4.12

kde \vec{f} je vektor předepsaných styčnickových sil a \underline{r} vektor neznámých styčnickových posunů. Všimněte si, že potenciální energii vnějších sil považujeme za funkci neznámých styčnickových posunů, zatímco samotné vnější síly zde hrají roli konstant.

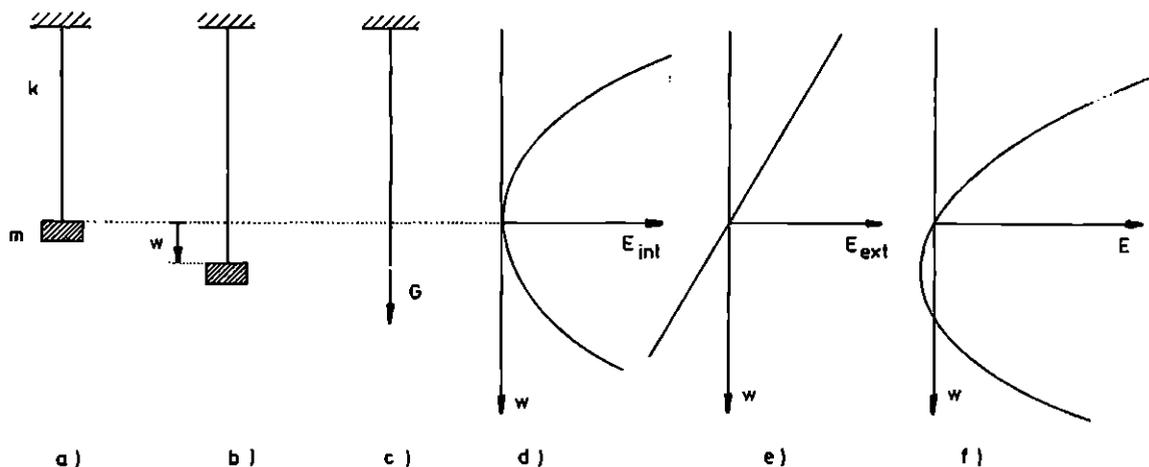
Součet potenciální energie deformace (vnitřních sil) a potenciální energie vnějších sil

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}} \quad (4.25)$$

se nazývá celkovou potenciální energií, nebo též potenciální energií systému. Systémem se zde rozumí konstrukce + zatížení.

Příklad 4.9

Vyjádřete celkovou potenciální energii systému složeného ze závěsu o tuhosti k a závaží o hmotnosti m (obr.4.13a) v závislosti na svislém posunu w konce závěsu z nenapjatého stavu (obr.4.13b).



Obr. 4.13

Řešení: Stavů, ve kterém závěs není napjat, přisudme nulovou celkovou potenciální energii. Při svislém posunu konce závěsu o w dojde k jeho protažení o $\Delta l = w$, takže potenciální energie deformace závěsu vzroste o $\frac{1}{2} \cdot k \cdot w^2$. Potenciální energie polohy závaží v tíhovém poli zároveň klesne o $m \cdot g \cdot w$, takže celková potenciální energie bude

$$E(w) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot w^2 - m \cdot g \cdot w .$$

V předcházejícím příkladu si místo závaží můžeme představit svislou sílu $G = m \cdot g$ působící na konec závěsu (obr.4.13c). Podle vzorce (4.24) je potenciální energie této síly

$$E_{\text{ext}}(w) = - G \cdot w . \quad (4.26)$$

To je ovšem v plném souladu s výsledkem příkladu.

Na obr.4.13d-f je znázorněna závislost potenciální energie deformace závěsu, potenciální energie závaží (vnější síly G) a celková potenciální energie v závislosti na poloze konce závěsu. Celková potenciální energie $E(w)$ je kvadratickou funkcí svislého posunu w a nabývá minima pro tu hodnotu w , pro kterou platí

$$\frac{dE}{dw} = k \cdot w - m \cdot g = 0 \quad (4.27)$$

Podmínka minima celkové potenciální energie (4.27) je zřejmě ekvivalentní s podmínkou rovnováhy

$$S = G \quad (4.28)$$

mezi osovou silou $S = k \cdot w$ a vnější silou $G = m \cdot g$. Tato souvislost není náhodná. O všeobecné tendenci mechanických systémů přecházet do stavů s minimální celkovou potenciální energií vypovídá princip minima potenciální energie:

- Ze všech geometricky přípustných stavů konstrukce nastane právě ten,
- pro který je celková potenciální energie minimální.

Geometricky přípustným stavem (též kinematicky přípustným stavem) se přitom rozumí libovolný stav, ve kterém jsou splněny geometricko-deformační rovnice a předepsané geometrické okrajové podmínky. Pro konstrukce složené z tažených-tlačených prutů to znamená, že protažení každého prutu musí být vypočteno ze styčnickových posunů pomocí geometrických rovnic a styčnickové posuny v podepřených styčnicích musí být rovny předepsaným hodnotám. Každý geometricky přípustný stav takové konstrukce lze tedy jednoznačně charakterizovat vektorem neznámých styčnickových posunů \mathbf{r} .

Příklad 4.10

Aplikací principu minima potenciální energie sestavte rovnice pro výpočet neznámých styčnickových posunů konstrukce na obr.4.12.

Řešení: Potenciální energie deformace E_{int} byla vyjádřena v závislosti na neznámých styčnickových posunech již v příkladu 4.8. Potenciální energie vnějších sil je podle (4.24) dána předpisem

$$E_{ext}(u_2, w_2) = -\bar{F}_{2x} \cdot u_2 - \bar{F}_{2z} \cdot w_2,$$

takže celkovou potenciální energii lze vyjádřit jako

$$E(u_2, w_2) = (0,32 \cdot k_1 + 0,5 \cdot k_2) \cdot u_2^2 + 0,48 \cdot k_1 \cdot u_2 \cdot w_2 + 0,18 \cdot k_1 \cdot w_2^2 - \bar{F}_{2x} \cdot u_2 - \bar{F}_{2z} \cdot w_2 \quad (4.29)$$

Libovolná dvojice posunů u_2, w_2 reprezentuje určitý geometricky přípustný stav, jemuž podle (4.29) přísluší jistá potenciální energie. Podle principu minima si konstrukce ze všech těchto stavů "vybere" právě ten, pro který je celková potenciální energie minimální. Posuny u_2, w_2 tedy nabydou těch hodnot, pro které jsou parciální derivace funkce $E(u_2, w_2)$ nulové. Derivováním (4.29) získáme podmínky

$$\frac{\partial E}{\partial u_2} = (0,64 \cdot k_1 + k_2) \cdot u_2 + 0,48 \cdot k_1 \cdot w_2 - \bar{F}_{2x} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_2} = 0,48 \cdot k_1 \cdot u_2 + 0,36 \cdot k_1 \cdot w_2 - \bar{F}_{2z} = 0 ,$$

které lze přepsat do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} 0,64 \cdot k_1 + k_2 & 0,48 \cdot k_1 \\ 0,48 \cdot k_1 & 0,36 \cdot k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2z} \end{Bmatrix} .$$

Nebylo by těžké ukázat, že rovnice odvozené v předcházejícím příkladu jsou totožné s rovnicemi deformační metody. Dokažme, že i v obecném případě je podmínka minima celkové potenciální energie ekvivalentní s rovnicemi deformační metody. Pro jednoduchost se omezíme na případ, kdy jsou předepsané posuny $\bar{\underline{r}}$ a deformace od teplotních změn $\underline{\epsilon}^{(t)}$ nulové. Dosadíme-li do předpisu pro výpočet potenciální energie deformace (viz (4.23))

$$E_{int}(\underline{\epsilon}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{\epsilon} \quad (4.30)$$

z geometrických rovnic

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \cdot \underline{r} , \quad (4.31)$$

získáme potenciální energii deformace jako funkci neznámých styčnickových posunů:

$$E_{int}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{B} \underline{r})^T \cdot \underline{D} \cdot (\underline{B} \underline{r}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{r}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{r} . \quad (4.32)$$

Součin $\underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}$ je ovšem roven matici tuhosti konstrukce \underline{K} . Celková potenciální energie je podle (4.25), (4.32) a (4.24) kvadratickou funkcí neznámých styčnickových posunů:

$$E(\underline{r}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{r}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{r} - \bar{\underline{F}}^T \cdot \underline{r} . \quad (4.33)$$

Má-li tato funkce nabývat minima, musí být její parciální derivace podle jednotlivých složek vektoru \underline{r} nulové. Vypočteme-li podle dodatku B gradient celkové potenciální energie (4.33) a položíme její roven nulovému vektoru, získáme soustavu lineárních rovnic

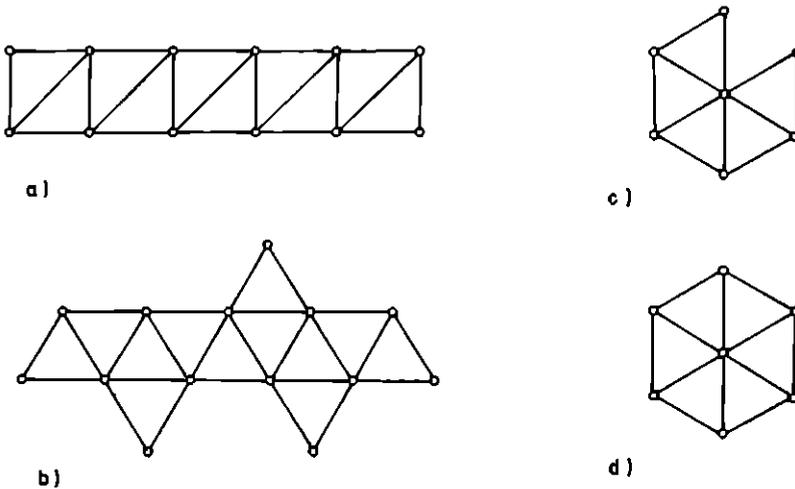
$$\frac{\partial E}{\partial \underline{r}} = \underline{K} \cdot \underline{r} - \bar{\underline{F}} = \underline{0} , \quad (4.34)$$

která je ekvivalentní s rovnicemi deformační metody

$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \bar{\underline{F}} . \quad (4.35)$$

Konstrukce z obr. 5.2 je staticky určitá.

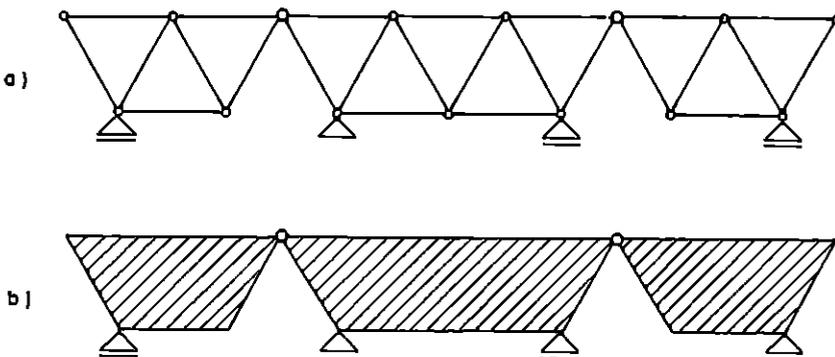
Při praktickém posuzování statické určitosti příhradových konstrukcí ovšem ve většině případů není třeba zjišťovat počty styčniců a prutů. Stačí si uvědomit, že soustava prutů v rovině, které jsou spojeny do trojúhelníkové sítě, je třikrát staticky přeuročitá a při určování statické určitosti je možné ji považovat za tuhou desku v rovině. Příklady takových soustav jsou uvedeny na obr. 5.3 a, b, c. Avšak pozor, je-li některý ze styčniců "uzavřen uvnitř trojúhelníkové sítě", je daná soustava prutů vnitřně staticky neurčitá. Například soustava na obr. 5.3 d vznikla ze soustavy na obr. 5.3 c přidáním jednoho prutu. Takovou soustavu pak nelze podepřít tak, aby vznikla staticky určitá konstrukce, která není výjimkovým případem.



Obr. 5.3

Příklad 5.2

Posuďte z názoru statickou určitost příhradové konstrukce na obr. 5.4. Výsledek ověřte výpočtem stupně statické neurčitosti podle vzorce (5.1).



Obr. 5.4

Řešení : Pro posouzení statické určitosti můžeme danou konstrukci chápat jako konstrukci složenou ze tří tuhých desek (obr. 5.4 b). Prostřední deska je staticky určitě podepřena, krajní jsou k ní připojeny vnitřním kloubem a podepřeny posuvným kloubem. Celá konstrukce je tudíž staticky určitá. Ověření je možno provést pro $n_p = 25$, $n_s = 15$, $n_v = 5$

$$g = n_p + n_v - 2 \cdot n_s = 25 + 5 - 2 \cdot 15 = 0$$

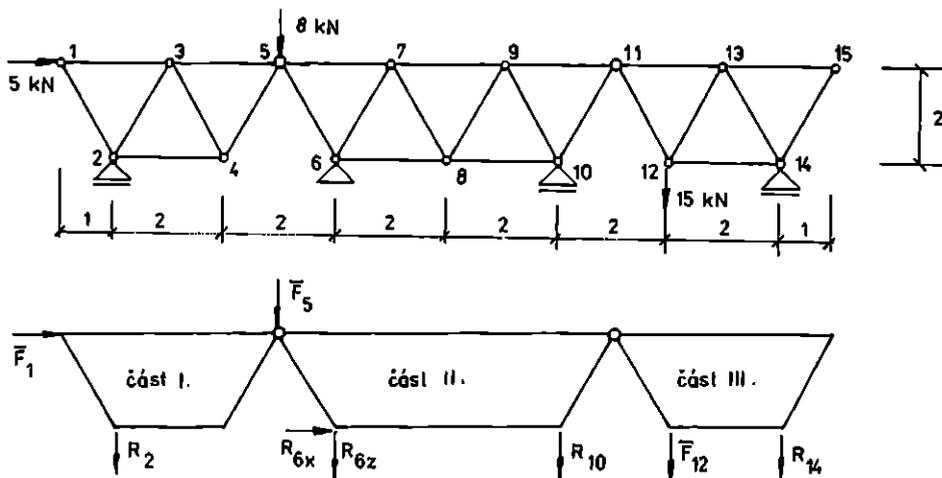
Konstrukce z obr. 5.4 je staticky určitá.

5.2. V Ý P O Č E T R E A K C Í

5.2.1. Výpočet reakcí z podmínek rovnováhy

Při výpočtu složek reakcí na staticky určitých příhradových konstrukcích vycházíme z podmínek rovnováhy celé konstrukce nebo jejích částí. Tento postup je dobře znám z předmětu " Teoretická mechanika ", takže se omezíme na jednoduchou ukázkou.

Příklad 5.3 Vypočtete vnější reakce konstrukce na obr. 5.5.



Obr. 5.5

Řešení : Statická určitost konstrukce byla již posouzena v příkladu 5.2. Neznané složky reakcí R_2 , R_{6x} , R_{6z} , R_{10} , R_{14} zavedeme tak, jak je to nakresleno na obr. 5.5. Pro jejich určení potřebujeme pět podmínek rovnováhy. Tři podmínky rovnováhy celku tedy doplníme dvěma vhodně zvolenými podmínkami rovnováhy částí. Z momentové podmínky rovnováhy části I ke styčníku (5):

$$R_2 \cdot 3 = 0 ,$$

zjistíme, že reakce R_2 je nulová. Podobně z momentové podmínky rovnováhy části III ke styčníku (11):

$$\bar{F}_{12} \cdot 1 + R_{14} \cdot 3 = 0 ,$$

vyplývá $R_{14} = -\frac{1}{3} \cdot \bar{F}_{12} = -\frac{1}{3} \cdot 15 = -5 \text{ kN}$

Zbylé složky reakcí určíme z podmínek rovnováhy celku :

$$\overrightarrow{X} : \bar{F}_1 + R_{6x} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{6x} = -\bar{F}_1 = -5 \text{ kN}$$

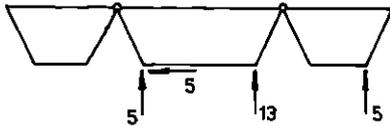
$$\begin{aligned} \textcircled{10} : & -\bar{F}_1 \cdot 2 + R_2 \cdot 8 + \bar{F}_5 \cdot 5 + R_{6z} \cdot 4 - \bar{F}_{12} \cdot 2 - R_{14} \cdot 4 = 0 \\ R_{6z} &= \frac{1}{4} \cdot (2\bar{F}_1 - 8R_2 - 5\bar{F}_5 + 2\bar{F}_{12} + 4R_{14}) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 2.5 - 8 \cdot 0 - 5 \cdot 8 + 2 \cdot 15 + 4 \cdot (-5)) = \frac{1}{4} \cdot (-20) = \\ &= -5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\downarrow Z : R_2 + \bar{F}_5 + R_{6z} + R_{10} + \bar{F}_{12} + R_{14} = 0$$

$$\begin{aligned} R_{10} &= -R_2 - \bar{F}_5 - R_{6z} - \bar{F}_{12} - R_{14} = \\ &= -0 - 8 - (-5) - 15 - (-5) = -13 \text{ kN} \end{aligned}$$

Výsledek : Vnější reakce konstrukce jsou :

$$\begin{aligned} R_2 &= 0 \\ R_{6x} &= -5 \text{ kN} \\ R_{6z} &= -5 \text{ kN} \\ R_{10} &= -13 \text{ kN} \\ R_{14} &= -5 \text{ kN} \end{aligned}$$



Obr. 5.6

Skutečná orientace vnějších reakcí je znázorněna na obr. 5.6.

5.2.2. Výpočet reakcí užitím PVP

Pracnost výpočtu reakcí z podmínek rovnováhy často závisí na tom, zda zvolíme podmínky rovnováhy vhodně, t.j. tak, aby každá z nich obsahovala co nejméně neznámých. Ve 4. kapitole jsme ukázali, že užitím PVP můžeme pro libovolnou složku reakcí sestavit takovou podmínku rovnováhy, která obsahuje pouze tuto neznámou složku.

Příklad 5.4 Vypočtete vnější reakce R_{14} , R_{6z} pro konstrukci na obr. 5.5 užitím PVP.

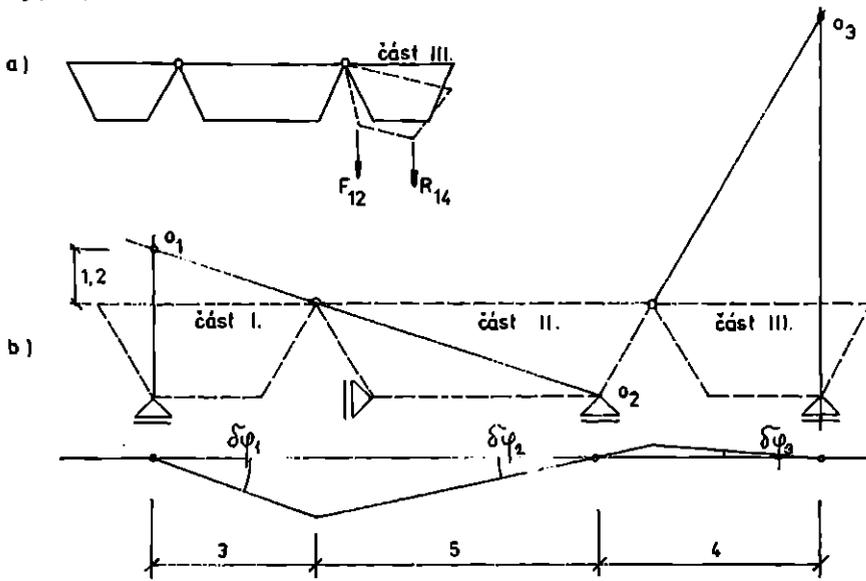
Řešení : Při výpočtu zvolené složky reakcí uvolníme příslušnou vazbu a vzniklému mechanismu udělíme takové virtuální přemístění, při kterém nedochází k virtuální deformaci. Položíme-li virtuální práci vnějších sil na tomto virtuálním přemístění rovnu nule, získáme rovnici, která obsahuje jedinou neznámou - hledanou reakci.

Počítáme-li tedy reakci R_{14} , pracujeme s virtuálním přemístěním podle obr. 5.7:

$$\delta W_{\text{ext}} = \bar{F}_{12} \cdot \delta w_{12} + R_{14} \cdot \delta w_{14} = 0$$

Virtuální posuny δw_{12} , δw_{14} však nejsou navzájem nezávislé. Zvolíme-li za ne-

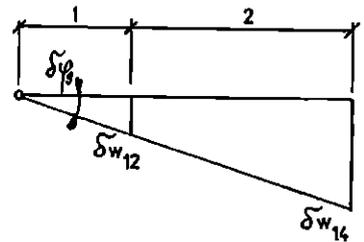
závislý parametr, charakterizující dané virtuální přemístění, úhel $\delta\varphi_3$, o který se pootočí část III (obr. 5.7 a), můžeme v závislosti na něm vyjádřit podle obr. 5.8 :



Obr. 5.7

$$\delta w_{12} = 1 \cdot \delta\varphi_3 \quad (5.3)$$

$$\delta w_{14} = 3 \cdot \delta\varphi_3 \quad (5.4)$$



Obr. 5.8

Po dosažení dostáváme :

$$\delta W_{\text{ext}} = \bar{F}_{12} \cdot 1 \cdot \delta\varphi_3 + R_{14} \cdot 3 \cdot \delta\varphi_3 = \delta\varphi_3 \cdot (1 \cdot \bar{F}_{12} + 3 \cdot R_{14}).$$

Má-li být virtuální práce vnějších sil pro libovolné $\delta\varphi$ nulová, musí platit :

$$1 \cdot \bar{F}_{12} + 3 \cdot R_{14} = 0.$$

Podobně jako v příkladu 5.3 jsme získali momentovou podmínku rovnováhy části III ke styčníku (11), ze které plyne :

$$R_{14} = -\frac{1}{3} \cdot \bar{F}_{12} = -\frac{1}{3} \cdot 15 = -5 \text{ kN}$$

Při výpočtu reakce R_{6z} pracujeme s virtuálním přemístěním podle obr. 5.7 b. Z obr. 5.7 b je zřejmé, že platí :

$$3 \cdot \delta\varphi_1 = 5 \cdot \delta\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_2 = \frac{3}{5} \delta\varphi_1 = 0,6 \cdot \delta\varphi_1$$

$$1 \cdot \delta\varphi_2 = 3 \cdot \delta\varphi_3 \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_3 = \frac{1}{3} \delta\varphi_2 = 0,2 \cdot \delta\varphi_1$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \bar{F}_1 \cdot \delta u_1 + \bar{F}_5 \cdot \delta w_5 + \bar{F}_{12} \cdot \delta w_{12} + R_{6z} \cdot \delta w_6 = 0$$

$$\delta u_1 = -1,2 \cdot \delta \varphi_1$$

$$\delta w_5 = 3 \cdot \delta \varphi_1$$

$$\delta w_{12} = -2 \cdot \delta \varphi_3 = -0,4 \cdot \delta \varphi_1$$

$$\delta w_6 = 4 \cdot \delta \varphi_2 = 2,4 \cdot \delta \varphi_1$$

$$(-1,2 \cdot \bar{F}_1 + 3 \cdot \bar{F}_5 - 0,4 \cdot \bar{F}_{12} + 2,4 \cdot R_{6z}) \cdot \delta \varphi_1 = 0$$

$$R_{6z} = \frac{1}{2,4} \cdot (1,2 \cdot \bar{F}_1 - 3 \cdot \bar{F}_5 + 0,4 \cdot \bar{F}_{12}) = -\frac{12}{2,4} = -5 \text{ kN}$$

Rovnici, ze které jsme vypočítali reakci R_{6z} , nelze interpretovat jako jednoduchou podmínku rovnováhy celku nebo některé z částí. Lze ji však získat určitou vhodnou kombinací několika takových podmínek. Užijeme-li PVP, nemusíme přemýšlet o tom, které podmínky rovnováhy sestavit a jak je zkombinovat, abychom vyloučili všechny neznámé reakce, kromě hledané. PVP je tak v rukou obratného počtáře velmi efektivním nástrojem.

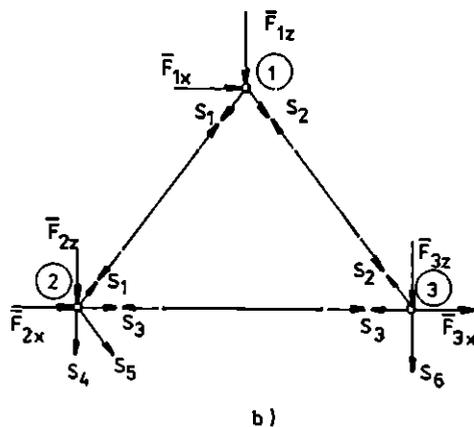
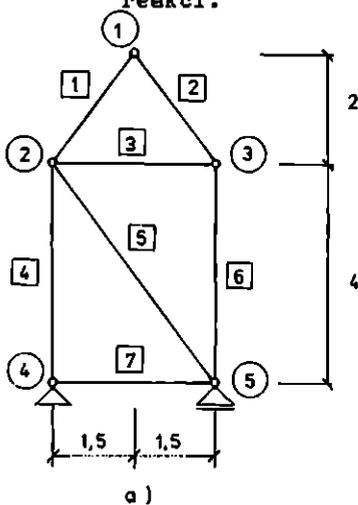
5.3. V Ý P O Č E T O S O V Ý C H S I L

5.3.1. Metoda bodů styčných

Již ve třetí kapitole jsme ukázali, že osové síly staticky určité příhradové konstrukce lze vypočítat ze statických rovnic, t.j. z podmínek rovnováhy vnějších a vnitřních sil působících na jednotlivé styčníky konstrukce. Pro tento postup se vžil název metoda bodů styčných.

Příklad 5.5

Pro konstrukci na obr. 5.9 a) a obecné zatížení zapíšte statické rovnice. Sestavte statickou matici konstrukce a statickou matici reakcí.



Obr. 5.9

Řešení : Vnitřní a vnější síly nakreslíme podle obr. 5.9 b) a pro každý styčník zapíšeme silovou podmínku rovnováhy ve svislém a vodorovném směru :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \vec{X} &: \bar{F}_{1x} - 0,6 \cdot S_1 + 0,6 \cdot S_2 = 0 \\
 \downarrow Z &: \bar{F}_{1z} + 0,8 \cdot S_1 + 0,8 \cdot S_2 = 0 \\
 \textcircled{2} \quad \vec{X} &: \bar{F}_{2x} + 0,6 \cdot S_1 + S_3 + 0,6 \cdot S_5 = 0 \\
 \downarrow Z &: \bar{F}_{2z} - 0,8 \cdot S_1 + S_4 + 0,8 \cdot S_5 = 0 \\
 \textcircled{3} \quad \vec{X} &: \bar{F}_{3x} - 0,6 \cdot S_2 - S_3 = 0 \\
 \downarrow Z &: \bar{F}_{3z} - 0,8 \cdot S_2 + S_6 = 0 \\
 \textcircled{5} \quad \vec{X} &: \bar{F}_{5x} - 0,6 \cdot S_5 - S_7 = 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Převědeme-li vnější síly na pravou stranu a zapíšeme-li rovnice (5.5) maticově, získáme soustavu 7 rovnic o 7 neznámých :

$$\begin{aligned}
 0,6 \cdot S_1 - 0,6 \cdot S_2 &= \bar{F}_{1x} \\
 -0,8 \cdot S_1 - 0,8 \cdot S_2 &= \bar{F}_{1z} \\
 -0,6 \cdot S_1 - S_3 - 0,6 \cdot S_5 &= \bar{F}_{2x} \\
 0,8 \cdot S_1 - S_4 - 0,8 \cdot S_5 &= \bar{F}_{2z} \\
 0,6 \cdot S_2 + S_3 &= \bar{F}_{3x} \\
 0,8 \cdot S_2 - S_6 &= \bar{F}_{3z} \\
 0,6 \cdot S_5 + S_7 &= \bar{F}_{5x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 0,6 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,8 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,6 & 0 & -1 & 0 & -0,6 & 0 & 0 \\
 0,8 & 0 & 0 & -1 & -0,8 & 0 & 0 \\
 0 & 0,6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1z} \\ \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2z} \\ \bar{F}_{3x} \\ \bar{F}_{3z} \\ \bar{F}_{5x} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{s} = \underline{\bar{f}} \tag{5.6}$$

Maticí soustavy (5.6) je statická matice konstrukce A. Zapíšeme-li dále jen rovnice obsahující neznámé vnější síly (reakce), získáme vztahy :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad \vec{X} &: R_{4x} + S_7 = 0 \\
 \downarrow Z &: R_{4z} - S_4 = 0 \\
 \textcircled{5} \quad \downarrow Z &: R_5 - 0,8 \cdot S_5 - S_6 = 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

a po úpravě a zapsání do matic :

$$\begin{aligned}
 -S_7 &= R_{4x} \\
 S_4 &= R_{4z} \\
 0,8 \cdot S_5 + S_6 &= R_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{4x} \\ R_{4z} \\ R_5 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{A}_r \cdot \underline{s} = \underline{f}_r$$

(5.8)

Maticí soustavy (5.8) je statická matice reakcí \underline{A}_r .

Osově síly staticky určité příhradové konstrukce lze tedy vypočítat ze soustavy rovnic (5.6), kde \underline{s} je hledaný vektor osových sil a \underline{f} vektor předepsaných styčnickových sil (zatížení). Známe-li již osově síly, lze vypočítat reakce pouhým dosazením do vztahu (5.8), kde \underline{f}_r je vektor neznámých styčnickových sil (reakcí) a \underline{s} vektor známých osových sil.

Obecně by řešení soustavy rovnic (5.6) bylo dosti pracné, neboť počet rovnic i neznámých je roven počtu prutů konstrukce. V řadě případů lze však tyto rovnice řešit ve vhodném pořadí tak, že vždy řešíme jen soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Pak hovoříme o zjednodušené metodě bodů styčných.

Příklad 5.6

Vypočtete osově síly konstrukce na obr. 5.10.

Řešení : Předepsané styčnickové síly \underline{f} na pravé straně rovnice (5.6) jsou nulové s výjimkou síly $\bar{F}_{1x} = 18$ kN. Všimneme-li si blíže struktury rovnic (5.6), zjistíme, že první dvě rovnice obsahují jen dvě neznámé S_1 a S_2 . Lze je tedy vyřešit nezávisle na ostatních :

$$\begin{aligned} 0,6 \cdot S_1 - 0,6 \cdot S_2 &= 18 \\ -0,8 \cdot S_1 - 0,8 \cdot S_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} S_1 &= 15 \text{ kN} \\ S_2 &= -15 \text{ kN} \end{aligned}$$

Třetí a čtvrtá z rovnic (5.6) obsahují tři neznámé S_3, S_4, S_5 (vypočítané síly S_1 a S_2 již nepovažujeme za neznámé), takže je zatím nelze řešit nezávisle na ostatních rovnicích. V páté a šesté rovnici se však vyskytují pouze dvě neznámé S_3 a S_6 , které tedy můžeme snadno vypočítat :

$$\begin{aligned} 0,6 \cdot S_2 + S_3 &= 0 \\ 0,8 \cdot S_2 - S_6 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} S_3 &= -0,6 \cdot S_2 = 9 \text{ kN} \\ S_6 &= 0,8 \cdot S_2 = -12 \text{ kN} \end{aligned}$$

Osová síla S_3 již není neznámá, proto můžeme ze třetí a čtvrté rovnice vypočítat osově síly S_4 a S_5 a ze sedmé potom osovou sílu S_7 :

$$\begin{aligned} -0,6 \cdot S_1 - S_3 - 0,6 \cdot S_5 &= 0 \\ 0,8 \cdot S_1 - S_4 - 0,8 \cdot S_5 &= 0 \\ 0,6 \cdot S_5 + S_7 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} S_5 &= -30 \text{ kN} \\ S_4 &= 36 \text{ kN} \\ S_7 &= 18 \text{ kN} \end{aligned}$$

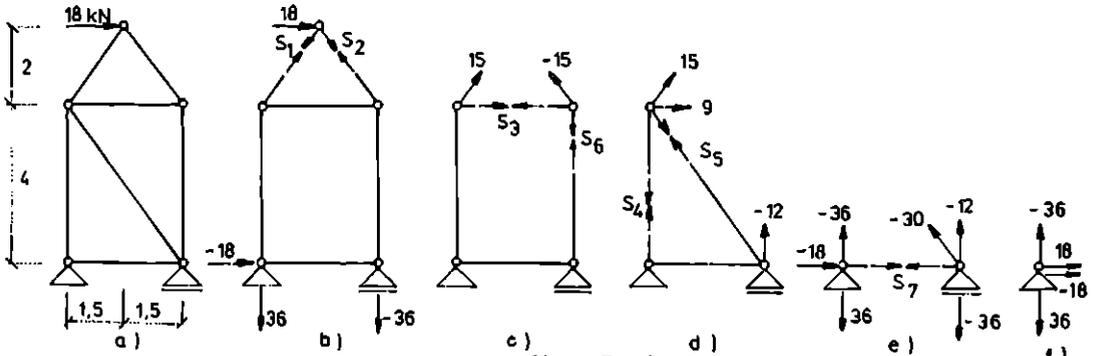
Dosazením do rovnice (5.8) můžeme získat reakce konstrukce :

$$\begin{aligned} R_{4x} &= -S_7 = -18 \text{ kN} \\ R_{4z} &= S_4 = 36 \text{ kN} \\ R_5 &= 0,8 \cdot S_5 + S_6 = -36 \text{ kN} \end{aligned}$$

Velmi snadno se lze přesvědčit, že pro tyto hodnoty reakcí jsou splněny podmínky rovnováhy celé konstrukce.

Zjednodušenou metodu bodů styčných lze názorně interpretovat tak, že hledáme takové nepodepřené styčnické, ke kterým jsou připojeny pouze dva pruty (tzv.

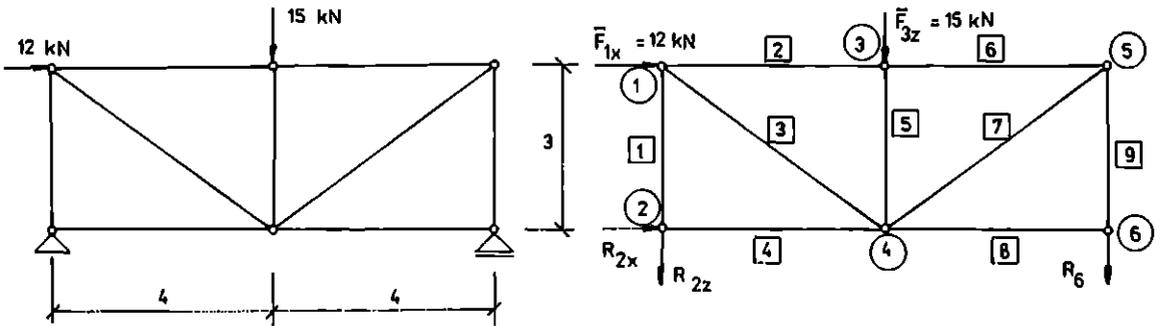
dvojně styčníky) s dosud neznámou osovou silou. Z podmínek rovnováhy zapsaných pro tyto dvojně styčníky pak dvě neznámé osové síly vypočteme a tím se může z dalšího styčníku stát styčník dvojný. Jak jsme viděli v předchozím příkladu, je někdy možné tímto způsobem vyřešit celou konstrukci. Postup řešení je graficky zachycen na obr. 5.10.



Obr. 5.10

V příkladu 5.5 jsme vypočítali reakce ze statických rovnic a podmínky rovnováhy celku jsme použili ke kontrole správnosti výpočtu. Je však možný (a ve většině případů výhodný) i opačný postup - reakce můžeme vypočítat předem a statické rovnice obsahující reakce pak využijeme k výpočtu osových sil. Některé ze statických rovnic v tekovém případě neuplatníme při vlastním výpočtu, ale využijeme je ke kontrole.

Příklad 5.7 Vypočtete osové síly v konstrukci na obr. 5.11



Obr. 5.11

Řešení : Pro neznámé osové síly S_1, \dots, S_9 bychom mohli sestavit soustavu 9 rovnic. Protože však na konstrukci není žádný dvojný styčník, není možné řešit úlohu zjednodušenou metodou bodů styčných a museli bychom řešit celou soustavu. Vypočteme-li však nejprve reakce z podmínek rovnováhy celku, stanou se ze styčníků ② a ⑥ dvojně styčníky a tím můžeme zjednodušenou metodou bodů styčných použít.

Zapišeme tedy nejprve podmínky rovnováhy celku a z nich vypočteme reakce :

$$\sum \bar{X} : \bar{F}_{1x} + R_{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{2x} = -\bar{F}_{1x} = -12 \text{ kN}$$

$$\sum Z : R_{2z} + \bar{F}_{3z} + R_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 = -12 \text{ kN}$$

$$\textcircled{6} : R_{2z} \cdot 8 - \bar{F}_{1x} \cdot 3 + \bar{F}_{3z} \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{2z} = -3 \text{ kN}$$

Z podmínek rovnováhy styčnicku $\textcircled{2}$ nyní můžeme vypočítat osové síly S_1 a S_4 :

$$\textcircled{2} \vec{X} : R_{2x} + S_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_4 = -R_{2x} = 12 \text{ kN}$$

$$Z \downarrow : R_{2z} - S_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = R_{2z} = -3 \text{ kN}$$

Tím, že jsme vypočítali osovou sílu S_1 , se ze styčnicku $\textcircled{1}$ stal dvojný styčnick, neboť na něj působí už jen dvě neznámé síly S_2 a S_3 . Pro jejich výpočet opět zapíšeme podmínky rovnováhy styčnicku a po jejich vypočtení se stane dvojným styčnickem styčnick $\textcircled{3}$, potom i styčnick číslo $\textcircled{4}$ a $\textcircled{5}$ (obr. 5.12).

$$\textcircled{1} \vec{X} : \bar{F}_{1x} + S_2 + 0,8 \cdot S_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = -\bar{F}_{1x} - 0,8 \cdot S_3 = -16 \text{ kN}$$

$$Z \downarrow : S_1 + 0,6 \cdot S_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = -\frac{1}{0,6} \cdot S_1 = 5 \text{ kN}$$

$$\textcircled{3} \vec{X} : S_6 - S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_6 = S_2 = -16 \text{ kN}$$

$$Z \downarrow : \bar{F}_{3z} + S_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_5 = -\bar{F}_{3z} = -15 \text{ kN}$$

$$\textcircled{4} Z \downarrow : -S_5 - 0,6 \cdot S_3 - 0,6 \cdot S_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_7 = -\frac{1}{0,6} \cdot S_5 - S_3 = 20 \text{ kN}$$

$$\vec{X} : S_8 + 0,8 \cdot S_7 - S_4 - 0,8 \cdot S_3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_8 = -0,8 \cdot S_7 + S_4 + 0,8 \cdot S_3 =$$

$$= 0 \text{ kN}$$

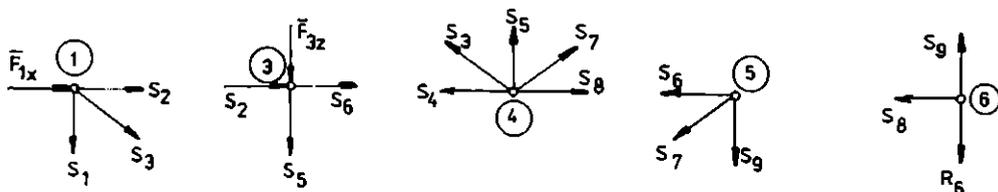
$$\textcircled{5} Z \downarrow : S_9 + 0,6 \cdot S_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_9 = -0,6 \cdot S_7 = -12 \text{ kN}$$

Dosud jsme nevyužili všechny podmínky rovnováhy styčnicků, a sice podmínku rovnováhy ve směru osy X ve styčnicku $\textcircled{5}$ a $\textcircled{6}$ a podmínku rovnováhy ve směru osy Z ve styčnicku $\textcircled{6}$. Tyto tři podmínky rovnováhy musí být ovšem rovněž splněny a mohou posloužit ke kontrole správnosti výpočtu :

$$\textcircled{5} \vec{X} : -S_6 - 0,8 \cdot S_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad +16 - 16 = 0$$

$$\textcircled{6} \vec{X} : -S_8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

$$Z \downarrow : -S_9 + R_{6z} = 0 \quad \Rightarrow \quad +12 - 12 = 0$$



Obr. 5.12

Jsou-li ve styčnicku spojeny pouze dva pruty, můžeme příslušné osové síly vypočítat z podmínek rovnováhy daného styčnicku nezávisle na ostatních osových silách. Pokud je styčník nezátížen (t.j. vnější styčnickové síly jsou nulové), vyjdou pochopitelně i osové síly v obou prutech nulové. Podobně, sbíhají-li se ve styčnicku tři pruty, z nichž dva mají stejný směr (obr. 5.13), můžeme osovou sílu ve třetím prutu vypočítat z podmínky rovnováhy, zapsané ve směru kolmém na směr prvních dvou prutů (na obr. 5.13 je vyznačen kolmý směr čárkovaně). Speciálně pro nezátížený styčník je osová síla v takovém prutu nulová, zatímco osové síly v prutech stejného směru nemusí být nulové, mají však stejnou hodnotu. Lze se o tom přesvědčit zapsáním podmínek rovnováhy.



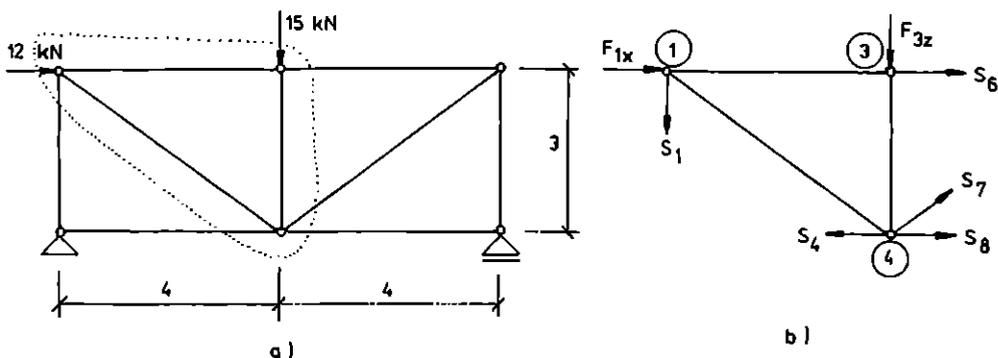
Obr. 5.13

5.3.2. Metoda průsečné

Podmínky rovnováhy můžeme sestavit nejen pro jednotlivé styčnický nebo celou konstrukci, ale také pro libovolnou část konstrukce. Jsou-li osové síly a reakce vypočteny, můžeme tyto podmínky využít ke kontrole rovnováhy.

Příklad 5.8

Pro označenou část konstrukce na obr. 5.14 zapište podmínky rovnováhy a ověřte, zda jsou splněny. Osové síly a reakce byly vypočteny v příkladu 5.7.



Obr. 5.14

Řešení : Všechny síly působící na označenou část konstrukce jsou vyznačeny na obr. 5.14 b.

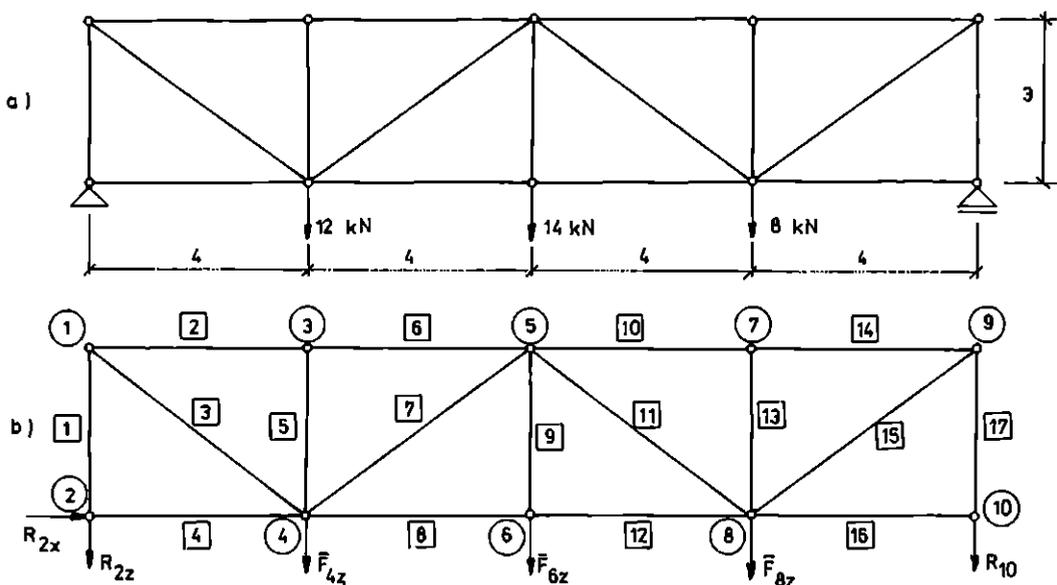
$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} : \quad & \bar{F}_{1x} + S_6 - S_4 + 0,8 \cdot S_7 = 0 \\ & 12 - 16 - 12 + 0,8 \cdot 20 = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \downarrow z : \quad & S_1 + \bar{F}_{3z} - 0,6 \cdot S_7 = 0 \\ & -3 + 15 - 0,6 \cdot 20 = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} : S_1 \cdot 4 - F_{1x} \cdot 3 - S_6 \cdot 3 &= 0 \\
 - 3 \cdot 4 - 12 \cdot 3 + 16 \cdot 3 &= 0 \\
 - 12 \quad - 36 \quad + 48 &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Nejsou-li však osové síly známy, můžeme podmínek rovnováhy vhodně zvolené části konstrukce využít k jejich výpočtu. Je však třeba najít takovou část konstrukce, kterou lze oddělit řezem, protínajícím nejvýše tři pruty. Ze tří podmínek rovnováhy oddělené části lze pak osové síly v protnutých prutech vypočítat. Pro tento způsob výpočtu se vžil název průsečná metoda.

Příklad 5.9 Průsečnou metodou vypočtete osové síly konstrukce na obr. 5.15.



Obr. 5.15

Řešení : Z podmínek rovnováhy celku nejprve vypočteme reakce :

$$\overrightarrow{X} : R_{2x} = 0$$

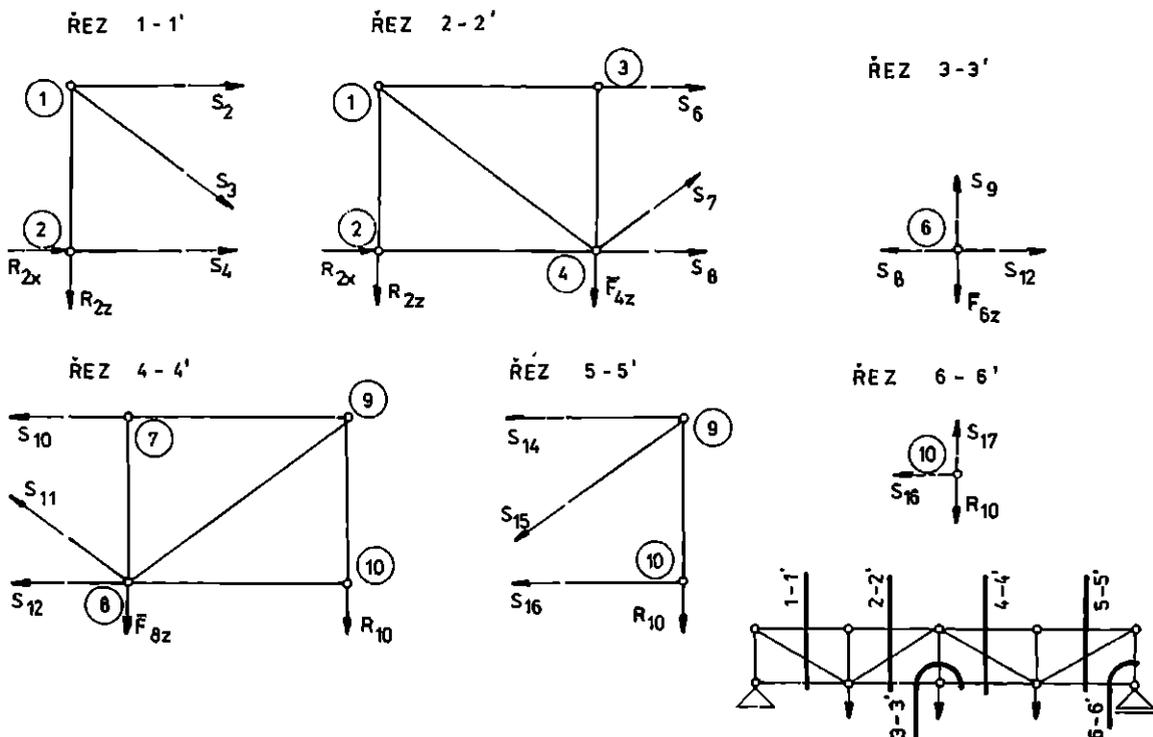
$$\begin{aligned}
 \textcircled{10} : R_{2z} \cdot 16 + \overline{F}_{4z} \cdot 12 + \overline{F}_{6z} \cdot 8 + \overline{F}_{8z} \cdot 4 &= 0 \\
 R_{2z} \cdot 16 + 12 \cdot 12 + 14 \cdot 8 + 8 \cdot 4 &= 0 \\
 R_{2z} &= - 18 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \downarrow Z : R_{2z} + \overline{F}_{4z} + \overline{F}_{6z} + \overline{F}_{8z} + R_{10} &= 0 \\
 - 18 + 12 + 14 + 8 + R_{10} &= 0 \\
 R_{10} &= - 16 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Osové síly v prutech číslo **1** a **4** vypočteme zjednodušenou metodou bodů styčných - sestavíme podmínky rovnováhy ve svislém a vodorovném směru ve styčném čísle **2** :

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \overline{X} &: R_{2x} + S_4 = 0 & \Rightarrow S_4 = -R_{2x} = 0 \\ \downarrow Z &: R_{2z} + S_1 = 0 & \Rightarrow S_1 = R_{2z} = -18 \text{ kN} \end{aligned}$$

Osové síly ve zbyvajících prutech budeme počítat průsečnou metodou. Je vhodné si uvědomit, že v některých prutech může být osová síla nulová. V případě řešené konstrukce se jedná o pruty číslo 4, 5, 13, 16. Výpočet budeme provádět řešením podmínek rovnováhy jednotlivých oddělených částí konstrukce tak, jak je to naznačeno na obr. 5.16.



Obr. 5.16

$$\begin{aligned} \text{řez } 1 - 1' : \quad \textcircled{4} &: -S_2 \cdot 3 + R_{2z} \cdot 4 = 0 \\ &- S_2 \cdot 3 - 18 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow S_2 = -24 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \downarrow Z &: R_{2z} + 0,6 \cdot S_3 = 0 \\ &- 18 + 0,6 \cdot S_3 = 0 \quad \Rightarrow S_3 = 30 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{řez } 2 - 2' : \quad \textcircled{4} &: R_{2z} \cdot 4 - S_6 \cdot 3 = 0 \\ &- 18 \cdot 4 - S_6 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow S_6 = -24 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \downarrow Z &: R_{2z} + \overline{F}_{4z} - 0,6 \cdot S_7 = 0 \\ &- 18 + 12 - 0,6 \cdot S_7 = 0 \quad \Rightarrow S_7 = -10 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} &: R_{2z} \cdot 8 + \overline{F}_{4z} \cdot 4 + S_8 \cdot 3 = 0 \\ &- 18 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + S_8 \cdot 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_8 = 32 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \text{řez } 3 - 3' : \quad \downarrow Z : \quad \bar{F}_{6z} - S_9 &= 0 \\ S_9 &= \bar{F}_{6z} = 14 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{řez } 4 - 4' : \quad \textcircled{8} : \quad S_{10} \cdot 3 - R_{10} \cdot 4 &= 0 \\ S_{10} \cdot 3 + 16 \cdot 4 &= 0 \Rightarrow S_{10} = -21,3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} : \quad -S_{12} \cdot 3 - \bar{F}_{8z} \cdot 4 - R_{10} \cdot 8 &= 0 \\ -S_{12} \cdot 3 - 8 \cdot 4 + 16 \cdot 8 &= 0 \\ \Rightarrow S_{12} &= 32 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X} : \quad -S_{10} - S_{12} - S_{11} \cdot 0,8 &= 0 \\ 21,3 - 32 - S_{11} \cdot 0,8 &= 0 \quad S_{11} = -13,3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{řez } 5 - 5' : \quad \textcircled{8} : \quad S_{14} \cdot 3 - R_{10} \cdot 4 &= 0 \\ S_{14} \cdot 3 + 16 \cdot 4 &= 0 \Rightarrow S_{14} = -21,3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X} : \quad -S_{14} - 0,8 \cdot S_{15} - S_{16} &= 0 \\ 21,3 - 0,8 \cdot S_{15} - 0 &= 0 \quad S_{15} = 26,6 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{řez } 6 - 6' : \quad \downarrow Z : \quad R_{10} - S_{17} &= 0 \\ -16 - S_{17} &= 0 \Rightarrow S_{17} = -16 \text{ kN} \end{aligned}$$

5.4. VÝPOČET STYČNÍKOVÝCH POSUNŮ

5.4.1. Výpočet posunů řešením geometrických rovnic

Známe-li vektor osových sil \underline{s} , můžeme vektor deformace \underline{e} vypočítat z fyzikálních rovnic

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)}), \quad (5.9)$$

kde \underline{D} je matice tuhostí prutů a $\underline{e}^{(t)}$ vektor teplotní deformace. Matice \underline{D} je pro konstrukce z tažených - tlačných prutů diagonální, takže získáváme rovnice

$$S_1 = k_1 \cdot (\Delta l_1 - \Delta l_1^{(t)}), \quad (5.10)$$

kde $k_1 = \frac{EA_1}{l_1}$ je tuhost prutu $\boxed{1}$ a $\Delta l_1^{(t)} = \alpha_t \cdot l_1 \cdot \Delta t_1$ protažení tohoto prutu od teploty. Protažení prutu $\boxed{1}$ lze tudíž vyjádřit vztahem

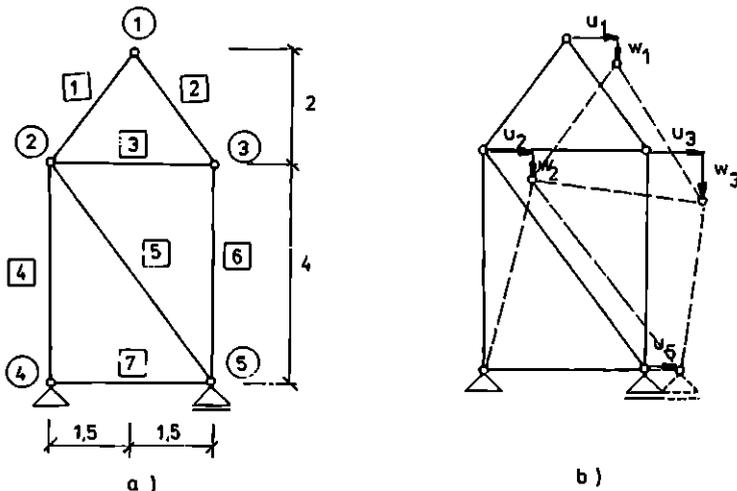
$$\Delta l_1 = \Delta l_1^{(t)} + \frac{S_1}{k_1} = \alpha_t \cdot l_1 \cdot \Delta t_1 + \frac{l_1 \cdot S_1}{E \cdot A_1} \quad (5.11)$$

Připomeňme si, že geometrické rovnice mají tvar

$$\underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}}, \quad (5.12)$$

kde \underline{B} je geometrická matice konstrukce, $\underline{\bar{B}}$ geometrická matice vazeb, \underline{r} vektor neznámých styčnickových posunů a $\underline{\bar{r}}$ vektor předepsaných styčnickových posunů.

Příklad 5.10 Sestavte geometrickou matici konstrukce a geometrickou matici vazeb pro konstrukci na obr. 5.17.



Obr. 5.17

Řešení : Pro každý prut zapíšeme geometrickou rovnici, jejíž obecný tvar je

$$\Delta l_1 = (u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha \quad (5.13)$$

a výslednou soustavu rovnic přepíšeme do maticového tvaru

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= (u_2 - u_1) \cdot (-0,6) + (w_2 - w_1) \cdot 0,8 \\ \Delta l_2 &= (u_3 - u_1) \cdot 0,6 + (w_3 - w_1) \cdot 0,8 \\ \Delta l_3 &= u_3 - u_2 \\ \Delta l_4 &= w_4 - w_2 \\ \Delta l_5 &= (u_5 - u_2) \cdot 0,6 + (w_5 - w_2) \cdot 0,8 \\ \Delta l_6 &= w_5 - w_3 \\ \Delta l_7 &= u_5 - u_4 \end{aligned}$$

$$\underline{e} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \\ \Delta l_4 \\ \Delta l_5 \\ \Delta l_6 \\ \Delta l_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & -0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ u_5 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix}$$

Porovnáme-li výsledky příkladů 5.10 a 5.5, vidíme, že geometrická matice konstrukce je skutečně transponovaná ke statické matici konstrukce a geometrická matice vazeb ke statické matici reakcí. Máme-li tedy již pro určitou konstrukci sestaveny statické rovnice, můžeme geometrické rovnice pohodlně získat prostou transpozicí příslušných matic.

$$\underline{B} = \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & -0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Máme-li sestaveny geometrické rovnice konstrukce, můžeme je upravit na tvar :

$$\underline{B} \cdot \underline{r} = \underline{e} - \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}} \quad (5.14)$$

a z těchto rovnic vypočítat neznámé styčnickové posuny \underline{r} . Geometrická matice konstrukce \underline{B} je totiž pro staticky určité konstrukce čtvercová a nenastává-li výjimečný případ, je i regulární.

Příklad 5.11 Vypočítejte styčnickové posuny pro konstrukci na obr. 5.17 s využitím výsledků příkladu 5.6. Nedojde ke změně teploty ani k posunům podepřených styčníků. Tuhost průřezů všech prutů je $EA_1 = 20 \text{ MN}$.

Řešení : Nejprve stanovíme protažení všech prutů tak, že pro každý prut vyděláme příslušnou osovou sílu jeho tuhostí v tahu-tlaku. Například pro prut 1 máme

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l_1}{EA} = \frac{15 \cdot 2,5}{20 \cdot 10^3} = 0,00188 \text{ m.}$$

Podobným způsobem získáme i protažení ostatních prutů konstrukce (tab. 5.1).

prut číslo	1	2	3	4	5	6	7
S_1 (kN)	15	-15	9	36	-30	-12	18
l_1 (m)	2,5	2,5	3	4	5	4	3
EA (MN)	20	20	20	20	20	20	20
Δl_1 (mm)	1,88	-1,88	1,35	7,2	-7,5	-2,4	2,7

Tab. 5.1

Neznámé styčnickové posuny lze nyní vypočítat z geometrických rovnic, které jsme sestavili v příkladu 5.10. Předepsané styčnickové posuny $\bar{u}_4, \bar{w}_4, \bar{w}_5$ jsou podle zadání nulové. Obecně bychom museli řešit soustavu 7 rovnic o 7 neznámých. Ukážeme však, že podobně jako statické rovnice lze i geometrické rovnice v tomto případě vyřešit postupně. Začneme u rovnic, které obsahují jen po jedné neznámé:

$$u_5 - \bar{u}_4 = \Delta l_7 \quad \Rightarrow \quad u_5 = 2,7 \text{ mm}$$

$$\bar{w}_4 - w_2 = \Delta l_4 \quad \Rightarrow \quad w_2 = -7,2 \text{ mm}$$

$$\bar{w}_5 - w_3 = \Delta l_6 \quad \Rightarrow \quad w_3 = -2,4 \text{ mm}$$

Známe-li již w_2, w_3 a u_5 , můžeme z páté rovnice vypočítat u_2 :

$$0,6 (u_5 - u_2) + (\bar{w}_5 - w_2) 0,8 = \Delta l_5 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 24,8 \text{ mm}$$

a ze třetí rovnice u_3 :

$$u_3 - u_2 = \Delta l_3 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 26,1 \text{ mm.}$$

Dosadíme-li nyní vypočítané hodnoty do prvních dvou rovnic, získáme dvě rovnice o dvou neznámých u_1 a w_1 :

$$-0,6 (u_2 - u_1) + 0,8 (w_2 - w_1) = \Delta l_1$$

$$0,6 (u_3 - u_1) + 0,8 (w_3 - w_1) = \Delta l_2$$

$$-0,6 (24,8 - u_1) + 0,8 (-7,2 - w_1) = 1,88$$

$$0,6 (26,1 - u_1) + 0,8 (-2,4 - w_1) = -1,88$$

$$0,6 u_1 - 0,8 w_1 = 22,52$$

$$-0,6 u_1 - 0,8 w_1 = 11,86$$

$$-1,6 w_1 = 34,38$$

$$\Rightarrow w_1 = -21,5 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow u_1 = 8,9 \text{ mm.}$$

5.4.2. Výpočet posunů užitím PVs

Ukázali jsme, že styčnickové posuny na staticky určité příhradové konstrukci lze vypočítat z geometrických rovnic. Tento postup vede vždy k cíli, může však být dosti pracný. Užijeme-li vhodně principu virtuálních sil, můžeme se při výpočtu styčnickových posunů zcela vyhnout nejen řešení, ale i sestavování geometrických rovnic. O této metodě již byla řeč v článku 4.2, proto se seznámíme rovnou s její praktickou úpravou.

Při výpočtu určitého styčnickového posunu zvolíme virtuální zatížení tak, aby konalo virtuální práci pouze na hledaném posunu. Pro toto virtuální zatížení pak vypočteme odpovídající virtuální vnitřní síly. Můžeme přitom použít týchž metod, jako při výpočtu skutečných osových sil od skutečného zatížení. Virtuální osové síly budou v důsledku linearit statických rovnic násobky virtuální vnější síly δF . Můžeme tedy psát

$$\delta S_i = \bar{S}_i \delta F \quad (5.15)$$

kde \bar{S}_i jsou bezrozměrné koeficienty. Můžeme si je představit jako osové síly, vyvozené bezrozměrnou jednotkovou silou, jejíž směr a působíště odpovídají virtuální síle δF , a tedy i vyšetřovanému posunu. Z podmínky rovnosti virtuální práce vnějších a vnitřních sil

$$\delta \bar{f}^T \cdot \underline{r} = \delta \underline{s}^T \cdot \underline{e} \quad (5.16)$$

neboli

$$\delta F \cdot u = \sum_{i=1}^{n_p} \delta S_i \cdot \Delta l_i \quad (5.17)$$

po dosažení vztahu (5.15) a úpravě plyne

$$(u - \sum_{i=1}^{n_p} \bar{S}_i \cdot \Delta l_i) \cdot \delta F = 0 \quad (5.18)$$

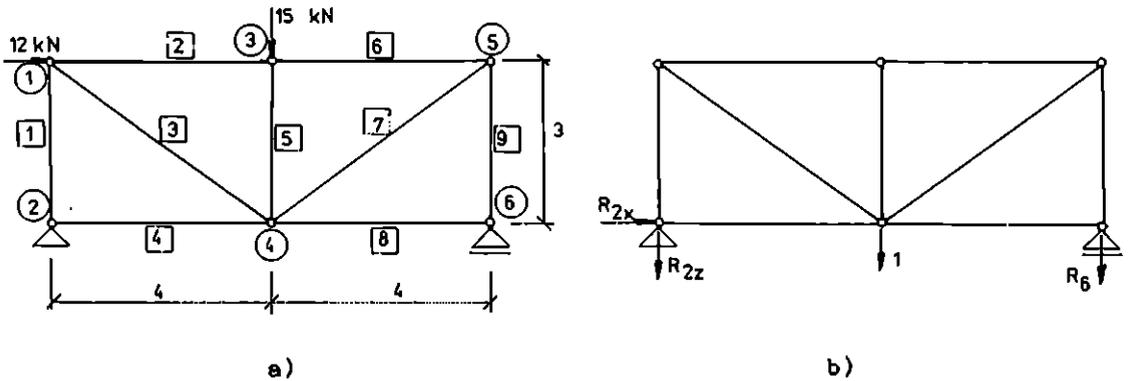
Rovnost (5.18) má platit pro libovolnou virtuální sílu F , musí proto být

$$u = \sum_{i=1}^{n_p} \bar{S}_i \cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\bar{S}_i \cdot S_i}{E \cdot A_i} \cdot l_i \quad (5.19)$$

Při praktickém výpočtu konstrukce místo virtuální síly δF zatížíme konstrukci odpovídající bezrozměrnou jednotkovou silou a vypočteme vzniklé bezrozměrné osové síly \bar{S}_i . Velikost hledaného posunu pak zjistíme vyčíslením pravé strany vzorce (5.19).

Příklad 5.12

Pro konstrukci na obr. 5.18 a) vypočtete s využitím výsledků příkladu 5.7 užitím FVs svislý posun styčnicku (4).



Obr. 5.18

Řešení : Naším úkolem je vypočítat svislý posun styčnicku (4). Ve virtuálním stavu tedy necháme na konstrukci působit svislou virtuální sílu δF ve styčnicku (4). Z podmínek rovnováhy celku vypočteme virtuální reakce (obr. 5.18b) a zjednodušenou metodou bodů styčných pak postupně vypočteme virtuální osové síly

$\bar{R}_{2x} = 0$	$\bar{S}_1 = -0,5$	$\bar{S}_4 = 0$
$\bar{R}_{2z} = -0,5$	$\bar{S}_2 = -0,67$	$\bar{S}_5 = 0$
$\bar{R}_6 = -0,5$	$\bar{S}_3 = 0,63$	

Vzhledem k symetrii je $\bar{S}_6 = \bar{S}_2$, $\bar{S}_7 = \bar{S}_3$, $\bar{S}_8 = \bar{S}_4$, $\bar{S}_9 = \bar{S}_1$. Právou stranu vzorce (5.19) vyhodnotíme nejlépe v tabulce (tab. 5.2) : $EA_1 = 20 \text{ MN}$

prut číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(kN) S_1	-3	-16	5	12	-15	-16	20	0	-12
(m) l_1	3	4	5	4	3	4	5	4	3
(1) \bar{S}_1	-0,5	-0,67	0,83	0	0	-0,67	0,83	0	-0,5
(mm) $\frac{\bar{S}_1 \cdot S_1}{E \cdot A_1} \cdot l_1$	0,23	2,14	1,04	0	0	2,14	4,15	0	0,9

Tab. 5.2

$$\sum \frac{\bar{S}_1 \cdot S_1}{E \cdot A_1} \cdot l_1 = 10,6 \text{ mm} = w_4$$

5.4.3. Vliv změny teploty a předepsaných posunů

Ze struktury základních rovnic

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{E}} \cdot \underline{\bar{r}} \\ \underline{s} &= \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}(t)) \\ \underline{\bar{r}} &= \underline{E}^T \cdot \underline{s} \\ \underline{r}_T &= \underline{\bar{E}}^T \cdot \underline{s} \end{aligned}$$

a způsobu jejich řešení lze pro staticky určité konstrukce vyvodit následující závěry :

- osově síly a reakce závisejí na zatížení a geometrickém uspořádání konstrukce. Nezávisejí tedy na tuhostech prutů a nejsou ovlivněny změnami teploty ani předepsanými posuny.
- protažení prutů závisejí kromě zatížení a geometrického uspořádání konstrukce také na tuhostech prutů a změnách teploty. Nejsou však ovlivněny předepsanými posuny.
- posuny styčnic závisejí na všech charakteristikách konstrukce (geometrických i tuhostních) a na všech vnějších vlivech (tj. na zatížení, změnách teploty a předepsaných posunech).

Jinými slovy : zatížení ovlivňuje přemístění, deformaci i napjatost konstrukce, změny teploty ovlivňují pouze přemístění a deformaci a předepsané posuny ovlivní pouze přemístění konstrukce.

Při výpočtu styčnicových posunů řešením geometrických rovnic nečiní zahrnutí vlivu teplotních změn a předepsaných posunů žádné problémy. Vliv teplotních změn se uplatní při výpočtu deformací z fyzikálních rovnic, upravených na tvar

$$\underline{D} \cdot \underline{e} = \underline{s} + \underbrace{\underline{D} \cdot \underline{e}(t)}_{\text{vliv teploty}}$$

e vliv předepsaných posunů při výpočtu styčnickových posunů z geometrických rovnic, upravených na tvar

$$\underline{B} \cdot \underline{r} = \underline{e} - \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{r}}$$

↑
vliv předepsaných posunů.

Chceme-li účinky teplotních změn a předepsaných posunů zahrnout do výpočtu užitím FVs, musíme při výpočtu protažení

$$\Delta l_1 = \frac{S_1}{k_1} + \Delta l_1^{(t)}$$

uvážit vliv změny teploty a při výpočtu virtuální práce vnějších sil

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \underline{\bar{r}}^T \cdot \underline{r} + \delta \underline{r}^T \cdot \underline{\bar{r}}$$

uvážit také práci virtuálních reakcí na skutečných předepsaných posunech. Obecně tedy počítáme hledaný posun podle vzorce

$$u = \sum_{i=1}^{n_p} \bar{S}_i \cdot \left(\frac{S_i l_i}{E A_i} + \Delta l_i^{(t)} \right) - \sum_j \bar{R}_{jx} \cdot \bar{u}_j - \sum_j \bar{R}_{jz} \cdot \bar{w}_j$$

V posledních dvou sumách se sčítá přes všechny vodorovné respektive svislé složky reakcí.

Příklad 5.13

Jak se změní svislý posun bodu (4) konstrukce na obr. 5.18, dojde-li k oteplení prutů horního pasu o 10° C.

Řešení : Při daném oteplení bude

$$\Delta l_2^{(t)} = \alpha_t \cdot l_4 \cdot \Delta t_4 = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10 = 0,48 \text{ mm}$$

$$\Delta l_6^{(t)} = \alpha_t \cdot l_6 \cdot \Delta t_6 = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10 = 0,48 \text{ mm}$$

a podle výše uvedeného vzorce se hledaný posun změní o

$$\bar{S}_2 \cdot \Delta l_2^{(t)} + \bar{S}_6 \cdot \Delta l_6^{(t)} = (-0,6) \cdot 0,48 + (-0,6) \cdot 0,48 = -0,58 \text{ mm}$$

Příklad 5.14

Jak se změní svislý posun styčnicku (4) konstrukce na obr. 5.18 dojde-li k posunu levé podpory o 6 mm ve svislém směru.

Řešení : Je předepsán posun $\bar{w}_2 = 6 \text{ mm}$, hledaný posun se tedy změní o

$$- \bar{R}_{2z} \cdot \bar{w}_2 = 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ mm}.$$

6. STATICKY NEURČITÉ PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE

6.1. VÝPOČET DEFORMAČNÍ METODOU

6.1.1. Vliv silových účinků

Nepůsobí-li na konstrukci vnější nesilové účinky (změna teploty, předepsané posuny), můžeme rovnice deformační metody (3.22) zapsat ve zjednodušeném tvaru

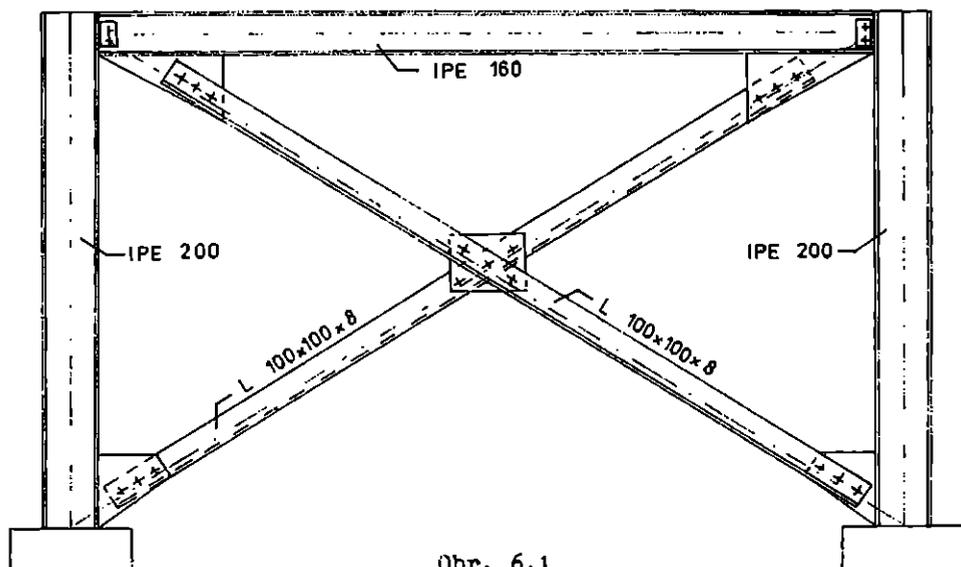
$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{F} , \quad (6.1)$$

kde \underline{K} je matice tuhosti konstrukce, \underline{r} vektor neznámých styčnickových posunů a \underline{F} vektor předepsaných styčnickových sil.

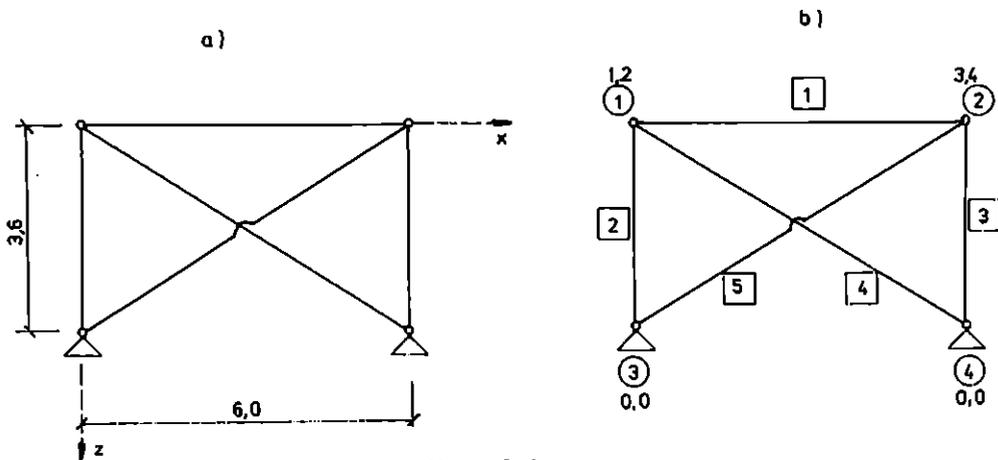
Ve 3.kapitole jsme se seznámili s několika možnými postupy při sestavování matice tuhosti konstrukce. Nejefektivnějším z nich je postup založený na lokalizaci prvků matice tuhosti jednotlivých prutů pomocí kódových čísel, který byl vysvětlen v odstavci 3.4.2. Vektor předepsaných styčnickových sil obsahuje složky vnějších sil působících na nepodepřené styčnické nebo na posuvně podepřené styčnické ve směru možného posunu. Sestavení rovnic (6.1) tedy není obtížné, pro rozsáhlejší konstrukce je však dosti pracné.

Po sestavení a vyřešení rovnic (6.1) se pokračuje výpočtem deformací, osových sil a reakcí podle obecného algoritmu deformační metody, se kterým jsme se seznámili v odstavci 3.2.4. Celý výpočet je vhodné provádět v přehledných tabulkách.

Jako příklad staticky neurčité příhradové konstrukce může posloužit ocelové příhradové ztužidlo (obr. 6.1).



Obr. 6.1



Obr. 6.2

Stetický model ztužidla z obr.6.1 je znázorněn na obr.6.2a. Všimněte si, že vzájemné spojení prutů ve styčnicích modelujeme klouby, zatímco ve skutečnosti jsou pruty spojeny pomocí styčnickových plechů, které mají k ideálním kloubům hodně daleko. Ve II.dílu skript si ukážeme, že chyba, které se tímto zjednodušením dopouštíme, je poměrně malá. Možná vás také zarazí, že ve statickém modelu neuvažujeme spojení diagonál, tj. nezavádíme styčník v jejich průsečíku. Lze však ukázat, že pokud tento styčník není zatížen, neovlivní jeho vypuštění vypočtené hodnoty osových sil. Důkaz tohoto tvrzení přenecháváme hloubavějším čtenářům jako cvičení.

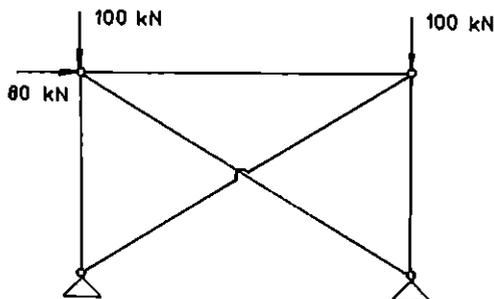
Příklad 6.1

Deformační metodou vypočtete osové síly ve ztužidle na obr.6.2a zatíženém podle obr.6.3.

Řešení:

Nejprve sestavíme matici tuhosti konstrukce: Styčníky a pruty očíslovujeme podle obr.6.2b a ke styčnicům připišeme kódová čísla. V tabulce prutů (tab.6.1) vypočteme pomocné hodnoty, které budeme potřebovat při sestavování matic tuhosti jednotlivých prutů.

Tab. 6.1



Obr. 6.3

prut	kódová čísla	x_i [m]	z_i [m]	x_j [m]	z_j [m]	Δx [m]	Δz [m]	l [m]	c [1]	s [1]	EA [MN]	EA/l [MNm ⁻¹]
1	1 2 3 4	0,0	0,0	6,0	0,0	6,0	0,0	6,0	1,0	0,0	422,1	70,35
2	1 2 0 0	0,0	0,0	0,0	3,6	0,0	3,6	3,6	0,0	1,0	598,5	166,25
3	3 4 0 0	6,0	0,0	6,0	3,6	0,0	3,6	3,6	0,0	1,0	598,5	166,25
4	1 2 0 0	0,0	0,0	6,0	3,6	6,0	3,6	7,0	0,8575	0,5145	325,5	46,52
5	3 4 0 0	6,0	0,0	0,0	3,6	-6,0	3,6	7,0	-0,8575	0,5145	325,5	46,52

Pomocné veličiny jsou označeny stejně jako v příkladu 3.15. Podobně jako v tomto příkladu vypočteme matice tuhosti jednotlivých prutů dosezením do (3.26):

1	1	2	3	4
1	70,35	0	-70,35	0
2	0	0	0	0
3	-70,35	0	70,35	0
4	0	0	0	0

2	1	2	0	0
1	0	0	0	0
2	0	166,25	0	-166,25
0	0	0	0	0
0	0	-166,25	0	166,25

3	3	4	0	0
3	0	0	0	0
4	0	166,25	0	-166,25
0	0	0	0	0
0	0	-166,25	0	166,25

4	1	2	0	0
1	34,21	20,52	-34,21	-20,52
2	20,52	12,31	-20,52	-12,31
0	-34,21	-20,52	34,21	20,52
0	-20,52	-12,31	20,52	12,31

5	3	4	0	0
3	34,21	-20,52	-34,21	20,52
4	-20,52	12,31	20,52	-12,31
0	-34,21	20,52	34,21	-20,52
0	20,52	-12,31	-20,52	12,31

K řádkům a sloupcům matic tuhosti prutů jsme obvyklým způsobem připsali kódové čísla prutů, pomocí nichž lokalizujeme jednotlivé prvky těchto matic do matice tuhosti konstrukce:

<u>K</u>	1	2	3	4
1	70,35 34,21	20,52	-70,35	
2	20,52	166,25 12,31		
3	-70,35		70,35 34,21	-20,52
4			-20,52	166,25 12,31

Lokalizují se samozřejmě jen ty prvky, pro které je jak kódové číslo řádku, tak i kódové číslo sloupce nenulové. Při praktickém výpočtu proto ostatní prvky není třeba vůbec počítat.

Sečtením příspěvků od jednotlivých prutů získáme matici tuhosti konstrukce:

K	1	2	3	4
1	104,56	20,52	-70,35	0
2	20,52	178,56	0	0
3	-70,35	0	104,56	-20,52
4	0	0	-20,52	178,56

$[MNm^{-1}]$

Po sestavení matice tuhosti konstrukce je třeba stanovit vektor zatížení. Prvky tohoto vektoru jsou vodorovné a svislé složky předepsaných styčnickových sil uspořádané ve stejném pořadí, jako neznámé styčnickové posuny. Podle obrázku 6.3 je v našem případě

$$\underline{F} = \{ 80, 100, 0, 100 \}^T \text{ kN} .$$

Známe-li matici tuhosti konstrukce a vektor zatížení, můžeme zapset a vyřešit rovnice deformační metody (6.1):

$$\begin{aligned} 104,56 \cdot u_1 + 20,52 \cdot w_1 - 70,35 \cdot u_2 &= 80 & u_1 &= 1,421 \\ 20,52 \cdot u_1 + 178,56 \cdot w_1 &= 100 & w_1 &= 0,397 \\ -70,35 \cdot u_1 &+ 104,56 \cdot u_2 - 20,52 \cdot w_2 &= 0 & \Rightarrow u_2 &= 1,091 \\ &- 20,52 \cdot u_2 + 178,56 \cdot w_2 &= 100 & w_2 &= 0,685 \end{aligned}$$

Tuhosti jsme dosadili v MNm^{-1} , zatížení v kN, posuny tedy vyšly v jednotkách

$$\frac{\text{kN}}{MNm^{-1}} = \frac{10^3 \text{ N}}{10^6 \cdot N \cdot m^{-1}} = 10^{-3} \text{ m} = \text{mm} .$$

Dosažením do geometrických rovnic získáme hodnoty deformací (protažení prutů) a dosažením do fyzikálních rovnic hodnoty vnitřních (osových) sil. Výpočet opět zorganizujeme v tabulce (tab.6.2), do které opíšeme z tab.6.1 pro každý prut jeho kódová čísla, směrové kosiny a tuhost, z vypočteného vektoru neznámých styčnickových posunů

$$\underline{\Delta} = \{ 1,421 \quad 0,397 \quad 1,091 \quad 0,685 \}^T \text{ mm}$$

vybereme podle kódových čísel koncové posuny, z geometrické rovnice prutu

$$\Delta l = (u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha$$

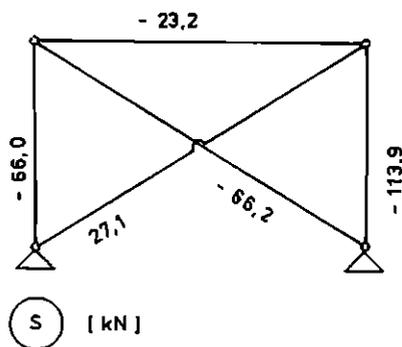
vypočteme protažení a z fyzikální rovnice

$$S = k \cdot \Delta l$$

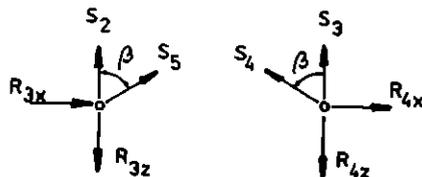
stanovíme osovou sílu. Na závěr připišeme hodnoty osových sil (včetně znamének) k jednotlivým prutům do schématického obrázku konstrukce (obr.6.4).

	kódová čísla	$\cos \alpha$ (1)	$\sin \alpha$ (1)	k (MNm^{-1})	u_1 (mm)	w_1 (mm)	u_j (mm)	w_j (mm)	Δl (mm)	S (kN)
1	1 2 3 4	1,0	0,0	70,35	1,421	0,397	1,091	0,685	-0,330	-23,2
2	1 2 0 0	0,0	1,0	166,25	1,421	0,397	0,0	0,0	-0,397	-66,0
3	3 4 0 0	0,0	1,0	166,25	1,091	0,685	0,0	0,0	-0,685	-113,9
4	1 2 0 0	0,8575	0,5145	46,52	1,421	0,397	0,0	0,0	-1,423	-66,2
5	3 4 0 0	-0,8575	0,5145	46,52	1,091	0,685	0,0	0,0	0,563	27,1

Tab. 6.2



Obr. 6.4



$$\cos \beta = 0,5145$$

$$\sin \beta = 0,8575$$

Obr. 6.5

Na závěr můžeme vypočítat reakce z podmínek rovnováhy v podepřených styčnicích (viz obr.6.5):

$$R_{3x} = -S_5 \cdot \sin \beta = -27,1 \cdot 0,8575 = -23,2 \text{ kN}$$

$$R_{3z} = S_2 + S_5 \cdot \cos \beta = -66,0 + 27,1 \cdot 0,5145 = -52,1 \text{ kN}$$

$$R_{4x} = S_4 \cdot \sin \beta = -66,2 \cdot 0,8575 = -56,6 \text{ kN}$$

$$R_{4z} = S_3 + S_4 \cdot \cos \beta = -113,9 - 66,2 \cdot 0,5145 = -148,0 \text{ kN}$$

6.1.2. Vliv předepsaných posunů

Jsou-li v podepřených styčnicích předepsány nenulové posuny, je třeba pravou stranu rovnic deformační metody (6.1) doplnit o vektor zatížení od předepsaných posunů

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{B}^T \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{r}} \quad (6.2)$$

Abychom ukázali, jak tento vektor vypočítat, vrátíme se na okamžik ke vztahům mezi styčnickovými silami a posuny pro soustavu prutů (tj. bez ohledu na vazby). Nedochází-li k teplotním změnám, můžeme tyto vztahy zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{f}} \quad , \quad (6.3)$$

kde $\hat{\mathbf{K}}$ je matice tuhosti soustavy prutů, $\hat{\mathbf{r}}$ je vektor (všech) styčnickových posunů a $\hat{\mathbf{f}}$ vektor (všech) styčnickových sil.

Předpokládejme pro jednoduchost, že ve vektoru $\hat{\mathbf{r}}$ následují předepsané posuny až za neznámými a tudíž ve vektoru $\hat{\mathbf{f}}$ následují neznámé síly (reakce) až za předepsanými (zatížením). Geometrické rovnice soustavy, které mají obecně tvar

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad (6.4)$$

můžeme za tohoto předpokladu zapsat v podobě

$$\mathbf{e} = \left[\underline{\mathbf{B}} \quad , \quad \overline{\mathbf{B}} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{r}} \\ \overline{\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \quad . \quad (6.5)$$

Matice $\hat{\mathbf{B}}$ je tedy složena ze dvou submatic, z nichž první představuje geometrickou matici konstrukce $\underline{\mathbf{B}}$ a druhá geometrickou matici vazeb $\overline{\mathbf{B}}$. Po dosažení do definice matice tuhosti soustavy

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \quad (6.6)$$

a roznásobení dostaneme

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}^T \\ \overline{\mathbf{B}}^T \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \left[\underline{\mathbf{B}} \quad , \quad \overline{\mathbf{B}} \right] = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \\ \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{B}} & \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad . \quad (6.7)$$

V levé horní submatici $\underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$ poznáváme matici tuhosti konstrukce $\underline{\mathbf{K}}$. Označíme-li dále

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \quad , \quad (6.8)$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \quad , \quad (6.9)$$

můžeme (6.3) přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \overline{\mathbf{K}} \\ \overline{\mathbf{K}}^T & \underline{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{r}} \\ \overline{\mathbf{r}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{f}} \\ \overline{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad , \quad (6.10)$$

neboli

$$\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{r}} + \overline{\mathbf{K}} \cdot \overline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{f}} \quad , \quad (6.11)$$

$$\overline{\mathbf{K}}^T \cdot \underline{\mathbf{r}} + \underline{\mathbf{K}} \cdot \overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{f}} \quad . \quad (6.12)$$

Uvědomte si, že matice $\underline{\mathbf{K}}$ a $\overline{\mathbf{K}}$ jsou vždy čtvercové, zatímco matice $\overline{\mathbf{K}}$ obecně čtvercová není.

V rovnicích (6.11), které lze upravit do tvaru

$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{f} - \underline{K} \cdot \underline{\bar{r}}, \quad (6.13)$$

poznáváme rovnice deformační metody. Podle (6.8) a (6.2) je totiž člen $-\underline{K} \cdot \underline{\bar{r}}$ vektorem zatížení od předepsaných posunů $\underline{\bar{r}}^{(r)}$.

Při výpočtu vektoru $\underline{\bar{r}}^{(r)}$ lze tedy postupovat tak, že sestavíme matici \underline{K} , vynásobíme ji vektorem předepsaných styčnickových posunů $\underline{\bar{r}}$ a výsledný vektor převedeme na pravou stranu (tj. obrátíme znaménka všech prvků).

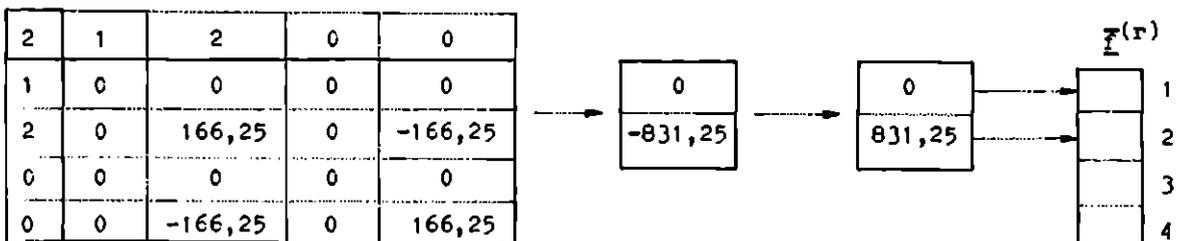
V obecném případě, kdy jsou neznámé a předepsané posuny ve vektoru \underline{r} "promíchány", netvoří matice \underline{K} jednoduší blok v matici tuhosti soustavy \underline{K} . Její prvky obecně najdeme v řádcích odpovídajících předepsaným styčnickovým silám a sloupcích odpovídajících předepsaným styčnickovým posunům. Při praktickém výpočtu není třeba matici \underline{K} explicitně sestavovat. Násobení $\underline{K} \cdot \underline{\bar{r}}$ a převod na pravou stranu lze totiž provádět již na úrovni prutu. Konkrétní postup je vysvětlen v následujícím příkladu.

Příklad 6.2 Sestavte vektor zatížení od předepsaných posunů $\underline{\bar{r}}^{(r)}$ pro konstrukci na obr.6.2a, jejíž levá podpora se posune vodorovně doprava o 2 mm a svisle dolů o 5 mm.

Řešení: V příkladu 6.1 byly sestaveny matice tuhosti jednotlivých prutů konstrukce. Prvky, které bychom při sestavování matice tuhosti soustavy lokalizovali do matice \underline{K} , leží v řádcích s nenulovými a sloupcích s nulovými kódovými čísly. Sloupcům s nulovými kódovými čísly odpovídají předepsané posuny styčníků. Jejich hodnoty můžeme připsat nad jednotlivé sloupce. V každém řádku s nenulovým kódovým číslem pak vynásobíme prvky ve sloupcích s nulovými kódovými čísly příslušnými předepsanými posuny, tyto součiny v každém řádku sečteme, změním znaménko a výsledek lokalizujeme do té složky vektoru $\underline{\bar{r}}^{(r)}$, jejíž pořadí je určeno kódovým číslem řádku.

V daném případě jsou nenulovou hodnotou předepsány pouze posuny $\bar{u}_3 = 2 \text{ mm}$ a $\bar{w}_3 = 5 \text{ mm}$ styčnicku ③. Popsaná procedura se bude týkat jen těch prutů, které jsou připojeny ke styčnicku ③, tedy prutů ② a ⑤. Na prutu ② jsou čísla koncových styčníků $i = 1, j = 3$, takže posun \bar{u}_3 odpovídá třetímu a posun \bar{w}_3 čtvrtému sloupci matice tuhosti prutu. Prvky ve třetím a čtvrtém sloupci a v řádcích s nenulovými kódovými čísly (tj. v prvním a druhém řádku) vynásobíme odpovídajícími předepsanými posuny a součty těchto součinů v každém řádku převedeme na pravou stranu. Kódová čísla zmíněných řádků jsou 1 a 2, takže výsledné hodnoty lokalizujeme do 1. a 2. složky vektoru $\underline{\bar{r}}^{(r)}$.

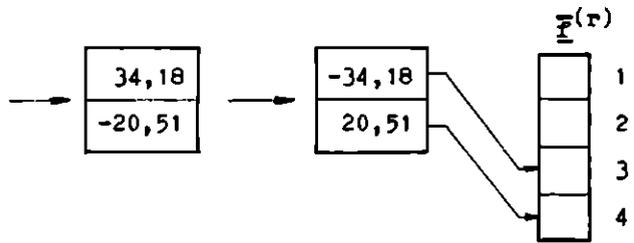
$$\begin{array}{cc} \bar{u}_3 & \bar{w}_3 \\ 2 \text{ mm} & 5 \text{ mm} \end{array}$$



Obdobně zpracujeme i prut 5:

\bar{u}_3 \bar{w}_3
2 mm 5 mm

5	3	4	0	0
3	34,21	-20,52	-34,21	20,52
4	-20,52	12,31	20,52	-12,31
0	-34,21	20,52	34,21	-20,52
0	20,52	-12,31	-20,52	12,31



Tuhosti jsme dosazovali v MNm^{-1} , předepsané posuny v mm, takže složky vektoru zatížení od předepsaných posunů vyšly v jednotkách

$$\text{MNm}^{-1} \cdot \text{mm} = 10^6 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m} = 10^3 \text{ N} = \text{kN} .$$

Výsledek: Vektor zatížení od předepsaných posunů

$$\underline{\bar{f}}^{(r)} = \{ 0 \quad 831,25 \quad -34,18 \quad 20,51 \}^T \text{ kN} .$$

Další postup výpočtu deformační metodou by byl v podstatě stejný jako v příkladu 6.1. Je jen třeba mít na paměti, že při výpočtu deformací se pracuje s úplnými geometrickými rovnicemi tvaru

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{\bar{B}} \cdot \underline{\bar{f}} . \quad (6.14)$$

Je-li tedy prut připojen k podepřenému styčnicku, položíme odpovídající koncové posuny rovny předepsaným hodnotám. Konkrétní výpočet bude předveden v příkladu 6.4.

6.1.3. Vliv teplotních změn

Jsou-li pro některé pruty konstrukce předepsány nenulové změny teploty, je třeba pravou stranu rovnic deformační metody (6.1) doplnit o vektor zatížení od teploty $\underline{\bar{f}}^{(t)}$. Tento vektor byl v článku 3.2 definován vztahem

$$\underline{\bar{f}}^{(t)} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{e}^{(t)} , \quad (6.15)$$

kde \underline{B} je geometrická matice konstrukce, \underline{D} matice tuhostí prutů a $\underline{e}^{(t)}$ vektor teplotních deformací. Při sestavování vektoru $\underline{f}^{(t)}$ samozřejmě není třeba počítat matici $\underline{B}^T \cdot \underline{D}$ pro celou konstrukci. Podobně jako při sestavování vektoru $\underline{\bar{f}}^{(r)}$ totiž lze veškeré operace provést na úrovni prutu. Pro každý prut zřejmě stačí sestavit statickou matici a vynásobit ji součinem tuhostí prutu a protažení od teploty. Statická matice prutu má jediný sloupec, takže výsledek popsané operace můžeme chápat jako vektor. V odstavci 2.2.3 jsme tento vektor

$$\underline{f}^{(t)} = \underline{B}^T \cdot k \cdot \Delta l^{(t)} \quad (6.16)$$

nazvali vektorem koncových sil od teploty. Jelikož

$$k \cdot \Delta l^{(t)} = \frac{EA}{l} \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l = EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t, \quad (6.17)$$

můžeme psát

$$\underline{f}^{(t)} = EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}. \quad (6.18)$$

Prvky vektoru koncových sil od teploty $\underline{f}^{(t)}$ pro každý prut lokalizujeme obvyklým způsobem do vektoru zatížení od teploty $\underline{\bar{f}}^{(t)}$.

Příklad 6.3 Sestavte vektor zatížení od teplotních změn $\underline{\bar{f}}^{(t)}$ pro konstrukci na obr.6.2a, došlo-li k oteplení všech prutů o 20°C.

Poznámka: Koeficient teplotní roztažnosti α_t bývá zvykem udávat v K^{-1} . Například pro ocel i beton je $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$. Hodnota tohoto koeficientu odpovídá relativnímu protažení při změně teploty o 1 K. Uvědomte si, že hovoříme-li o změně teploty, tj. o rozdílu dvou teplot, znamená 1 K přesně totéž jako 1°C. V daném případě tedy počítáme s oteplením $\Delta t = 20$ K.

Řešení: Nejprve sestavíme pomocné hodnoty do tabulky 6.3. Kódová čísla, tuhosti průřezů a směrové kosiny přebíráme z příkladu 6.1.

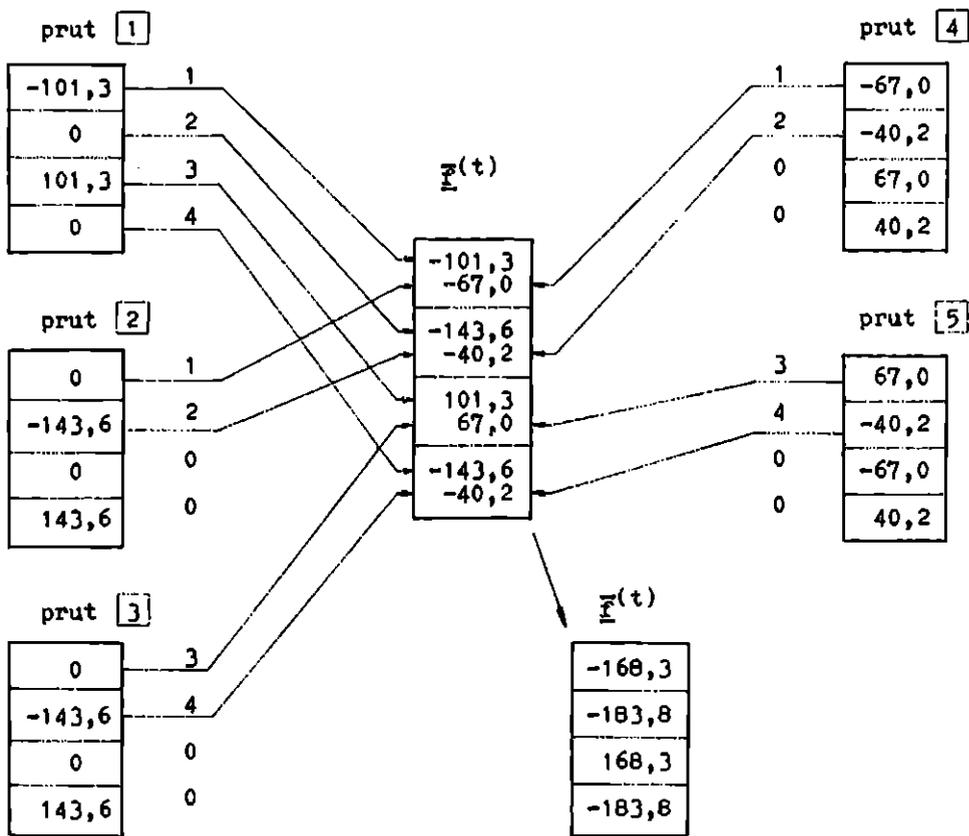
číslo prutu	kódová čísla	EA MN	α_t $10^{-6} K^{-1}$	Δt K	$EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$ N	$\cos \alpha$ 1	$\sin \alpha$ 1
1	1 2 3 4	422,1	12,0	20,0	101 300	1,0	0,0
2	1 2 0 0	598,5	12,0	20,0	143 640	0,0	1,0
3	3 4 0 0	598,5	12,0	20,0	143 640	0,0	1,0
4	1 2 0 0	325,5	12,0	20,0	78 120	0,8575	0,5145
5	3 4 0 0	325,5	12,0	20,0	78 120	-0,8575	0,5145

Tab. 6.3

Pro každý prut pak podle (6.18) vypočteme vektor koncových sil od teploty a pomocí kódových čísel lokalizujeme jeho prvky do vektoru zatížení od teploty. Postup výpočtu je znázorněn na následující stránce. Prvky jednotlivých vektorů jsou tam uvedeny v kN.

Výsledek: Vektor zatížení od teplotních změn

$$\underline{\bar{f}}^{(t)} = \{-168,3 \quad -183,8 \quad 168,3 \quad -183,8\}^T \text{ kN}.$$



Příklad 6.4

Vypočtete osové síly v konstrukci na obr.6.2a, působí-li na konstrukci zatížení silami podle příkladu 6.1, předepsané posuny podle příkladu 6.2 a změna teploty podle příkladu 6.3.

Řešení: V uvedených příkladech již byl sestaven vektor zatížení \underline{F} , vektor zatížení od předepsaných posunů $\underline{F}^{(r)}$ a vektor zatížení od teplotních změn $\underline{F}^{(t)}$. Jejich sečtením získáme vektor transformovaného zatížení

$$\underline{F} + \underline{F}^{(r)} + \underline{F}^{(t)} = \begin{Bmatrix} 80,0 \\ 100,0 \\ 0 \\ 100,0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 831,25 \\ -34,18 \\ 20,51 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -168,3 \\ -183,8 \\ 168,3 \\ -183,8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -88,3 \\ 747,4 \\ 134,1 \\ -63,3 \end{Bmatrix} \text{ kN .}$$

Rovněž matici tuhosti konstrukce můžeme převzít z příkladu 6.1. Není tedy problém sestavit rovnice deformační metody a vypočítat z nich neznámé styčnickové posuny:

$$\begin{aligned} 104,56 \cdot u_1 + 20,52 \cdot w_1 - 70,35 \cdot u_2 &= -88,3 & u_1 &= -1,616 \\ 20,52 \cdot u_1 + 178,56 \cdot w_1 &= 747,4 & w_1 &= 4,371 \\ -70,35 \cdot u_1 &+ 104,56 \cdot u_2 - 20,52 \cdot w_2 = 134,1 & u_2 &= 0,129 \\ &- 20,52 \cdot u_2 + 178,56 \cdot w_2 = -63,3 & w_2 &= -0,340 \end{aligned}$$

Jsou-li předepsány nenulové posuny podepřených styčníků, musíme při výpočtu deformací vycházet z geometrických rovnic v obecném tvaru (viz závěr odstavce 6.1.2 - rovnice (6.14)). Deformace jsou vypočteny v tabulce 6.4, do které jsme kódová čísla a směrové kosiny přepsali z tabulky 6.1. Za koncové posuny se dosazují jednak vypočtené složky vektoru neznámých styčnickových posunů, jednak (pro pruty 2 a 5) předepsané posuny styčnicku 3. Příslušné protažení pak pro každý prut vypočítáme z geometrické rovnice

$$\Delta l = (u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (w_j - w_1) \cdot \sin \alpha .$$

prut číslo	kódová čísla	$\cos \alpha$ (1)	$\sin \alpha$ (1)	u_1 (mm)	w_1 (mm)	u_j (mm)	w_j (mm)	Δl (mm)
1	1 2 3 4	1,0	0,0	-1,616	4,371	0,129	-0,340	1,745
2	1 2 0 0	0,0	1,0	-1,616	4,371	2,0	5,0	0,629
3	3 4 0 0	0,0	1,0	0,129	-0,340	0,0	0,0	0,340
4	1 2 0 0	0,8575	0,5145	-1,616	4,371	0,0	0,0	-0,863
5	3 4 0 0	-0,8575	0,5145	0,129	-0,340	2,0	5,0	1,143

Tab. 6.4

Jsou-li předepsány nenulové teplotní změny, musíme při výpočtu osových sil vycházet z fyzikálních rovnic v obecném tvaru

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{e} - \underline{e}^{(t)}) .$$

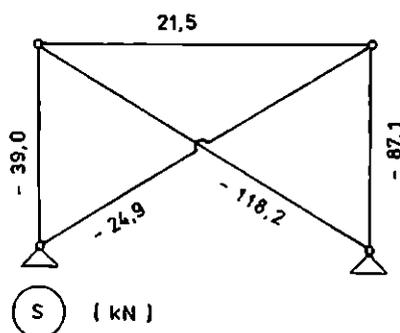
Pro jednotlivý prut má fyzikální rovnice tvar

$$S = k \cdot (\Delta l - \Delta l^{(t)}) = k \cdot \Delta l - EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t .$$

Výpočet osových sil je proveden v tabulce 6.5, do které jsme tuhosti prutů převzali z tabulky 6.1 a součiny $EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$ z tabulky 6.3. Výsledné osové síly jsou vyznačeny na obr.6.6.

prut číslo	$EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$ (kN)	k (MNm ⁻¹)	Δl (mm)	S (kN)
1	101,3	70,35	1,745	21,5
2	143,6	166,25	0,629	-39,0
3	143,6	166,25	0,340	-87,1
4	78,1	46,52	-0,863	-118,2
5	78,1	46,52	1,143	-24,9

Tab. 6.5



Obr. 6.6

Z postupu při řešení staticky neurčitých konstrukcí deformační metodou lze vyvodit, že na rozdíl od staticky určitých konstrukcí závisí napjatost, deformace i přemístění na všech charakteristikách konstrukce i vnějších účincích.

Všimněte si zejména následujícího rozdílu:

Napjatost staticky určité konstrukce závisí pouze na geometrickém uspořádání konstrukce a vnějších silových účincích.

Napjatost staticky neurčité konstrukce závisí navíc na tuhostech jednotlivých částí konstrukce a na vnějších nesilových účincích, tj. předepsaných posunech podepřených styčniců a změnách teploty.

Při praktickém návrhování je proto třeba mít na paměti, že staticky neurčitá konstrukce sice lépe přenáší silové zatížení než konstrukce staticky určitá, ale je citlivá na vnější nesilové účinky.

6. 2 . A U T O M A T I Z A C E V Ý P O Č T U

6.2.1. Základní kroky automatizovaného výpočtu

Příklady, které jsme vyřešili v předcházejícím článku, jasně ukazují, že ruční výpočet deformační metodou je i pro velmi jednoduchou konstrukci dosti pracný. Řešení reálných úloh dnes již není myslitelné bez využití výpočetní techniky.

Postup při automatizovaném výpočtu deformační metodou lze zhruba rozdělit do následujících kroků:

A) Vstup údajů o konstrukci a vnějších účincích.

B) Sestavení matice tuhosti konstrukce a vektoru transformovaného zatížení.

$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{F} + \underline{F}^{(r)} + \underline{F}^{(t)}$$

C) Řešení rovnic deformační metody - výpočet neznámých posunů.

$$\Downarrow$$

$$\underline{r}$$

D) Výpočet a tisk osových sil.

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{r} + \underline{B} \cdot \underline{r} - \underline{e}^{(t)})$$

Je ovšem třeba zdůraznit, že vlastnímu výpočtu podle bodů A) - D) předchází příprava a kontrola vstupních údajů a po jeho ukončení následuje zhodnocení a kontrola správnosti získaných výsledků. Obě tyto fáze analýzy konstrukce jsou sice neméně důležité než samotný výpočet, ale vzhledem k omezenému rozsahu skript se o nich zmíníme jen informativně.

6.2.2. Příprava vstupních údajů

Aby bylo možno analyzovat odezvu konstrukce (tj. vypočítat její přemístění, deformaci a napjatost), je třeba znát její geometrické uspořádání, charakteristiky prvků konstrukce a vnější účinky silové (zatížení) i nesilové (předepsané posuny a teplotní změny).

Konkrétní struktura vstupních údajů bude popsána pro jednotlivé ukázkové programy v článku 6.3. Ať už se však vkládání vstupních dat provádí interaktivně

v rámci vlastního výpočetního programu, nebo se předem vytvoří (zpravidla pomocí samostatného programu pro přípravu dat - tzv. preprocesoru) vstupní soubor, který je výpočetním programem přečten z vnějšího paměťového média, je třeba mít vždy na paměti, že jediná chyba v zadávaných údajích zpravidla znehodnotí veškeré výsledky. Proto by dobrý program měl umožnit kontrolu veškerých vkládaných údajů a pohodlnou opravu případné chyby. Samozřejmostí by měl být kontrolní tisk vstupních dat, který umožní prověřit jejich správnost i po ukončení výpočtu, vzniknou-li například pochybnosti o věrohodnosti výsledků.

Účinné kontrole velice napomůže grafické zobrazení konstrukce, případně i zatížení a dalších vnějších účinků. Například chybu v zadání souřadnice některého styčnicku, kterou bychom v záplavě čísel jinak jen těžko hledali, odhalíme v obrázku konstrukce obvykle na první pohled. Při zobrazování konstrukce můžeme využít speciálních grafických programů. Na stavební fakultě je oblíben zejména program AutoCAD.

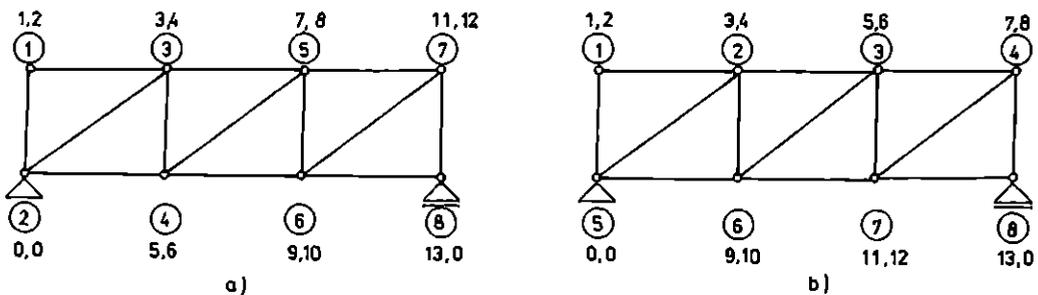
Preciznost zadávání a riziko chyby lze výrazně snížit, umožníme-li provádět tzv. automatickou generaci vstupních dat. Podstata této metody spočívá v tom, že nezadáme všechny vstupní údaje, ale jen některé, a program si zbylé údaje doplňuje podle domluvených pravidel. Například při vkládání dlouhé posloupnosti pravidelně rozmístěných styčnicků (resp. prutů) stačí udat jen souřadnice prvního a posledního z nich a údaj o tom, kolik mezilehlých styčnicků (resp. prutů) se má vložit. Podrobnější informace o automatické generaci mohou zájemci najít ve skriptech [1].

6.2.3. Uložení matice tuhosti v paměti počítače

Matice tuhosti konstrukce obsahuje zpravidla velké množství nulových prvků. Tuto skutečnost dokládá i následující příklad.

Příklad 6.5

Vyznačte nenulové prvky matice tuhosti příhradového nosníku na obr.6.7 při dvou různých způsobech očíslování styčnicků.



Obr. 6.7

Řešení: Na obr.6.7 jsou již styčnickům konstrukce podle známých pravidel přiřazena kódová čísla. Budeme postupovat tak, jako bychom sestavovali matici tuhosti konstrukce, ale místo konkrétních prvků budeme lokalizovat jen tečky, které označují, že na daném místě matice tuhosti je obecně nenulový prvek. Na těch místech, do kterých se nelocalizovalo ani jednou, budou určitě nulové prvky.

Výsledek je zachycen na obr.6.8. Ze 169 prvků matice tuhosti je 72 nulových.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1									
2									
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

a)

Obr. 6.8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1									
2									
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

b)

V předcházejícím příkladu činil podíl nulových prvků v matici tuhosti konstrukce asi 43%. Pro rozsáhlejší konstrukce bývá tento podíl ještě mnohem vyšší. Proto by bylo velmi nevhodné uchovávat matici tuhosti v paměti počítače v dvourozměrném poli, ve kterém by byly zaznamenány všechny její prvky. Plynulo bychom nejen paměti počítače, ale i strojovým časem, protože při řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou je zbytečné provádět eliminaci nulových prvků.

Seznámíme se se dvěma nejoblíbenějšími způsoby záznamu matice tuhosti v paměti počítače. Oba způsoby využívají skutečnosti, že nenulové prvky bývají rozmístěny v blízkosti hlavní diagonály, takže matice tuhosti má charakter takzvané pásové matice. Nenulový prvek nejvzdálenější od diagonály vymezuje hranici pásu, vně kterého se už nacházejí pouze nulové prvky. Na obr.6.8 jsou hranice pásu vyznačeny čárkovanými čarami. Při záznamu s konstantní šířkou pásu ukládáme do paměti jen ty prvky, které se nacházejí uvnitř pásu (včetně nulových). Navíc je matice tuhosti vždy symetrická, takže stačí ukládat jen prvky ležící mezi hlavní diagonálou a horní hranicí pásu (obr.6.9a). Konkrétně je možno takový záznam realizovat v dvourozměrném poli podle obr.6.9b, kdy zůstává část paměti nevyužita, nebo v jednorozměrném poli podle obr.6.9c.

*	x	.		
x	*	x	.	
.	x	*	x	.
	.	x	*	x
		.	x	*

a)

*	x	.
*	x	.
*	x	.
*	x	.
*		

b)

*	*	*	*	*	x	x	x	x	.	.	.
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

c)

Obr. 6.9

Počet diagonálních "vrstev", které se uchovávají, se nazývá poloviční šířkou pásu. Například v případě zachyceném na obr.6.9 je poloviční šířka pásu 3.

Záznam s konstantní šířkou pásu je výhodný v případě, že matice tuhosti má skutečně výrazně pásový charakter. Jestliže se však i uvnitř pásu nachází značné množství nulových prvků, je možné docílit další úspory použitím záznamu s proměnnou šířkou pásu. Touto technikou se ukládají pouze prvky od hlavní diagonály nahoru až po nejvyšší nenulový prvek v daném sloupci. Čára, která je v každém sloupci vedena těsně nad nejvyšším nenulovým prvkem, se říká skyline (skejlajn). Na obr.6.8 je tato čára vytažena silně. Počet ukládaných prvků ve sloupci se nazývá aktivní výškou tohoto sloupce. Protože aktivní výšky jednotlivých sloupců jsou obecně různé, přichází v úvahu pouze zápis prvků matice tuhosti do jednorozměrného pole. Prvky zapisujeme po sloupcích, v každém sloupci od diagonály směrem nahoru. Pořadí zaznamenávaných prvků je pro matici tuhosti z obr.6.8a uvedeno na obr.6.10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	1	3	6	10										
2		2	5	9										
3			4	8	13	17	22	28						
4				7	12	16	21	27						
5					11	15	20	26	33	39				
6						14	19	25	32	38				
7							18	24	31	37	44	50		
8								23	30	36	43	49		
9									29	35	42	48	55	
10										34	41	47	54	
11											40	46	53	
12												45	52	
13													51	
														56

Obr. 6.10

Z pouhého záznamu prvků matice tuhosti v jednorozměrném poli však není zřejmé, ve kterém řádku a sloupci matice tuhosti jednotlivé prvky ve skutečnosti leží. Proto musíme zaznamenat ještě tzv. adresy diagonálních prvků, tj. pořadí diagonálních prvků matice tuhosti v záznamu do jednorozměrného pole. Těmito adresami jsou pro matici tuhosti z obr.6.8a čísla uvedená v obr.6.10 na diagonále. K samotnému záznamu prvků matice tuhosti tedy přidáme ještě jedno jednorozměrné pole, do něhož zapíšeme adresy diagonálních prvků (na obr.6.10 vpravo). Délka tohoto pole odpovídá počtu sloupců matice tuhosti zvětšenému o jedničku -

na poslední paměťové místo zaznamenáme počet všech uchovávaných prvků matice tuhosti zvětšený o jedničku. Tento údaj si můžeme představit jako adresu jakéhosi fiktivního diagonálního prvku (viz obr.6.10).

Příklad 6.6 Znázorněte, jak bude technikou skyline uložena matice tuhosti konstrukce z obr.6.2.

Řešení: Matice tuhosti dané konstrukce byla sestavena v příkladu 6.1. Na obr.6.11a je silnou čarou omezena oblast mezi hlavní diagonálou a skyline, na obr.6.11b je znázorněno pořadí, v jakém budou prvky z této oblasti ukládány.

104,56	20,52	-70,35	0
20,52	178,56	0	0
-70,35	0	104,56	-20,52
0	0	-20,52	178,56

a)

1	3	6	
	2	5	
		4	8
			7

b)

Obr. 6.11

Jednorozměrné pole, ve kterém se technikou skyline uchovávají prvky matice tuhosti, tedy bude zaplněno podle obr.6.12a. V dalším jednorozměrném poli budou zapsány adresy diagonálních prvků (obr.6.12b).

a)

104,56	178,56	20,52	104,56	0	-70,35	178,56	-20,52
--------	--------	-------	--------	---	--------	--------	--------

b)

1	2	4	7	9
---	---	---	---	---

Obr. 6.12

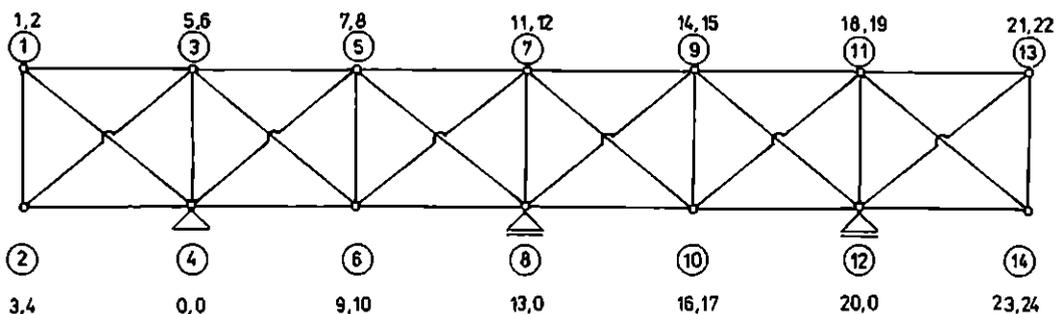
Srovnajme nyní nároky na paměť počítače potřebnou pro uložení matice tuhosti konstrukce na obr.6.7 při dvou různých způsobech očíslování styčniců. Důležité údaje vyčtené z obr.6.8 jsou sestaveny v tabulce 6.6.

způsob očíslování	a	b
poloviční šířka pásu	6	8
počet prvků polopásu	63	76
počet prvků pod skyline	55	61

Tab. 6.6

Příklad 6.7 Pro konstrukci na obr.6.13 stanovte poloviční šířku pásu.

Řešení: Místo pracného znázornění nenulových prvků matice tuhosti jako v příkladu 6.5 určíme poloviční šířku pásu jednoduchou úvahou: Poloviční šířka pásu je určena nenulovým prvkem matice tuhosti nejvzdálenějším od diagonály. Vzdálenost prvku od diagonály závisí



Obr. 6.13

na rozdíl čísla sloupce a řádku, tj. na rozdíl kódových čísel použitých při lokalizaci tohoto prvku. Stačí tedy pro každý prut najít rozdíl jeho největšího a nejmenšího kódového čísla a tento rozdíl maximalizovat přes všechny pruty.

Pro konstrukci na obr.6.13 je maximální rozdíl kódových čísel na prutu roven 6. Je ho dosaženo např. na prutu (5) - (8) s kódovými čísly 7,8,13,0 a na několika dalších prutech. Poloviční šířka pásu je rovna maximálnímu rozdíl kódových čísel na prutu zvětšenému o jedničku, v daném případě tedy $6 + 1 = 7$. Ve 13.sloupci matice tuhosti jsou totiž nenulové prvky v řádcích 7,8,9,10,11,12 a 13; počet těchto prvků je $13 - 7 + 1 = 6 + 1 = 7$.

Poznámka: Při výpočtu maximálního rozdílu kódových čísel na prutu se pochopitelně nulová kódová čísla neberou v úvahu, protože pomocí těchto čísel se nelokalizuje.

Z předcházejícího příkladu vyplývá, že poloviční šířka pásu je závislá na maximálním rozdílu kódových čísel na prutu. Tento rozdíl je ovlivněn především rozdílem čísel koncových styčníků. Z hlediska minimalizace nároků na paměť potřebnou pro uložení matice tuhosti je proto výhodné číslovat styčníky tak, aby se čísla styčníků navzájem spojených prutem pokud možno příliš nelišila. Teď už je zřejmé, proč bylo očíslování podle obr.6.7b nevhodné. Kdybychom podobným způsobem očíslovali styčníky konstrukce na obr.6.13, vzrostla by poloviční šířka pásu na 16, takže v záznamu s konstantní šířkou pásu by bylo třeba uchovávat 264 prvků místo 147 prvků uchovávaných při očíslování podle obr.6.13.

Poznamenejme ještě, že kvalitní programy pro statickou analýzu konstrukcí provádějí automatické přečíslování styčníků, jehož cílem je minimalizovat nároky na paměť počítače. S jednoduchým, ale účinným algoritmem přečíslování se zvědavý čtenář může seznámit v [1], str. 132-134. Příslušný podprogram v jazyce FORTRAN lze nalézt ve [2], str. 209-210.

Problém Označme n_{eq} počet řádků matice tuhosti a n_{hbw} poloviční šířku pásu. Jak vyjádříme počet prvků polopásu uchovávaných v záznamu s konstantní šířkou pásu ?

6.2.4. Řešení soustavy lineárních rovnic

Po sestavení matice tuhosti konstrukce \underline{K} a vektoru transformovaného zatížení $\underline{F} + \underline{F}^{(r)} + \underline{F}^{(t)}$ je třeba řešit soustavu rovnic

$$\underline{K} \cdot \underline{r} = \underline{F} + \underline{F}^{(r)} + \underline{F}^{(t)} \quad (6.19)$$

Při řešení na počítači se využívá skutečnosti, že matice tuhosti je vždy symetrická a pro stabilní konstrukce pozitivně definitní. V předmětu "Numerická analýza a programování" se dozvíte (viz [6], str. 107), že každou takovou matici lze rozložit na součin

$$\underline{K} = \underline{L} \cdot \underline{D}_g \cdot \underline{L}^T, \quad (6.20)$$

kde \underline{L} je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a \underline{D}_g je diagonální matice s kladnými diagonálními prvky. V odborné literatuře se běžně hovoří o $\underline{L} \cdot \underline{D} \cdot \underline{L}^T$ rozkladu. My jsme diagonální matici z tohoto rozkladu označili raději \underline{D}_g , abychom vyloučili nebezpečí záměny s maticí tuhosti prutů \underline{D} .

Rozklad (6.20) budeme nazývat triangulací matice tuhosti. Provedení triangulace v podstatě odpovídá přímému chodu Gaussovy eliminace, ovšem bez úpravy pravé strany. Důležité je, že jak pro záznam s konstantní šířkou pásu, tak i pro záznam technikou skyline existují algoritmy, které provádějí triangulaci bez nároků na další paměť (s výjimkou několika málo skalárních proměnných). Řešení tedy probíhá v té části paměti, která je vyhrazena pro záznam matice tuhosti. Po ukončení činnosti příslušného podprogramu je matice \underline{D}_g uložena v těch paměťových místech, která původně sloužila záznamu diagonálních prvků matice tuhosti, a matice \underline{L}^T na zbylých místech.

Je-li matice tuhosti již triangulována, lze s vektorem transformovaného zatížení provést úpravy, které odpovídají přímému a zpětnému chodu Gaussovy eliminace, a tím je převést na řešení dané soustavy rovnic (6.19), tj. na vektor neznámých styčnickových posunů. Opět tedy vystačíme s tou částí paměti, která byla již ve fázi sestavování rovnic (6.19) vyhrazena pro vektor transformovaného zatížení.

Řešení rovnic deformační metody tedy probíhá ve dvou nezávislých krocích. V prvním kroku se provede triangulace matice tuhosti, zatímco vektor transformovaného zatížení se nemění (není jej proto v této fázi nutné znát). Ve druhém kroku se naopak již nemění matice tuhosti, ale provádějí se úpravy pravé strany, tj. vektoru transformovaného zatížení. Přitom je velmi výhodné to, že chceme-li po vypočtení neznámých styčnickových posunů a příslušných osových sil pokračovat řešením odezvy těže konstrukce na jiné vnější vlivy, nemusíme znovu sestavovat ani triangulovat matici tuhosti. Stačí sestavit vektor transformovaného zatížení odpovídající novému zatěžovacímu stavu a provést pouze druhý krok řešení rovnic deformační metody. Výpočet tudíž proběhne mnohem rychleji než pro první zatěžovací stav, neboť právě sestavení matice tuhosti a její triangulace jsou při automatizovaném výpočtu deformační metodou časově nejnáročnější operace.

6.3. UKÁZKOVÝ PROGRAM

6.3.1. Úvod

V tomto článku se seznámíte s konkrétní ukázkou programu pro statickou analýzu prostorových příhradových konstrukcí deformační metodou. Program nese název TAP (a Truss Analysis Program). Jeho koncepce se do značné míry shoduje s koncepcí programu SRAM pro statickou analýzu rovinných rámových konstrukcí, který byl publikován v [1]. Je zapsán v jazyce FORTRAN-77, který je rozšířením běžného FORTRANu probíraného v základním kursu programování.

Přestože je program TAP určen pro práci na osobních počítačích, vstupní data se čtou ze vstupního souboru na pevném disku nebo disketě a výsledky se ukládají do výstupního souboru opět na pevný disk nebo disketu. Interaktivně (z klávesnice) se zadávají jen jména vstupního a výstupního souboru. Tato koncepce má řadu výhod. Vstupní soubor lze vytvořit buď editorem, nebo pomocí samostatného programu PRETAP, který umožňuje grafické zobrazení konstrukce, kontrolu a opravu vstupních dat apod. Výstupní soubor je možno prohlédnout editorem, vytisknout na tiskárně nebo transformovat na soubor pro grafický systém AutoCAD.

6.3.2. Vstupní údaje

Přehled vstupních údajů podává tabulka 6.7. Údaje jsou pro přehlednost rozděleny do celků a skupin a pro každou skupinu je uvedeno označení a typ proměnné, do níž jsou příslušné údaje načteny vstupními podprogramy programu TAP.

celek	skupina	proměnná	typ
základní	označení konstrukce	STRUCTURE	CHARACTER * 50
	název zatěžovacího stavu	LOADCASE	CHARACTER * 50
	počet styčníků	NNODE	INTEGER
	počet prutů	NELEM	INTEGER
	počet materiálových typů	NMATER	INTEGER
styčnický	souřadnice	XYZ(3,NNODE)	REAL
	podpěření	KOD(3,NNODE)	INTEGER
	zatížení	FUVW(3,NNODE)	REAL
	předepsané posuny		
pruty	čísla koncových styčníků	KELEM(3,NELEM)	INTEGER
	čísla materiálových typů		
	změny teploty	DT(NELEM)	REAL
	tuhosti průřezů	EYPMAT(2,NMATER)	REAL
	součinitele teplot.rozt.		

Tab. 6.7

Komentář k tabulce 6.7:

- 1) Proměnné STRUCTURE a LOADCASE jsou řetězce o délce maximálně 50 znaků.
- 2) Identifikátory proměnných základního celku jsou zkratkami anglických názvů:
NNODE ... Number of NODEs ... počet uzlů (= styčnicků)
NELEM ... Number of ELEMENTs ... počet prvků (= prutů)
NMATER ... Number of MATERIAL types ... počet materiálových typů
- 3) V poli XYZ jsou uloženy souřadnice styčnicků. První index označuje souřadnici (1~x , 2~y , 3~z), druhý index číslo styčnicku.
- 4) V poli KOD jsou uloženy údaje o podepření styčnicků. První index označuje směr (1~u , 2~v , 3~w), druhý index číslo styčnicku. Je-li styčnick v daném směru podepřen, má příslušný prvek pole KOD hodnotu 1, v opačném případě (nepodepřený směr) hodnotu 0.
- 5) V poli FUVW jsou uloženy jak údaje o zatížení, tak i údaje o předepsaných posunech. Přitom se využívá toho, že pro každý styčnick a každý směr je předepsán buď posun (podepřený směr), nebo vnější síla (nepodepřený směr). Je-li tedy KOD(I,IN) = 1, má FUVW(I,IN) význam předepsaného posunu styčnicku IN ve směru I, je-li KOD(I,IN) = 0, má FUVW(I,IN) význam předepsané styčnickové síly působící na styčnick IN ve směru I.
- 6) KELEM(1,IE) a KELEM(2,IE) jsou čísla koncových styčnicků prutu číslo IE, KELEM(3,IE) je číslo materiálového typu prutu IE. Ve skutečných konstrukcích totiž pruty bývají vyrobeny obvykle jen z několika různých profilů, takže má vždy velká skupina prutů stejnou tuhost průřezu i součinitel teplotní roztažnosti. Proto pro každý prut místo materiálových charakteristik zaznamenáváme číslo tzv. materiálového typu, ve kterém jsou příslušné charakteristiky uloženy (viz pole TYPMAT).
- 7) V poli DT jsou údaje o oteplení, index znamená číslo prutu.
- 8) V poli TYPMAT jsou specifikovány jednotlivé materiálové typy. TYPMAT(1,IM) je tuhost průřezu a TYPMAT(2,IM) součinitel teplotní roztažnosti těch prutů, které mají materiálový typ IM (viz pole KELEM).

Konkrétní ukázka vstupního souboru bude předvedena v odstavci 6.3.7.

6.3.3. Dynamické přidělování paměti

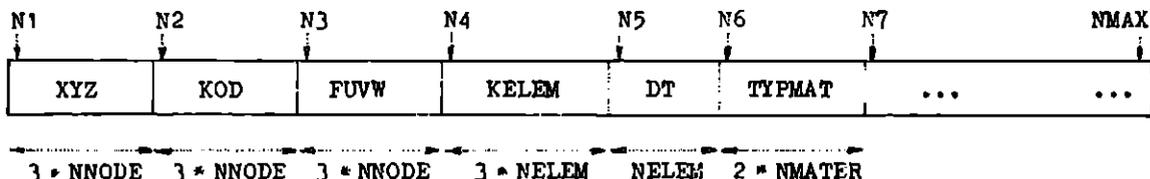
Z předcházejícího odstavce vyplývá, že většinu údajů o konstrukci a vnějších účincích budeme ukládat v indexovaných proměnných (polích). Horní meze indexů v těchto polích často závisejí na veličinách, jejichž konkrétní hodnoty se úlohu od úlohy liší, např. na počtu styčnicků nebo prutů. Jazyk FORTRAN-77 však neumožňuje deklarovat pole dynamicky, tj. například nadimenzovat v hlavním programu pole XYZ příkazem

```
DIMENSION XYZ(3,NNODE) .
```

Všechny meze v deklaraci pole v hlavním programu totiž musí být konstanty. Bylo by tudíž třeba předem stanovit maximálně přípustný počet styčnicků, např. 300, a pole pro záznam souřadnic nadimenzovat příkazem

Podobně bychom museli stanovit i maximálně přípustný počet prutů, materiálových typů, neznámých styčnickových přemístění apod. To by ovšem vedlo k nevhodnému přidělování paměti a k omezení maximálního rozsahu úlohy, kterou je možno programem zpracovat.

Popsaný nedostatek jazyka FORTRAN-77 je možné obejít programátorským trikem, jehož princip stručně popíšeme: V hlavním programu se nadimenzuje jediné velké jednorozměrné pole, označené např. A. Po načtení základních údajů (počtu styčnicků, prutů a materiálových typů) se toto pole myšleně rozdělí na oblasti, které budou sloužit k záznamu jednotlivých skupin údajů. Takové rozdělení je schématicky znázorněno na obr.6.14.



Obr. 6.14

Pro každou skupinu údajů stanovíme její adresu v poli A, tj. index toho paměťového místa v poli A, do kterého se ukládá první údaj příslušné skupiny. Adresy pak uložíme do celočíselných proměnných N1, N2, ..., tzv. ukazatelů (pointerů). Například prvky skupiny XYZ (souřadnice styčnicků) se budou ukládat od začátku pole A, tedy od adresy N1 = 1. Pole XYZ má 3 * NNODE prvků, další skupinu KOD (údaje o podepření) je proto možné ukládat od adresy N2 = N1 + 3 * NNODE. Podobně údaje skupiny FUVW (zatížení a předepsané posuny) se budou ukládat od adresy N3 = N2 + 3 * NNODE atd.

Každý prvek polí XYZ, KOD, ... TYPMAT má nyní své vyhrazené místo v poli A. Prvky dvourozměrných polí jsou do jednorozměrného pole seřazeny po sloupcích. Například do paměťového místa A(N2) se ukládá KOD(1,1), do A(N2+1) KOD(2,1), do A(N2+2) KOD(3,1), do A(N2+3) KOD(1,2) atd. Obecně je prvek z I-tého řádku a J-tého sloupce pole KOD uložen v poli A na adrese N2 + I + 3 * J - 4. Abychom se na tento prvek mohli odvolávat jako na KOD(I,J) a nemuseli užívat neprůhledného označení A(N2+I+3 * J-4), ztotožníme první prvek pole KOD, tedy prvek KOD(1,1), s N2-tým prvkem pole A, tedy s A(N2). Tohoto ztotožnění lze dosáhnout tak, že prvek A(N2) užijeme jako skutečný parametr při volání podprogramu, jehož odpovídající formální parametr bude označen KOD. V podprogramu pak bude proměnná KOD nadimenzována jako dvourozměrné pole příkazem

DIMENSION KOD(3,NNODE).

V tomto případě tedy smíme při dimenzování pole použít proměnné, pokud je ovšem tato proměnná zařazena rovněž mezi parametry. Konkrétní realizace vypadá například takto:

```

C   hlavní program
COMMON A(5000)

   :
N1=1 .
N2=N1+3 * NNODE
N3=N2+3 * NNODE

   :
CALL INPNODE(A(N1),A(N2),A(N3),NNODE)

   :
END

C
C   podprogram
SUBROUTINE INPNODE(XYZ,KOD,FUVW,NNODE)
DIMENSION XYZ(3,NNODE),KOD(3,NNODE),FUVW(3,NNODE)

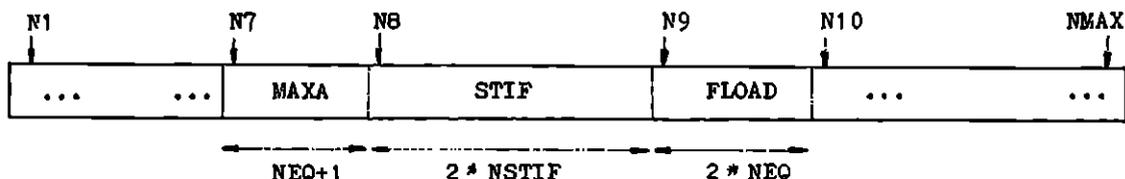
   :
END

```

Podstatné je, že při přenosu parametrů se ztotožní nejen KOD(1,1) s A(N2), ale automaticky také další prvky skutečného a formálního pole v příslušném pořadí, tj. KOD(2,1) s A(N2+1), KOD(3,1) s A(N2+2), KOD(1,2) s A(N2+3) atd.

Matici tuhosti konstrukce budeme v programu TAP zaznamenávat technikou skyline. Protože počet rovnic ani počet prvků mezi diagonálou a skyline není předem znám, je třeba přidělit paměť pro vektor adres diagonálních prvků MAXA(NEQ+1), pro záznam matice tuhosti STIF(NSTIF) a pro vektor transformovaného zatížení FLOAD(NEQ) rovněž pomocí popsaného triku. Vektor neznámých styčnickových posunů bude po vypočtení uložen ve stejné oblasti paměti jako vektor transformovaného zatížení, bude však označen UVW(NEQ). Přitom NEQ (Number of Equations) označuje počet rovnic (= počet neznámých styčnickových posunů), NSTIF je počet uchovávaných prvků matice tuhosti.

Při řešení rozsáhlých soustav lineárních rovnic dochází ke hromadění zaokrouhlovacích chyb, které mohou postupně zkreslit nebo i zcela znehodnotit výsledek. Abychom toto rozíko snížili, budeme provádět řešení soustavy rovnic deformační metody v tzv. dvojnásobné přesnosti. Prvky matice tuhosti a prvky vektoru transformovaného zatížení proto budeme uchovávat v proměnných typu DOUBLE PRECISION, neboli REAL * 8 (to je totéž). Pro uložení jedné proměnné typu REAL * 8 se spotřebuje 8 bytů paměti, zatímco pro uložení proměnné typu REAL (explicitně vypsáno REAL * 4) pouze 4 byty. Protože pole A je typu REAL * 4, je třeba pro každou proměnnou s dvojnásobnou přesností vyhradit dvě paměťová místa v poli A. Pro pole STIF(NSTIF) tedy rezervujeme 2 * NSTIF míst v poli A a pro pole FLOAD(NEQ), resp. UVW(NEQ), rezervujeme 2 * NEQ míst. Rozdělení pole A od adresy N7 je znázorněno na obr.6.15.



Obr. 6.15

6.3.4. Struktura programu

Se základními kroky automatizované deformační metody jsme se seznámili již v článku 6.2. Postup výpočtu nyní rozpracujeme poněkud podrobněji:

A) Vstup údajů o konstrukci a vnějších účincích

A-1	Vstup základních údajů	INPBAS
A-2	Přidělení paměti pro údaje o konstrukci	-
A-3	Vstup údajů o styčnicích	INPNODE
A-4	Vstup údajů o prutech	INPELEM

B) Sestavení matice tuhosti a vektoru transformovaného zatížení

E-1	Stanovení kódových čísel	CODNUM
B-2	Přidělení paměti pro vektor adres diagonálních prvků	-
B-3	Výpočet adres diagonálních prvků	FORMSTIF
E-4	Přidělení paměti pro matici tuhosti konstrukce a vektor transformovaného zatížení	-
B-5	Sestavení matice tuhosti konstrukce a vektoru transformovaného zatížení	STIFMAT

C) Řešení rovnic deformační metody - výpočet neznámých posunů

C-1	Triangulace matice tuhosti konstrukce	COLSOL
C-2	Výpočet neznámých styčnickových posunů	COLSOL

D) Tisk výsledků

D-1	Tisk vypočtených styčnickových posunů	OUTPUT
D-2	Výpočet a tisk osových sil	OUTPUT

U většiny kroků je uveden název podprogramu, v jehož rámci je daný krok realizován. Tam, kde název podprogramu chybí, se příslušná činnost provádí v hlavním programu. Jde především o činnosti související s dynamickým přidělováním paměti.

Některé podružné kroky (např. úvodní tisk názvu programu nebo tisk informací o rozsahu úlohy) nebyly v tomto stručném přehledu uvedeny, ve výpisu programu v odstavci 6.3.6. se však objeví.

6.3.5. Přehled důležitých proměnných

K usnadnění orientace ve výpisu programu, který bude následovat, uvádíme abecední přehled nejdůležitějších proměnných, často se v programu opakujících. Před identifikátorem každé proměnné je uvedena zkratka označující její typ.

Typ	identifikátor (dimenze)	význam
R4	A(NMAX)	základní pole
R4	ALFAT	součinitel teplotní roztažnosti
R4	C(3)	směrové kosiny prutu
R4	DL	délka prutu
R4	DT(NELEM)	oteplení prutů
R4	EA	tuhost průřezu prutu v tahu-tlaku
R4	ELSTIF(6,6)	matice tuhostí prutu
R8	FLOAD(NEQ)	vektor transformovaného zatížení
CH	FNAME	jméno souboru (vstupního nebo výstupního)
R4	FUVW(3,NNODE)	předepsané styčnickové síly a předepsané posuny styčnicků
I	IE	číslo prutu
I	IM	číslo materiálového typu
I	IN	číslo styčnicku
I	IR	číslo vstupního souboru (standardně IR = 1)
I	IW	číslo výstupního souboru (standardně IW = 2)
I	KELEM(3,NELEM)	čísla koncových styčnicků a mat. typu pro všechny pruty
I	KN(6)	kódová čísla prutu
I	KOD(3,NNODE)	údaje o podepření, později kódová čísla styčnicků
CH	LOADCASE	označení zatěžovacího stavu
I	MAXA(NEQ1)	vektor adres diagonálních prvků
I	NELEM	počet prutů
I	NEQ	počet rovnic (= počet neznámých styčnickových posunů)
I	NEQ1	počet rovnic + 1
L	NEWSTIF	informace, zda je třeba znovu sestavovat matici tuhosti
I	NMATER	počet materiálových typů
I	NNODE	počet styčnicků
I	NODE1 , NODE2	čísla koncových styčnicků prutu
I	NSTIF	počet uchovávaných prvků matice tuhosti konstrukce
I	N1,N2, ... N10	ukazatele na začátky jednotlivých polí v poli A
I	NMAX	maximální přípustná adresa v poli A (NMAX = 10000)
R8	STIF(NSTIF)	prvky matice tuhosti v jednorozměrném poli
CH	STRUCTURE	označení konstrukce
R4	TYPMAT(2,NMATER)	materiálové typy (tuhosti průřezů, součinitele α_t)
R8	UVW(NEQ)	neznámé styčnickové posuny
R4	XYZ(3,NNODE)	souřadnice styčnicků
R4	XYZ1(3) , XYZ2(3)	souřadnice koncových styčnicků prutu

Význam zkratk: I ... INTEGER * 4
R4 ... REAL * 4
R8 ... REAL * 8
CH ... CHARACTER
L ... LOGICAL

6.3.6. Komentovaný výpis programu

V tomto odstavci je uveden kompletní výpis programu TAP s poměrně podrobným komentářem jednotlivých programových jednotek. Z metodických důvodů uvádíme nejprve důležité podprogramy seřazené podle kroků A) - D) algoritmu deformační metody (viz 6.2.1. a 6.3.4.). Ve skutečnosti těmto podprogramům samozřejmě musí předcházet hlavní program, se kterým se seznámíme později.

A) Vstup údajů o konstrukci a vnějších účincích

Podprogramy: INPBAS , INPNODE , INPELEM

C Vstup základních údajů

```
C *****
C SUBROUTINE INPBAS(NNODE,NELEM,NMATER)
C *****
C CHARACTER FNAME*12,STRUCTURE*50,LOADCASE*50
C COMMON /IRIW/ IR,IW
C COMMON /TEXT/ STRUCTURE,LOADCASE

PRINT*
PRINT*,'Vstup udaju o konstrukci'
PRINT*
PRINT*,'Udaje nacist ze souboru : '
READ(*,'(A12)') FNAME
OPEN(IR,FILE=FNAME)
READ(IR,100) STRUCTURE,LOADCASE,NNODE,NELEM,NMATER
PRINT*
PRINT*,'Konstrukce      : ',STRUCTURE
PRINT*
PRINT*,'Zatezovací stav : ',LOADCASE
100 FORMAT(///2(/28X,A40/),3(/36X,I6))
END
```

V podprogramu INPBAS je uživatel vyzván, aby z klávesnice zadal jméno vstupního souboru. Tento soubor se pak otevře příkazem OPEN a přečtou se z něj základní údaje - označení konstrukce, označení zatěžovacího stavu, počet stýčniců, počet prutů a počet materiálových typů. Formát tohoto čtení je dán strukturou vstupního souboru (srovnejte s příkladem v odstavci 6.3.7.). Číslo vstupního souboru (IR=1) se přenáší v COMMON bloku /IRIW/ z hlavního programu. Označení konstrukce a zatěžovacího stavu se pro kontrolu vypíše na obrazovku.

C Vstup údajů o stýčnicích

```
C *****
C SUBROUTINE INPNODE(XYZ,KOD,FUVW,NNODE)
C *****
C COMMON /IRIW/ IR,IW
C DIMENSION XYZ(3,NNODE),KOD(3,NNODE),FUVW(3,NNODE)

PRINT*
PRINT*,'Vstup udaju o stycnicich'
READ(IR,'(/////)' )
DO 10 IN=1,NNODE
10 READ(IR,*) J,(XYZ(I,IN),I=1,3),
+           (KOD(I,IN),I=1,3),
+           (FUVW(I,IN),I=1,3)
END
```

V podprogramu INPNODE se ze vstupního souboru přečtou údaje o styčnicích - souřadnice, údaje o podepření, předepsané styčnickové síly a předepsané styčnickové posuny. Čtení je neformátované, nejprve se však ve vstupním souboru vynechá patřičný počet řádků, ve kterých je zapsána hlavička tabulky styčníků (srovnejte opět s příkladem vstupního souboru v odstavci 6.3.7.).

```
C      Vstup udaju o prutech a materialovych typech
C      *****
C      SUBROUTINE INPELEM(KELEM,DT,TYPMAT,NELEM,NMATER)
C      *****
COMMON /IRIW/ IR,IW
DIMENSION KELEM(3,NELEM),DT(NELEM),TYPMAT(2,NMATER)

PRINT*
PRINT*,'Vstup udaju o prutech'
READ(IR,'(/////)' )
DO 10 IE=1,NELEM
10 READ(IR,*) J,(KELEM(I,IE),I=1,3),DT(IE)

PRINT*
PRINT*,'Vstup udaju o materialovych typech'
READ(IR,'(////////)' )
DO 20 IM=1,NMATER
20 READ (IR,*) J,(TYPMAT(I,IM),I=1,2)
CLOSE(IR)
END
```

V podprogramu INPELEM se ze vstupního souboru přečtou údaje o prutech a materiálových typech. Pro jednotlivé pruty se čte číslo levého a pravého koncového styčnicku a číslo materiálového typu, pro materiálové typy tuhost průřezu v tahu-tlaku a součinitel teplotní roztažnosti. Vstupní soubor se pak uzavře.

B) Sestavení matice tuhosti konstrukce a vektoru transformovaného zatížení

Podprogramy: CODNUM , FORMSTIF , STIFMAT , ELEM , BEAMCHAR , LOCAL

```
C      Prepocet udaju o vazbach na kodova cisla
C      *****
C      SUBROUTINE CODNUM(KOD,NNODE,NEQ)
C      *****
DIMENSION KOD(3,NNODE)

NEQ=0
DO 10 IN=1,NNODE
DO 10 I=1,3
IF (KOD(I,IN).EQ.0) THEN
NEQ=NEQ+1
KOD(I,IN)=NEQ
ELSE
KOD(I,IN)=0
ENDIF
10 CONTINUE
END
```

V podprogramu CODNUM se údaje o podepření přepočítají na kódová čísla styčníků. Jedničky v poli KOD odpovídají podepřeným směrům a proto se změní na nuly

(nulová kódová čísla). Neopak tam, kde byla původně nula odpovídající nepodepřenému směru, se objeví kladné kódové číslo vyjadřující pořadí příslušného neznámého styčnickového posunu ve vektoru neznámých styčnickových posunů. Největší kódové číslo má zároveň význam počtu neznámých NEQ, který je výstupním parametrem.

```

C      Formatovani matice tuhosti

C      *****
C      SUBROUTINE FORMSTIF(KOD,KELEM,MAXA,NNODE,NELEM,NEQ1,NSTIF)
C      *****
C      DIMENSION KOD(3,NNODE),KELEM(3,NELEM),MAXA(NEQ1),NODE(2)

C      Stanoveni pozic nejvyssich nenulovych prvku
C      v jednotlivych sloupcich matice tuhosti konstrukce
      NEQ=NEQ1-1
      DO 10 I=1,NEQ
10     MAXA(I)=I
      DO 30 IE=1,NELEM
          NODE(1)=KELEM(1,IE)
          NODE(2)=KELEM(2,IE)
          KODMIN=2*NEQ
          DO 20 I=1,3
              DO 20 IN=1,2
                  KODNUM=KOD(I,NODE(IN))
                  IF (KODNUM.GT.0.AND.KODNUM.LT.KODMIN) KODMIN=KODNUM
20             CONTINUE
          DO 30 I=1,3
              DO 30 IN=1,2
                  KODNUM=KOD(I,NODE(IN))
                  IF (KODNUM.GT.0.AND.KODMIN.LT.MAXA(KODNUM))
+                 MAXA(KODNUM)=KODMIN
30             CONTINUE

C      Vypocet aktivnich vysek sloupcu
      DO 40 I=1,NEQ
40     MAXA(I)=I-MAXA(I)+1

C      Vypocet adres diagonalnich prvku
      KDIAG=2
      DO 50 I=2,NEQ+1
          KH=MAXA(I)
          MAXA(I)=KDIAG
50     KDIAG=KDIAG+KH

C      Vypocet delky pole pro ulozeni matice tuhosti
      NSTIF=MAXA(NEQ+1)-1
      END

```

V podprogramu FORMSTIF se vypočte vektor adres diagonálních prvků MAXA a stanoví se rovněž počet prvků matice tuhosti mezi hlavní diagonálou a skyline označený NSTIF. Vstupními parametry jsou kódová čísla v poli KOD, čísla koncových styčníků v poli KELEM, počet styčníků NNODE, počet prutů NELEM a počet rovnic zvětšený o jedničku NEQ1.

V první fázi výpočtu (až do návěští 30) se pro každý sloupec matice tuhosti najde nejmenší index řádku s nenulovým prvkem. Pro záznam těchto údajů se využívá pole MAXA, takže není třeba přidělovat další paměť. Ve druhé fázi (cyklus s návěštím 40) se pro každý sloupec zjistí jeho aktivní výška a konečně ve třetí fázi (cyklus s návěštím 50) se postupným nasčítáním aktivních výšek určí adresy diagonálních prvků včetně fiktivního prvku ve sloupci číslo NEQ1. Adresa fiktivního prvku zmenšená o jedničku odpovídá počtu uchovávaných prvků NSTIF.

```

C   Sestavení matice tuhosti a vektoru transformovaného zatížení
C   *****
C   SUBROUTINE STIFMAT(XYZ,KOD,FUVW,KELEM,DT,TYPMAT,MAXA,STIF,FLOAD,
+   NNODE,NELEM,NMATER,NEQ,NEQ1,NSTIF,NEWSTIF)
C   *****
REAL*8 STIF,FLOAD
LOGICAL NEWSTIF
DIMENSION XYZ(3,NNODE),KOD(3,NNODE),FUVW(3,NNODE),KELEM(3,NELEM),
+   DT(NELEM),TYPMAT(2,NMATER),MAXA(NEQ1),
+   STIF(NSTIF),FLOAD(NEQ),
+   KN(6),UVW(6)

PRINT*
PRINT*,'Sestavení vektoru transformovaného zatížení'
IF (NEWSTIF) PRINT*,'a matice tuhosti konstrukce'

C   Nulování matice tuhosti
IF (NEWSTIF) THEN
DO 10 I=1,NSTIF
10  STIF(I)=0.
ENDIF

C   Prepis předepsaných styčnických sil
do vektoru transformovaného zatížení
DO 20 IN=1,NNODE
DO 20 I=1,3
KODNUM=KOD(I,IN)
IF (KODNUM.GT.0) FLOAD(KODNUM)=FUVW(I,IN)
20  CONTINUE

C   Cyklus přes pruty
DO 100 IE=1,NELEM

C   Stanovení kódových čísel prutu
C   a prepis předepsaných koncových posunů
C   do vektoru UVW
IK=1
DO 30 IN=1,2
NODE=KELEM(IN,IE)
DO 30 I=1,3
KODNUM=KOD(I,NODE)
KN(IK)=KODNUM
IF (KODNUM.EQ.0) THEN
UVW(IK)=FUVW(I,NODE)
ELSE
UVW(IK)=0.
ENDIF
30  IK=IK+1

NODE1=KELEM(1,IE)
NODE2=KELEM(2,IE)
IM=KELEM(3,IE)

C   Sestavení a lokalizace matice tuhosti prutu
C   a vektoru zatížení od teploty a předepsaných posunů
CALL ELEM(XYZ(1,NODE1),XYZ(1,NODE2),KN,UVW,TYPMAT(1,IM),
+   TYPMAT(2,IM),DT(IE),MAXA,STIF,FLOAD,
+   NEQ,NEQ1,NSTIF,NEWSTIF)
100  CONTINUE

END

```

Podprogram STIFMAT je klíčovou částí celého programu. Slouží totiž k sestavení matice tuhosti konstrukce a vektoru transformovaného zatížení. Vstupními parametry jsou všechny vstupní údaje o konstrukci a vnějších účincích (pole XYZ, KOD, ... TYPMAT), vektor adres diagonálních prvků (pole MAXA), počet styčníků,

prutů atd. (proměnné NNODE, NELEM, ... NSTIF) a konečně také logická proměnná NEWSTIF, která udává, zda se má matice tuhosti vůbec sestavovat. Při opakování výpočtu pro tutéž konstrukci v jiném zatěžovacím stavu se totiž matice tuhosti nemění a není ji proto třeba znovu sestavovat ani triangulovat. V takovém případě má parametr NEWSTIF hodnotu .FALSE. a v podprogramu STIFMAT se sestavuje pouze vektor transformovaného zatížení.

Výstupními parametry jsou pole STIF, do kterého se zaznamenávají technickou skyline prvky matice tuhosti konstrukce, a pole FLOAD - vektor transformovaného zatížení.

Podprogram STIFMAT používá dále pomocná pole KN(6) pro záznam kódových čísel zpracovávaného prutu a UVW(6) pro záznam předepsaných koncových posunů zpracovávaného prutu.

V úvodu podprogramu se vynuluje matice tuhosti (cyklus s návěštím 10) a do vektoru transformovaného zatížení se na odpovídající místa přepíše předepsané styčnickové síly (cyklus s návěštím 20).

Jádrem podprogramu je cyklus přes pruty (cyklus s návěštím 100). Pro každý prut se nejprve zjistí jeho kódová čísla (pole KN) a předepsané koncové posuny (pole UVW). Tato data se pak spolu s dalšími údaji o prutu předají podprogramu ELEM, který provede další zpracování prutu.

```

C *****
C SUBROUTINE ELEM(XYZ1,XYZ2,KN,UVW,EA,ALFAT,DT,MAXA,STIF,FLOAD,
+ NEQ,NEQ1,NSTIF,NEWSTIF)
C *****

REAL*8 STIF,FLOAD
LOGICAL NEWSTIF
DIMENSION XYZ1(3),XYZ2(3),KN(6),UVW(6),MAXA(NEQ1),STIF(NSTIF),
+ FLOAD(NEQ),C(3),ELSTIF(6,6)

C Vypocet delky prutu
C a smerovych kosinu
CALL BEAMCHAR(XYZ1,XYZ2,C,DL)

C Sestaveni matice tuhosti prutu
IF (NEWSTIF) THEN
DO 30 I=1,3
DO 30 J=1,3
ELST=EA/DL*C(I)*C(J)
ELSTIF(I,J)=ELST
ELSTIF(I+3,J)=-ELST
ELSTIF(I,J+3)=-ELST
30 ELSTIF(I+3,J+3)=ELST

C Lokalizace matice tuhosti prutu
CALL LOCAL(ELSTIF,KN,MAXA,STIF,NEQ1,NSTIF)
ENDIF

C Vypocet a lokalizace vektoru zatizeni
C od teploty a predepsanych posunu
STEMP=EA*ALFAT*DT
DO 40 I=1,6
KODNUM=KN(I)
IF (KODNUM.EQ.0) GOTO 40
IF (I.LE.3) THEN
F=STEMP*C(I)
ELSE
F=-STEMP*C(I-3)
ENDIF
DO 35 J=1,6
35 F=F+ELSTIF(I,J)*UVW(J)
FLOAD(KODNUM)=FLOAD(KODNUM)-F
40 CONTINUE

```

END

V podprogramu ELEM se sestaví matice tuhosti prutu a vektor zatížení od teplotních změn a předepsaných posunů a jejich prvky se pak lokalizují do matice tuhosti konstrukce, resp. do vektoru transformovaného zatížení. Vstupními parametry jsou souřadnice koncových styčniců v polích XYZ1, XYZ2, kódová čísla prutu v poli KN, předepsané koncové posuny v poli UVW a vektor adres diagonálních prvků MAXA. Prvky matice tuhosti se lokalizují do pole STIF, prvky vektoru zatížení od teplotních změn a předepsaných posunů do pole FLOAD. Podprogram používá pomocné pole C pro záznam směrových kosinů prutu a pole ELSTIF pro záznam matice tuhosti prutu.

Ze souřadnic koncových styčniců se nejprve pomocí podprogramu BEAMCHAR vypočtou směrové kosiny (pole C) a délka prutu DL. V cyklu s návěštím 30 se pak sestaví matice tuhosti prutu ELSTIF podle (2.60). Přitom se vtipně využívá určité pravidelnosti této matice. Lokalizaci do matice tuhosti konstrukce provádí podprogram LOCAL.

Ve zbývající části podprogramu ELEM se pro nenulová kódová čísla vypočte odpovídající prvek vektoru zatížení od teploty a předepsaných posunů a ten se pak lokalizuje do vektoru transformovaného zatížení. Postup je podobný jako v odstavcích 6.1.2. a 6.1.3., při výpočtu příspěvku od předepsaných posunů se však užívá drobného triku: V poli UVW jsou na pozicích s nulovými kódovými čísly předepsané posuny koncových styčniců, na zbývajících pozicích nuly. Proto můžeme násobení prvků matice tuhosti odpovídajícími předepsanými posuny provést v cyklu přes všechny sloupce (cyklus s návěštím 35), namísto toho, abychom uvažovali jen sloupce s nulovými kódovými čísly.

C Lokalizace matice tuhosti prutu

```

C      *****
C      SUBROUTINE LOCAL(ELSTIF,KN,MAXA,STIF,NEQ1,NSTIF)
C      *****
C      REAL*8 STIF
C      DIMENSION ELSTIF(6,6),KN(6),MAXA(NEQ1),STIF(NSTIF)

DO 20 I=1,6
  KNI=KN(I)
  IF (KNI.EQ.0) GOTO 20
  DO 10 J=I,6
    KNJ=KN(J)
    IF (KNJ.EQ.0) GOTO 10
    IF (KNI.LT.KNJ) THEN
      K1=KNI
      K2=KNJ
    ELSE
      K1=KNJ
      K2=KNI
    ENDIF
    KADR=MAXA(K2)+K2-K1
    STIF(KADR)=STIF(KADR)+ELSTIF(I,J)
  10  CONTINUE
  20  CONTINUE
END

```

Podprogram LOCAL lokalizuje prvky matice tuhosti prutu do matice tuhosti konstrukce. Vstupními parametry jsou matice tuhosti prutu ELSTIF, kódová čísla prutu KN a vektor adres diagonálních prvků MAXA. V cyklu přes horní trojúhelník matice tuhosti prutu, realizovaném pomocí dvou řídicích proměnných I a J, se pro prvky ležící v řádce i sloupci s nenulovým kódovým číslem vypočte adresa

KADR odpovídajícího prvku matice tuhosti konstrukce v poli STIF. Přitom je třeba uvážit, že kódová čísla prutu nejsou nutně uspořádána podle velikosti, neboť číslo pravého koncového styčnicku může být menší než číslo levého. Proto je nutné kódová čísla řádku a sloupce matice tuhosti prutu, ve kterých leží zpracováváný prvek, případně přehodit tak, aby se skutečně lokalizovalo do horního trojúhelníku matice tuhosti konstrukce. Proměnné KNI a KNJ označují kódová čísla řádku a sloupce matice tuhosti prutu, K1 a K2 jsou tato čísla uspořádána tak, aby bylo $K1 < K2$. Lokalizuje se pak do řádku K1 a sloupce K2 matice tuhosti konstrukce. Adresu KADR určíme tak, že k adrese diagonálního prvku ve sloupci K2, tj. k MAXA(K2), přičteme vzdálenost prvku v řádku K1 od diagonály, tj. $K2-K1$. Zpracováváný prvek matice tuhosti prutu se pak přičte do proměnné STIF(KADR).

```

C      Vypocet delky a smerovych kosinu
C
C      *****
C      SUBROUTINE BEAMCHAR(XYZ1,XYZ2,C,DL)
C      *****
C      DIMENSION XYZ1(3),XYZ2(3),C(3)
C      DL=0.
C      DO 10 I=1,3
C          C(I)=XYZ2(I)-XYZ1(I)
10     DL=DL+C(I)**2
C      DL=SQRT(DL)
C      DO 20 I=1,3
20     C(I)=C(I)/DL
C      END

```

V podprogramu BEAMCHAR se ze souřadnic koncových styčnicků uložených v polích XYZ1, XYZ2 vypočte délka prutu DL a směrové kosiny v poli C podle (2.58).

C) Řešení soustavy lineárních rovnic

Podprogram: COLSOL

```

C      Triangulace matice tuhosti      (KKK=1)
C      nebo vypocet neznamych posunu (KKK=2)
C
C      *****
C      SUBROUTINE COLSOL (A,V,MAXA,KKK,NEQ,NEQ1,NSTIF)
C      *****
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(NSTIF),V(NEQ),MAXA(NEQ1)
C
C      IF (KKK.EQ.2) GOTO 150
C
C      Triangulace matice A      =>      L*D*LT
C
40     PRINT*
C      PRINT*, 'Triangulace matice tuhosti'
C      DO 140 N=1,NEQ
C          KN=MAXA(N)
C          KL=KN+1
C          KU=MAXA(N+1)-1
C          KH=KU-KL
C          IF (KH) 110,90,50
50     K=N-KH
C          IC=0
C          KLT=KU

```

```

DO 80 J=1,KH
  IC=IC+1
  KLT=KLT-1
  KI=MAXA(K)
  ND=MAXA(K+1)-KI-1
  IF (ND) 80,80,60
60  .KK=MINO(IC,ND)
  C=0.
  DO 70 L=1, KK
    KIL=KI+L
    KLTL=KLT+L
70    C=C+A(KIL)*A(KLTL)
    A(KLT)=A(KLT)-C
80    K=K+1
90  K=N
  B=0.
  DO 100 KK=KL, KU
    K=K-1
    KI=MAXA(K)
    C=A(KK)/A(KI)
    B=B+C*A(KK)
100  A(KK)=C
    A(KN)=A(KN)-B
110  IF (A(KN).LE.0.) THEN
      WRITE(6,2000) N,A(KN)
      STOP
      ENDIF
140  CONTINUE
  RETURN

```

C Uprava prave strany - vypocet neznamych

```

C Primy chod
150 PRINT*
PRINT*, 'Vypocet neznamych'
DO 180 N=1, NEQ
  KL=MAXA(N)+1
  KU=MAXA(N+1)-1
  IF (KU-KL) 180,160,160
160  K=N
  C=0.
  DO 170 KK=KL, KU
    K=K-1
170  C=C+A(KK)*V(K)
    V(N)=V(N)-C
180  CONTINUE

```

```

C Zpetny chod
DO 200 N=1, NEQ
  K=MAXA(N)
200  V(N)=V(N)/A(K)
  IF (NEQ.EQ.1) RETURN
  N=NEQ
  DO 230 L=2, NEQ
    KL=MAXA(N)+1
    KU=MAXA(N+1)-1
    IF (KU-KL) 230,210,210
210  K=N
    DO 220 KK=KL, KU
      K=K-1
220  V(K)=V(K)-A(KK)*V(N)
230  N=N-1
  RETURN

```

```

2000 FORMAT(// ' STOP - MATICE NENI POZITIVNE DEFINITNI' /
*          ' NEGATIVNI PIVOT V ROVNICI', I4, //
*          ' PIVOT = ', D20.12)
END

```

Podprogram COLSOL pro řešení soustavy lineárních rovnic se symetrickou pozitivně definitní maticí zaznamenanou technikou skyline jsme převzali z [1] a mírně upravili.

Parametry: A(NSTIF) ... záznam prvků matice soustavy
 V(NEQ) ... pravá strana, resp. řešení
 MAXA(NEQ1)... vektor adres diagonálních prvků
 KKK ... specifikace činnosti (triangulace/řešení)
 NEQ ... počet rovnic
 NEQ1 ... počet rovnic + 1
 NSTIF ... počet uchovávaných prvků matice soustavy

Podprogram provádí buď triangulaci matice soustavy (KKK=1), nebo úpravy pravé strany (KKK=2). V prvním případě parametr V nemá význam a upravují se pouze prvky pole A. Po ukončení činnosti podprogramu jsou v poli A uloženy prvky matic \underline{D}_g a \underline{L}^T z rozkladu $\underline{L} \cdot \underline{D}_g \cdot \underline{L}^T$ (viz 6.2.4.). Ve druhém případě musí již být matice soustavy triangulována a provádějí se pouze úpravy vektoru V, v němž je při vstupu do podprogramu uložena pravá strana, po ukončení činnosti COLSOLu zde nalezneme řešení. Veškeré operace se v podprogramu COLSOL provádějí s dvojnásobnou přesností (viz popis IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)).

Samotný algoritmus triangulace je poměrně složitý a jeho znalost není pro pochopení automatizace výpočtu deformační metodou nezbytná. Zvídavé studenty odkazujeme opět na skriptum [1], kde je vše podrobně vysvětleno.

D) Výpočet osových sil a tisk výsledků

Podprogramy: OUTPUT, SFORCE

```

C *****
C SUBROUTINE OUTPUT(XYZ,KOD,UVWP,KELEM,DT,TYPMAT,UVW,
+   NNODE,NELEM,NMATER,NEQ)
C *****
C CHARACTER STRUCTURE*50,LOADCASE*50,FNAME*12
C COMMON /IRIW/ IR,IW
C COMMON /TEXT/ STRUCTURE,LOADCASE
C REAL*8 UVW
C DIMENSION XYZ(3,NNODE),KOD(3,NNODE),UVWP(3,NNODE),KELEM(3,NELEM),
+   DT(NELEM),TYPMAT(2,NMATER),UVW(NEQ),REL(6)

C   Otevření vystupního souboru
C   PRINT*
C   PRINT*,'Výsledky zapsat do souboru : '
C   READ*,'(A12)') FNAME
C   OPEN(IW,FILE=FNAME)

C   Zapis stycnikovych posunu

C   Zapis do vystupního souboru
C   WRITE(IW,100) STRUCTURE,LOADCASE
C   DO 5 IN=1,NNODE
C     DO 3 I=1,3
C       KODNUM=KOD(I,IN)
C       IF (KODNUM.EQ.0) THEN
C         REL(I)=UVWP(I,IN)
C       ELSE
C         REL(I)=UVW(KODNUM)
C       ENDIF
C     ENDIF
C   CONTINUE
C   WRITE(IW,200) IN,(KOD(I,IN),I=1,3),(REL(I),I=1,3)
  
```

```

C   Vystup na obrazovku
    PRINT*
    PRINT*,'Vypoctene stycnikove posuny:'
    PRINT*,'-----'
    DO 10 I=1,NEQ
10  PRINT*,I,UVW(I)

C   Vypocet a zapis osovych sil

    WRITE(IW,300)
    PRINT*
    PRINT*,'Vypoctene osove sily:'
    PRINT*,'-----'
    DO 20 IE=1,NELEM
        IK=1
        DO 15 IN=1,2
            NODE=KELEM(IN,IE)
            DO 15 I=1,3
                KODNUM=KOD(I,NODE)
                IF (KODNUM.GT.0) THEN
                    REL(IK)=UVW(KODNUM)
                ELSE
                    REL(IK)=UVWP(I,NODE)
                ENDIF
            15  IK=IK+1
            NODE1=KELEM(1,IE)
            NODE2=KELEM(2,IE)
            IM=KELEM(3,IE)
C   Vypocet osove sily
            S=SFORCE(XYZ(1,NODE1),XYZ(1,NODE2),DT(IE),TYPMAT(1,IM),
+               TYPMAT(2,IM),REL)
C   Zapis do vystupniho souboru
            WRITE(IW,400) IE,(KELEM(I,IE),I=1,2),S
C   Vystup na obrazovku
            PRINT*,IE,S
20  CONTINUE
    CLOSE(IW)

C   Formaty pro zapis do vystupniho souboru
100 FORMAT(/10X,'*****'/
+ 10X,'Vystupni udaje programu TAP'/
+ 10X,'*****'/
+ 10X,'Konstrukce      : ',A50//
+ 10X,'Zatezovaci stav : ',A50///
+ 10X,'Stycnikove posuny'//
+ 10X,'*****'//
+'stycnik      kod.cis.      p o s u n y'//
+'cislo      KX  KY  KZ          U          V          W'//
+'-----')
200 FORMAT(I4,4X,3I4,4X,3E12.5)
300 FORMAT(//10X,'Osove sily'//
+ 10X,'*****'//
+'prut      koncove      osova'//
+'cislo      stycniky      sila'//
+'-----')
400 FORMAT(I3,2I6,3X,4E12.5)
    END

```

Podprogram OUTPUT slouží k výpočtu osových sil a k zápisu výsledků jednak do výstupního souboru, jednak na obrazovku. Mezi vstupní parametry patří všechny vstupní údaje o konstrukci a zatížení (pole XYZ, KOD, ... TYPMAT). Pole obsahující předepsané styčnickové síly a předepsané styčnickové posuny je v tomto podprogramu označeno UVWP (místo dřívějšího FUVW). Dalším vstupním parametrem je pochopitelně pole UVW obsahující vypočtené styčnickové posuny.

Podprogram vyzve uživatele, aby z klávesnice zadal jméno výstupního souboru, otevře tento soubor, zapíše do něj označení konstrukce a zatěžovacího stavu a tabelární formou také posuny jednotlivých styčníků, ať již předepsané nebo vypočtené. Vypočtené styčnickové posuny se také ihned vypíší na obrazovku, aby při řešení méně rozsáhlých úloh měl uživatel rychlý přístup k výsledkům.

V další části podprogramu se počítají, zapisují do výstupního souboru a na obrazovku osové síly v jednotlivých prutech. Jádrem je cyklus přes pruty (cyklus s návěstím 20), ve které se pro každý prut nejprve do pole REL zapíše jeho koncové posuny. Předepsané posuny se přitom hledají v poli UVWP, vypočtené v poli UVW. Spolu s dalšími údaji o prutu se pak koncové posuny předají funkci SFORCE, která vypočte odpovídající osovou sílu S. Ta se okamžitě zapíše do výstupního souboru a na obrazovku a pokračuje se zpracováním dalšího prutu. Na závěr se příkazem CLOSE uzavře výstupní soubor.

```

C      Vypocet osove sily
C      *****
C      FUNCTION SFORCE(XYZ1,XYZ2,DT,EA,ALFAT,R)
C      *****
C      DIMENSION XYZ1(3),XYZ2(3),R(6),C(3)
C      CALL BEAMCHAR(XYZ1,XYZ2,C,DL)
C      SFORCE=-ALFAT*DL*DT
C      DO 30 I=1,3
30 SFORCE=SFORCE+C(I)*(R(I+3)-R(I))
C      SFORCE=SFORCE*EA/DL
C      END

```

Funkce SFORCE na základě souřadnic koncových styčníků XYZ1, XYZ2, oteplení prutu DT, tuhosti průřezu EA, součinitele teplotní roztažnosti ALFAT a koncových posunů R vypočte osovou sílu v prutu. Vzorec pro výpočet osové síly

$$S = \frac{EA}{l} \cdot [(u_j - u_1) \cdot \cos \alpha + (v_j - v_1) \cdot \cos \beta + (w_j - w_1) \cdot \cos \gamma - \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l]$$

získáme snadno spojením geometrických a fyzikálních rovnic taženého-tlačeného prutu v prostoru (viz článek 2.4.). Směrové kosiny a délku prutu počítá podprogram BEAMCHAR, se kterým jsme se již seznámili.

H l a v n í p r o g r a m

```

C      *****
C      *                               *
C      *       T       A       P       *
C      *                               *
C      *****

C      Program pro statickou analyzu
C      prostorovych prihradovych
C      konstrukci

LOGICAL NEWSTIF
CHARACTER STRUCTURE*50,LOADCASE*50
COMMON /IRIW/ IR,IW
COMMON /TEXT/ STRUCTURE,LOADCASE
COMMON A(10000)

```

```

NMAX=10000
IR=1
IW=2
NEWSTIF=.TRUE.

C   Tisk hlavicky programu
    CALL HEAD

C   Vstup zakladnich udaju
10  CALL INPBAS(NNODE,NELEM,NMATER)

C   Prideleni pameti pro udaje
C   o stycnicich a prutech
    N1=1
    N2=N1+3*NNODE
    N3=N2+3*NNODE
    N4=N3+3*NNODE
    N5=N4+3*NELEM
    N6=N5+NELEM
    N7=N6+2*NMATER
    IF (N7.GT.NMAX) CALL OUTMEM

C   Vstup udaju o stycnicich
    CALL INPNODE(A(N1),A(N2),A(N3),NNODE)

C   Vstup udaju o prutech
    CALL INPELEM(A(N4),A(N5),A(N6),NELEM,NMATER)

C   Stanoveni kodovych cisel
    CALL CODNUM(A(N2),NNODE,NEQ)

C   Prideleni pameti pro vektor
C   adres diagonalnich prvku
    N8=N7+NEQ+1
    N8=(N8/2+1)*2
    IF (N8.GT.NMAX) CALL OUTMEM

C   Vypocet adres diagonalnich prvku
    CALL FORMSTIF(A(N2),A(N4),A(N7),NNODE,NELEM,NEQ+1,NSTIF)

C   Prideleni pameti pro matici tuhosti
C   a vektor transformovaneho zatizeni
    N9=N8+2*NSTIF
    N10=N9+2*NEQ
    IF (N10.GT.NMAX) CALL OUTMEM

C   Sestaveni matice tuhosti
C   a vektoru transformovaneho zatizeni
20  CALL STIFMAT(A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),A(N5),A(N6),A(N7),A(N8),
+             A(N9),
+             NNODE,NELEM,NMATER,NEQ,NEQ1,NSTIF,NEWSTIF)

C   Triangulace matice tuhosti
    IF (NEWSTIF) CALL COLSOL(A(N8),A(N9),A(N7),1,NEQ,NEQ1,NSTIF)

C   Vypocet neznamych stycnikovych posunu
    CALL COLSOL(A(N8),A(N9),A(N7),2,NEQ,NEQ1,NSTIF)

C   Tisk vysledku
    CALL OUTPUT(A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),A(N5),A(N6),A(N9),
+             NNODE,NELEM,NMATER,NEQ)

C   Zprava o rozsahu vypoctu a volba dalsi cinnosti
    CALL REPORT(NEQ,NSTIF,N10)
    CALL WHERE(IWH)
    GOTO (30,40,50),IWH

```

```

C   Dalsi zatezovací stav
30  NEWSTIF=.FALSE.
    CALL INPLOAD(A(N3),A(N5),NNODE,NELEM)
    GOTO 20

C   Dalsi konstrukce
40  NEWSTIF=.TRUE.
    GOTO 10

C   Konec programu
50  PRINT*
    PRINT*,'TAP se s vami louci ...'
    STOP
    END

```

V úvodu hlavního programu se přiřadí hodnoty proměnným NMAX, IR, IW a NEWSTIF. Hodnota NMAX musí odpovídat horní mezi použité při dimenzování základního pole A. Čísla vstupního a výstupního souboru jsou do jisté míry libovolná. Logická proměnná NEWSTIF musí mít na začátku programu hodnotu .TRUE., protože matici tuhosti je třeba sestavit.

Podprogram HEAD vytiskne na obrazovku hlavičku programu, aby uživatel viděl, jaký program spustil. Další průběh výpočtu až po volání procedury OUTPUT přesně odpovídá jednotlivým krokům popsaným v odstavci 6.3.4. Dynamické přidělování paměti se provádí podle zásad popsaných v odstavci 6.3.3. (srovnejte též s obrázky 6.14 a 6.15). Všimněte si, že nelze veškerou paměť přidělit nejednou. Pro přidělení paměti pro vektor MAXA musíme znát počet rovnic NEQ, který je třeba nejprve zjistit v podprogramu CODNUM. Před přidělením paměti pro matici tuhosti zase musíme znát počet uchovávaných prvků NSTIF, který stanovuje procedura FORMSTIF. Po každém přidělení paměti se testuje, zda nebyla překročena maximální přípustná adresa NMAX. V případě jejího překročení podprogram OUTMEM zastaví zpracování úlohy.

Po vyřešení úlohy a zápisu výsledků do výstupního souboru podprogramem OUTPUT podá podprogram REPORT zprávu o rozsahu výpočtu a celý program by mohl skončit. Namísto toho nabídne podprogram WHERE možnost pokračovat řešením téže konstrukce při jiném zatěžovacím stavu nebo řešením zcela jiné konstrukce. Pokud si uživatel vybere první variantu, přiřadí se proměnné NEWSTIF hodnota .FALSE., aby se tak zbránilo zbytečnému sestavování a triangulaci matice tuhosti, neboť ta se pro novou úlohu nemění. Podprogram INPLOAD pak načte ze souboru specifikovaného uživatelem pouze údaje o vnějších účincích, protože se mění pouze zatěžovací stav. Pokračuje se od návěští 20, tj. podprogramem STIFMAT, který však nyní sestavuje jen vektor transformovaného zatížení. Rovněž triangulace matice tuhosti se vynechá, takže opakovaný výpočet proběhne mnohem rychleji než výpočet pro první zatěžovací stav.

Rozhodne-li se uživatel řešit jinou konstrukci, přiřadí se proměnné NEWSTIF hodnota .TRUE. a téměř celý program běží znovu od návěští 10.

Závěrem uvádíme výpis podprogramů HEAD, OUTMEM, REPORT, WHERE a INPLOAD, které mají spíše pomocný charakter a se samotným výpočtem přímo nespojují. Jejich činnost již byla popsána v komentáři k hlavnímu programu.

```

C      Tisk hlavicky programu

C      *****
SUBROUTINE HEAD
C      *****
PRINT*
PRINT*, 'Truss'
PRINT*, 'Analysis'
PRINT*, 'Program'
PRINT*
END

C      *****
SUBROUTINE OUTMEM
C      *****
PRINT*
PRINT*, '-----'
PRINT*, 'Nestaci pamet!'
PRINT*, '-----'
STOP
END

C      Vstup udaju o dalsim zatezovacim stavu

C      *****
SUBROUTINE INPLOAD(FUVW,DT,NNODE,NELEM)
C      *****
CHARACTER STRNEW*50,STRUCTURE*50,LOADCASE*50,FNAME*12
COMMON /IRIW/ IR,IW
COMMON /TEXT/ STRUCTURE,LOADCASE
DIMENSION FUVW(3,NNODE),DT(NELEM)
PRINT*
PRINT*, 'Vstup udaju o dalsim zatezovacim stavu'
1 PRINT*
PRINT*, 'Nacist ze souboru : '
READ(*, '(A12)') FNAME
OPEN(IR, FILE=FNAME)
READ(IR,100) STRNEW,LOADCASE
100 FORMAT(/////28X,A50//28X,A50////////)
IF (STRNEW.NE.STRUCTURE) THEN
CLOSE(IR)
PRINT*
PRINT*, 'V souboru ',FNAME
PRINT*, 'je misto zatizeni konstrukce ',STRUCTURE
PRINT*, 'uvedeno zatizeni konstrukce ',STRNEW
GOTO 1
ENDIF
PRINT*
PRINT*, 'Konstrukce      : ',STRUCTURE
PRINT*
PRINT*, 'Zatezovaci stav : ',LOADCASE

C      Predepsane stycnikove sily a posuny
DO 10 IN=1,NNODE
10 READ(IR,*) J,(FUVW(I,IN),I=1,3)
C      Teplotni zmeny
READ(IR, '(////////)')
DO 20 IE=1,NELEM
20 READ(IR,*) J,DT(IE)
CLOSE(IR)
END

```

C Volba dalsi cinnosti

C *****

SUBROUTINE WHERE(I)

C *****

PRINT*

PRINT*, 'Vyberte si jednu z nasledujicich cinnosti:'

PRINT*, '1 ... zmena zatezovaciho stavu'

PRINT*, '2 ... zmena konstrukce'

PRINT*, '3 ... konec programu'

10 PRINT*

PRINT*, 'Cislo zvolene cinnosti : '

READ*, I

IF (I.LT.1.OR.I.GT.3) GOTO 10

END

C Zprava o vypoctu

C *****

SUBROUTINE REPORT(NEQ,NSTIF,N10)

C *****

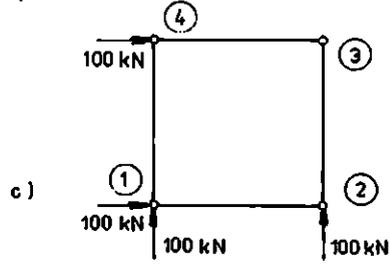
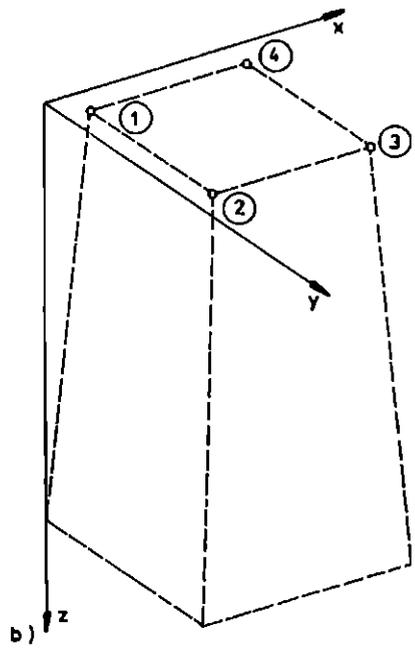
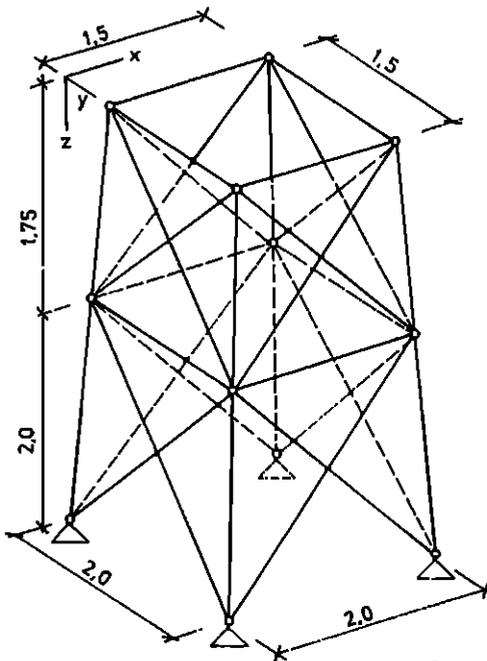
PRINT*

PRINT*, 'Pocet rovnic : ', NEQ

PRINT*, 'Delka matice tuhosti : ', NSTIF

PRINT*, 'Vyuzita cast pameti : ', N10

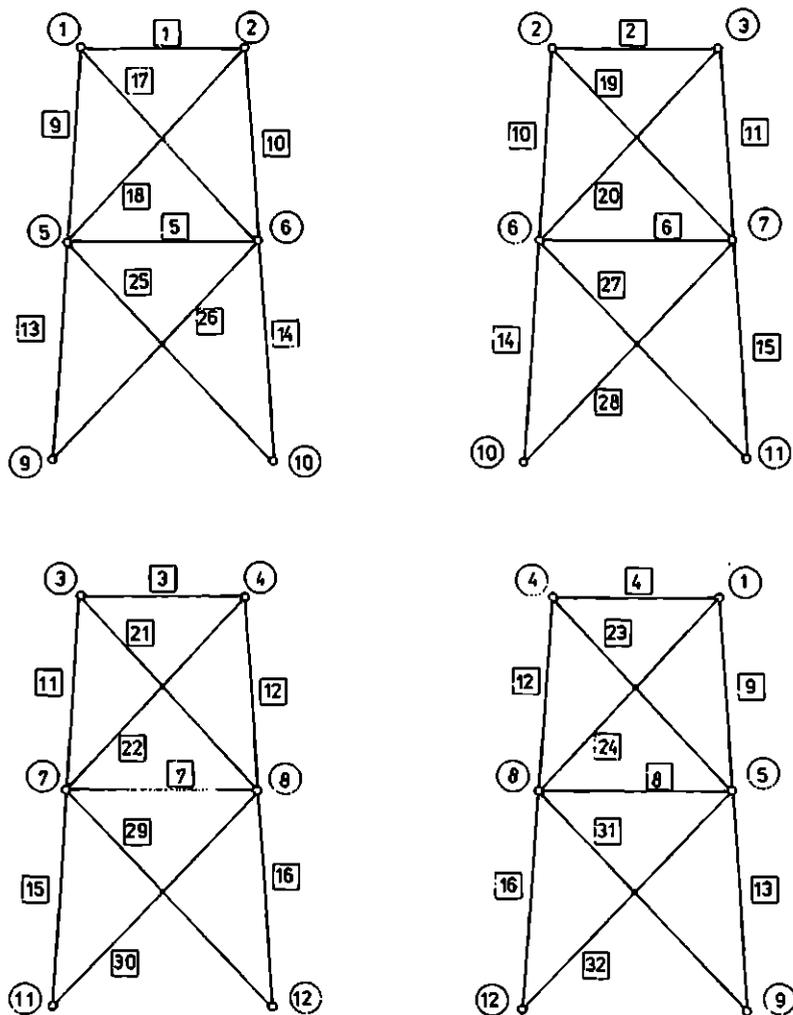
END



Obr. 6.16

6.3.7. Příklad řešení rozsáhlejší úlohy

Programem TAP nyní provedeme statickou analýzu ocelového příhradového stožáru na obr.6.16a. Stožár má tvar komolého jehlanu o výšce 3,75 m, dolní podstava je čtverec o straně 2,0 m, horní podstava čtverec o straně 1,5 m. Svislé pruhy jsou vyrobeny z válcovaných profilů L 120·120·12 (průřezová plocha 2750 mm²), vodorovné příčky z profilů L 60·60·6 (691 mm²) a diagonály z profilů L 90·90·8 (1390 mm²). Volba soustavy souřadnic je zřejmá z obr.6.16b, očíslování styčniců a prutů z obr.6.17.



Obr. 6.17

V ukázkovém výpočtu vyšetříme dva zatěžovací stavy. V prvním stavu na konstrukci působí vodorovné zatížení podle obr.6.16c, ve druhém je předepsáno oteplení všech prutů o 15°C.

Vstupní soubor pro první zatěžovací stav obsahuje též údaje o konstrukci:

 Vstupni data pro program TAP - kompletni uloha

Konstrukce : PRIHRADOVY STOZAR

Zatezovaci stav : SILOVE UCINKY

Pocet stycniku : 12
 Pocet prutu : 32
 Pocet materialovych typu : 3

Udaje o stycnicich

stycnik cislo	souradnice			vazby			predepsane sily/posuny		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	.25000E+00	.25000E+00	.00000E+00	0	0	0	.10000E+06	.10000E+06	.00000E+00
2	.25000E+00	.17500E+01	.00000E+00	0	0	0	.10000E+06	.00000E+00	.00000E+00
3	.17500E+01	.17500E+01	.00000E+00	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
4	.17500E+01	.25000E+00	.00000E+00	0	0	0	.00000E+00	.10000E+06	.00000E+00
5	.13300E+00	.13300E+00	.17500E+01	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
6	.13300E+00	.18670E+01	.17500E+01	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
7	.18670E+01	.18670E+01	.17500E+01	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
8	.18670E+01	.13300E+00	.17500E+01	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.00000E+00	.00000E+00	.37500E+01	1	1	1	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
10	.00000E+00	.20000E+01	.37500E+01	1	1	1	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
11	.20000E+01	.20000E+01	.37500E+01	1	1	1	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
12	.20000E+01	.00000E+00	.37500E+01	1	1	1	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00

Udaje o prutech

cislo prutu	koncove stycniky		mat. typ	otepleni
1	1	2	1	.0000E+00
2	2	3	1	.0000E+00
3	3	4	1	.0000E+00
4	4	1	1	.0000E+00
5	5	6	1	.0000E+00
6	6	7	1	.0000E+00
7	7	8	1	.0000E+00
8	8	5	1	.0000E+00
9	1	5	2	.0000E+00
10	2	6	2	.0000E+00
11	3	7	2	.0000E+00
12	4	8	2	.0000E+00
13	5	9	2	.0000E+00
14	6	10	2	.0000E+00
15	7	11	2	.0000E+00
16	8	12	2	.0000E+00
17	1	6	3	.0000E+00
18	2	5	3	.0000E+00
19	2	7	3	.0000E+00
20	3	6	3	.0000E+00
21	3	8	3	.0000E+00
22	4	7	3	.0000E+00
23	4	5	3	.0000E+00
24	1	8	3	.0000E+00
25	5	10	3	.0000E+00
26	6	9	3	.0000E+00
27	6	11	3	.0000E+00
28	7	10	3	.0000E+00
29	7	12	3	.0000E+00
30	8	11	3	.0000E+00
31	8	9	3	.0000E+00
32	5	12	3	.0000E+00

Udaje o materialovych typech

cislo typu	tuhost prurezu	koeficient tep. rozt.
1	.1451E+09	.1200E-04
2	.5775E+09	.1200E-04
3	.2919E+09	.1200E-04

Ve vstupním souboru pro druhý zatěžovací stav se objeví už jen údaje o vnějších účincích:

 Vstupní data pro program TAP - pouze zatizení

Oznaceni ulohy : PRIHRADOVY STOZAR

Zatezovaci stav : OTEPLENI

Udaje o stycnicich

stycnik cislo	predepsane sily/posuny		
	X	Y	Z
1	.0000E+06	.0000E+06	.0000E+00
2	.0000E+06	.0000E+00	.0000E+00
3	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
4	.0000E+00	.0000E+06	.0000E+00
5	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
6	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
7	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
8	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
9	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
10	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
11	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
12	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

Udaje o prutech

prut	otapljeni		
1	.1500E+02	21	.1500E+02
2	.1500E+02	22	.1500E+02
3	.1500E+02	23	.1500E+02
4	.1500E+02	24	.1500E+02
5	.1500E+02	25	.1500E+02
6	.1500E+02	26	.1500E+02
7	.1500E+02	27	.1500E+02
8	.1500E+02	28	.1500E+02
9	.1500E+02	29	.1500E+02
10	.1500E+02	30	.1500E+02
11	.1500E+02	31	.1500E+02
12	.1500E+02	32	.1500E+02
13	.1500E+02		
14	.1500E+02		
15	.1500E+02		
16	.1500E+02		
17	.1500E+02		
18	.1500E+02		
19	.1500E+02		
20	.1500E+02		

Program TAP zapíše vypočtené styčnickové posuny a osové síly do dvou výstupních souborů:

 Vystupni udaje programu TAP

Konstrukce : PRIHRADOVY STOZAR

Zatezovaci stav : SILOVE UCINKY

Stycnikove posuny

stycnik cislo	kod.cis.			p o s u n y		
	KX	KY	KZ	U	V	W
1	1	2	3	.30783E-02	.30783E-02	-.81022E-03
2	4	5	6	.30680E-02	.26263E-02	-.14672E-04
3	7	8	9	.26606E-02	.26606E-02	.78341E-03
4	10	11	12	.26263E-02	.30680E-02	-.14672E-04
5	13	14	15	.12880E-02	.12880E-02	-.70138E-03
6	16	17	18	.10524E-02	.11175E-02	.62486E-05
7	19	20	21	.13668E-02	.13668E-02	.71682E-03
8	22	23	24	.11175E-02	.10524E-02	.62486E-05
9	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
10	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
11	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
12	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00

Osove sily

prut cislo	koncove stycniky		osova sila
1	1	2	-.43723E+05
2	2	3	-.39406E+05
3	3	4	-.39406E+05
4	4	1	-.43723E+05
5	5	6	-.14238E+05
6	6	7	.26269E+05
7	7	8	.26269E+05
8	8	5	-.14238E+05
9	1	5	.11390E+06
10	2	6	.17074E+05
11	3	7	-.79775E+05
12	4	8	.17074E+05
13	5	9	.24978E+06
14	6	10	-.25488E+04
15	7	11	-.25613E+06
16	8	12	-.25488E+04
17	1	6	-.77355E+05
18	2	5	.60048E+05
19	2	7	-.83294E+05
20	3	6	.54123E+05
21	3	8	.54123E+05
22	4	7	-.83294E+05
23	4	5	.60048E+05
24	1	8	-.77355E+05
25	5	10	-.32311E+05
26	6	9	.86126E+05
27	6	11	-.82582E+05
28	7	10	.36699E+05
29	7	12	.36699E+05
30	8	11	-.82582E+05
31	8	9	.86126E+05
32	5	12	-.32311E+05

 Vystupni udaje programu TAP

Konstrukce : PRIHRADOVY STOZAR

Zatezovací stav : OTEPLENI

Stycnikove posuny

stycnik cislo	kod.cis.			p o s u n y		
	KX	KY	KZ	U	V	W
1	1	2	3	-.13053E-03	-.13053E-03	-.72979E-03
2	4	5	6	-.13053E-03	.13053E-03	-.72979E-03
3	7	8	9	.13053E-03	.13053E-03	-.72979E-03
4	10	11	12	.13053E-03	-.13053E-03	-.72979E-03
5	13	14	15	-.18294E-03	-.18294E-03	-.42434E-03
6	16	17	18	-.18294E-03	.18294E-03	-.42434E-03
7	19	20	21	.18294E-03	.18294E-03	-.42434E-03
8	22	23	24	.18294E-03	-.18294E-03	-.42434E-03
9	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
10	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
11	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00
12	0	0	0	.00000E+00	.00000E+00	.00000E+00

Osove sily

prut cislo	koncove stycniky		osova sila
1	1	2	-.86465E+03
2	2	3	-.86465E+03
3	3	4	-.86465E+03
4	4	1	-.86465E+03
5	5	6	.44986E+04
6	6	7	.44986E+04
7	7	8	.44986E+04
8	8	5	.44986E+04
9	1	5	-.17530E+04
10	2	6	-.17530E+04
11	3	7	-.17530E+04
12	4	8	-.17530E+04
13	5	9	.10539E+05
14	6	10	.10539E+05
15	7	11	.10539E+05
16	8	12	.10539E+05
17	1	6	.11895E+04
18	2	5	.11895E+04
19	2	7	.11895E+04
20	3	6	.11895E+04
21	3	8	.11895E+04
22	4	7	.11895E+04
23	4	5	.11895E+04
24	1	8	.11895E+04
25	5	10	-.71858E+04
26	6	9	-.71858E+04
27	6	11	-.71858E+04
28	7	10	-.71858E+04
29	7	12	-.71858E+04
30	8	11	-.71858E+04
31	8	9	-.71858E+04
32	5	12	-.71858E+04

6.4. KONTROLA VÝSLEDKŮ

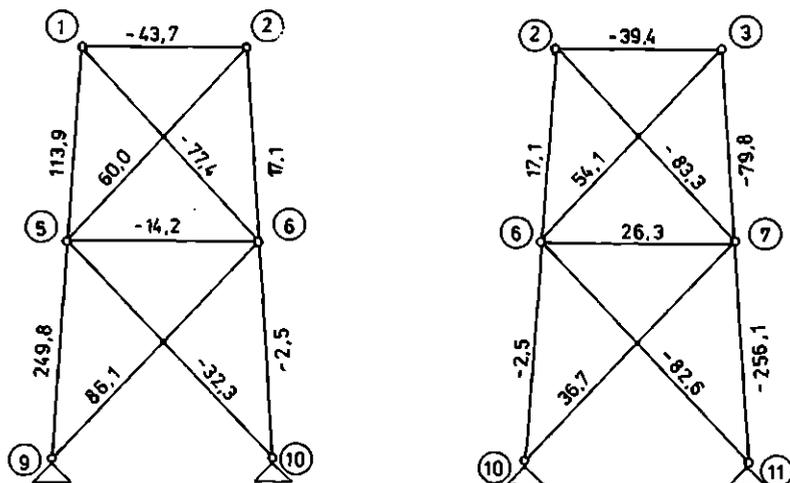
Využitím výpočetní techniky při statické analýze konstrukcí bezpochyby děláme značné množství namáhavé a stereotypní práce a získáváme možnost řešit velice rozsáhlé úlohy, které by jinak byly naprosto nezvládnutelné. K výsledkům strojového výpočtu však nelze přistupovat se slepou důvěrou, neboť počítače i programy jsou přes svou zdánlivou dokonalost dílem člověka - tvora omylného. Je proto nezbytně nutné provádět vždy alespoň elementární kontrolu věrohodnosti získaných výsledků.

6.4.1. Kontrola rovnováhy

Ke kontrole rovnováhy je možno vedle statických rovnic (podmínek rovnováhy styčniců) využít také podmínek rovnováhy celé konstrukce nebo jejích libovolných částí. S takovými podmínkami jsme se setkali již v předcházející kapitole při výpočtu a kontrole osových sil ve staticky určitých příhradových konstrukcích. Proto zde jen stručně naznačíme způsob jejich použití při kontrole výsledků rozsáhlejšího výpočtu.

- Příklad 6.8** Zkontrolujte výsledky výpočtu provedeného ukázkovým programem TAP v odstavci 6.3.7. Ke kontrole použijte
- podmínek rovnováhy styčniců,
 - podmínek rovnováhy celé konstrukce,
 - podmínek rovnováhy některé části konstrukce.

Řešení: Osové síly v prvním zatěžovacím stavu (stav "SILOVE UCINKY") jsou znázorněny na obr.6.18. Vzhledem k symetrii úlohy podle roviny procházející styčnicí ①, ⑤ a ⑨ je zde zachycena jen část konstrukce.



Obr. 6.18

Pro usnadnění orientace ve výpočtech budeme osové síly a směrové úhly místo indexu označujícího číslo prutu opatřovat dvěma indexy označu-

jíci čísla koncových styčníků. Například osovou sílu v prutu ⑩ s koncovými styčnickými ② a ⑥ místo S_{10} označíme $S_{2,6}$. Pořadím indexů je zároveň určeno pořadí koncových styčníků, které má vliv na hodnoty směrových úhlů. Směrové úhly $\alpha_{2,6}$ a $\alpha_{6,2}$ se tedy liší.

a) S nově zavedeným označením můžeme podmínky rovnováhy obecného styčnicku ① zapsat jednoduše ve tvaru

$$F_{1x} + \sum_j S_{1,j} \cdot \cos \alpha_{1,j} = 0,$$

$$F_{1y} + \sum_j S_{1,j} \cdot \cos \beta_{1,j} = 0,$$

$$F_{1z} + \sum_j S_{1,j} \cdot \cos \gamma_{1,j} = 0,$$

kde se pochopitelně sčítá přes ty styčnický (j), které jsou s daným styčnickem ① spojeny prutem. Směrové kosiny vypočteme ze souřadnic koncových styčníků podle známých vzorců

$$\cos \alpha_{1,j} = \frac{x_j - x_1}{l_{1,j}}, \quad \cos \beta_{1,j} = \frac{y_j - y_1}{l_{1,j}}, \quad \cos \gamma_{1,j} = \frac{z_j - z_1}{l_{1,j}},$$

kde $l_{1,j}$ je délka prutu ① - (j).

Směrové kosiny pro pruty připojené ke styčnicku ① jsou vypočteny v tabulce 6.8. Souřadnice styčnicků jsme převzali ze vstupního souboru, otištěného v odstavci 6.3.7.

①	②	$x_j - x_1$	$y_j - y_1$	$z_j - z_1$	$l_{1,j}$	$\cos \alpha_{1,j}$	$\cos \beta_{1,j}$	$\cos \gamma_{1,j}$
1	2	0,0	1,5	0,0	1,5	0,0	1,0	0,0
1	4	1,5	0,0	0,0	1,5	1,0	0,0	0,0
1	5	-0,117	-0,117	1,75	1,7578	-0,0666	-0,0666	0,9956
1	6	-0,117	1,617	1,75	2,3856	-0,0490	0,6778	0,7336
1	8	1,617	-0,117	1,75	2,3856	0,6778	-0,0490	0,7336

Tab. 6.8

Podmínky rovnováhy pro styčnick ① zapíšeme ve tvaru

$$\bar{F}_{1x} + S_{1,2} \cdot \cos \alpha_{1,2} + S_{1,6} \cdot \cos \alpha_{1,6} + S_{1,5} \cdot \cos \alpha_{1,5} + S_{1,8} \cdot \cos \alpha_{1,8} + S_{1,4} \cdot \cos \alpha_{1,4} = 0,$$

$$\bar{F}_{1z} + S_{1,2} \cdot \cos \gamma_{1,2} + S_{1,6} \cdot \cos \gamma_{1,6} + S_{1,5} \cdot \cos \gamma_{1,5} + S_{1,8} \cdot \cos \gamma_{1,8} + S_{1,4} \cdot \cos \gamma_{1,4} = 0.$$

Podmínku rovnováhy ve směru osy y nesestavujeme, protože je vzhledem k symetrii úlohy v podstatě ekvivalentní s podmínkou rovnováhy ve směru osy x.

Po dosazení konkrétních hodnot předepsaných styčnickových sil $\bar{F}_{1x} = 100 \text{ kN}$, $\bar{F}_{1z} = 0$, osových sil z výstupního souboru otištěného v odstavci 6.3.7. a směrových kosinů z tab.6.6 zjistíme, že podmínky rovnováhy styčnicku ① jsou přibližně splněny:

$$100,0 + (-43,7) \cdot 0 + (-77,4) \cdot (-0,0490) + 113,9 \cdot (-0,0666) + (-77,4) \cdot 0,6778 + (-43,7) \cdot 1 = 0,05 \approx 0,$$

$$0,0 + (-43,7) \cdot 0 + (-77,4) \cdot 0,7336 + 113,9 \cdot 0,9956 + (-77,4) \cdot 0,7336 + (-43,7) \cdot 0 = -0,16 \approx 0.$$

V důsledku zaokrouhlovacích chyb na levé straně podmínek rovnováhy nevyšla přesná nula, vypočtené síly 0,05 kN a -0,16 kN jsou však ve srovnání s osovými silami, z nichž největší dosahuje hodnoty 113,9 kN, zcela zanedbatelné. Podmínky rovnováhy styčnicku ① jsou tedy splněny. Podmínky rovnováhy ostatních styčnicků by se sestavily zcela analogicky.

b) V podmínkách rovnováhy celé konstrukce se nutně objeví složky vnějších reakcí, které je třeba nejprve vypočítat z podmínek rovnováhy podepřených styčnicků. Je-li styčnick ① podepřen ve směru osy x, lze z příslušné podmínky rovnováhy vypočítat reakci

$$R_{1x} = - \sum_j S_{1,j} \cdot \cos \alpha_{1,j}.$$

Podobně se postupuje i při výpočtu složek reakcí ve směru osy y a z. Pro ukázkou spočítáme svislé složky reakcí ve styčnicích ⑨ a ⑩ :

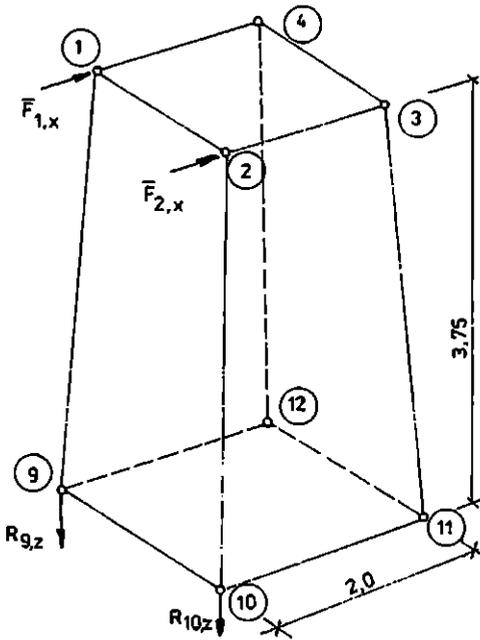
$$\begin{aligned} R_{9,z} &= - S_{9,5} \cdot \cos \gamma_{9,5} - S_{9,8} \cdot \cos \gamma_{9,8} - S_{9,6} \cdot \cos \gamma_{9,6} = \\ &= - 249,8 \cdot (-0,9956) - 86,1 \cdot (-0,7301) - 86,1 \cdot (-0,7301) = \\ &= 374,4 \quad [\text{kN}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{10,z} &= - S_{10,6} \cdot \cos \gamma_{10,6} - S_{10,5} \cdot \cos \gamma_{10,5} - S_{10,7} \cdot \cos \gamma_{10,7} = \\ &= - (-2,5) \cdot (-0,9956) - (-32,3) \cdot (-0,7301) - 36,7 \cdot (-0,7301) = \\ &= 0,7 \quad [\text{kN}] \end{aligned}$$

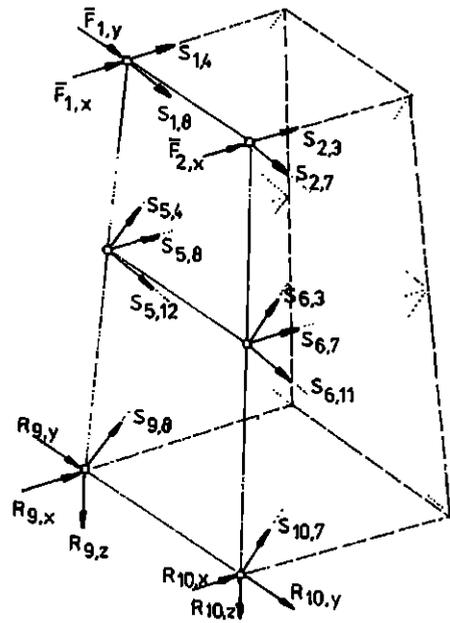
Známe-li svislé složky reakcí ve styčnicích ⑨ a ⑩, můžeme ověřit, zda je splněna momentová podmínka rovnováhy celé konstrukce k ose procházející styčnickými ⑪ a ⑫ :

$$\begin{aligned} R_{9,z} \cdot 2,0 + R_{10,z} \cdot 2,0 - \bar{F}_{1,x} \cdot 3,75 - \bar{F}_{2,x} \cdot 3,75 &= \\ = 374,4 \cdot 2,0 + 0,7 \cdot 2,0 - 100,0 \cdot 3,75 - 100,0 \cdot 3,75 &= \\ = 0,2 \approx 0 \quad [\text{kNm}] \end{aligned}$$

Na obr.6.19a jsou vyznačeny ty složky vnějších sil, jejichž momenty k ose procházející styčnickými ⑪ a ⑫ je nenulový.



a)



b)

Obr. 6.19

c) Podmínky rovnováhy musejí být splněny i pro libovolnou část konstrukce. Uvažujme například část konstrukce tvořenou styčnicí (1), (2), (5), (6), (9), (10) a všemi pruty, které tyto styčnice navzájem spojují.

Na obr.6.19b jsou vyznačeny všechny síly působící na zvolenou část konstrukce. Vedle vnějších sil (zatížení a reakcí) mezi ně patří také osové síly v těch prutech, které musíme přerušit, abychom zkoumenou část oddělili od zbytku konstrukce.

Silová podmínka rovnováhy oddělené části ve svislém směru má tvar

$$\begin{aligned}
 &R_{9,z} + R_{10,z} + S_{1,4} \cdot \cos \gamma_{1,4} + S_{1,8} \cdot \cos \gamma_{1,8} + S_{5,4} \cdot \cos \gamma_{5,4} + \\
 &+ S_{5,8} \cdot \cos \gamma_{5,8} + S_{5,12} \cdot \cos \gamma_{5,12} + S_{9,8} \cdot \cos \gamma_{9,8} + \\
 &+ S_{2,3} \cdot \cos \gamma_{2,3} + S_{2,7} \cdot \cos \gamma_{2,7} + S_{6,3} \cdot \cos \gamma_{6,3} + \\
 &+ S_{6,7} \cdot \cos \gamma_{6,7} + S_{6,11} \cdot \cos \gamma_{6,11} + S_{10,7} \cdot \cos \gamma_{10,7} = 0 .
 \end{aligned}$$

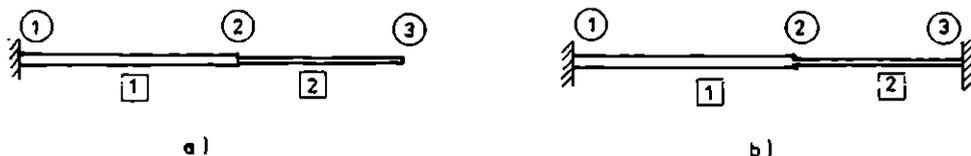
Směrové kosiny se vypočtou stejným způsobem jako v bodu a). Pro úsporu místa již příslušnou tabulku neuvádíme. Po dosazení směrových kosinů, osových sil podle výstupního souboru z odstavce 6.3.7. a reakcí vypočtených v bodu b) zjistíme, že podmínka rovnováhy je skutečně splněna:

$$\begin{aligned}
 &374,4 + 0,7 + (-43,7) \cdot 0,0 + (-77,4) \cdot 0,7336 + 60,0 \cdot (-0,7336) + \\
 &+ (-14,2) \cdot 0,0 + (-32,3) \cdot 0,7301 + 86,1 \cdot (-0,7301) + \\
 &+ (-39,4) \cdot 0,0 + (-83,3) \cdot 0,7336 + 54,1 \cdot (-0,7336) + \\
 &+ 26,3 \cdot 0,0 + (-82,6) \cdot 0,7301 + 36,7 \cdot (-0,7301) = -0,04 \doteq 0
 \end{aligned}$$

6.4.2. Kontrola kompetibility

Pro staticky neurčitou konstrukci není splnění podmínek rovnováhy zárukou toho, že osové síly a reakce byly vypočteny správně. Právě díky statické neurčitosti totiž existuje nekonečně mnoho rovnovážných stavů napjatosti takové konstrukce, z nichž však ve skutečnosti může nastat pouze jeden. Chceme-li se přesvědčit, zda je vypočtený stav tím správným, musíme vedle statických rovnic ověřit také splnění tzv. podmínek kompetibility. Jejich podstatu nejlépe osvětlí následující příklad.

Příklad 6.9 Pro staticky určitou (obr.6.20a) a staticky neurčitou (obr.6.20b) prutovou konstrukcí na přímce zapište geometrické rovnice a stanovte podmínky jejich řešitelnosti, jsou-li deformace známy.



Obr. 6.20

Řešení: Geometrické rovnice mají pro obě konstrukce formálně velmi podobný tvar:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \Delta l_1 = u_2 - \bar{u}_1 \\
 & \Delta l_2 = u_3 - u_2 \\
 \text{b)} & \Delta l_1 = u_2 - \bar{u}_1 \\
 & \Delta l_2 = \bar{u}_3 - u_2
 \end{array} \quad (6.19)$$

V geometrických rovnicích staticky určité konstrukce se ovšem vyskytují dva neznámé styčnickové posuny u_2, u_3 , zatímco v geometrických rovnicích staticky neurčité konstrukce pouze jeden neznámý styčnickový posun u_2 . Jsou-li dány deformace a předepsané styčnickové posuny, lze z rovnic (6.19a) jednoznačně vypočítat neznámé styčnickové posuny

$$\begin{array}{l}
 u_2 = \Delta l_1 + \bar{u}_1, \\
 u_3 = \Delta l_2 + u_2 = \Delta l_2 + \Delta l_1 + \bar{u}_1.
 \end{array}$$

Pruty staticky určité konstrukce se tedy mohou deformovat v podstatě nezávisle na sobě - pro každou kombinaci jejich deformací lze najít odpovídající stav přemístění tak, že jsou splněny geometrické rovnice.

V geometrických rovnicích staticky neurčité konstrukce (6.19b) se naproti tomu vyskytuje jen jeden neznámý styčnickový posun u_2 . Tento posun lze vyjádřit z první i ze druhé geometrické rovnice:

$$\begin{array}{l}
 u_2 = \Delta l_1 + \bar{u}_1, \\
 u_2 = \bar{u}_3 - \Delta l_2.
 \end{array}$$

Aby byly oba výsledky shodné, musí být splněna podmínka

$$\Delta l_1 + \bar{u}_1 = \bar{u}_3 - \Delta l_2 \quad ,$$

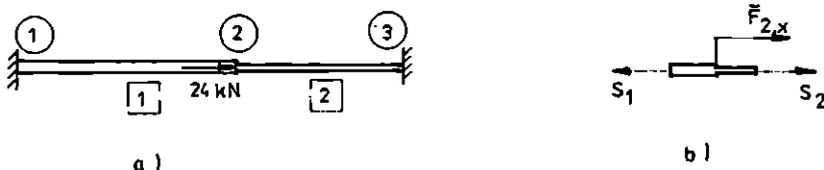
neboli

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \bar{u}_3 - \bar{u}_1 \quad . \quad (6.20)$$

Protažení Δl_1 , Δl_2 a předepsané styčnickové posuny \bar{u}_1 , \bar{u}_3 tedy nemohou nabývat libovolných kombinací hodnot. Například pro nulové předepsané posuny vyjadřuje podmínka (6.20) skutečnost, že součet protažení obou prutů musí být nulový. Kdyby tomu tak nebylo, "nevešla" by se konstrukce v deformovaném stavu mezi své podpory - deformace by nebyly kompatibilní. Rovnici (6.20) proto nezýváme podmínkou kompatibility.

Příklad 6.10

Ověřte, zda byly pro konstrukci na obr.6.21a správně vypočteny hodnoty osových sil $S_1 = 12 \text{ kN}$, $S_2 = -12 \text{ kN}$. Tuhosti prutů jsou $k_1 = 8 \text{ MNm}^{-1}$, $k_2 = 6 \text{ MNm}^{-1}$.



Obr. 6.21

Řešení: Podmínka rovnováhy styčnicku (2) (viz obr.6.21b)

$$S_1 - S_2 = \bar{F}_{2x} \quad (6.21)$$

je zřejmě splněna. Vypočteme-li však deformace

$$\Delta l_1 = \frac{S_1}{k_1} = \frac{12 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} \text{ m} = 1,5 \text{ mm} \quad ,$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_2}{k_2} = \frac{-12 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^6} \text{ m} = -2,0 \text{ mm}$$

odpovídající osovým silám (změny teploty považujeme za nulové), zjistíme, že není splněna podmínka kompatibility (6.20). Předepsané styčnickové posuny \bar{u}_1 , \bar{u}_3 jsou totiž nulové, takže musí platit

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \quad . \quad (6.22)$$

Osové síly tedy nebyly vypočteny správně.

Poznámka: Bystrého čtenáře možná napadlo, že vyjádříme-li protažení prutů pomocí osových sil S_1 , S_2 (z fyzikálních rovnic) a dosadíme do podmínky kompatibility (6.22), získáme jistou rovnici obsahující jako neznámé pouze osové síly. Spolu se statickou rovnicí (6.21) tak máme soustavu

dvou rovnic o dvou neznámých, ze které lze vypočítat osové síly. Na popsaném postupu je založena tzv. silová metoda, se kterou se seznámíme později.

Z příkladu 6.9 je patrné, že podmínky kompatibility jsou podmínkami, které musejí splňovat deformace a předepsané posuny, aby byly geometrické rovnice řešitelné pro neznámé styčnickové posuny. Obecně můžeme tyto podmínky získat tak, že z části geometrických rovnic vyjádříme neznámé styčnickové posuny v závislosti na ostatních veličinách a dosadíme do zbylých rovnic. Počet nezávislých podmínek kompatibility je tedy roven rozdílu počtu geometrických rovnic a počtu neznámých styčnickových posunů, tj. rozdílu počtu řádků a sloupců geometrické matice konstrukce. Tento rozdíl je zároveň rozdílem počtu sloupců a řádků statické matice konstrukce, odpovídá proto stupni statické neurčitosti.

Pro složitější konstrukce by bylo odvozování podmínek kompatibility z geometrických rovnic velmi pracné. Naštěstí máme k dispozici necenitelného pomocníka - princip virtuálních sil, který umožňuje odvodit podmínky kompatibility pohodlně a rychle. Podle PVs splňují skutečné deformace \underline{e} a skutečné styčnickové posuny $\underline{\hat{r}}$ geometrické rovnice právě tehdy, když pro libovolné virtuální vnitřní síly $\underline{\delta s}$ a odpovídající virtuální vnější styčnickové síly $\underline{\delta \hat{f}}$ platí

$$\underline{\delta s}^T \cdot \underline{e} = \underline{\delta \hat{f}}^T \cdot \underline{\hat{r}} \quad (6.23)$$

Rozdělíme-li styčnickové posuny a styčnickové síly na neznámé a předepsané, můžeme (6.23) přepsat do tvaru

$$\underline{\delta s}^T \cdot \underline{e} = \underline{\delta \hat{f}}^T \cdot \underline{r} + \underline{\delta \hat{f}}^T \cdot \underline{\bar{r}} \quad (6.24)$$

Jestliže virtuální silový stav zvolíme tak, aby virtuální zatížení $\underline{\delta \hat{f}}$ bylo nulové, vypadne na pravé straně (6.24) člen obsahující neznámé styčnickové posuny. Získáme tak vztahy mezi deformacemi a předepsanými posuny - podmínky kompatibility.

Příklad 6.11

Aplikací PVs odvoďte podmínku kompatibility pro konstrukci na obr.6.20b.



Obr. 6.22

Řešení: Virtuální zatížení, reprezentované virtuální styčnickovou silou $\delta \hat{F}_{2x}$, zvolíme nulové. Virtuální osové síly δS_1 , δS_2 a virtuální reakce δR_{1x} , δR_{3x} musejí splňovat statické rovnice (obr.6.22)

$$\begin{aligned} - \delta S_1 &= \delta R_{1x} \quad , \\ \delta S_1 - \delta S_2 &= 0 \quad , \\ \delta S_2 &= \delta R_{3x} \quad . \end{aligned}$$

Jednu virtuální veličinu, například δS_1 , můžeme vybrat jako nezávislou a ostatní vyjádřit v závislosti na ní tak, aby byly splněny statické rovnice:

$$\begin{aligned}\delta R_{1x} &= -\delta S_1, \\ \delta S_2 &= \delta S_1, \\ \delta R_{3x} &= \delta S_1.\end{aligned}\tag{6.25}$$

Dosadíme-li (6.25) do podmínky rovnosti doplňkové virtuální práce vnitřních a vnějších sil

$$\delta S_1 \cdot \Delta l_1 + \delta S_2 \cdot \Delta l_2 = \delta R_{1x} \cdot \bar{u}_1 + \delta F_{2x} \cdot u_2 + \delta R_{3x} \cdot \bar{u}_3,$$

získáme podmínku

$$\delta S_1 \cdot \Delta l_1 + \delta S_1 \cdot \Delta l_2 = -\delta S_1 \cdot \bar{u}_1 + \delta S_1 \cdot \bar{u}_3,$$

neboli

$$\delta S_1 \cdot (\Delta l_1 + \Delta l_2) = \delta S_1 \cdot (\bar{u}_3 - \bar{u}_1).$$

Tato rovnost má platit pro libovolnou hodnotu virtuální síly δS_1 , takže se nutně musejí rovnat koeficienty u δS_1 na levé a pravé straně:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \bar{u}_3 - \bar{u}_1.\tag{6.26}$$

Porovnáním (6.26) a (6.20) zjistíme, že jsme aplikací PVs získali skutečně stejnou podmínku kompatibility jako v příkladu 6.9 vyloučením neznámého styčnickového posunu u_2 z geometrických rovnic.

Podobně jako v odstavci 5.4.2., kde jsme PVs používali při výpočtu neznámých styčnickových posunů, můžeme i při sestavování podmínek kompatibility zavést osové síly \bar{S} a reakce \bar{R} od "jednotkového účinku" a tím celý postup formálně zjednodušit. Je-li virtuální silový stav zvolen tak, že všechny virtuální osové síly a virtuální reakce jsou vyjádřeny v závislosti na jedné vybrané veličině, například na virtuální osové síle δS_j (pro jistý pevně zvolený index j), pak lze psát

$$\begin{aligned}\delta S_i &= \bar{S}_i \cdot \delta S_j, \\ \delta R_{ix} &= \bar{R}_{ix} \cdot \delta S_j, \\ \delta R_{iy} &= \bar{R}_{iy} \cdot \delta S_j, \\ \delta R_{iz} &= \bar{R}_{iz} \cdot \delta S_j,\end{aligned}\tag{6.27}$$

kde \bar{S}_i , \bar{R}_{ix} , \bar{R}_{iy} , \bar{R}_{iz} jsou bezrozměrné veličiny. Jejich hodnoty stanovíme tak, že místo virtuální osové síly δS_j zavedeme do výpočtu bezrozměrnou jednotkovou osovou sílu $\bar{S}_j = 1$.

Po dosažení (6.27) do (6.24) a uvážení nezávislosti veličiny \bar{S}_j dostaneme podmínku kompatibility

$$\sum_{i=1}^{n_p} \bar{S}_i \cdot \Delta l_i = \sum \bar{R}_{ix} \cdot \bar{u}_i + \sum \bar{R}_{iy} \cdot \bar{v}_i + \sum \bar{R}_{iz} \cdot \bar{w}_i, \quad (6.28)$$

v níž se na pravé straně sčítá přes všechny složky reakcí. Bezrozměrné osové síly vystupují v podmínce kompatibility jako koeficienty u odpovídajících protažení, bezrozměrné reakce jako koeficienty u předepsaných styčnickových posunů.

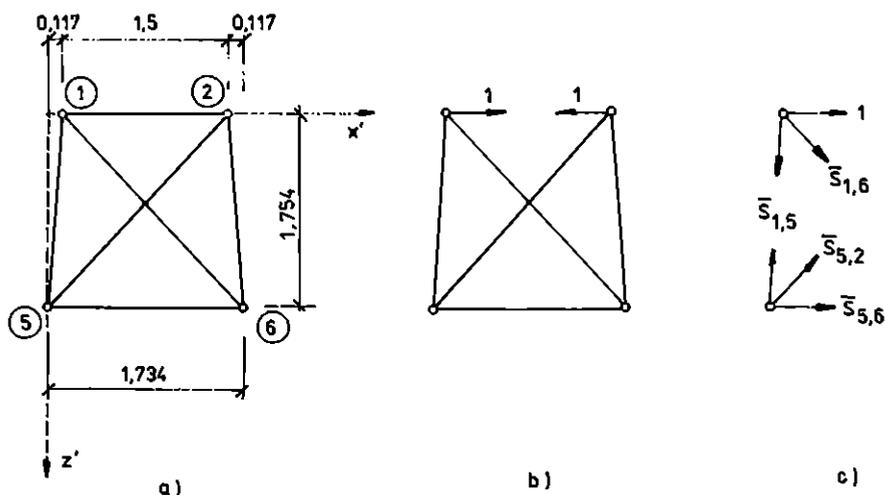
Praktický postup při kontrole kompatibility rozsáhlejší konstrukce předvedeme na příkladu.

Příklad 6.12

Stanovte počet nezávislých podmínek kompatibility pro konstrukci řešenou ukázkovým programem TAP v odstavci 6.3.7., sestavte některou z nich a zkontrolujte, zda je splněna.

Řešení: Konstrukce na obr.6.16 má $n_p = 32$ prutů, počet neznámých styčnickových posunů byl $n_{eq} = 8 \cdot 3 = 24$. Počet nezávislých podmínek kompatibility je dán rozdílem počtu řádků a sloupců geometrické matice konstrukce, tj. rozdílem $n_p - n_{eq} = 32 - 24 = 8$.

Při sestavování podmínky kompatibility pomocí PVs je třeba zvolit virtuální silový stav tak, aby virtuální zatížení bylo nulové. Ukážeme, že pro soustavu šesti prutů spojených do čtyřúhelníku se zkříženými diagonálami lze zvolit osové síly navzájem rovnovážné. Vyberme například soustavu tvořenou styčnicí ①, ②, ⑤, ⑥ a pruty, které je navzájem spojují. Protože uvažovaná část konstrukce leží v rovině, zavedeme pomocnou soustavu souřadnic x' , z' podle obr.6.23a a budeme pracovat pouze se dvěma podmínkami rovnováhy každého styčnicku.



Obr. 6.23

Osovou sílu v jednom z prutů nyní zvolíme jako jednotkovou a ostatní vypočteme z podmínek rovnováhy styčnicků. Položme například $\bar{S}_{1,2} = 1$. V podstatě to znamená, že soustavu tvořenou zbylými pruty zatížíme dvěma jednotkovými silami podle obr.6.23b.

(i)	(j)	$x'_j - x'_i$	$z'_j - z'_i$	$l_{1,j}$	$\cos \alpha'_{1,j}$	$\sin \alpha'_{1,j}$
1	6	1,617	1,754	2,3856	0,6778	0,7352
1	5	-0,117	1,754	1,7579	-0,0666	0,9978
5	6	1,734	0,0	1,7340	1,0	0,0
5	2	1,617	-1,754	2,3856	0,6778	-0,7352

Tab. 6.9

Potřebné směrové kosiny jsou vypočteny v tab.6.9. Z podmínek rovnováhy ve styčnicku (1) (obr.6.23c) vypočteme síly $\bar{S}_{1,5}$ a $\bar{S}_{1,6}$:

$$\begin{aligned} 0,6778 \cdot \bar{S}_{1,6} - 0,0666 \cdot \bar{S}_{1,5} + 1 &= 0 & \bar{S}_{1,6} &= -1,376 \\ 0,7352 \cdot \bar{S}_{1,6} + 0,9978 \cdot \bar{S}_{1,5} &= 0 & \bar{S}_{1,5} &= 1,014 \end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii (nebo z podmínek rovnováhy ve styčnicku (2)) bude

$$\bar{S}_{5,2} = \bar{S}_{1,6} = -1,376 \quad , \quad \bar{S}_{2,6} = \bar{S}_{1,5} = 1,014 \quad .$$

Konečně z podmínky rovnováhy ve vodorovném směru ve styčnicku (5)

$$\bar{S}_{5,6} = -0,0666 \cdot \bar{S}_{1,5} - 0,6778 \cdot \bar{S}_{5,2} = 0,865 \quad .$$

Snadno lze ověřit, že i nevyužité podmínky rovnováhy jsou splněny. Položíme-li osově síly v ostatních prutech konstrukce a reakce rovný nule, budou splněny i podmínky rovnováhy ve všech ostatních styčnicích. Vypočtené bezrozměrné osově síly lze tedy použít jako koeficienty v podmínce kompatibility (srovnejte s (6.28))

$$\begin{aligned} \Delta l_{1,2} + 1,014 \cdot \Delta l_{1,5} - 1,376 \cdot \Delta l_{1,6} - 1,376 \cdot \Delta l_{5,2} + \\ + 1,014 \cdot \Delta l_{2,6} + 0,865 \cdot \Delta l_{5,6} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.29)$$

(i)	(j)	$S_{1,j}$ {kN}	$k_{i,j}$ (MNm ⁻¹)	$\Delta l_{1,j}$ (mm)	$\bar{S}_{1,j}$ {1}	$\bar{S}_{1,j} \cdot \Delta l_{1,j}$ {mm}
1	2	-43,7	96,7	-0,452	1,0	-0,452
1	5	113,9	328,5	0,347	1,014	0,352
1	6	-77,4	122,4	-0,632	-1,376	0,870
5	2	60,0	122,4	0,490	-1,376	-0,674
2	6	17,1	328,5	0,052	1,014	0,053
5	6	-14,2	83,7	-0,170	0,865	-0,147
Σ						0,002 \approx 0

Tab. 6.10

Abychom ověřili splnění podmínky (6.29), musíme ze skutečných osových sil $S_{1,j}$ (vypočtených programem TAP) vypočítat skutečná protažení prutů $\Delta l_{1,j}$ podle fyzikálních rovnic

$$S_{1,j} = k_{1,j} \cdot (\Delta l_{1,j} - \Delta l_{1,j}^{(t)}) ,$$

kde

$$k_{1,j} = \frac{EA_{1,j}}{l_{1,j}}$$

je tuhost prutu $\textcircled{i} - \textcircled{j}$ v tahu-tlaku a $\Delta l_{1,j}^{(t)}$ protažení tohoto prutu od teplotních změn. Pro první zatěžovací stav je výpočet skutečných protažení proveden v tab.6.10, v níž je zároveň vyhodnocena levá strana podmínky (6.29). Vidíme, že podmínka kompatibility je s dostatečnou přesností splněna.

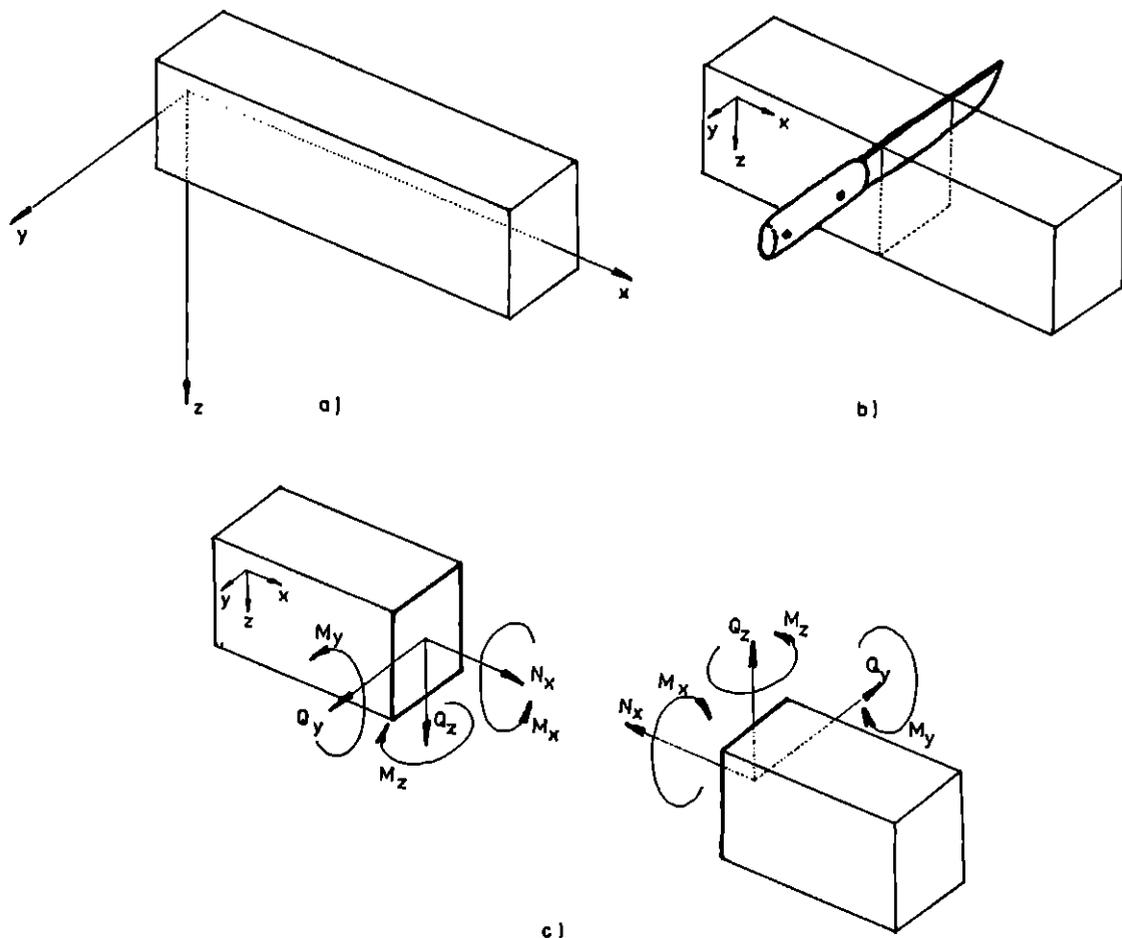
7. OHÝBANÝ NOSNÍK

7.1. VNITŘNÍ SÍLY

7.1.1. Vnitřní síly prutu v prostoru

Uvažujme přímý prut, na který působí rovnovážná soustava sil v prostoru. Zavedeme-li lokální soustavu souřadnic prutu tak, že osu X ztotožníme se střednicí prutu (obr. 7.1 a) a rozdělíme-li prut myšleným řezem (obr. 7.1 b) kolmým k jeho střednici na dvě části, lze vzájemné působení těchto částí vyjádřit tzv. vnitřními silami (obr. 7.1 c). Těmito vnitřními silami jsou :

- kroucí moment M_x
- ohybové momenty M_y, M_z ,
- posouvající síly Q_y, Q_z ,
- normálová síla N_x .



Obr. 7.1

Je-li zkoumaný prut v rovnováze, musí být v rovnováze i každá jeho část. Jestliže vnější síly působící na prut známe, můžeme vypočítat vnitřní síly z podmínek rovnováhy kterékoli z obou oddělených částí. K dispozici máme tři silové podmínky rovnováhy ve směru os X, Y, Z a tři momentové podmínky rovnováhy kolem těchto os.

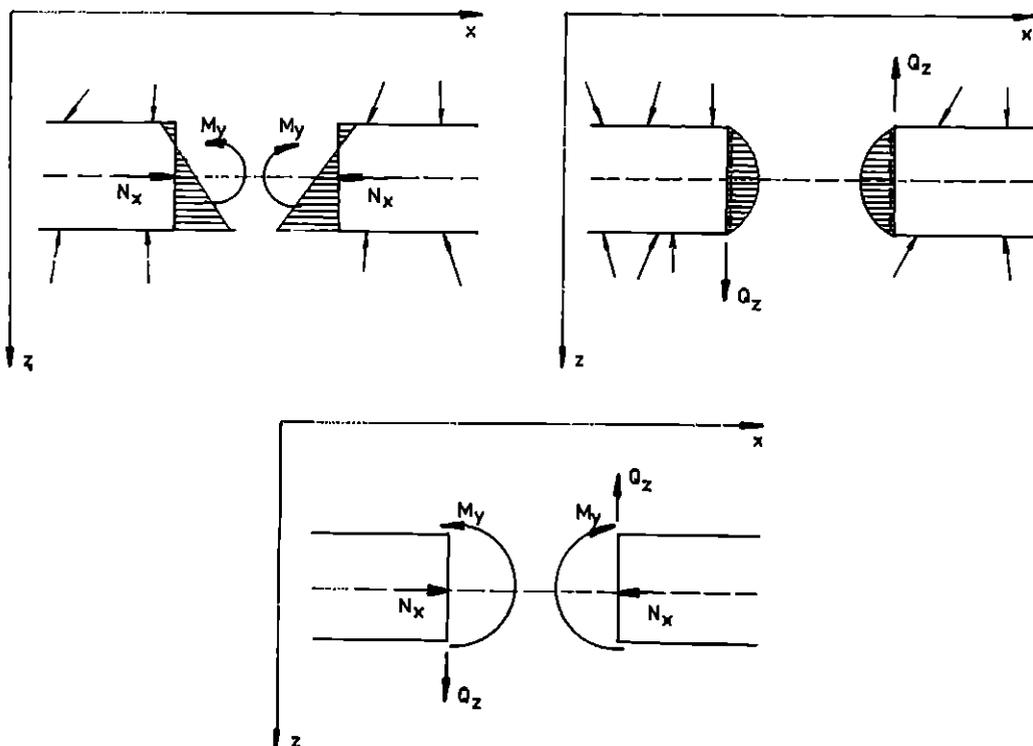
7.1.2. Vnitřní síly prutu v rovině

Předpokládejme, že průřez prutu i vnější síly jsou souměrné podle jisté roviny. Zavedeme-li soustavu souřadnic tak, že osa Y je kolmá na rovinu symetrie, budou krouťicí moment M_x , ohybový moment M_z a posouvající síla Q_y ve všech průřezech prutu nulové. Pro prut v rovině jsou tedy obecně nenulové následující vnitřní síly :

- ohybový moment M_y ,
- posouvající síla Q_z ,
- normálová síla N_x ,

kteřé budeme pro stručnost psát bez indexů jako M, Q, N .

Vzájemné působení oddělených částí prutu jsme souhrnně vyjádřili vnitřními silami; ve skutečnosti však je vzájemné působení obou oddělených částí rozloženo spojitě po celém průřezu. V teorii pružnosti se dozvíme, že takové spojitě rozložené silové účinky lze označit jako *n a p ě t í* . V průřezu prutu v rovině vzniká normálové napětí σ_x a tangenciální napětí τ_{xz} . Vnitřní síly jsou složkami výslednice napětí v průřezu (obr. 7.2).



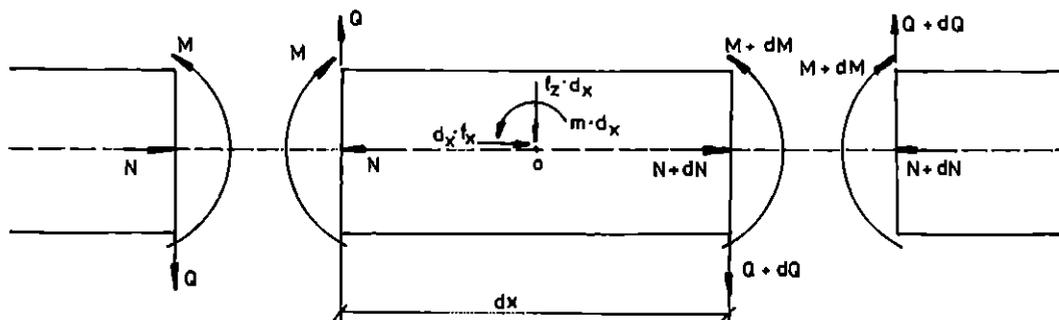
Obr. 7.2

Normálová síla je silovou složkou a ohybový moment momentovou složkou výslednice normálového napětí k těžišti průřezu prutu, zatímco posouvající síla je silovou výslednicí tangenciálního napětí. Platí vztahy

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_x \, dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x \cdot z \, dA \\ Q_z &= \int_A \tau_{xz} \, dA \end{aligned} \quad (7.1)$$

7.1.3. Vztahy mezi vnitřními silami a zátěžením

Uvažujme element prutu délky dx , ve směru střednice prutu (obr. 7.3). Zleva působí na element vnitřní síly M, Q, N , které vyjadřují účinek levé odejmuté části, zprava pak síly $M + dM, Q + dQ, N + dN$, které vyjadřují účinek pravé odejmuté části prutu. Zatížení je reprezentováno působením spojitého zatížení f , respektive jeho složkami f_x a f_z , a také působením spojitého momentového zatížení m .



Obr. 7.3

Má-li být tento element v rovnováze, musí splňovat dvě silové podmínky rovnováhy ve směru os X, Z a jednu momentovou podmínku rovnováhy například k bodu o :

$$\begin{aligned} \rightarrow X &: -N + f_x(x) \cdot dx + N + dN = 0 \\ &\frac{dN}{dx} = -f_x(x) \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \downarrow Z &: -Q + f_z(x) \cdot dx + Q + dQ = 0 \\ &\frac{dQ}{dx} = -f_z(x) \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright o &: -M - Q \cdot \frac{dx}{2} + m(x) \cdot dx - Q \cdot \frac{dx}{2} - dQ \cdot \frac{dx}{2} + M + dM = 0 \\ &\frac{dM}{dx} = Q - m(x) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ve vztahu (7.4) jsme zanedbali infinitezimální veličinu druhého řádu a sice součin $dQ \cdot \frac{dx}{2}$. Budeme-li derivovat rovnici (7.4) a dosadíme-li do ní po

derivaci vztah (7.3) získáme funkční závislost mezi ohybovým momentem a zatížením

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -f_z(x) - \frac{dm(x)}{dx} . \quad (7.5)$$

V mnoha případech je spojité momentové zatížení nulové. Potom bude mít rovnice (7.4) tvar

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (7.6)$$

a poté

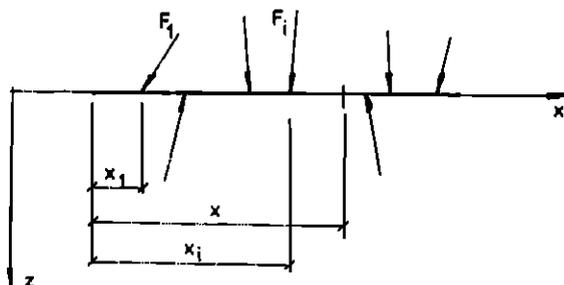
$$\frac{d^2M}{dx^2} = -f_z(x) . \quad (7.7)$$

Z rovnice (7.6) je patrné, že funkce ohybového momentu M nabývá extrému v tom průřezu, ve kterém je nulová posouvající síla. Takovému průřezu říkáme přechodný průřez. Současně je vidět, že posouvající síla Q je rovna derivaci ohybového momentu podle diferenciálu střednice - Schwedlerova věta.

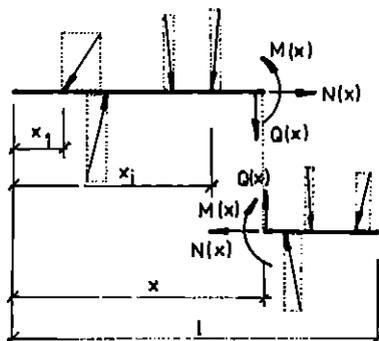
7.2. V Ý P O Č E T V N I T Ě R N Í C H S I L

7.2.1. Výpočet vnitřních sil v určitém průřezu

Abychom mohli určit vnitřní síly v určitém průřezu prutu (obr. 7.4), je třeba zapsat dvě silové a jednu momentovou podmínku rovnováhy na jedné z částí, oddělených myšleným řezem (obr. 7.5)



Obr. 7.4



Obr. 7.5

Na levé části prutu platí :

$$\begin{aligned} \vec{X} &: N(x) + \sum_{x_1 < x} F_{1x} = 0 \\ \downarrow Z &: Q(x) + \sum_{x_1 < x} F_{1z} = 0 \\ \curvearrowright x &: M(x) + \sum_{x_1 < x} F_{1z} \cdot (x - x_1) = 0 \end{aligned}$$

Na pravé části prutu pak podobně platí :

$$\begin{aligned} \vec{X} &: -N(x) + \sum_{x_1 > x} F_{1x} = 0 \\ \downarrow Z &: -Q(x) + \sum_{x_1 > x} F_{1z} = 0 \\ \curvearrowright x &: -M(x) + \sum_{x_1 > x} F_{1z} \cdot (x - x_1) = 0 \end{aligned}$$

Z uvedených podmínek rovnováhy na levé a pravé části prutu vyplývají vztahy pro výpočet vnitřních sil

- na levé části prutu :

$$\begin{aligned} N(x) &= - \sum_{x_1 < x} F_{1x} , \\ Q(x) &= - \sum_{x_1 < x} F_{1z} , \\ M(x) &= - \sum_{x_1 < x} F_{1z} \cdot (x - x_1) , \end{aligned}$$

- na pravé části prutu :

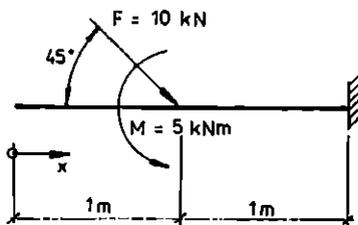
$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{x_1 > x} F_{1x} , \\ Q(x) &= \sum_{x_1 > x} F_{1z} , \\ M(x) &= \sum_{x_1 > x} F_{1z} \cdot (x - x_1) . \end{aligned}$$

V případě, kdy přímo ve vyšetřovaném průřezu prutu působí vnější síla, nebo osmělý moment, dostáváme v tomto průřezu dvě hodnoty odpovídající vnitřní síly. Mluvíme o hodnotách zleva a zprava ve vyšetřovaném průřezu x (viz příklad 7.1).

Z uvedených podmínek rovnováhy vidíme, že normálová síla $N(x)$ je součet průmětů všech sil na uvažované části prutu do směru střednice prutu. Posouvající síla $Q(x)$ je podobně součet průmětů všech sil na uvažované části prutu do směru kolmého ke střednici prutu. A konečně ohybový moment $M(x)$ je součtem momentů všech sil na uvažované části k danému bodu střednice prutu.

Příklad 7.1

Určete vnitřní síly v průřezu $x = 1$ m na dané konstrukci, zatížené podle (obr. 7.6).



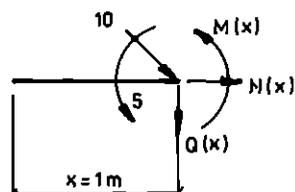
Obr. 7.6

Řešení : Zapišeme podmínky rovnováhy na části konzoly mezi jejím volným koncem a vyšetřovaným průřezem $x = 1$ m. Protože však v tomto průřezu působí síla F a moment M , budou zde rozdílné velikosti vnitřních sil vlevo a vpravo od vyšetřovaného průřezu. Provedeme-li řez nekonečně blízko vyšetřovaného průřezu vpravo (obr. 7.7) dostaneme tyto vnitřní síly :

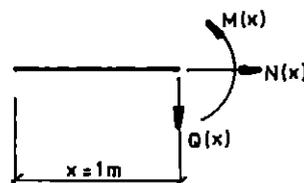
$$\begin{aligned} \vec{X} &: N(x) = -10 \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot 0,707 = -7,07 \text{ kN}, \\ \downarrow Z &: Q(x) = -10 \cdot \sin 45^\circ = -10 \cdot 0,707 = -7,07 \text{ kN}, \\ \curvearrowright x &: M(x) = -5 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Provedeme-li řez nekonečně blízko vyšetřovaného průřezu vlevo, dostaneme tyto vnitřní síly, které jsou patrné přímo z (obr. 7.8) :

$$\begin{aligned} \vec{X} &: N(x) = 0, \\ \downarrow Z &: Q(x) = 0, \\ \curvearrowright x &: M(x) = 0. \end{aligned}$$



Obr. 7.7



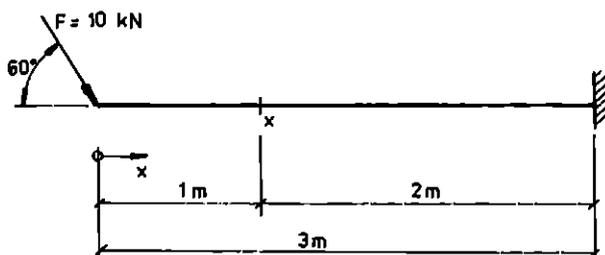
Obr. 7.8

Příklad 7.2

Určete vnitřní síly v průřezu $x = 1$ m na dané konstrukci, zatížené podle (obr. 7.9).

Řešení : Z podmínek rovnováhy dostaneme přímo velikosti vnitřních sil :

$$\begin{aligned} \vec{X} &: N(x) = -10 \cdot \cos 60^\circ = -10 \cdot 0,5 = -5,0 \text{ kN}, \\ \downarrow Z &: Q(x) = -10 \cdot \sin 60^\circ = -10 \cdot 0,866 = -8,66 \text{ kN}, \\ \curvearrowright x &: M(x) = -10 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 = -10 \cdot 0,866 \cdot 1 = -8,66 \text{ kNm}. \end{aligned}$$



Obr. 7.9

Abychom nemuseli vždy zapisovat podmínky rovnováhy na vyjmuté části prutu, můžeme zavést konvenci působení kladných vnitřních sil, které vychází z odvoze-

ných podmínek rovnováhy (obr. 7.10).



Obr. 7.10

Při výpočtu vnitřních sil při postupu zleva je kladný ohybový moment $M(x)$ takový, který protahuje spodní vlákna (označena čárkovaně), kladná posouvající síla $Q(x)$ ta, která směřuje vzhůru a kladná normálová síla $N(x)$ ta, která směřuje doleva - vyvozuje tah. Při postupu zprava je to obdobné, pouze s tím rozdílem, že kladná posouvající síla směřuje dolů a kladná normálová síla směřuje doprava, také vyvozuje tah.

7.2.2. Výpočet a grafické znázornění průběhů vnitřních sil

V předcházejícím odstavci jsme se naučili určit velikosti vnitřních sil v konkrétním průřezu prutu. Při navrhování stavebních konstrukcí však potřebujeme znát velikosti vnitřních sil ve všech průřezech prutu - tzv. průběhy vnitřních sil. Tyto průběhy získáme tak, že vyjádříme vnitřní síly obecně v závislosti na pořadnici x .

Příklad 7.3

Určete průběhy vnitřních sil na konstrukci, zatížené podle (obr. 7.9). Tyto průběhy graficky znázorněte.

Řešení : Průběhy vnitřních sil udávají závislost té které vnitřní síly na pořadnici x . Lze je graficky znázornit podle následujících zásad :

- funkční hodnoty vnitřních sil vykreslujeme kolmo ke střednici prutu,
- funkční hodnoty ohybových momentů $M(x)$ vykreslujeme základně na stranu tažených vláken (obr. 7.11),
- funkční hodnoty posouvajících a normálových sil $Q(x)$, $N(x)$ vykreslujeme kladné nad střednici prutu, záporné pod ní.



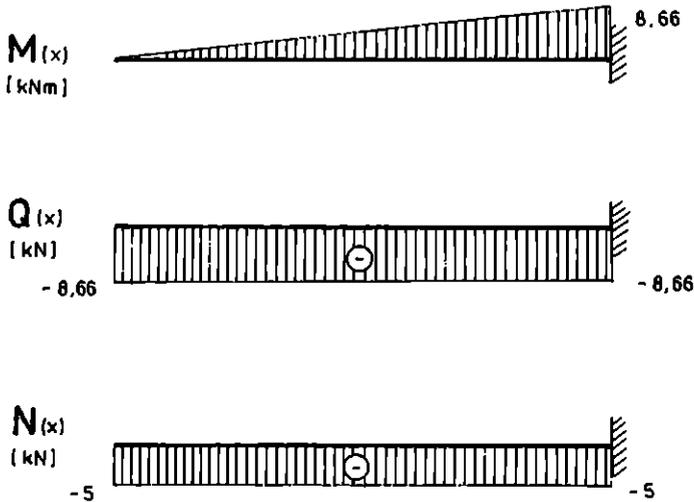
Obr. 7.11

$$M(x) = -10 \cdot \sin 60^\circ \cdot x = -10 \cdot 0,866 \cdot x = -8,66 \cdot x$$

$$Q(x) = -10 \cdot \sin 60^\circ = -10 \cdot 0,866 = -8,66 \text{ kN}$$

$$N(x) = -10 \cdot \cos 60^\circ = -10 \cdot 0,5 = -5,0 \text{ kN}$$

Těmto vypočteným funkčním závislostem odpovídají průběhy vnitřních sil (obr.7.12) vykreslené podle uvedených zásad.

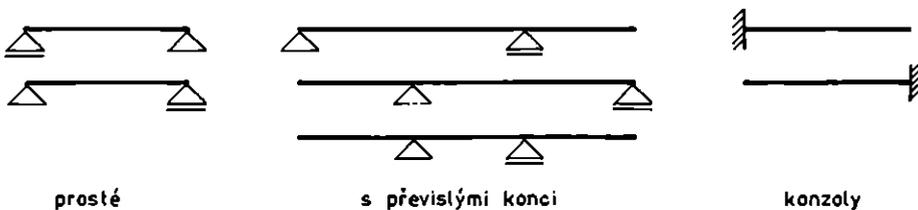


Obr. 7.12

Z obr. 7.12 je vidět, že průběhy vnitřních sil na dané konstrukci jsou lineární. Jsou vyšrafovány kolmo ke střednici prutu a popsány vypočtenými hodnotami. Průběhy $Q(x)$ a $N(x)$ jsou navíc označeny znaménkem. Průběhy $M(x)$ znaménkem neoznačujeme, protože toto znaménko není závislé na volbě směru pohledu na vyšetřovaný prut.

7.3. PŘÍMÉ NOSNÍKY

Nosník je prut, který je vázán vazbami. Nejjednoduššími typy nosníků jsou nosníky prosté, s převislými konci a konzoly (obr. 7.13).



Obr. 7.13

K výpočtu vnitřních sil je vždy třeba určit reakce s výjimkou konzoly, u které můžeme s výhodou postupovat od volného konce (viz příklady 7.1 a 7.2).

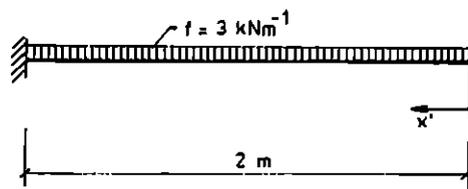
7.3.1. Konzola

V článku 7.2 jsme se již s výpočtem vnitřních sil na konzole seznámili. Jak již bylo řečeno, není třeba určovat reakce, pokud budeme postupovat od volného

konce. Dá se snadno dokázat, že získáme stejné výsledky, určíme-li reakce a budeme-li postupovat od vetknutí směrem k volnému konci.

Příklad 7.4

Určete průběhy vnitřních sil na konzole zatížené podle obr. 7.14



Obr. 7.14

Řešení : Budeme postupovat od volného konce konzoly a zavedeme proměnnou x' ve směru od volného konce směrem k vetknutí. Konstrukce je zatížena spojitým rovnoměrným zatížením o velikosti 3 kNm^{-1} . V průřezu x' budou průběhy vnitřních sil mít hodnoty :

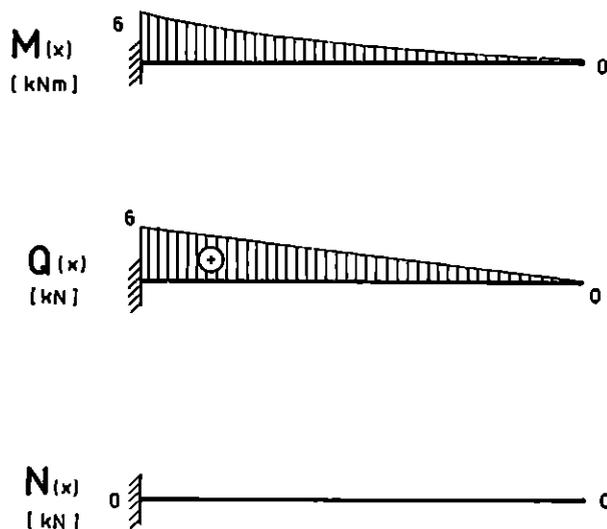
$$M(x') = -3 \cdot x' \cdot \frac{x'}{2} = -\frac{3}{2} \cdot x'^2$$

$$Q(x') = 3 \cdot x'$$

$$N(x') = 0$$

- pro $x' = 0$:	$M(x') = 0$	- pro $x' = 2$:	$M(x') = -6 \text{ kNm}$
	$Q(x') = 0$		$Q(x') = 6 \text{ kN}$
	$N(x') = 0$		$N(x') = 0$

Výsledné průběhy vnitřních sil jsou na obr. 7.15 :

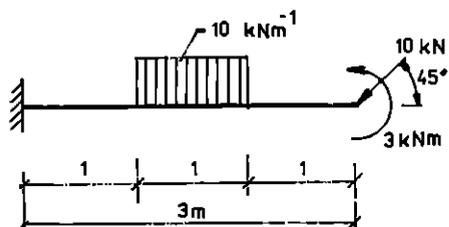


Obr. 7.15

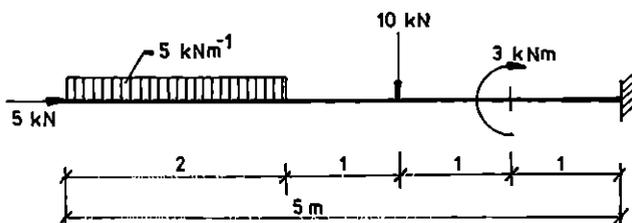
===== C V I Č E N Í =====

Cvičení 7.1 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.16.

Cvičení 7.2 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.17.



Obr. 7.16

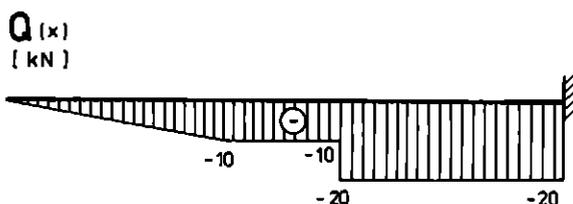
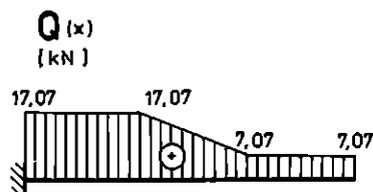
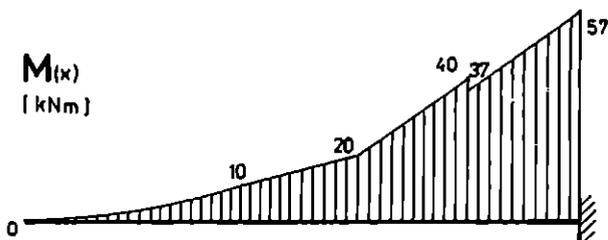
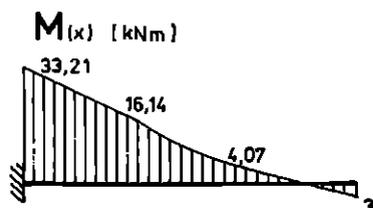


Obr. 7.17

----- V Ý S L E D K Y -----

Cvičení 7.1 : viz obr. 7.18

Cvičení 7.2 : viz obr. 7.19



Obr. 7.18



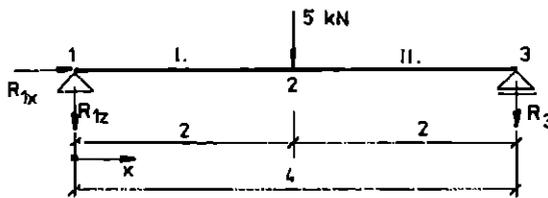
Obr. 7.19

7.3.2. Prostý nosník

Při výpočtu průběhů vnitřních sil na prostém nosníku je vždy nutné znát velikosti reakcí. Reakce už umíme určit. Neučili jsme se to v předmětu "Teoretická mechanika" v 1. ročníku. Budeme tedy vycházet z toho, že reakce umíme určit a nebudeme se zde zabývat jejich výpočtem.

Příklad 7.5

Určete průběhy vnitřních sil na prostém nosníku, zatíženém podle



reakce :

$$R_{1x} = 0$$

$$R_{1z} = - 2,5 \text{ kN}$$

$$R_3 = - 2,5 \text{ kN}$$

Obr. 7.20

Výpočet provedeme pro zvolenou veličinu x ve dvou intervalech, které jsme označili I, II :

- interval I :

- interval II :

$$M(x) = - R_{1z} \cdot x = 2,5 \cdot x$$

$$M(x) = - R_{1z} \cdot x - 5 \cdot (x-2) = 2,5x - 5x + 10 =$$

$$Q(x) = - R_{1z} = 2,5 \text{ kN}$$

$$= - 2,5x + 10$$

$$N(x) = R_{1x} = 0$$

$$Q(x) = - R_{1z} - 5 = 2,5 - 5 = - 2,5 \text{ kN}$$

$$N(x) = R_{1x} = 0$$

Pro $x = 0$:

pro $x = 2$:

pro $x = 4$:

$$M(x) = 0$$

$$M(x) = 5 \text{ kNm}$$

$$M(x) = 0$$

$$Q(x) = 2,5 \text{ kN}$$

$$Q(x)_1 = 2,5 \text{ kN}$$

$$Q(x) = - 2,5 \text{ kN}$$

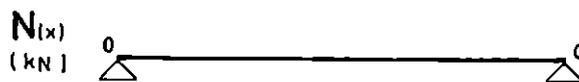
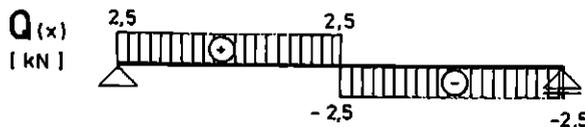
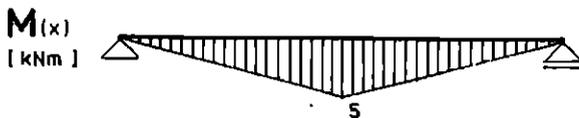
$$N(x) = 0$$

$$Q(x)_p = - 2,5 \text{ kN}$$

$$N(x) = 0$$

$$N(x) = 0$$

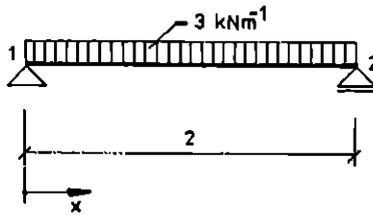
Z řešení je vidět, že posouvající síla $Q(x)$ je nespojitá jen v průřezu $x = 2$ m, což je průřez, kde se $Q(x)$ mění skokem vlivem svislé síly o velikosti 5 kN. Průběhy vnitřních sil jsou vykresleny v obr. 7.21 :



Obr. 7.21

Příklad 7.6

Vypočtete průběhy vnitřních sil na prostém nosníku podle obr. 7.22



reakce :

$$R_{1x} = 0$$

$$R_{1z} = -3 \text{ kN}$$

$$R_2 = -3 \text{ kN}$$

Obr. 7.22

$$M(x) = -R_{1z} \cdot x - 3 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

$$Q(x) = -R_{1z} - 3 \cdot x = -3x + 3$$

$$N(x) = R_{1x} = 0$$

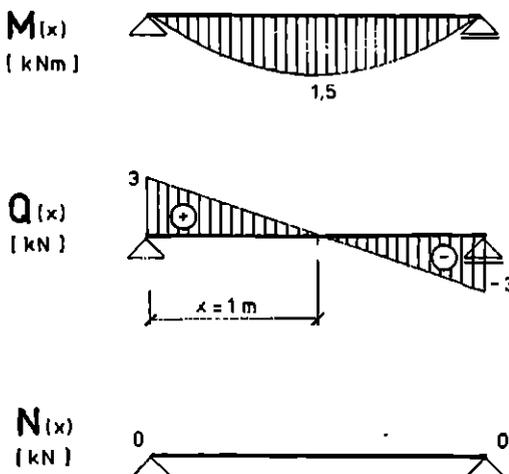
Pro $x = 0$:	$M(x) = 0$	pro $x = 2$:	$M(x) = 0$
	$Q(x) = 3 \text{ kN}$		$Q(x) = -3 \text{ kN}$
	$N(x) = 0$		$N(x) = 0$

Z průběhu posouvající síly $Q(x)$ je vidět, že je lineární a mezi body 1 a 2 nabývá nulové hodnoty. Průřezu, ve kterém je $Q(x) = 0$, říkáme přechodný průřez a víme, že v tomto průřezu je extrém momentu $M(x)$:

$$Q(x) = -3x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x) = 0 \quad \text{pro } x = 1 \text{ m}$$

$$M(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad M(1) = -\frac{3}{2} \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1,5 \text{ kNm}$$

Výsledné průběhy vnitřních sil jsou vykresleny na obr. 7.23 :

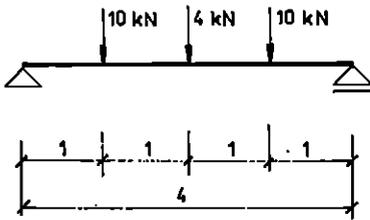


Obr. 7.23

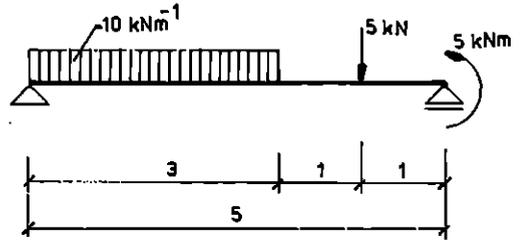
===== C V I Ě N Í =====

Cvičení 7.3 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.24

Cvičení 7.4 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.25



Obr. 7.24

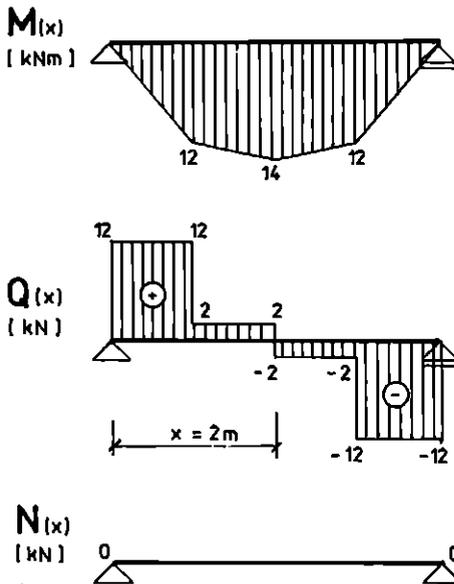


Obr. 7.25

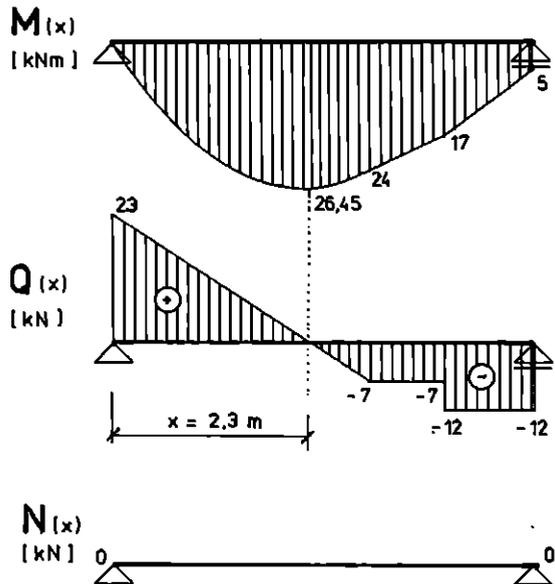
----- V Ý S L E D K Y -----

Cvičení 7.3 : viz obr. 7.26

Cvičení 7.4 : viz obr. 7.27



Obr. 7.26



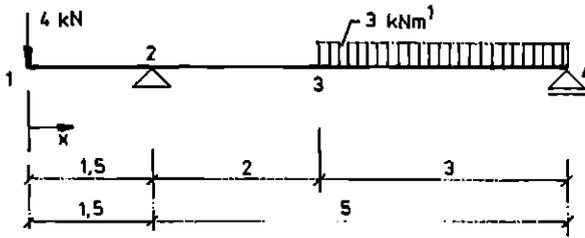
Obr. 7.27

7.3.3. Nosník s převislými konci

Při řešení nosníků s převislými konci je třeba znát velikosti reakcí, aby-
chom mohli určit a vykreslit průběhy vnitřních sil.

Příklad 7.7

Určete průběhy vnitřních sil na nosníku s převislým koncem, kte-
rý je zatížen podle obrázku 7.26. Předpokládejme, že reakce jsou
známé.



$$R_{2x} = 0$$

$$R_{2z} = -7,9 \text{ kN}$$

$$R_4 = -5,1 \text{ kN}$$

Obr. 7.28

Řešení : Konstrukci budeme řešit ve třech intervalech. Proměnná x je zavedena podle obr. 7.28.

- interval I : - interval II : - interval III :

$$M(x) = -4 \cdot x$$

$$Q(x) = -4 \text{ kN}$$

$$N(x) = 0$$

$$M(x) = -4 \cdot x - R_{2z} \cdot (x-1,5)$$

$$Q(x) = -4 - R_{2z} = 3,9 \text{ kN}$$

$$N(x) = 0$$

$$M(x) = -4 \cdot x - R_{2z} \cdot (x-1,5) - \frac{3}{2} \cdot (x-3,5)^2$$

$$Q(x) = -4 - R_{2z} - 3 \cdot (x-3,5)$$

$$N(x) = 0$$

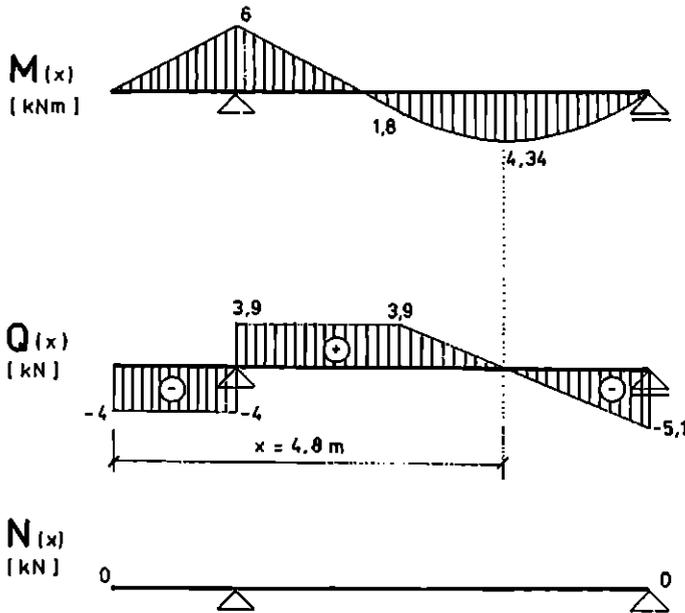
Polohu přechodného průřezu určíme z podmínky $Q(x) = 0$ v intervalu III :

$$Q(x) = -4 + 7,9 - 3 \cdot (x-3,5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4,8 \text{ m}$$

Maximum chybového momentu $M(x)$ bude v přechodném průřezu :

$$\max M(x) = -4 \cdot x - R_{2z} \cdot (x-1,5) - \frac{3}{2} \cdot (x-3,5)^2 = -19,2 + 26,07 - 2,53 = 4,34 \text{ kNm}$$

Průběhy vnitřních sil jsou vykresleny na obr. 7.29.

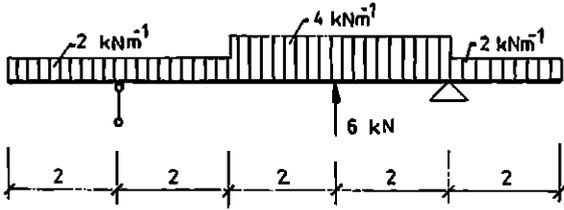


Obr. 7.29

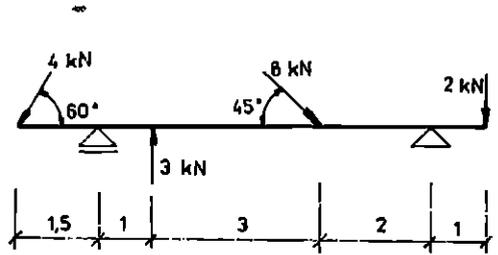
===== C V I Č E N Í =====

Cvičení 7.5 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.30.

Cvičení 7.6 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.31.



Obr. 7.30

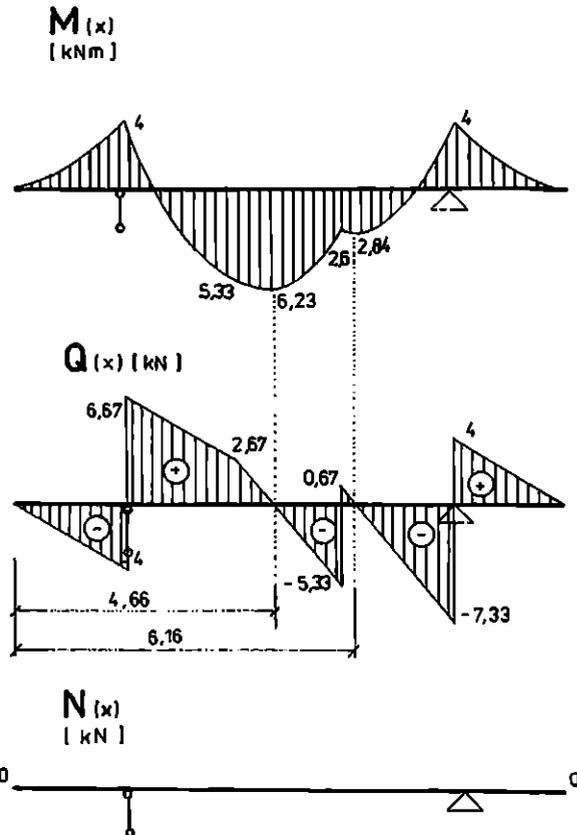


Obr. 7.31

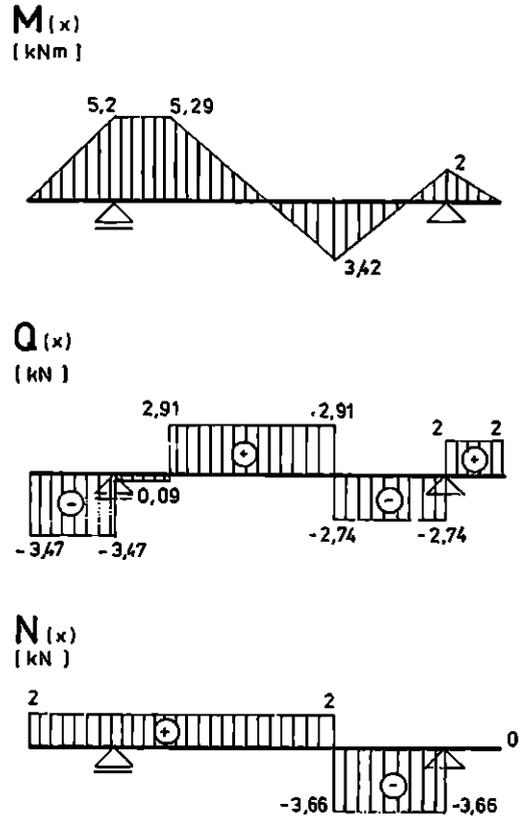
----- V Ý S L E D K Y -----

Cvičení 7.5 : viz obr. 7.32

Cvičení 7.6 : viz obr. 7.33



Obr. 7.32

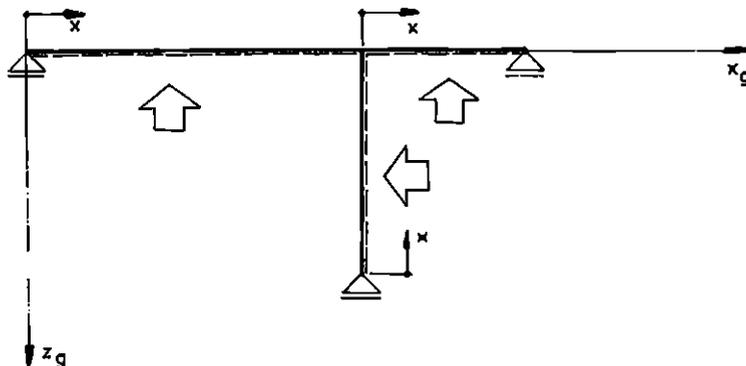


Obr. 7.33

7.4. LOMENÉ NOSNÍKY

Lomený nosník je konstrukce, jejíž střednicí je lomená čára. Body, ve kterých se střednice láme nebo ve kterých se větví, nazýváme styčníky. Je nutné si uvědomit, že součet všech momentů působících na styčník musí být roven nule.

Také u těchto konstrukcí je třeba předem určit reakce a to ze silových a momentových podmínek rovnováhy v globálním systému souřadnic X_g, Z_g (obr. 7.34)

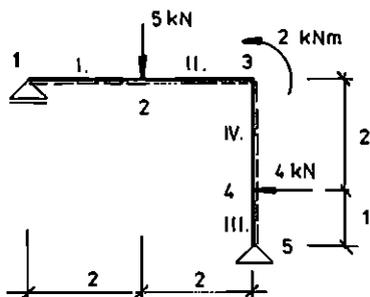


Obr. 7.34

Při výpočtu vnitřních sil však volíme lokální systémy souřadnic pro každý prut samostatně, přičemž počátek volíme vždy v levém styčníku, u svislých prutů v dolním styčníku. Je zvykem vyznačit si ve statickém schématu čárkovaně "kladná vlákna" u každého z prutů. U vodorovných a šikmých prutů jsou tato "kladná vlákna" volena ve směru pohledu proti kladné poloose Z_g , u svislých prutů proti kladné poloose X_g . Jsou to krajní vlákna průřezu prutu, která jsou tažena působením kladných ohybových momentů.

Příklad 7.8

Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil na konstrukci zatíženou podle obr. 7.35.



$$\begin{aligned} R_1 &= -4 \text{ kN} \\ R_{5x} &= 4 \text{ kN} \\ R_{5z} &= -1 \text{ kN} \end{aligned}$$

Obr. 7.35

Řešení : Nejprve vypočteme reakce lomeného nosníku a potom označíme čárkovaně "kladná vlákna" podle výše uvedených zásad. Průběhy vnitřních sil počítáme v lokálních souřadnicích tak, jak jsou naznačeny v obr. 7.35. Abychom zjednodušili značení vnitřních sil vlevo a vpravo ve styčníku, budeme v dalším výkladu vnitřní síly značit pouze indexy číselnými : např. moment ve styčníku 2 vlevo budeme značit dále jako M_{2l} , moment ve styčníku 4 vpravo pak M_{4p} a pod. Řešení provedeme v jednotlivých intervalech a výsledné hodnoty vyneseme do obr. 7. 36.

- interval I :

$$M(x) = -R_1 \cdot x = 4 \cdot x$$

$$Q(x) = -R_1 = 4 \text{ kN}$$

$$N(x) = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$M_{21} = 8 \text{ kNm}$$

$$Q_1 = 4 \text{ kN}$$

$$Q_{21} = 4 \text{ kN}$$

- interval II :

$$M(x) = -R_1 \cdot x - 5 \cdot (x-2) = -x + 10$$

$$Q(x) = -R_1 - 5 = 4 - 5 = -1 \text{ kN}$$

$$N(x) = 0$$

$$M_{23} = 8 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 6 \text{ kNm}$$

$$Q_{23} = -1 \text{ kN}$$

$$Q_{32} = -1 \text{ kN}$$

- interval III :

$$M(x) = -R_{5x} \cdot x = -4 \cdot x$$

$$Q(x) = -R_{5x} = -4 \text{ kN}$$

$$N(x) = R_{5z} = -1 \text{ kN}$$

$$M_5 = 0$$

$$M_{45} = -4 \text{ kNm}$$

$$Q_5 = -4 \text{ kN}$$

$$Q_{45} = -4 \text{ kN}$$

$$N_5 = -1 \text{ kN}$$

- interval IV :

$$M(x) = -R_{5x} \cdot x + 4 \cdot (x-1) = -4 \text{ kNm}$$

$$Q(x) = -R_{5x} + 4 = -4 + 4 = 0$$

$$N(x) = R_{5z} = -1 \text{ kN}$$

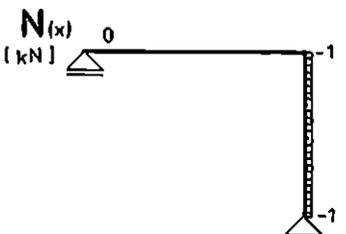
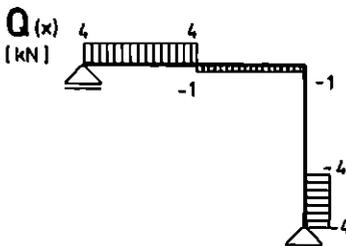
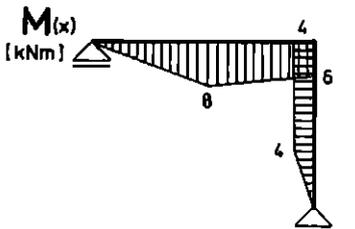
$$M_{43} = -4 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = -4 \text{ kNm}$$

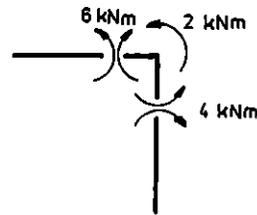
$$Q_{43} = 0$$

$$Q_{34} = 0$$

$$N_{43} = -1 \text{ kN}$$



STYČNÍK 3

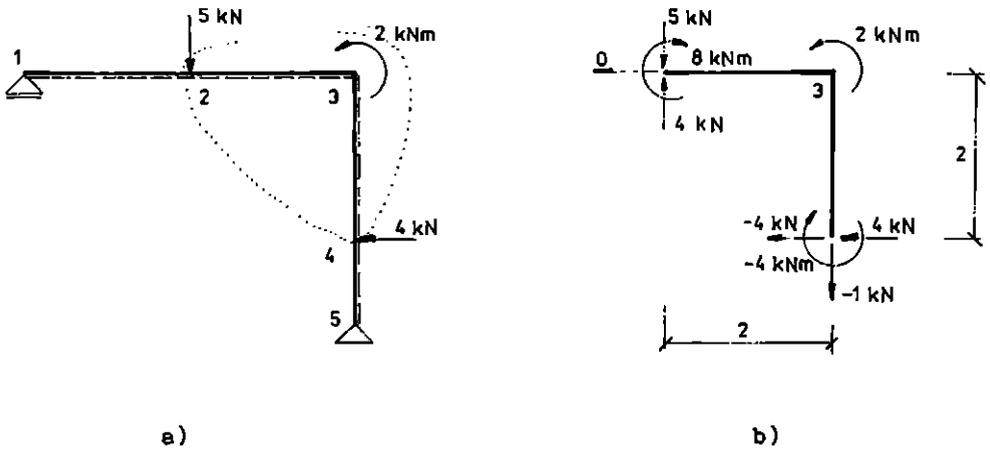


b)

Obr. 7.36

Příklad 7.9

Zkontrolujte, zda je část lomeného nosníku, vyjmutá z nosníku z příkladu 7.8, v rovnováze (obr. 7.37).



Obr. 7.37

Řešení : Pro libovolnou část konstrukce musí být splněny podmínky rovnováhy, a to dvě silové ve směru os X, Z a jedna momentová k libovolnému bodu. V podmínkách rovnováhy však musíme zahrnout nejen zatížení, ale také vnitřní síly, které vyjadřují účinek oddělené části konstrukce. Jsou patrné z obr. 7.37 b).

$$\begin{array}{rcll} \overline{X} & : & 0 & - (-4) & - 4 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \downarrow Z & : & 5 & - 4 & + (-1) & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \curvearrowleft 3 & : & 2 & - 8 & - (-4) & + 5 \cdot 2 & - 4 \cdot 2 & - 4 \cdot 2 & - (-4) \cdot 2 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Podmínky rovnováhy vyjmuté části konstrukce jsou splněny.

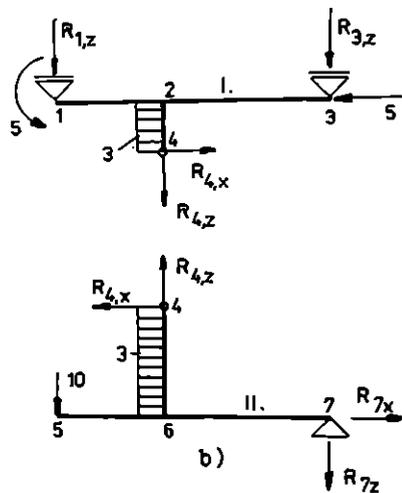
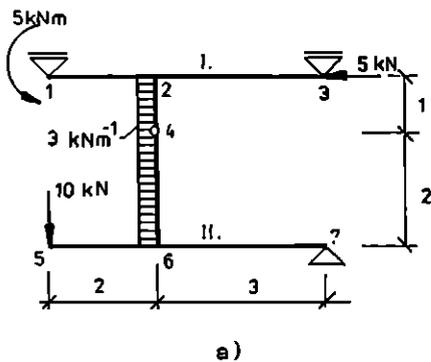
7.5. SLOŽENÉ SOUSTAVY

Složené soustava je konstrukce, vzniklá vzájemným spojením nosníků vazbami. Při výpočtu a vykreslování průběhů vnitřních sil se řídíme stejnými zásadami jako v předcházejících člancích této kapitoly.

Jsou dvě základní možnosti jak řešit složené soustavy. První je řešení složené soustavy rozdělením na jednotlivé desky, druhá možnost je řešení složené soustavy jako celku. V následujícím příkladu si ukážeme řešení oběma způsoby.

Příklad 7.10

Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil na dané složené soustavě (obr. 7.38). Využijte postupu s rozdělením soustavy na jednotlivé desky.



Obr. 7.38

Z podmínek rovnováhy vypočteme vnější a vnitřní reakce složené soustavy:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -11,3 \text{ kN} & R_{7z} &= 6 \text{ kN} \\
 R_3 &= -4,7 \text{ kN} & R_{4x} &= 2 \text{ kN} \\
 R_{7x} &= -4 \text{ kN} & R_{4z} &= 16 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Výpočet provedeme v šesti intervalech, ve třech na desce číslo 1 a ve třech na desce číslo 2 :

deska číslo 1 :

interval (1; 2) :

$$\begin{aligned}
 M(x) &= -5 - R_1 \cdot x = 11,3 \cdot x - 5 \\
 Q(x) &= -R_1 = 11,3 \text{ kN} \\
 N(x) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 0 \\
 M_{21} &= 17,6 \text{ kNm} \\
 Q_1 &= 11,3 \text{ kN} \\
 Q_{21} &= 11,3 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

interval (2; 3) :

$$\begin{aligned}
 M(x) &= -5 - R_1 \cdot (x+2) - 3 \cdot 0,5 - R_{4x} \cdot 1 - R_{4z} \cdot x \\
 &= -5 + 11,3(x+2) - 1,5 - 2 - 16 \cdot x = -4,7 \cdot x + 14,1 \\
 Q(x) &= -R_1 - R_{4z} = 11,3 - 16 = -4,7 \text{ kN} \\
 N(x) &= R_{4x} + 3 \cdot 1 = -2 - 3 = -5 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_3 &= 0 \\
 M_{23} &= 14,1 \text{ kNm} \\
 Q_3 &= -4,7 \text{ kN} \\
 Q_{23} &= -4,7 \text{ kN} \\
 N_3 &= -5 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

interval (4; 2) :

$$\begin{aligned}
 M(x) &= -R_{4x} \cdot x - 3 \cdot \frac{x^2}{2} = -1,5 \cdot x^2 - 2 \cdot x \\
 Q(x) &= -R_{4x} - 3 \cdot x = -3 \cdot x - 2 \\
 N(x) &= 16 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{42} &= 0 \\
 M_{24} &= -3,5 \text{ kNm} \\
 Q_{42} &= -2 \text{ kN} \\
 Q_{24} &= -5 \text{ kN} \\
 N_4 &= 16 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

deska číslo **2** :

interval (5;6) :

$$M(x) = -10 \cdot x$$

$$Q(x) = -10 \text{ kN}$$

$$N(x) = 0$$

$$M_{56} = 0$$

$$M_{65} = -20 \text{ kNm}$$

$$Q_{56} = -10 \text{ kN}$$

$$Q_{65} = -10 \text{ kN}$$

interval (6;7) :

$$M(x) = -10 \cdot (x+2) - R_{4x} \cdot 2 + R_{4z} \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= -10 \cdot (x+2) - 4 + 16 \cdot x + 6 = 6 \cdot x - 18$$

$$Q(x) = -10 + 16 = 6 \text{ kN}$$

$$N(x) = R_{4x} - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4 \text{ kN}$$

$$M_{67} = -18 \text{ kNm}$$

$$M_7 = 0$$

$$Q_{67} = 6 \text{ kN}$$

$$N_7 = -4 \text{ kN}$$

interval (6;4) :

$$M(x) = -10 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 6 \cdot 3 - (-4) \cdot x =$$

$$= -20 - 1,5 \cdot x^2 + 18 + 4 \cdot x = -1,5 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 2$$

$$Q(x) = -3 \cdot x - (-4) = -3 \cdot x + 4$$

$$N(x) = 10 \text{ kN}$$

$$M_{64} = -2 \text{ kNm}$$

$$M_{46} = 0$$

$$Q_{64} = 4 \text{ kN}$$

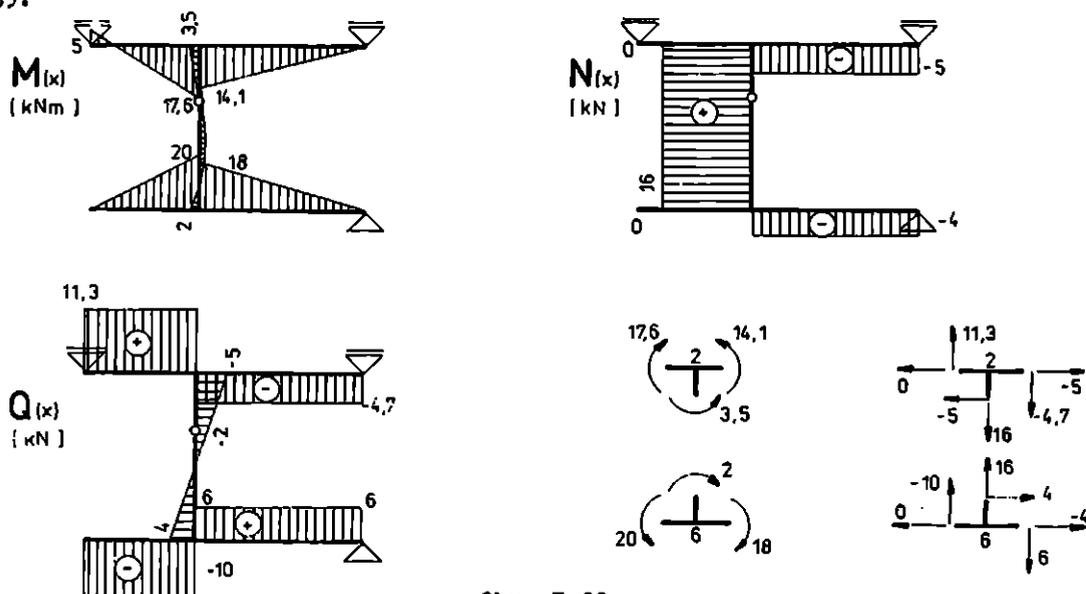
$$Q_{46} = -2 \text{ kN}$$

V posledním z řešených intervalů jsme zjistili, že posouvající síla $Q(x)$ mění znaménko. Je zde tudíž přechodný průřez, který musíme vyšetřit:

$$Q(x) = -3 \cdot x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,33 \text{ m}$$

$$\max M(x) = -1,5 \cdot (1,33)^2 + 4 \cdot 1,33 - 2 = 0,66 \text{ kNm}$$

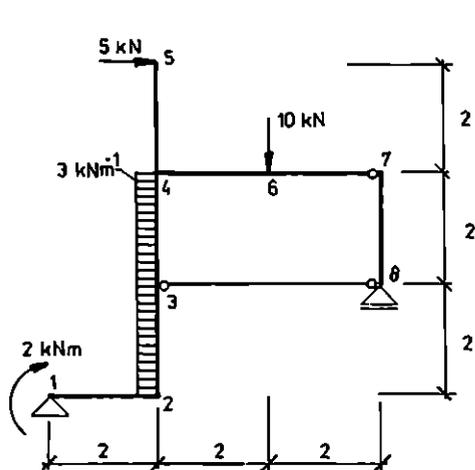
Výsledné průběhy vnitřních sil spolu s rozkreslením styčniců 2 a 6 je na obr. 7.39.



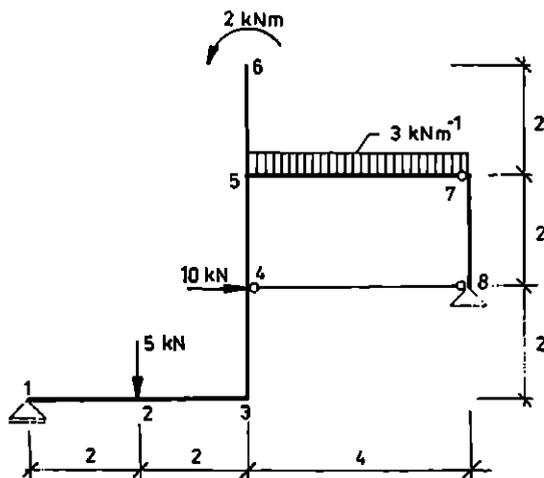
Obr. 7.39

===== C V I Č E N Í =====

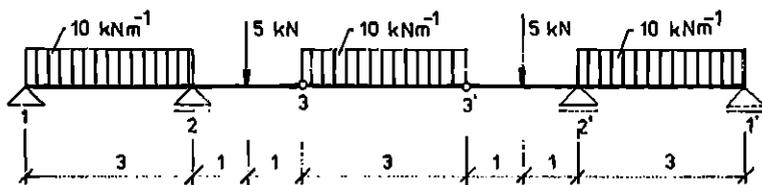
- Cvičení 7.7 : Zkontrolujte výsledky příkladu 7.10 bez rozdělení složené soustavy na jednotlivé desky
- Cvičení 7.8 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.40.
- Cvičení 7.9 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.41.
- Cvičení 7.10 : Vypočtete a vykreslete průběhy vnitřních sil pro konstrukci na obr. 7.42.



Obr. 7.40



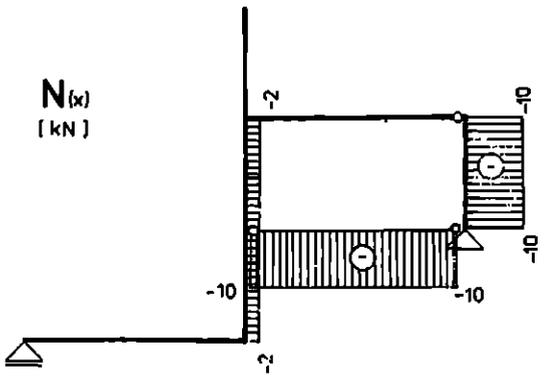
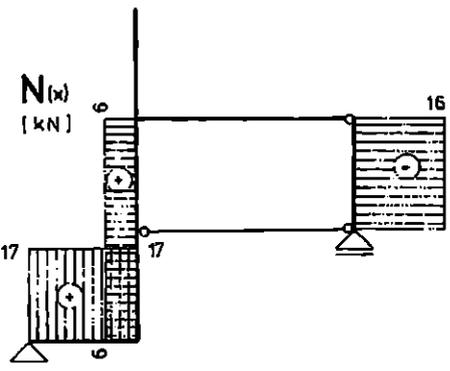
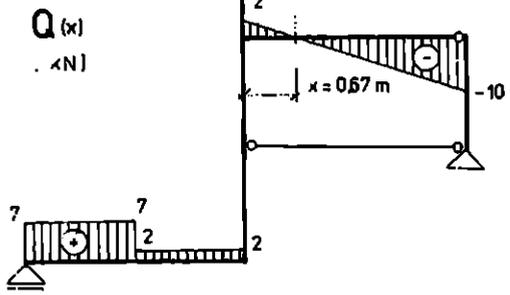
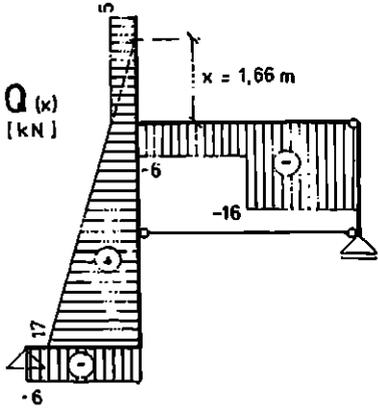
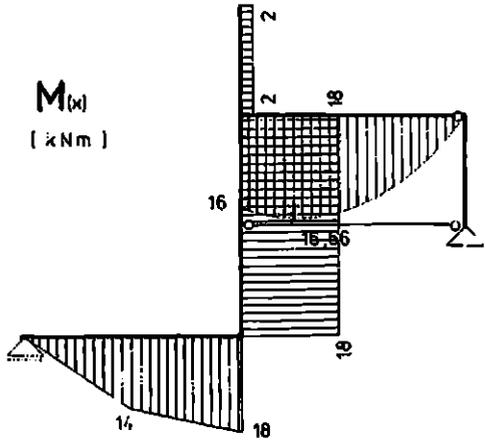
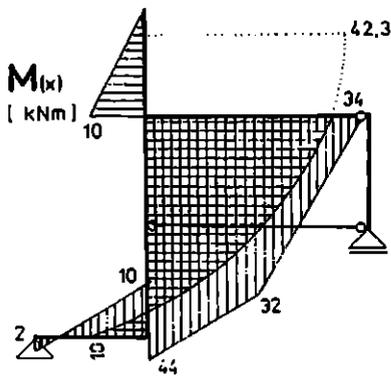
Obr. 7.41



Obr. 7.42

----- V Ý S L E D K Y -----

- Cvičení 7.7 : viz obr. 7.39
- Cvičení 7.8 : viz obr. 7.43
- Cvičení 7.9 : viz obr. 7.44
- Cvičení 7.10 : viz obr. 7.45



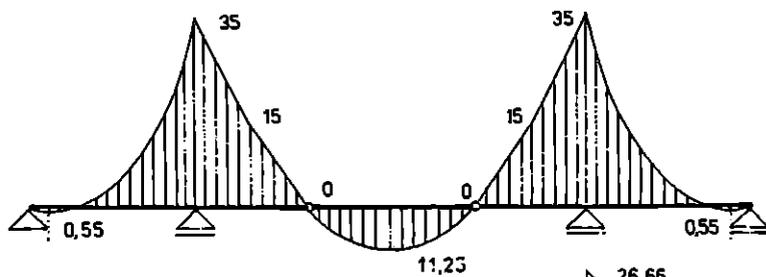
Obr. 7.43

$$\begin{aligned}
 R_{1x} &= -17 \text{ kN} \\
 R_{1z} &= 6 \text{ kN} \\
 R_{7x} &= 0 \\
 R_{7z} &= -16 \text{ kN} \\
 R_8 &= -16 \text{ kN} \\
 S_{3\theta} &= 0
 \end{aligned}$$

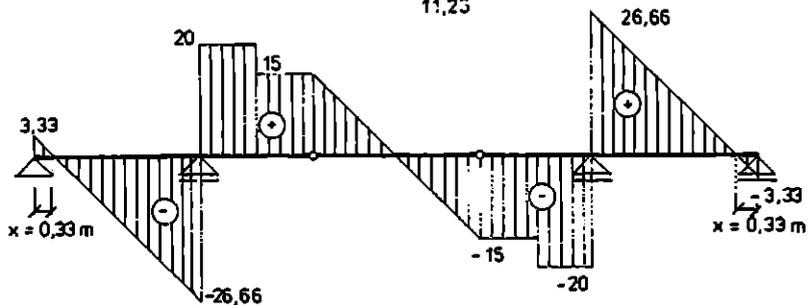
Obr. 7.44

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -7 \text{ kN} \\
 R_{8x} &= -10 \text{ kN} \\
 R_{8z} &= -10 \text{ kN} \\
 R_{6x} &= 0 \\
 R_{6z} &= 10 \text{ kN} \\
 S_{37} &= -10 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$M(x)$
[kNm]



$Q(x)$
[kN]



$N(x)$
[kN]



Obr. 7.45

DODATKY

A

PŘEHLED ZNAČEK

A	průřezová plocha	\bar{F}	vektor předepsaných posunů
\underline{A}	statická matice konstrukce	\hat{F}	vektor styčnickových posunů
\underline{A}_T	statická matice reakcí	R	reakce
\hat{A}	statická matice soustavy	\bar{R}	reakce od jednotkového účinku
\underline{B}	geometrická matice konstrukce	Q	posouvající síla
\bar{B}	geometrická matice vazeb	\underline{s}	vektor osových sil
\hat{B}	geometrická matice soustavy	S	osová síla
\underline{D}	matice tuhostí prutů	\bar{S}	osová síla od jednot. účinku
\underline{e}	vektor deformace	u	posun ve směru osy x
E	Youngův modul pružnosti	v	posun ve směru osy y
E	celková potenciální energie	w	posun ve směru osy z
E_{ext}	potenciální energie vnějších sil	W	práce
E_{int}	potenciální energie vnitřních sil	x	} kartézské souřadnice
f	spojité zatížení	y	
\bar{f}	vektor zatížení	z	
\hat{f}	vektor styčnickových sil		
\underline{f}_T	vektor reakcí	α	orientovaný směrový úhel
F	síla	α_t	součinitel teplotní roztaž.
\bar{F}	předepsaná síla	β	směrový úhel k ose y
①	číslo styčnicku, průřezu, bodu	γ	směrový úhel k ose z
①	číslo prutu, desky	δ	virtuální veličina
k	tuhost prutu v tahu-tlaku	Δl	protažení
\underline{K}	matice tuhosti konstrukce	Δt	oteplení
\hat{K}	matice tuhosti soustavy	ϵ	relativní protažení
l	délka prutu	σ	normálové napětí
M	ohybový moment	ψ	úhel rotace
n_{eq}	počet neznámých (počet rovnic)		
n_p	počet prutů		
n_s	počet styčnicků		
N	normálová síla		
O	střed otáčení		
\underline{r}	vektor neznámých posunů		

S pojmem vektoru a matice jste se seznámili v matematice. V tomto skriptu označujeme vektory podtrženými písmeny malé abecedy a matice podtrženými písmeny velké abecedy.

Jistě dokonale ovládáte základní operace maticové algebry. Méně běžný pro vás možná je zápis funkce více proměnných jako funkce vektorového argumentu a zápis parciálních derivací takové funkce do vektoru zvaného gradient. Je-li tedy dána funkce f proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , můžeme proměnné sdružit do vektoru $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ a funkční hodnoty označovat místo obsáhlého $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stručnějším $f(\underline{x})$.

Parciální derivace funkce f podle jednotlivých proměnných sdružíme do vektoru

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}^T, \quad (\text{D.1})$$

kterému se říká gradient funkce f .

Lineární formou rozumíme funkci, která je dána předpisem

$$f(\underline{x}) = \underline{a}^T \cdot \underline{x}, \quad \text{tj. } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i, \quad (\text{D.2})$$

kde $\underline{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$ je vektor konstant. Kvadratická forma je dána předpisem

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}, \quad \text{tj. } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \quad (\text{D.3})$$

kde \underline{A} je čtvercová symetrická matice konstant a_{ij} .

Gradient lineární formy (D.2) je roven vektoru \underline{a} , tj. platí

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{a}^T \cdot \underline{x}) = \underline{a}, \quad (\text{D.4})$$

zatímco gradient kvadratické formy (D.3) je dán vzorcem

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}) = 2 \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}. \quad (\text{D.5})$$

Nabývá-li diferencovatelná funkce f v bodě \underline{x}_0 lokálního minima, musí být její gradient v tomto bodě roven nulovému vektoru. Této skutečnosti se využívá zejména v článku 4.3. o principu minima potenciální energie.

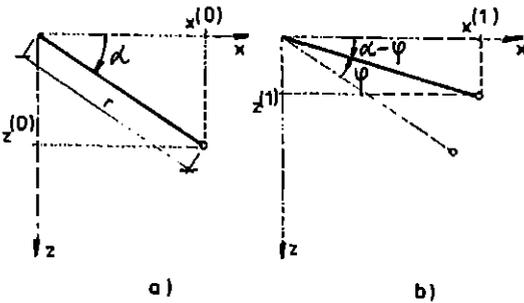
Při pootočení tuhé desky v rovině xz okolo počátku o úhel φ proti směru hodinových ručiček se bod o souřadnicích

$$x^{(0)} = r \cdot \cos \alpha, \quad z^{(0)} = r \cdot \sin \alpha \quad (\text{D.6})$$

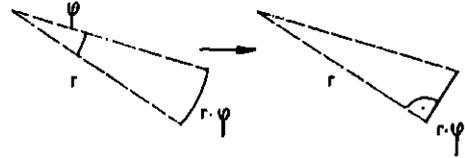
přemístí do polohy popsané souřadnicemi

$$x^{(1)} = r \cdot \cos(\alpha - \varphi), \quad z^{(1)} = r \cdot \sin(\alpha - \varphi). \quad (\text{D.7})$$

Význam symbolů r a α je patrný z obr.D.1.



Obr. D.1



Obr. D.2

Vodorovná a svislá složka posunu

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= x^{(1)} - x^{(0)} = r \cdot \cos(\alpha - \varphi) - r \cdot \cos \alpha, \\ w(\varphi) &= z^{(1)} - z^{(0)} = r \cdot \sin(\alpha - \varphi) - r \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

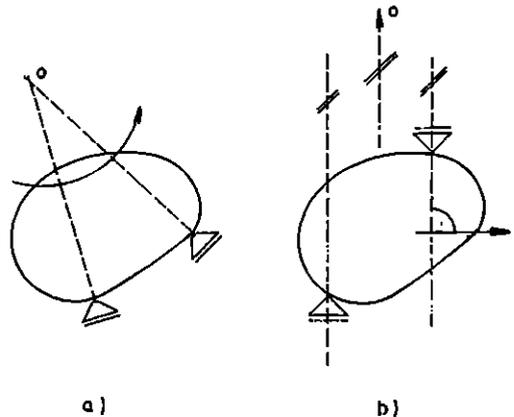
přítom závislosti nelineárně na úhlu rotace φ . Je-li však úhel rotace malý (platí-li $\varphi \ll 1$), lze závislost u a w na φ přibližně linearizovat. S chybou řádu φ^2 pak platí

$$\begin{aligned} u(\varphi) &\approx u(0) + u'(0) \cdot \varphi = 0 + r \cdot \sin \alpha \cdot \varphi = z^{(0)} \cdot \varphi, \\ w(\varphi) &\approx w(0) + w'(0) \cdot \varphi = 0 - r \cdot \cos \alpha \cdot \varphi = -x^{(0)} \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Pro malé rotace tedy posun probíhá přibližně ve směru kolmém na spojnicí sledovaného bodu se středem otáčení a jeho velikost je $r \cdot \varphi$, kde r je vzdálenost sledovaného bodu od středu otáčení a φ úhel rotace (obr.D.2).

Střed otáčení desky nemusí ležet přímo na této desce. Je-li například deska počepřena dvěma posuvnými klouby, otáčí se kolem průsečíku přímek procházejících těmito klouby kolmo na směr volného posunu (obr.D.3a). Pokud jsou tyto přímky rovnoběžné, říkáme, že se protínají v nevlastním bodě.

Rotace kolem nevlastního bodu znamená translaci ve směru kolmém na přímky procházející tímto nevlastním bodem (obr.D.3b).



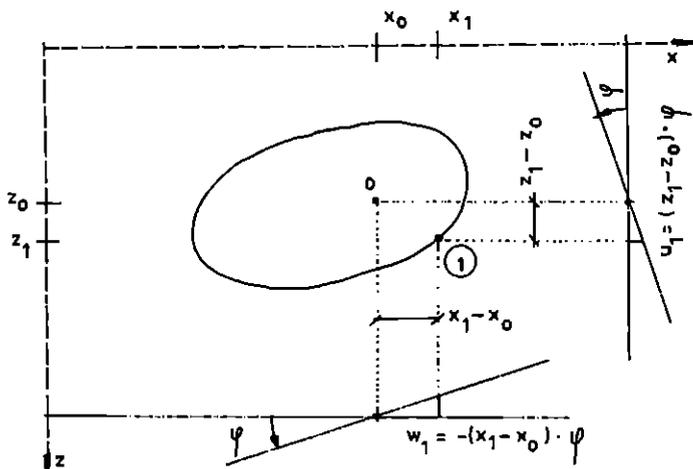
Obr. D.3

Při obecné poloze středu otáčení v bodě O o souřadnicích x_0, z_0 se složky posunu bodu o souřadnicích x, z vypočtou podle vzorců

$$\begin{aligned} u &= (z - z_0) \cdot \varphi, \\ w &= -(x - x_0) \cdot \varphi, \end{aligned} \quad (D.10)$$

které jsou zobecněním vzorců (D.9) (horní index (o) vypouštíme).

Ze vztahů (D.10) je patrné, že pro daný úhel rotace závisí vodorovná složka posunu pouze na souřadnici z zkoumaného bodu, svislá složka zase pouze na souřadnici x . Svislé posuny můžeme proto znázornit v průmětu do vodorovné osy a vodorovné posuny v průmětu do svislé osy (obr.D.4).



Obr. D.4

Využíváme-li principu virtuálních posunutí (viz článek 4.1.), jsme často postaveni před úlohu popsat malé pohyby mechanismu s jedním stupněm volnosti složeného z tuhých desek v rovině. Pohyb takového mechanismu lze charakterizovat jediným parametrem - neoř. úhlem rotace některé z desek nebo posunem některého bodu. Úkolem je pak vyjádřit složky posunu libovolného bodu soustavy v závislosti na zvoleném nezávislém parametru. K tomu je třeba znát pro každou desku $[i]$ její střed otáčení O_i a závislost úhlu její rotace φ_i na nezávislém parametru (pak už lze použít vzorců (D.10), kam se za φ dosazuje φ_i a za x_0, z_0 souřadnice středu otáčení O_i).

Středů otáčení desek ovšem zpravidla nejsou explicitně zadány. Při jejich určování využíváme pojmu relativního středu otáčení O_{ij} dvou desek $[i], [j]$, což je bod, jehož posun je stejný, ať jej považujeme za spojený s jednou nebo druhou deskou. Jsou-li desky spojeny vnitřním kloubem, je jejich relativním středem otáčení právě tento kloub. Relativní střed otáčení lze ovšem stanovit i pro dvě desky, které nejsou přímo spojeny. V takovém případě nemusí relativní střed ležet ani na jedné z obou desek.

Účinným nástrojem pro určování středů otáčení jsou tzv. třípólové věty:

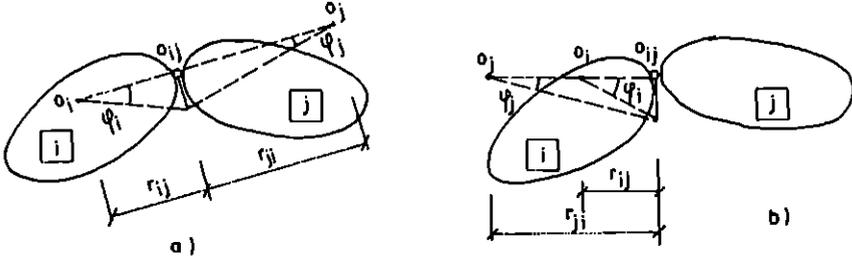
- 1) Pro každé dvě desky $[i], [j]$ leží absolutní středů otáčení O_i, O_j a relativní střed otáčení O_{ij} na jedné přímce.
- 2) Pro každé tři desky $[i], [j], [k]$ leží relativní středů otáčení O_{ij}, O_{ik}, O_{jk} na jedné přímce.

Třípólové věty platí i v případě, že některý střed otáčení leží v nevlastním bodě.

Známe-li polohu absolutních středů otáčení O_1, O_j dvou desek [1], [j] a polohu příslušného relativního středu otáčení O_{1j} , můžeme určit vztah mezi úhly rotace ψ_1, ψ_j . Podle obr.D.5 totiž platí

$$r_{1j} \cdot |\psi_1| = r_{ji} \cdot |\psi_j|, \quad (D.11)$$

kde r_{1j} je vzdálenost mezi O_1 a O_{1j} , r_{ji} vzdálenost mezi O_j a O_{1j} . Vztah mezi znaménky úhlů rotace závisí na vzájemné poloze středů otáčení. Je-li O_{1j} mezi O_1 a O_j (obr.D.5a), mají ψ_1 a ψ_j opačná znaménka, není-li tomu tak (obr.D.5b), jsou znaménka stejná.



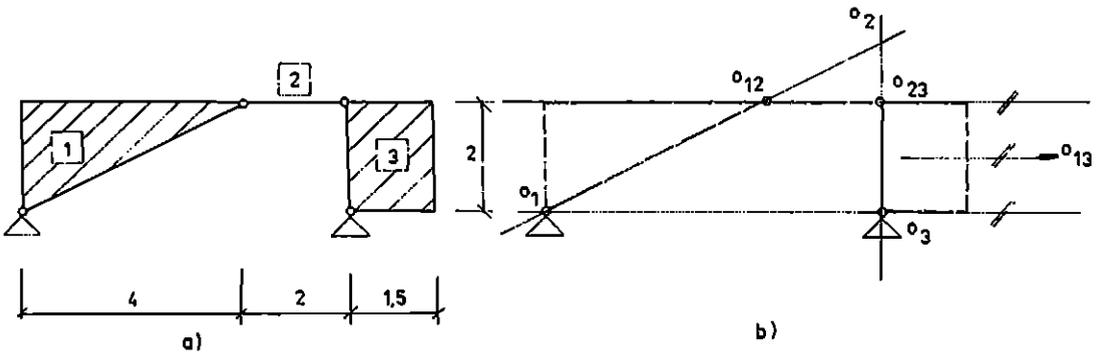
Obr. D.5

Poznamenejme ještě, že je-li relativní střed otáčení O_{1j} v nevlastním bodě, je $\psi_1 = \psi_j$.

Aplikaci uvedených poznatek při řešení konkrétní úlohy předvedeme na jednoduchém příkladu.

Příklad

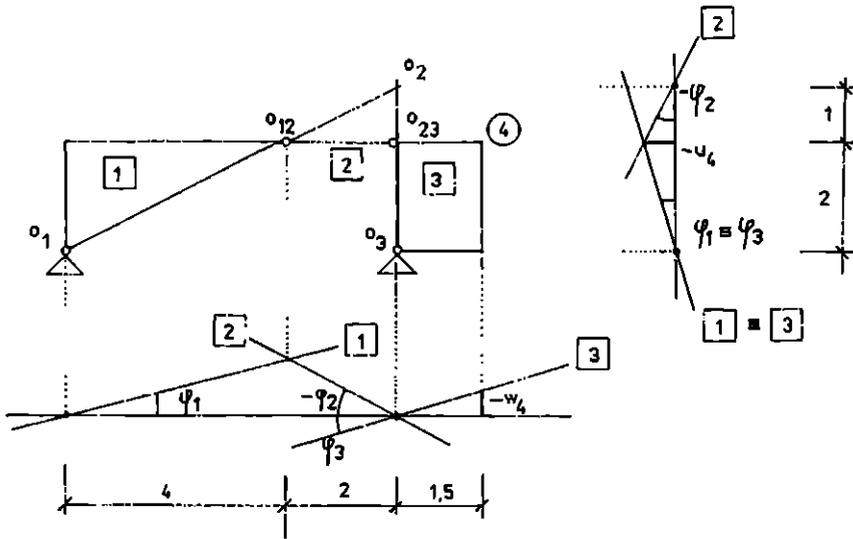
Pro mechanismus na obr.D.6a vyjádřete za předpokladu malých rotací pootočení ψ_2, ψ_3 desek [2], [3] a složky posunu u_4, w_4 bodu (4) v závislosti na úhlu pootočení ψ_1 desky [1].



Obr. D.6

Řešení: Nejprve určíme středy otáčení (obr.D.6b). Absolutní středy O_1, O_3 jsou dány polohou pevných kloubových podpor, relativní středy O_{12}, O_{23} polohou vnitřních kloubů. V průsečíku spojnic O_1O_{12} a O_3O_{23}

nalezneme střed O_2 (dvakrát aplikována 1. třípólová věta). Podobně v průsečíku přímek O_1O_3 a $O_{12}O_{23}$ leží střed O_{13} (aplikována 1. a 2. věta). Protože jsou však uvedené přímky rovnoběžné, je střed O_{13} v nevlastním bodě.



Obr. D.7

Známe-li středy otáčení, můžeme znázornit pohyb mechanismu v průmětu do vodorovné a svislé osy (obr.D.7). Pohyb každé desky je v obou průmětech znázorněn přímkou, která protíná základní čáru v bodě, jenž je průmětem absolutního středu otáčení desky. Dvě přímky znázorňující otáčení dvou desek se protínají v bodě, jenž je průmětem relativního středu otáčení těchto desek. Podle (D.11) snadno určíme vztahy mezi úhly rotace jednotlivých desek:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \varphi_1 &= -2 \cdot \varphi_2, \\ 2 \cdot \varphi_3 &= -1 \cdot \varphi_2. \end{aligned} \quad (D.12)$$

Podle (D.10) pak lze vyjádřit složky posunu bodu ④ :

$$\begin{aligned} u_4 &= -2 \cdot \varphi_3, \\ w_4 &= -1,5 \cdot \varphi_3. \end{aligned} \quad (D.13)$$

Z (D.12) a (D.13) už snadno odvodíme hledané závislosti φ_2 , φ_3 , u_4 a w_4 na zvoleném nezávislém parametru φ_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -2 \cdot \varphi_1, & \varphi_3 &= \varphi_1, \\ u_4 &= -2 \cdot \varphi_1, & w_4 &= -1,5 \cdot \varphi_1. \end{aligned} \quad (D.14)$$

LITERATURA

- [1] Bittner Z. : Metody numerické analýzy konstrukcí (skriptum), ČVUT Praha 1983
- [2] Bittner Z., Řeřicha P. : Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí, SNTL, Praha 1981
- [3] Kufner V., Kuklík P. : Statika stavebních konstrukcí - příklady staticky určitých konstrukcí (skriptum), ČVUT Praha 1989
- [4] Technický průvodce 45 : Zatížení stavebních konstrukcí, SNTL, Praha 1987
- [5] Tichý M. : Základy statistické teorie zatížení (studie ČSAV), Academia, Praha 1977
- [6] Zahradník V. : Numerická analýza a programování II. (skriptum), ČVUT Praha 1988

Ing. Milan Jirásek, PhD., Ing. Petr Konvalinka

STATIKA STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ I
Příklady

Vydalo Vydavatelství ČVUT, Zikova 4, 166 35 Praha 6,
v prosinci 1993 jako svou 7993. publikaci.

Vytisklo Ediční středisko ČVUT, Zikova 4, Praha 6.

187 stran, 155 obrázků.

Vydání dotisk. Náklad 150 výtisků. Rozsah 14,80 AA, 15,25 VA

PLU

Kč 35,70 včetně DPH 5% (Kč 1,70)

38