

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební



Soutěž o Cenu akademika Bažanta

2011/2012

KMITÁNÍ NELINEÁRNÍ SOUSTAVY

Karel Mikeš

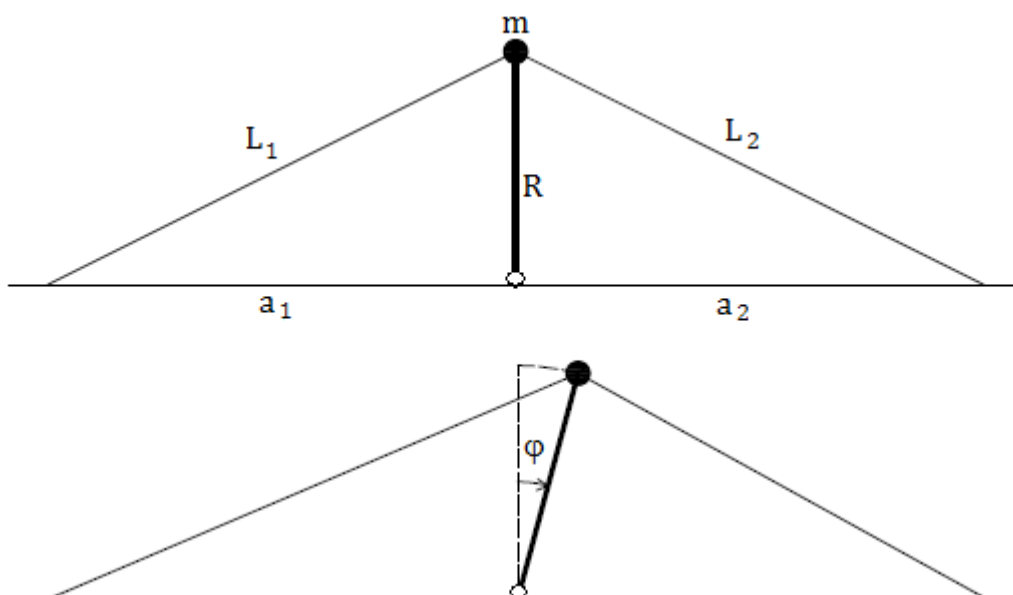
Vedoucí práce: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Obsah

1. Úvod	3
2. Odvození pohybové rovnice	3
2.0 Rovnice pro případ vlastního kmitání	3
2.1 Rovnice pro případ buzeného kmitání	5
2.2 Rovnice pro případ tlumeného kmitání	5
2.3 Počáteční podmínky	5
3 Rozměrová analýza	5
4 Linearizace pohybové rovnice	6
5. Numerické řešení pohybové rovnice	7
5.1 Chyba numerického řešení	8
5.2 Vlastní kmitání	9
6 Buzené kmitání	13
6.1 Metoda dlouhé simulace	14
6.2 Metoda střelby	15
6.3 Výsledky	16
7 Závěr	19

1. Úvod

Cílem práce bylo analyzovat kmitání následující rovinné soustavy s jedním stupněm volnosti. Těleso o hmotnosti m je podepřeno jedním dokonale tuhým prutem délky r , který je kloubově uložen a stabilizováno dvěma předepnutými lany s délkou L_1 a normálovou tuhostí EA_1 resp. L_2 , EA_2 . Předepnutí lan N_{01} resp. N_{02} předpokládáme dostatečně velké na to, aby lana byla vždy namáhána pouze tahovou silou. Stav soustavy je určen úhlem pootočení $\varphi = \varphi(t)$ a rychlostí pohybu hmoty $v = v(t) = r \frac{d\varphi}{dt}$ zavedeme tedy polohový vektor $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$



2. Odvození pohybové rovnice

2.0 Rovnice pro případ vlastního kmitání

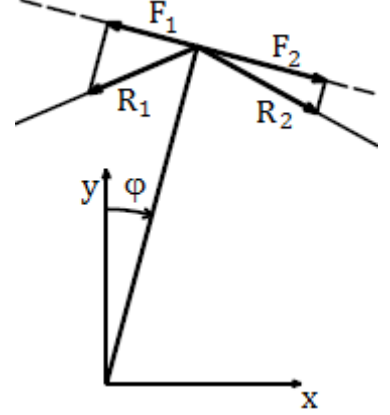
Veškeré síly působící na těleso lze rozložit do dvou vzájemně kolmých směrů, a to do směru osy prutu a do směru pohybu tělesa. Síly působící ve směru osy prutu budou ovlivňovat velikost normálové síly, ale díky nekonečné tuhosti se v pohybové rovnici nijak neprojeví, proto je nebudeme uvažovat.

K sestavení pohybové rovnice využijeme D'Alembertův princip. Rovnice bude mít tvar $mr \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma F$, kde výslednice sil působících ve směru pohybu ΣF , je rovna výslednici průmětů reakcí od předepnutých lan R_1 a R_2 .

Velikost reakcí je obecně dána vztahem: $R = N_0 + EA\varepsilon = N_0 + EA \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right)$

Pro jednotlivá lana dostaneme: $R_1 = N_{01} + EA_1 \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_1^2 + r^2}} - 1 \right)$
 $R_2 = N_{02} + EA_2 \left(\frac{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_2^2 + r^2}} - 1 \right)$

Pro určení průmětů zavedeme souřadnicový systém (x, y) podle obrázku. Těžiště tělesa má v takto zvoleném systému souřadnice T: $[r \sin \varphi, r \cos \varphi]$. Poté můžeme vyjádřit vektor \mathbf{o} jdoucí z bodu T do počátku a vektory $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ jdoucí z bodu T ve směrech jednotlivých sil R_1, R_2, F_1, F_2 .



$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= (-r \sin \varphi, -r \cos \varphi) \\ \mathbf{r}_1 &= (-a_1 - r \sin \varphi, -r \cos \varphi) \\ \mathbf{r}_2 &= (a_2 - r \sin \varphi, -r \cos \varphi) \\ \mathbf{f}_1 &= (-r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ \mathbf{f}_2 &= (r \cos \varphi, -r \sin \varphi) \end{aligned}$$

Pokud označíme θ_1 resp. θ_2 úhel, který svírají vektory $\mathbf{r}_1, \mathbf{f}_1$ resp. $\mathbf{r}_2, \mathbf{f}_2$, můžeme zapsat síly $F_1 = R_1 \cos \theta_1$ a $F_2 = R_2 \cos \theta_2$. Cosiny lze vyjádřit pomocí skalárních součinů příslušných vektorů, dostáváme

$$F_1 = R_1 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{f}_1}{\|\mathbf{r}_1\| \cdot \|\mathbf{f}_1\|} = R_1 \frac{a_1 \cos \varphi}{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}}, \quad F_2 = R_2 \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{f}_2}{\|\mathbf{r}_2\| \cdot \|\mathbf{f}_2\|} = R_2 \frac{a_2 \cos \varphi}{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}}$$

Dosadíme do pohybové rovnice $m r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum F = -F_1 + F_2$ dostaneme

$$m r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -R_1 \frac{a_1 \cos \varphi}{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}} + R_2 \frac{a_2 \cos \varphi}{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}} \quad \text{po dosazení reakcí}$$

dostaneme výslednou pohybovou rovnici, kterou budeme řešit

$$\begin{aligned} m r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= - \left(N_{01} + EA_1 \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_1^2 + r^2}} - 1 \right) \right) \frac{a_1 \cos \varphi}{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}} + \\ &+ \left(N_{02} + EA_2 \left(\frac{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_2^2 + r^2}} - 1 \right) \right) \frac{a_2 \cos \varphi}{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}} \end{aligned} \quad (2.0)$$

Pokud bude soustava symetrická, budou členy s dolními index 1 a 2 stejné, indexy lze tedy vypustit, poté je možno rovnici upravit do tvaru:

$$m r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = a \cos \varphi \left(\frac{-N_0 - EA \left(\frac{\sqrt{a^2 + 2ar \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a^2 + r^2}} - 1 \right)}{\sqrt{a^2 + 2ar \sin \varphi + r^2}} + \frac{N_0 + EA \left(\frac{\sqrt{a^2 - 2ar \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a^2 + r^2}} - 1 \right)}{\sqrt{a^2 - 2ar \sin \varphi + r^2}} \right) \quad (2.1)$$

2.1 Rovnice pro případ buzeného kmitání

Předpokládejme, že na hmotu na konci prutu působí ve vodorovném směru v čase proměnlivá síla $F(t) = F_A \sin(\omega t)$. Taková síla může být vyvolána například vodorovným chvěním podloží při zemětřesení. Tato síla přibude v pohybové rovnici na pravě straně, je ji však nutno promítnout do směru pohybu. Výsledná pohybová rovnice pro případ buzeného kmitání:

$$\begin{aligned} mr \frac{d^2\varphi}{dt^2} = & - \left(N_{01} + EA_1 \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_1^2 + r^2}} - 1 \right) \right) \frac{a_1 \cos \varphi}{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}} + \\ & + \left(N_{02} + EA_2 \left(\frac{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_2^2 + r^2}} - 1 \right) \right) \frac{a_2 \cos \varphi}{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}} \\ & + F_A \sin(\omega t) \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2 Rovnice pro případ tlumeného kmitání

Pokud bude soustava navíc i tlumena, přibude v pohybové rovnici tlumící člen $Cr \frac{d\varphi}{dt} = Cv$, kde C je součinitel tlumení. Výsledná pohybová rovnice pro případ buzeného kmitání s útlumem:

$$\begin{aligned} mr \frac{d^2\varphi}{dt^2} = & - \left(N_{01} + EA_1 \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_1^2 + r^2}} - 1 \right) \right) \frac{a_1 \cos \varphi}{\sqrt{a_1^2 + 2a_1 r \sin \varphi + r^2}} + \\ & + \left(N_{02} + EA_2 \left(\frac{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}}{\sqrt{a_2^2 + r^2}} - 1 \right) \right) \frac{a_2 \cos \varphi}{\sqrt{a_2^2 - 2a_2 r \sin \varphi + r^2}} \\ & + F_A \sin(\omega t) \cdot \cos \varphi - Cr \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.3 Počáteční podmínky

Dostáváme nelineární diferenciální rovnici druhého řádu, počáteční podmínky jsou: $\varphi(0) = \varphi_0$, $r \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{(0)} = v(0) = v_0$. Zavedeme vektor počátečních podmínek $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

3. Rozměrová analýza

Pro lepší přehlednost a obecnost výsledků a grafů je dobré provést rozměrovou analýzu. Ta umožní výstupy interpretovat pomocí bezrozměrných normovaných veličin. V našem případě jsou v rovnicích tyto vstupní veličiny: $r, m, EA, a, N_0, F_A, \omega, C, \varphi_0, v_0$ a tyto výstupní: φ, v . Tyto veličiny obsahují tři základní jednotky: kilogram, metr a sekundu. Exponenty jednotlivých veličin jsou vidět v následující tabulce.

	r	m	EA	a	N_0	F_A	ω	C	φ_0	v_0	φ	v
m	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
kg	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
s	0	0	-2	0	-2	-2	-1	-1	0	-1	0	-1

S využitím Buckinghamova teorému je možné těchto 12 proměnných o 3 nezávislých jednotkách vyjádřit pomocí 12–3 bezrozměrných π -funkcí. V našem případě jsou voleny první tři rozměrové veličiny: r, m, EA a zbylé veličiny jsou pomocí nich normovány. Postup je podrobně popsán v [2], jeho provedením dostaneme následujících 9 bezrozměrných veličin.

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{a}{r} = \alpha & \pi_4 &= \sqrt{\frac{mr}{EA}} \omega & \pi_7 &= \sqrt{\frac{m}{rEA}} v_0 \\ \pi_2 &= \frac{N_0}{EA} = \beta & \pi_5 &= \sqrt{\frac{r}{mEA}} C & \pi_8 &= \varphi \\ \pi_3 &= \frac{F_A}{EA} = \gamma & \pi_6 &= \varphi_0 & \pi_9 &= \sqrt{\frac{m}{rEA}} v \end{aligned}$$

Pro symetrickou soustavu s buzením a útlumem dostaneme tuto normovanou rovnici

$$\begin{aligned} mr \frac{d^2\varphi}{dt^2} = & \alpha \cos \varphi \left(\frac{-\beta - \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \sin \varphi + 1^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1^2}} - 1 \right)}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \sin \varphi + 1^2}} + \frac{\beta + \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha \sin \varphi + 1^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1^2}} - 1 \right)}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha \sin \varphi + 1^2}} \right) \\ & + \pi_3 \sin(\pi_4 t) \cdot \cos \varphi - \pi_5 r \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (3.0)$$

Otázkou zůstává jak zajistit úvodní předpoklad, že lana jsou dostatečně předeprnutá, aby byla namáhána pouze tahem. K maximálnímu zkrácení lan $\varepsilon_{min} < 0$ dojde pro vychýlení $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Chceme, aby byla i v tomto stavu byla splněna podmínka zaručující tah v lanech $N_0 + EA\varepsilon_{min} \geq 0$ vyčíslením pomocí bezrozměrných parametrů dostaneme podmínku pro předpínací parametr $\beta \geq 1 - \frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ pro $\alpha \geq 1$ nebo $\beta \geq 1 - \frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ pro $\alpha \in (0, 1)$.

4. Linearizace pohybové rovnice

Pokud předpokládáme pouze malé hodnoty úhlu φ , lze zanedbat změnu geometrie soustavy a zrychlení bude přímo úměrné úhlu φ . Takový případ lze popsat linearizovanou formou pohybové rovnice ve tvaru $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_L \varphi = 0$. Konstanta $k_L = \sqrt{\omega_{0L}}$, kde ω_{0L} je vlastní frekvence linearizované soustavy. Konstantu k_L zjistíme tak, že pravou stranu rovnice pro symetrickou soustavu (3.0) derivujeme a derivaci vyčíslíme v bodě $\varphi = 0$. Dostaneme

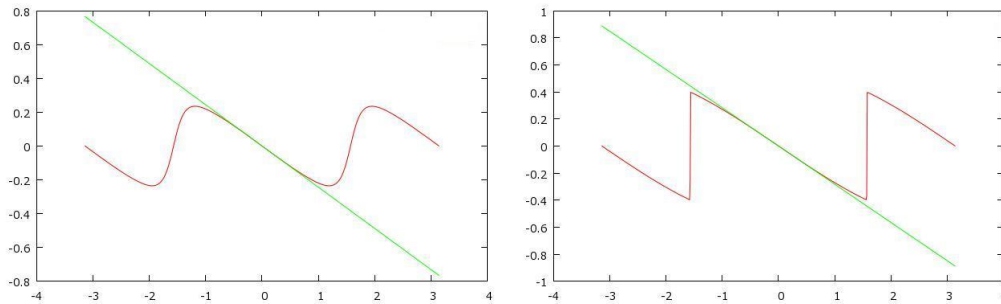
rovnici: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{EA}{mr} \frac{2\alpha^2(1-\beta)}{(\alpha^2+1)^{3/2}} = 0$ a spolu s počáteční podmínkou $\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$
analytické řešení $\varphi(t) = \frac{v_0}{\omega_{0L}} \sin(\omega_{0L}t)$; $v(t) = v_0 \cos(\omega_{0L}t)$

kde $\omega_{0L} = \sqrt{\frac{EA}{mr} \frac{2\alpha^2(1-\beta)}{(\alpha^2+1)^{3/2}}}$ je vlastní frekvence linearizované soustavy.

Můžeme také vyjádřit periodu vlastního kmitání linearizované soustavy

$$T_{0L} = \frac{2\pi}{\omega_{0L}} = 2\pi \sqrt{\frac{mr}{EA} \frac{(\alpha^2+1)^{3/2}}{2\alpha^2(1-\beta)}}$$

V následujících obrázcích je vždy porovnán pracovní diagram linearizované soustavy (zeleně) a nelinearizované soustavy (červeně), nejprve pro hodnoty $\alpha = 0,8$; $\beta = 0,6$, poté $\alpha = 0,999$; $\beta = 0,6$. Na vodorovné ose je úhel o $\varphi \in (-\pi, \pi)$ který je soustava vychýlena, na svislé ose pak normovaná síla.



5. Numerické řešení pohybové rovnice

Naším cílem bude vytvořit program, který po zadání vstupních parametrů vyčíslí průběh polohového vektoru $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ v čase. K řešení použijeme metodu přímé integrace pro řešení diferenciálních rovnic 2. řádu s počáteční podmínkou.

Označme n počet kroků na časovou jednu jednotku. Budeme postupovat po časových krocích velikosti $\Delta = \frac{1}{n}$, na kterých funkci φ po částech nahradíme kvadratickou funkcí pomocí Taylorova rozvoje 2. řádu. Funkční hodnotu funkce $\varphi(t)$ a hodnotu její derivace na počátku známe, hodnotu druhé derivace určíme z pohybové rovnice.

Hodnoty pro další interval určíme ze vztahů:

$$\varphi(t + \Delta) = \varphi(t) + \dot{\varphi}(t) \cdot \Delta + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}(t) \cdot \Delta^2$$

$$\dot{\varphi}(t + \Delta) = \dot{\varphi}(t) + \ddot{\varphi}(t) \cdot \Delta$$

$$\ddot{\varphi}(t + \Delta) = -\frac{EA_1}{mr} \left(\beta_1 + \left(\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \sin \varphi(t+\Delta) + 1}}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} - 1 \right) \right) \frac{\alpha_1 \cos \varphi(t+\Delta)}{\sqrt{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \sin \varphi(t+\Delta) + 1}} +$$

$$+ \frac{EA_2}{mr} \left(\beta_2 + \left(\frac{\sqrt{\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \sin \varphi(t+\Delta) + 1}}{\sqrt{\alpha_2^2 + 1}} - 1 \right) \right) \frac{\alpha_2 \cos \varphi(t+\Delta)}{\sqrt{\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \sin \varphi(t+\Delta) + 1}}$$

Časová souřadnice $t_n = t_{n-1} + \Delta$

Kinetická energie $E_k = \frac{1}{2} m (r\dot{\varphi}(t))^2$

Potenciální energie obecně $E_p = \frac{1}{2} EAL(\varepsilon + \varepsilon_0)^2$

Po vyjádření pomocí vstupních parametrů

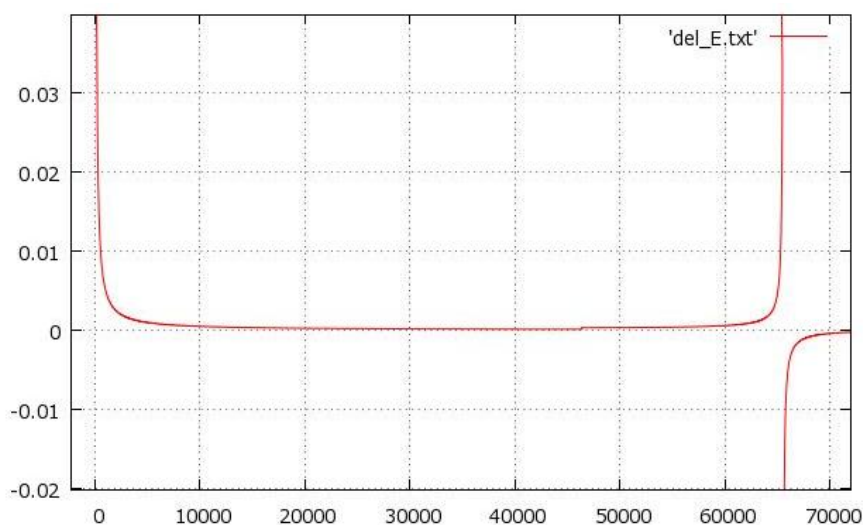
$$E_p = \frac{1}{2} EA_1 r \sqrt{\alpha_1^2 + 1} \left(\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \sin \varphi(t+\Delta) + 1}}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} - 1 + \beta_1 \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} EA_2 r \sqrt{\alpha_2^2 + 1} \left(\frac{\sqrt{\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \sin \varphi(t+\Delta) + 1}}{\sqrt{\alpha_2^2 + 1}} - 1 + \beta_2 \right)^2$$

5.1 Chyba numerického řešení

Chyba, které se dopustíme v jednom kroku je daná chybou Taylorova rozvoje, a to $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Než algoritmus projde zkoumaný časový interval, vyskytne se chyba řádově n -krát. Celková chyba je tedy $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ a pro rostoucí n řešení rychle konverguje.

Jako indikátor chyby využijeme celkové energie $E = E_k + E_p$. Soustava, jak jsme ji definovali, by měla celkovou energii zachovávat. Tedy rozdíl energie po jedné periodě $\Delta_E = E(T) - E(0)$ by měl být roven nule. Pro zjištění do jaké míry se energie zachovává, vykreslíme do grafu Δ_E v závislosti na n .



Zjišťujeme, že Δ_E nejprve s rostoucím n rychle klesá podle očekávání, ale při překročení hodnoty $n \cong 4.5e4$ se Δ_E přestává chovat podle očekávání a řešení

je numericky nestabilní. Tento fakt lze přičítat vlastnostem programovacího jazyka a překladače, kdy od určité minimální velikosti kroku převládne vliv velikosti zaokrouhlovacích chyb nad zpřesněním získaným zmenšováním kroku.

Dosažením různých hodnot vstupních parametrů, zjišťujeme, že toto chování na nich není nijak závislé. Počet kroků na časovou jednotku tedy zvolíme $n = 1e4$, čímž jsme bezpečně v oblasti bez numerických nestabilit a dostáváme přijatelné chyby.

5.2 Vlastní kmitání

Nyní budeme předpokládat symetrickou soustavu bez budící síly a bez útlumu, popsanou rovnicí (2.1). Taková soustava je popsána parametry r, m, EA, α, β a počátečními podmínkami φ_0, v_0 . Spočítáme, jaká řešení dostaneme, pro různé hodnoty počáteční rychlosti v_0 udělené soustavě v počáteční poloze $\varphi_0 = 0$. Označme v_{0k} počáteční rychlost, která je přesně potřebná pro dosažení polohy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tedy polohy s nestabilní rovnováhou. Při počátečních rychlostech $v_0 < v_{0k}$ bude soustava kmitat kolem počáteční stabilní polohy $\varphi = 0$. Při počátečních rychlostech $v_0 > v_{0k}$ se prut otočí o 2π a dostane se znovu do počáteční polohy se stejnou počáteční rychlostí. Při počáteční rychlosti $v_0 = v_{0k}$ bude těleso směřovat do polohy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ale současně bude ztrácet rychlost a to tak, že do rovnovážné polohy by dorazilo v nekonečném čase.

Velikost kritické počáteční rychlosti v_{0k} určíme z rovnosti energií v polohách $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dostáváme $\frac{1}{2}mv_{0k}^2 + \frac{1}{2}EA_1r\sqrt{\alpha_1^2 + 1}(\beta_1)^2 + \frac{1}{2}EA_2r\sqrt{\alpha_2^2 + 1}(\beta_2)^2 =$

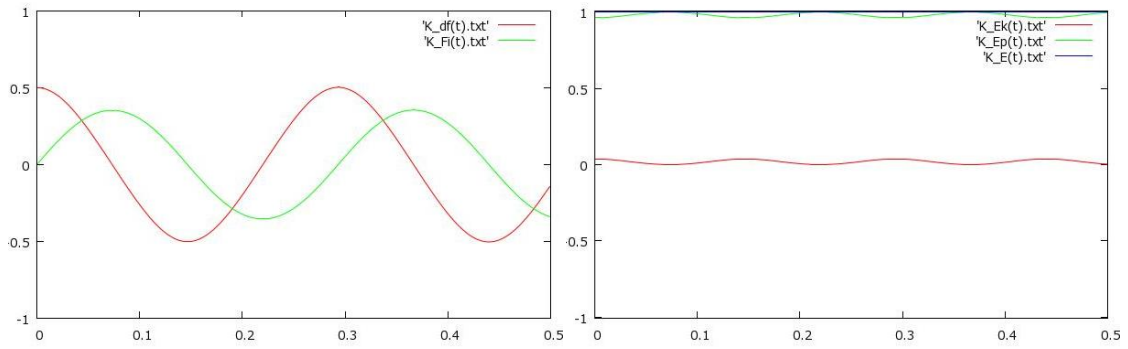
$$= \frac{1}{2}EA_1r\sqrt{\alpha_1^2 + 1} \left(\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1}}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} - 1 + \beta_1 \right)^2 + \frac{1}{2}EA_2r\sqrt{\alpha_2^2 + 1} \left(\frac{\sqrt{\alpha_2^2 - 2\alpha_2 + 1}}{\sqrt{\alpha_2^2 + 1}} - 1 + \beta_2 \right)^2$$

$$\text{Odtud } v_{0k}^2 = \frac{EA_1r}{m} \sqrt{\alpha_1^2 + 1} \left(\left(\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1}}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} - 1 + \beta_1 \right)^2 - \beta_1^2 \right) +$$

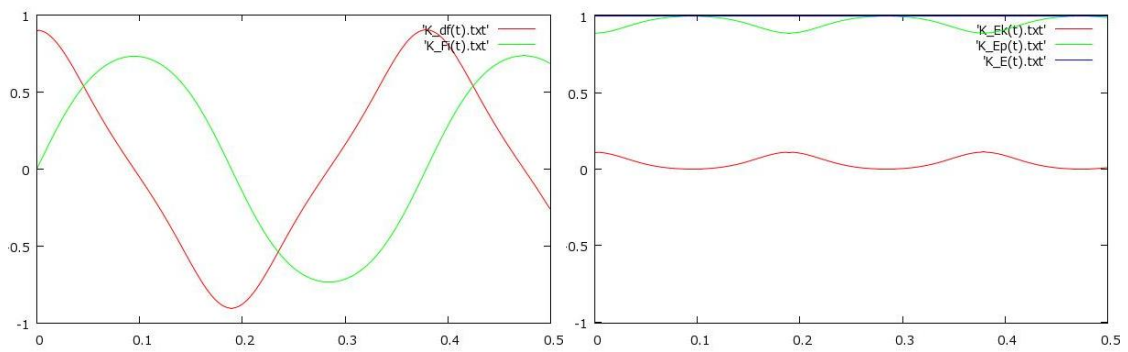
$$+ \frac{EA_2r}{m} \sqrt{\alpha_2^2 + 1} \left(\left(\frac{\sqrt{\alpha_2^2 - 2\alpha_2 + 1}}{\sqrt{\alpha_2^2 + 1}} - 1 + \beta_2 \right)^2 - \beta_2^2 \right)$$

Následující dvojice obrázků ukazují vývoj okamžité výchylky a rychlosti resp. potenciální a kinetické energie v čase, pro různé velikosti počáteční rychlosti v_0 . Zeleně je znázorněna okamžitá poměrná výchylka $\frac{\varphi(t)}{\pi/2}$ resp. poměrná potenciální energie $\frac{E_p}{E(0)}$. Červeně je znázorněna okamžitá poměrná rychlost $\frac{v(t)}{v_{0k}}$ resp. poměrná kinetická energie $\frac{E_k}{E(0)}$. Modře je znázorněna celková energie. Vodorovná osa představuje čas.

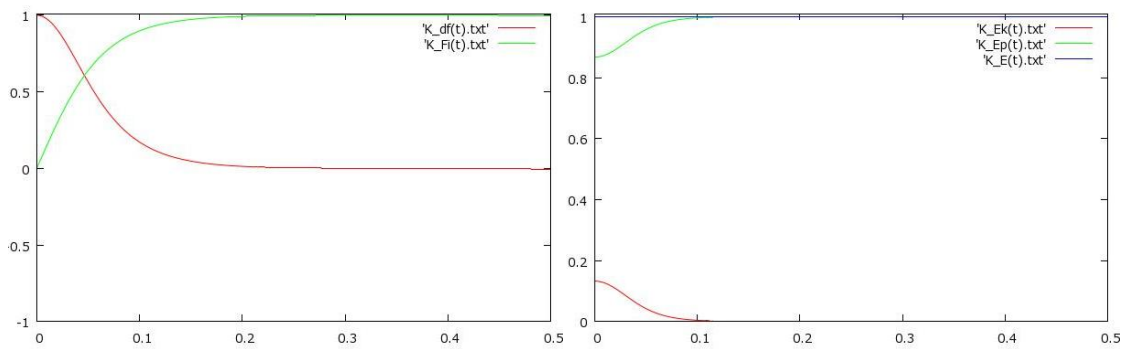
$$v_0 = 0.5 v_{0k}$$



$$v_0 = 0.9 v_{0k}$$



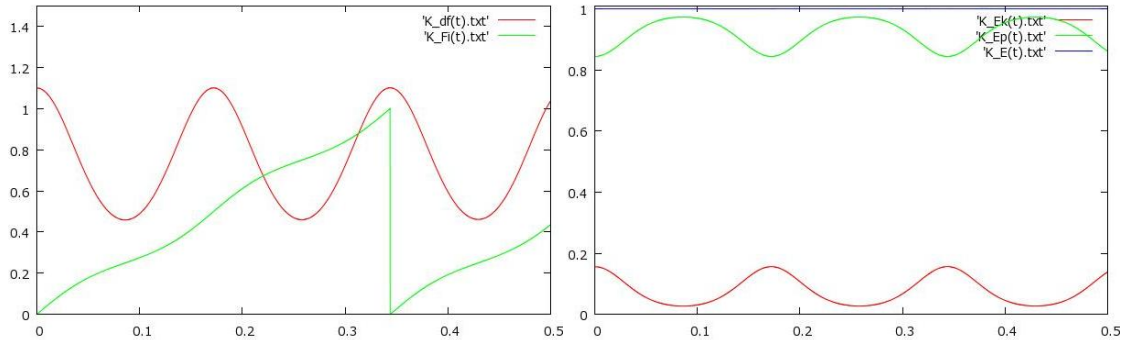
$$v_0 = 0.999 v_{0k}$$



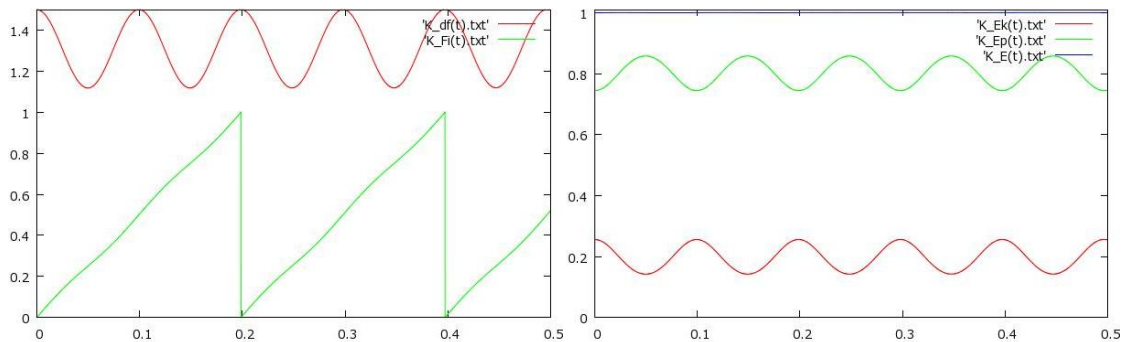
Je vidět, že s rostoucí počáteční rychlostí se prodlužuje perioda kmitání až do kritické počáteční rychlosti, kdy by byla perioda nekonečná.

Pro nadkritické rychlosti si ukážeme stejné znázornění, jediným rozdílem bude to, že okamžitá poměrná výchylka je $\frac{\varphi(t)}{2\pi}$

$$v_0 = 1.1 v_{0k}$$



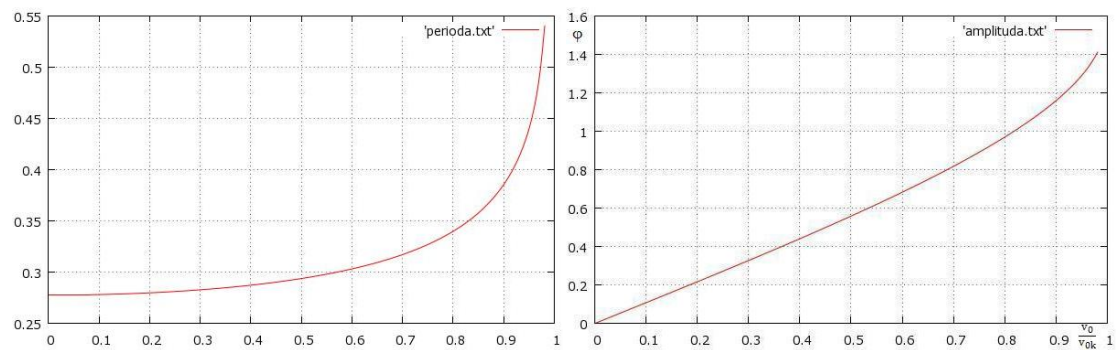
$$v_0 = 1.5 v_{0k}$$



Zde naopak vidíme, že s rostoucí počáteční rychlosti se perioda celého oběhu zkracuje.

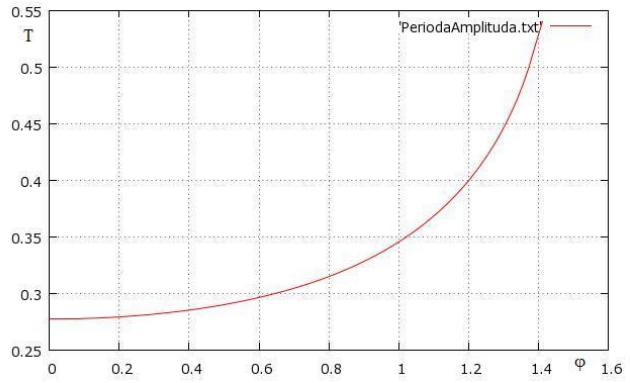
Nyní budeme zkoumat periodu kmitání pro počáteční rychlosti $v_0 < v_{0k}$.

Následující grafy ukazují závislost periody a amplitudy (maximální výchylky) na poměrné počáteční rychlosti $\frac{v_0}{v_{0k}}$.



Pro $v_0 = v_{0k}$ jde perioda do nekonečna a amplituda bude $\frac{\pi}{2}$.

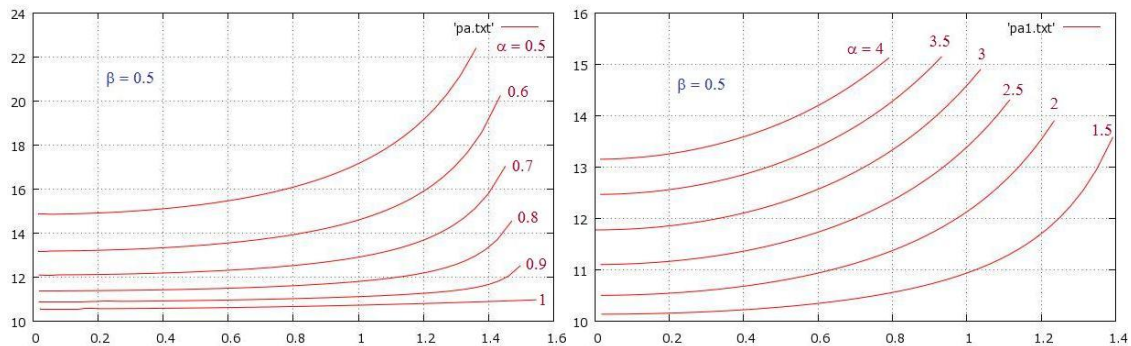
Tento graf ukazuje vztah mezi periodou a amplitudou, který lze interpretovat i tak s jakou periodou by soustava kmitala, pokud by místo počáteční rychlosti byla nastavena počáteční výchylka.



Pro amplitudu $\frac{\pi}{2}$ roste opět perioda do nekonečna.

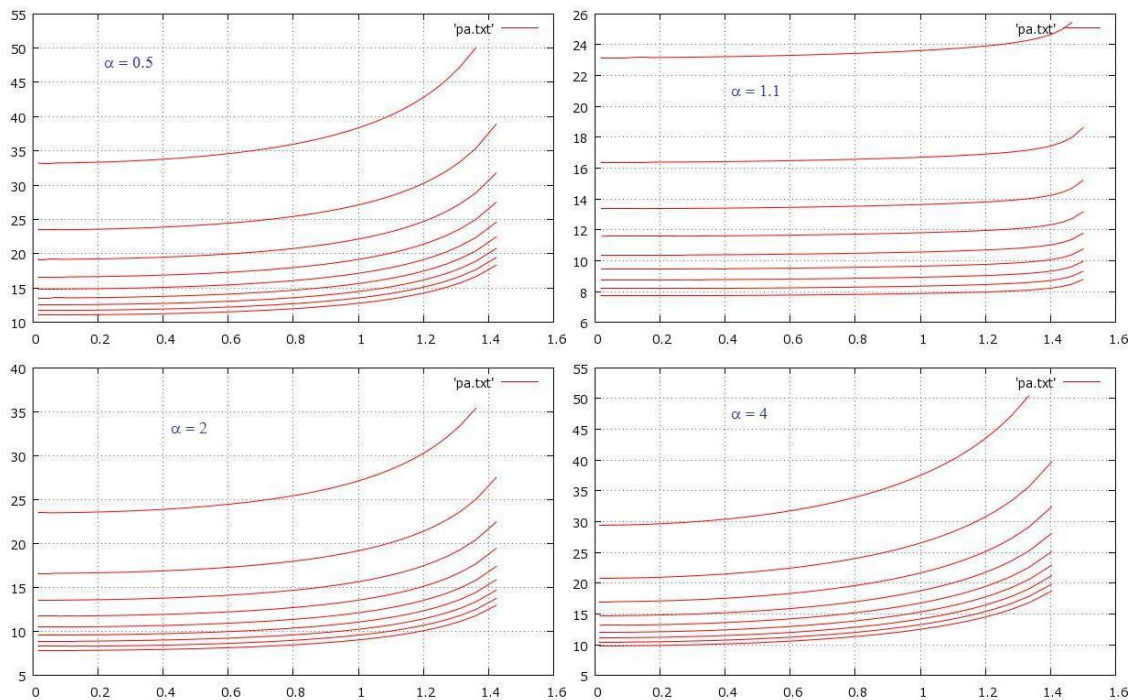
Následující grafy ukazují, jak se mění vztah mezi periodou a amplitudou v závislosti na parametrech α, β .

Nejprve necháme pevný parametr β a budeme měnit parametr α



Teď pro pevné parametry α budeme měnit parametr β .

Na grafech jednotlivé křivky odpovídají vzestupně hodnotám β 0.1, 0.2, ..., 0.9



6 Buzené kmitání

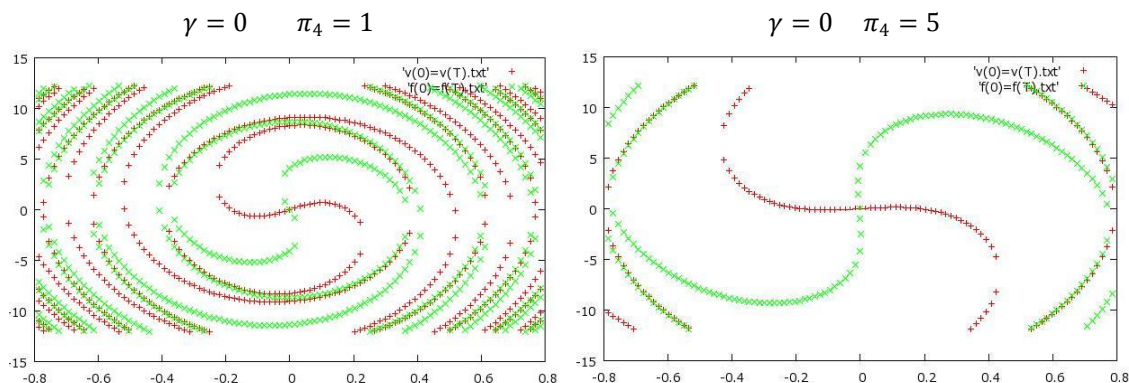
V této části budeme zkoumat buzené kmitání popsané rovnicí (2.2). K popisu takovéto soustavy jsou potřeba další dva parametry γ, π_4 popisující budící sílu. Cílem je najít periodická řešení, tedy řešení splňující podmínku periodicity: $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(nT)$ kde n je libovolné přirozené číslo a $T = \frac{2\pi}{\pi_4}$ je perioda budící síly. V našem případě se zaměříme na případy kdy $n = 1$ případně $n = 2$ a hledáme vektor počátečních podmínek $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, pro který je splněna podmínka periodicity. Zavedeme vektorovou funkci $\Delta(\mathbf{u}_0, T) = \begin{pmatrix} \Delta_\varphi \\ \Delta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{u}_0, T) - \varphi_0 \\ v(\mathbf{u}_0, T) - v_0 \end{pmatrix}$, která vyjadřuje, o kolik se změní řešení v čase jedné periody. Tato změna je nulová právě pro takové vektory počátečních podmínek, pro které je splněna podmínka periodicity.

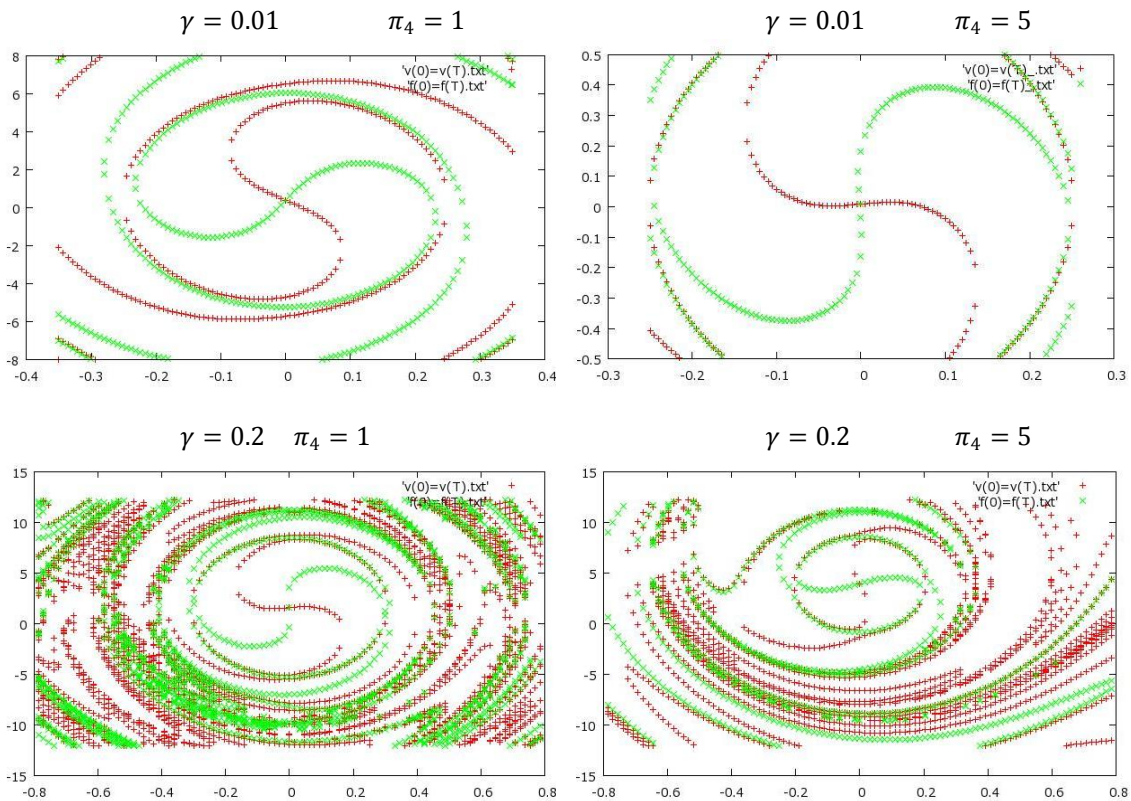
V numerických výpočtech nahradíme podmínku $\begin{pmatrix} \Delta_\varphi \\ \Delta_v \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, splněním buďto absolutního konvergenčního kritéria $|\Delta_\varphi| \leq \varepsilon_{\varphi,abs}$ a $|\Delta_v| \leq \varepsilon_{v,abs}$ nebo relativního konvergenčního kritéria $\left| \frac{\Delta_\varphi}{\varphi_0} \right| \leq \varepsilon_{\varphi,rel}$ a $\left| \frac{\Delta_v}{v_0} \right| \leq \varepsilon_{v,rel}$.

Pro úvodní představu o tom kolik takových periodických řešení pro daný stav nastane, vykreslíme pro několik vybraných stavů následující obrázky. V rovině počátečních podmínek s vodorovnou osou φ_0 a svislou v_0 jsou zeleně resp. červeně vyznačeny body, pro které platí $\Delta_\varphi = 0$ resp. $\Delta_v = 0$. Místa, kde se tyto křivky protínají, představují počáteční podmínky pro hledané periodické řešení.

Následující obrázky ukazují tyto křivky pro soustavu popsanou parametry $\alpha = 3$; $\beta = 0.55$ s různými parametry buzení.

S rostoucí poměrnou amplitudou budící síly γ je pro vyšší poměrné budící frekvence π_4 začíná být patrný vliv buzení a objevují se další řešení.





Obrázky byly vykresleny tak, že byl zafixován bod na ose φ_0 a osa Δ_v byla rozdělena na několik intervalů a v každém z nich probíhala zvlášť konvergence k hodnotě $\Delta_\varphi = 0$ a $\Delta_v = 0$. Když jsou projety všechny intervaly, posune se hodnota φ_0 . Tento postup nám dává dobrou představu o tom co se děje v daném stavu, ale není vhodný pro zjišťování počátečních podmínek periodického kmitání, pokud měníme parametry budící síly γ, π_4 . Pro tyto případy je nutné volit jiné metody.

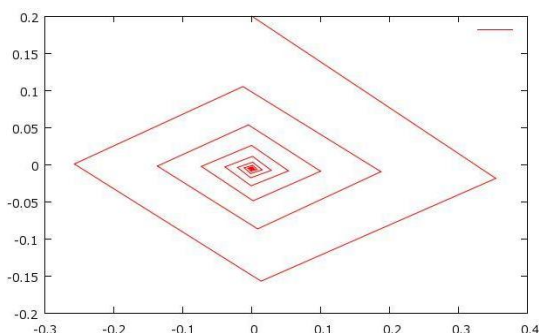
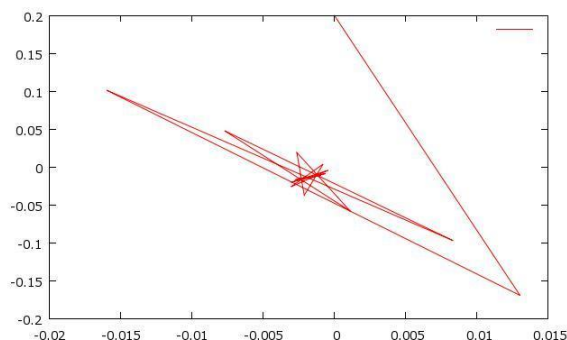
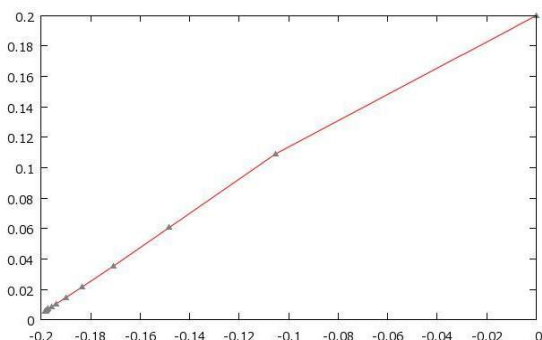
6.1 Metoda dlouhé simulace

Řešení rovnice (2.3) popisující buzené a tlumené kmitání se skládá jak z ustáleného tak z přechodového kmitání. Tato metoda využívá toho, že pokud budeme sledovat kmitání dostatečně dlouho, přechodová část vymizí a zůstane jen ustálené kmitání. Metoda funguje následovně:

- Je zvolen startovací vektor představující počáteční podmínky
- Pro něj se vyčíslí hodnota polohového vektoru v čase jedné periody
- Pokud vypočtený polohový vektor splňuje konvergenční kritéria, je to hledaný vektor počátečních podmínek periodického kmitání, pokud vektor kritéria nespĺňuje, použijeme ho jako nový vektor počátečních podmínek a celý proces opakujeme, dokud nejsou konvergenční kritéria splněna.

Tuto metodu můžeme použít pro rovnici (2.3), tu získáme tak, že do rovnice (2.2) přidáme útlum. Konstantu útlumu budeme volit dostatečně malou, aby příliš neovlivnila ustálené kmitání.

Následující obrázky ukazují, jak se v rovině počátečních podmínek posunuje vyčíslovaný polohový vektor, dokud nejsou splněna konvergenční kritéria.



Startovací vektor je vždy volen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.
 Poměrná amplituda budící síly je vždy $\gamma = 0.01$ Poměrné budící frekvence π_4 jsou postupně 0.5; 1.0; 2.0

Výhodou metody dlouhé simulace je její jednoduchost, metoda vždy přinese nějaký výsledek. Nevýhodou je, že nám metoda nedává jistotu, zda nalezené řešení je skutečně ustálené kmitání, nemáme taky žádnou informaci o jeho stabilitě. Výpočet je také delší, než u další metody.

6.2 Metoda střelby

Pro potřeby metody střelby zavedeme vektorovou funkci $g(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{u}_0, T) \\ v(\mathbf{u}_0, T) \end{pmatrix}$, která vektoru počátečních podmínek přiřadí polohový vektor v čase jedné periody. Protože tuto funkci $g(\mathbf{u}_0)$ lze vyčíslit pouze numericky, bude pro hledání periodických řešení vhodné použít Newton-Raphsonovu metodu tečen:

- Zvolíme vhodný startovací vektor $\mathbf{u}_{k=0}$
- Pro něj se vypočte funkce $g(\mathbf{u}_k) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{u}_k, T) \\ v(\mathbf{u}_k, T) \end{pmatrix}$ a její rozdíl v čase jedné periody $\Delta(\mathbf{u}_k) = \begin{pmatrix} \Delta_\varphi \\ \Delta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{u}_k, T) - \varphi_k \\ v(\mathbf{u}_k, T) - v_k \end{pmatrix}$
- Ověří se konvergenční kritéria, pokud jsou splněna, je vektor \mathbf{u}_0 hledaným vektorem počátečních podmínek periodického řešení a výpočet zde končí. Pokud konvergenční kritéria splněna nejsou, sestaví se Jacobiho matice $\underline{J}_\Delta(\mathbf{u}_k)$ a podle vzorce $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \underline{J}_\Delta(\mathbf{u}_k)^{-1} \Delta(\mathbf{u}_k)$ se vypočte další iterace.

- Tento postup se opakuje, dokud nejsou splněna konvergenční kritéria nebo dokud neproběhne určitý počet kroků, v takovém případě je lepší změnit startovací vektor $\mathbf{u}_{k=0}$.

Jacobiho matice $\underline{\mathbf{J}}_{\Delta}(\mathbf{u}_k)$, potřebná pro výpočet další iterace, se skládá z parciálních derivací složek funkce $\Delta(\mathbf{u}_k)$. Pomocí vztahu pro funkci g ji lze vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{J}}_{\Delta}(\mathbf{u}_k) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_1(\mathbf{u}_k)}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \Delta_1(\mathbf{u}_k)}{\partial v_0} \\ \frac{\partial \Delta_2(\mathbf{u}_k)}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \Delta_2(\mathbf{u}_k)}{\partial v_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{u}_k) - \varphi_0}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial g_1(\mathbf{u}_k) - \varphi_0}{\partial v_0} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{u}_k) - v_0}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial g_2(\mathbf{u}_k) - v_0}{\partial v_0} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{u}_k)}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial g_1(\mathbf{u}_k)}{\partial v_0} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{u}_k)}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial g_2(\mathbf{u}_k)}{\partial v_0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{J}}_g(\mathbf{u}_k) - \underline{\mathbf{1}}\end{aligned}$$

Jacobiho matici funkce g lze vypočítat následovně:

$$\underline{\mathbf{J}}_g(\mathbf{u}_k) = \begin{pmatrix} \frac{g_1(\mathbf{u}_k + \partial \varphi_0) - g_1(\mathbf{u}_k)}{\partial \varphi_0} & \frac{g_1(\mathbf{u}_k + \partial v_0) - g_1(\mathbf{u}_k)}{\partial v_0} \\ \frac{g_2(\mathbf{u}_k + \partial \varphi_0) - g_2(\mathbf{u}_k)}{\partial \varphi_0} & \frac{g_2(\mathbf{u}_k + \partial v_0) - g_2(\mathbf{u}_k)}{\partial v_0} \end{pmatrix}$$

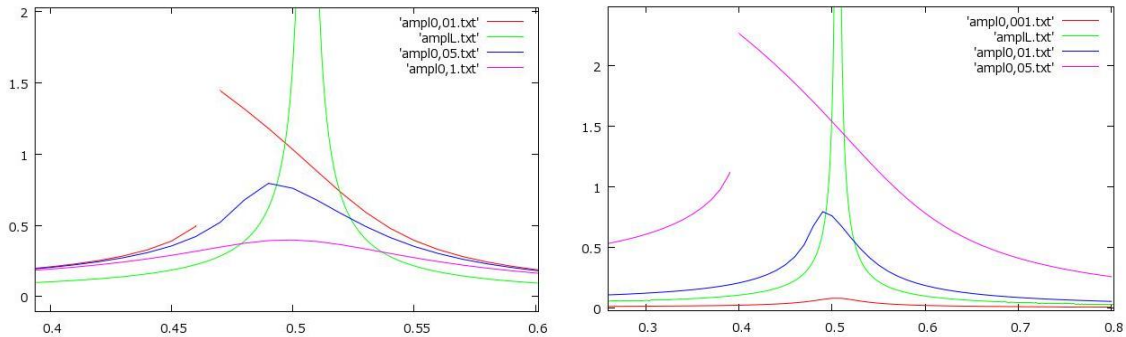
Výhody metody střelby jsou, že je výrazně rychlejší než metoda dlouhé simulace a v případě nalezení výsledku máme jistotu jeho správnosti. Metoda nám navíc dává informaci o stabilitě řešení a to pomocí vlastních čísel matice $\underline{\mathbf{J}}_g$. Postup je popsán v [3]. Největší absolutní hodnotu vlastního čísla matice $\underline{\mathbf{J}}_g$ nazveme modulem stability m_s . Pokud je $m_s < 1$ jde o asymptotickou stabilitu linearizované soustavy a řešení lze prohlásit za stabilní. V případě kdy $m_s > 1$ je řešení nestabilní. U netlumené soustavy často nastává situace $m_s = 1$, v takovém případě nelze na základě linearizované soustavy o stabilitě řešení jednoznačně rozhodnout.

Nevýhoda metody střelby je, že pokud je startovací vektor daleko od hledaného řešení, metoda ne vždy konverguje, v takových případech je nutné startovací vektor změnit.

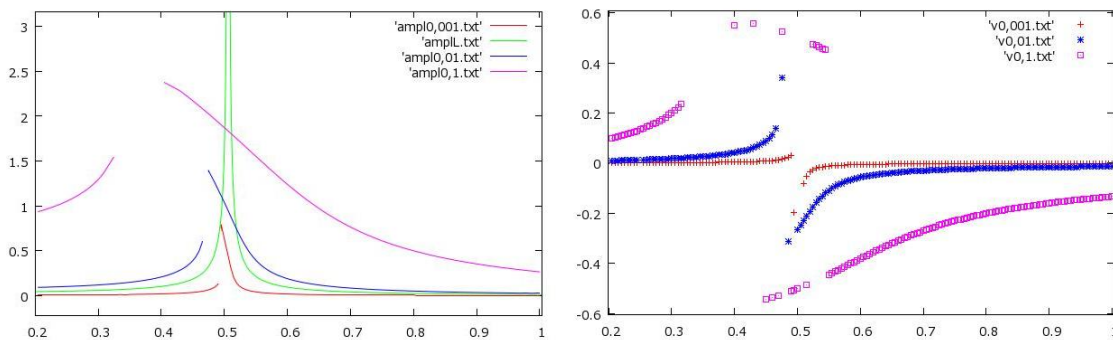
6.3 Výsledky

V této kapitole jsou prezentovány výsledné grafy popisující buzené kmitání. Následující dvojice grafů znázorňují vliv parametru amplitudy budící síly γ a parametru útlumu π_5 na rezonanční křivky periodického řešení získaného metodou dlouhé simulace. Parametry soustavy jsou $\alpha = 3$; $\beta = 0.55$. Vodorovná osa představuje normovanou budící frekvenci π_4 , svislá osa představuje maximální amplitudu úhlu φ [rad] tedy maximální rozkmit daného řešení. V prvním grafu je amplitudy budící síly $\gamma = 0.01$ a jednotlivé

rezonanční křivky jsou pro parametry útlumu $\pi_5 = 0.01; 0.05; 0.1$. V druhém grafu je parametr útlumu $\pi_5 = 0.05$ a jednotlivé rezonanční křivky jsou pro amplitudy budících sil $\gamma = 0.001; 0.01; 0.05$. V obou grafech je zeleně naznačena rezonanční křivka linearizované soustavy.

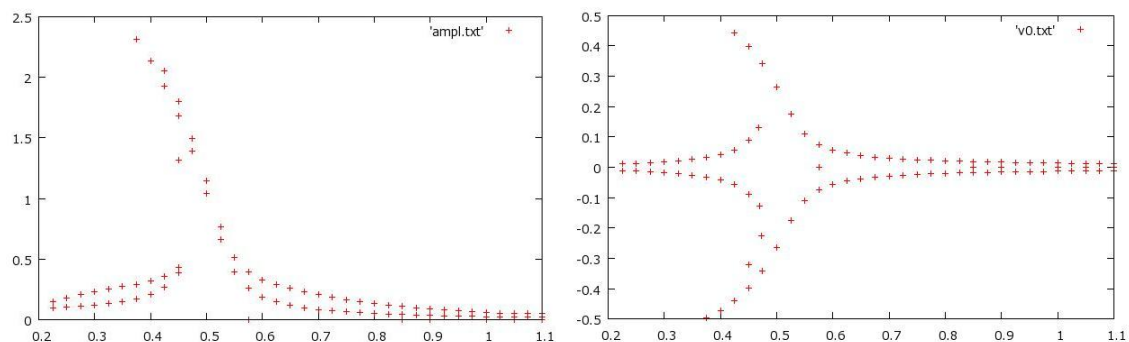


První z další dvojice grafů ukazuje rezonanční křivku netlumeného kmitání, získané metodou střelby pro amplitudy budících sil $\gamma = 0.001; 0.01; 0.1$. A druhý normovanou počáteční rychlost π_7 odpovídající danému řešení. Počáteční vychýlení soustavy bylo vždy nulové.

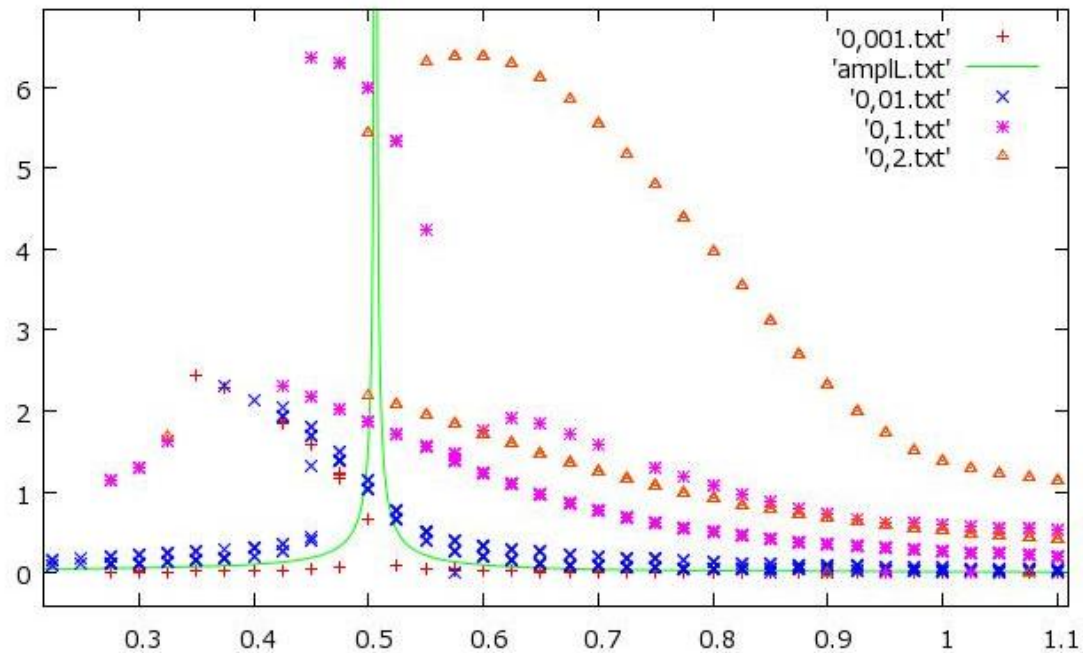


Je patrné, jak se s rostoucí amplitudou budící síly začíná projevovat nelinearita a rezonanční křivky se odklánějí.

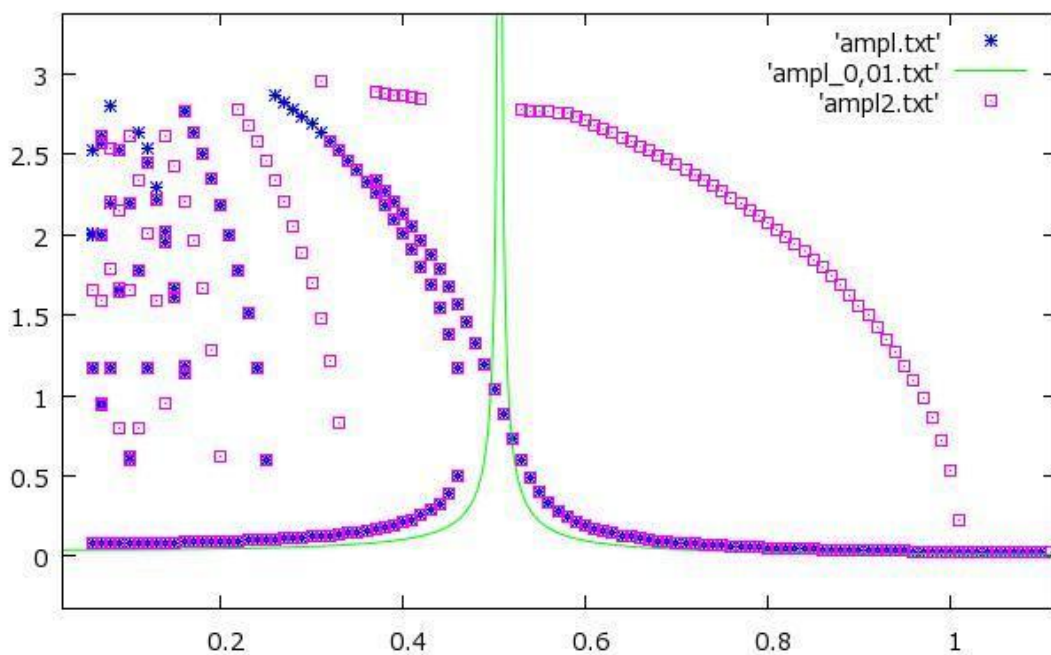
Pokud upravíme algoritmus metody střelby, aby dovoloval dokonvergovat pro jednu budící frekvenci k více řešení a umožníme kromě počáteční rychlosti i počáteční výchylku zjišťujeme, že počáteční rychlosti s opačným znaménkem také vedou k periodickému řešení, ale rezonanční křivka je pro opačné směry rychlostí různá, protože situace není ke změně znaménka počáteční rychlosti symetrická, díky pevnému směru působení budící síly. Následující dvojice grafů ilustruje výše zmíněnou situaci pro $\gamma = 0.01$.

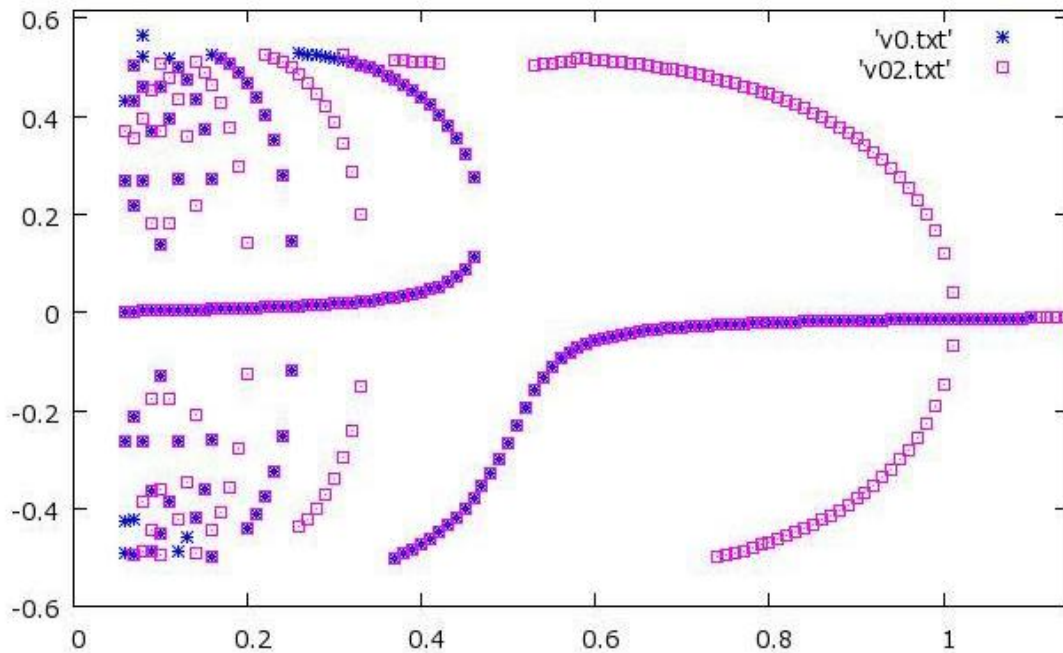


Další graf ukazuje, jak narůstá rozdíl rezonančních křivek pro opačné rychlosti se zvětšující se poměrnou amplitudou budící síly γ .



Na poslední dvojici grafů je opět rezonanční křivka a k ní příslušné počáteční rychlosti. Modré křížky představují klasické řešení, fialové čtverečky pak řešení s dvojnásobnou periodou, zeleně opět rezonanční křivka linearizované soustavy. Řešení s dvojnásobnou periodou se začíná oddělovat při budící frekvenci odpovídající dvojnásobku frekvence linearizované soustavy a je společné pro oba směry počátečních rychlostí.





7 Závěr

Pomocí vytvořeného programu jsme schopni ze vstupních parametrů určit, jak bude daná soustava kmitat. U vlastního kmitání zjišťujeme, že díky nelinearitě dochází s rostoucí výchylkou k prodlužování periody kmitání, na rozdíl od lineárního případu, kdy je perioda konstantní.

V případě buzení kmitání kmitá soustava převážně v chaotickém režimu a periodické kmitání nastane jen za přesně stanovených počátečních podmínek. Hlavní větev rezonanční křivky dosti kopíruje rezonanční křivku linearizované soustavy, až při větším rozkmitu se začíná odklánět. Při dvojnásobku linearizované frekvence se oddělí větev řešení s dvojnásobnou periodou, k dosažení tohoto režimu řešení pro nižší frekvence je však za potřebí výrazně vyšších počátečních rychlostí.

References

- [1] Máca, J.; Konvalinka P.: *Stavební mechanika*. ČVUT Praha, 1999
- [2] Šupčík, O.: *Vliv článků se zápornou tuhostí na chování mechanických soustav*. ČVUT Praha, 2011
- [3] Jirásek, M.: *Simulace jednoduchého nelineárního systému*. ČVUT v Praze, 1988
- [4] *Numerical Recipes Electronics*, <http://www.nr.com/>
- [5] Máca, J.: Podklady pro předmět „Dynamika stavebních konstrukcí 1“, FSv ČVUT Praha, Nepublikovaný text