

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební



Diplomová práce

2014

Bc. Karolina Hájková

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Katedra mechaniky

**Analýza nosníků s proměnným
průřezem**

Vypracoval:
Vedoucí práce:
Rok vypracování:

Bc. Karolina Hájková
Prof. Dr. Ing. Bořek Patzák
2014

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a všechny použité prameny a literatura jsou uvedeny v seznamu citované literatury.

Nemám námitek proti použití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 19. 12. 2014

Podpis:

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala vedoucímu mé diplomové práce Prof. Dr. Ing. Bořkovi Patzákovi za ochotu, trpělivost, připomínky, odborné rady a čas, který mi při zpracovávání mé diplomové práce věnoval.

Abstrakt

Hlavním cílem této diplomové práce je provést analýzu nosníků s proměnným průřezem. Analyzovány jsou statické a dynamické účinky proměnných průřezů, k čemuž slouží odvození matice hmotnosti, tuhosti nosníků a jejich implementace do prototypového kódu Matlab.

V úvodu jsou stanoveny přístupy k sestavování matic, využitě při statické a dynamické analýze praktické části této diplomové práce. Teoretická část práce je členěna do dvou hlavních kapitol. V první kapitole je popsáno odvození matice tuhosti pro využití v případě konstantního a proměnného průřezu. Ve druhé kapitole jsou odvozeny varianty matic hmotností využívané k analýze účinků.

V praktické části je realizován hlavní cíl této diplomové práce. Praktická část je rozdělena do tří kapitol. První kapitola obsahuje popis implementace matice tuhosti do Matlabu pro stanovené přístupy a implementaci variant matic hmotností pro uvažované přístupy. Druhá kapitola této diplomové práce se věnuje porovnávání a ověřování výpočtů provedených v Matlabu a jejich analýze. Poslední kapitola doplňuje informace o rozdílech mezi jednotlivými metodami a přístupy.

Klíčová slova: analýza, nosník, konstantní, proměnná, průřez, přístup, metoda, charakteristika, statika, dynamika, matice, diagonální, hmotnost, tuhost, síla, posun, rovnováha, funkce, integrace, příklad, výchylka, tvar, frekvence, chyba, porovnání

Abstract

The main objective of this thesis is to make an analysis of beams with variable cross- sections. Analyzed are the static and dynamic effects of variable sections, to serve the derivation of the stiffness matrix, mass matrix and their implementation into the prototype code Matlab.

In the introduction are determined approaches to assembling matrices, used in static and dynamic analysis of the practical part of this thesis. The theoretical part is divided into two main chapters. The first chapter describes the derivation of the stiffness matrix for use in case of constant and variable cross section. In the second chapter are derived variants of the mass matrix used to analyze the static and dynamic effects.

The practical part is mainly about realizing the main objective of this thesis. The practical part is divided into three chapters. The first chapter contains a description of implementation stiffness matrix into the Matlab for the approaches and implementation variants of the mass matrix for the considered approaches. The second chapter is describing comparison and verification of calculations performed in Matlab and their analysis. The last chapter provides informations about the differences between the different methods and approaches.

Key words: analysis, beam, constant, variable, cross- section, approach, method, characteristic, statics, dynamics, matrix, diagonal, weight, stiffness, strength, deflection, balance, function, integration, example, displacement, shape, frequency, error, compared

Obsah

1	ÚVOD	6
1.1	Cíle práce	6
1.2	Přístupy k analýze	6
1.2.1	Statická analýza - Matice tuhosti.....	6
1.2.2	Dynamická analýza - Matice hmotnosti	7
1.3	Využití proměnných průřezů	8
1.4	Funkce proměnného průřezu	9
2	ODVOZENÍ MATICE TUHOSTI	11
2.1	Princip virtuálních sil (Silová metoda)	12
3	ODVOZENÍ MATICE HMOTNOSTI	17
3.1	M1 Konzistentní matice hmotnosti	18
3.2	Matice hmotnosti M3	20
4	IMPLEMENTACE ODVOZENÝCH POSTUPŮ DO PROTOTYPOVÉHO KÓDU V MATLABU	21
4.1	Implementace matice tuhosti	21
4.1.1	Zadání charakteristik nosníku.....	21
4.1.2	Přiřazení kódových čísel.....	23
4.1.3	Matice tuhosti	23
4.1.4	Vektor zatížení	25
4.1.5	Vektor posunů	26
4.1.6	Vykreslení vnitřních sil	26
4.2	Implementace matice hmotnosti	26
4.2.1	Varianta M1- Numerická integrace	26
4.2.2	Varianta M3.....	28
4.3	Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů	28
5	POROVNÁNÍ A OVĚŘENÍ VÝSLEDKŮ	30
5.1	Ověření správnosti matice tuhosti	30
5.1.1	Konstantní průřez	30
5.1.2	Proměnný průřez	32
5.1.3	Vliv metod C, S a T na statické účinky	34
5.2	Ověření správnosti výpočtu matice hmotnosti	35
5.2.1	Konstantní průřez	35
5.3	Vlastní kmitání nosníku s proměnným průřezem	37
5.3.1	Porovnání vlastních frekvencí	44
5.3.2	Porovnání vlastních tvarů.....	45
6	UKÁZKY PŘÍKLADŮ	50
6.1	Příklad metody C, S, T rozdělené na 12 prvků	50
6.2	Rozdíl ve výpočtu s konzistentní maticí a diagonální maticí	51
7	ZÁVĚR	54
7.1	Zhodnocení dosažení cílů a přínosů práce	54
8	TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍK	55
9	POUŽITÁ LITERATURA	56
10	SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK	57
10.1	Seznam obrázků	57
10.2	Seznam tabulek	57
11	PŘÍLOHY	59

1 Úvod

V dnešní době můžeme pozorovat zvýšené nároky na snižování nákladů ve všech odvětvích. S tímto souvisí zvyšování efektivity využívání materiálů, práce, ale také tvorba odpovídajících numerických modelů umožňujících popsat chování dané konstrukce či materiálu. Tato práce se zabývá popisem nosníků s proměnným průřezem, které umožňují lepší využití materiálu. Ve stavebním inženýrství mají své místo již delší dobu, je tedy dobré zaměřit se na toto téma a popsat jejich chování.

1.1 Cíle práce

Předpokládaná práce se dělí na tři části. Nejdříve se věnuje problému na teoretické úrovni, posléze implementaci těchto poznatků do prototypového kódu Matlab a nakonec analýze takto získaných informací. V práci se pracuje s konkrétními příklady nosníků, na kterých budou analyzovány statické a dynamické účinky proměnného průřezu prostřednictvím několika metod. Postup a cíle práce mohou být shrnuty do těchto bodů:

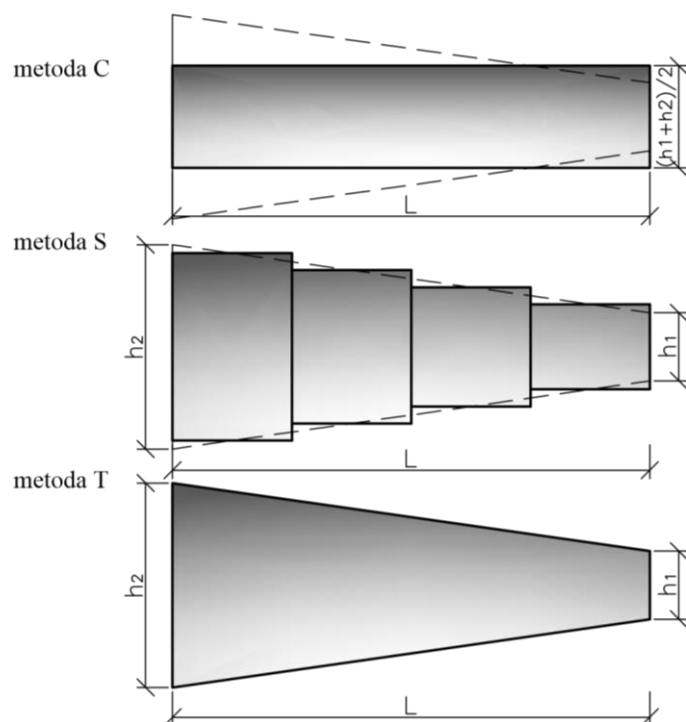
- Odvození matice tuhosti a hmotnosti nosníku s proměnným průřezem
- Implementace postupu do prototypového kódu v Matlabu
- Porovnání a ověření výsledků na řešení vybraných příkladů

1.2 Přístupy k analýze

V dnešní době existuje několik postupů jak získat přibližná, ale i přesná řešení matic tuhosti a hmotnosti pro nosníky s proměnným průřezem. Díky nim lze znázornit vliv proměnného průřezu na konečné statické a dynamické účinky. Můžeme zde pozorovat odchylky těchto účinků, závislé právě na výběru použitých metod modelování nosníků s proměnným průřezem.

1.2.1 Statická analýza - Matice tuhosti

Sestavování matice tuhosti bude založena na postupném zpřesňování řešení. Vliv proměnného průřezu se bude analyzovat pomocí přístupů k sestavení matice tuhosti. Nejdříve se budeme věnovat sestavení matice tuhosti nosníku s konstantním průřezem dále značeno C a poté se přibližovat k přesnému řešení rozdělením nosníků na více prvků s průměrnou hodnotou výšky průřezu na daném prvku. Tato varianta je dále v diplomové práci nazývána S a bude se zpřesňovat s počtem zvolených prvků na nosníku. Nejpřesnější metodou by měla být varianta T , která umožňuje zohlednit variaci průřezových charakteristik po délce nosníku.



Obrázek 1: Schéma zpřesňování řešení metodami C- konstantní průřez, S- rozdělení na více prvků o stejné výšce, T- výška dosazena jako funkce po délce nosníku (AUTOR, 2014)

1.2.2 Dynamická analýza - Matice hmotnosti

Obdobným postupem bychom měli dojít také k sestavení matice hmotnosti. Nejdříve se stanoví postupem pro konstantní prut pomocí posunové deformační metody (dále značené M1). Takto získaná konzistentní matice hmotnosti beroucí v úvahu spojitě rozložené hmoty se využije i při rozdělení nosníku na více prvků, kdy se bude hmotnost daného prvku určovat z již zmíněné průměrné hodnoty výšky na daném prvku. Lze také předpokládat, že se zvyšujícím se počtem prvků na nosníku bude docházet k přesnějšímu rozdělení hmotnosti do jednotlivých uzlů. Pro porovnání matic je zde zařazena i jednoduchá diskrétní matice hmotnosti M3, získaná rozdělením hmotnosti nosníku a její přiřazení jednotlivým posunovým stupňům volnosti. Pro nejpřesnější řešení proměnného nosníku T se využívá varianta M1, kam proměnnou hmotnost po délce nosníku zahrnujeme pomocí funkce plochy $A_{(x)}$, která se přenásobí objemovou hmotností a k získání matice hmotnosti se bude integrovat přes délku prvku. Měnící hmotnost se zohlední v této variantě i v matici básových funkcí N , díky koeficientu κ . Další variantou bude aplikace jednoduché matice M3 na proměnný průřez.

1.3 Využití proměnných průřezů

Za základní princip využívání proměnného průřezu by se dala považovat možnost vytvářet efektivní a architektonicky zajímavé konstrukce s optimalizovaným rozložením hmoty (a tuhosti), díky distribuci hmoty podél nosníku.

Proměnné průřezy se využívaly při stavbách mostů již v první polovině 20. století. Postupně se zvyšovalo jejich využívání a s tím také rostlo množství informací a možností k jejich použití. Výskyt nosníků s proměnným průřezem však můžeme pozorovat už mnohem dříve, například na Lví bráně v městě Mykény již ve 14. století př. n. l., a to na řeckém poloostrově Peloponés.



Obrázek 2: Lví brána, Mykény (Vonka, 2005)

Modelování nosníků s proměnným průřezem má podstatnou roli i ve stavebním inženýrství. Proměnné průřezy nalézají široké uplatnění ve všech typech stavebních konstrukcí, ať už jde o betonové, ocelové nebo dřevěné konstrukce.



Obrázek 3: Bogenberg bridge, Bogen, Německo (Krejjsa, 2014)



Obrázek 4: Tělocvična, Chomutov (Lekon TSK, 2011)

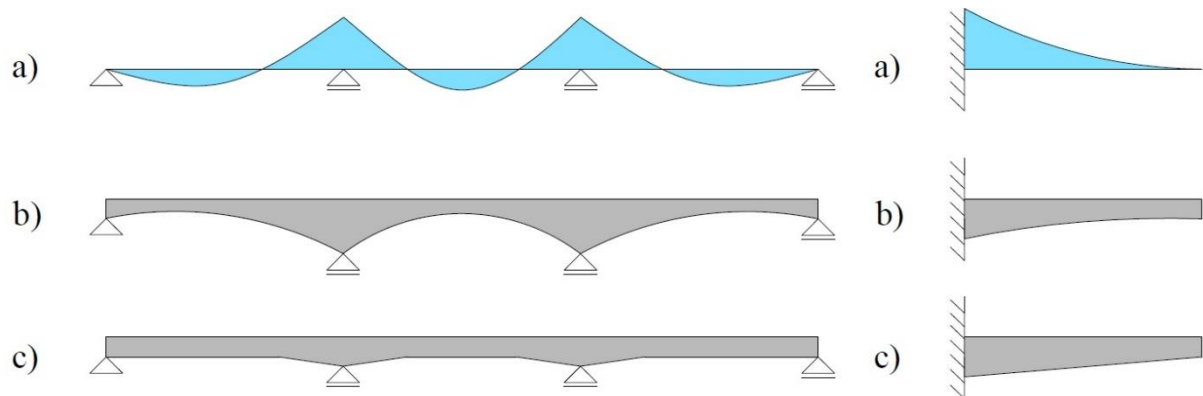


Obrázek 5: Donau-wald bridge, Winzer, Německo (Krejsa, 2014)

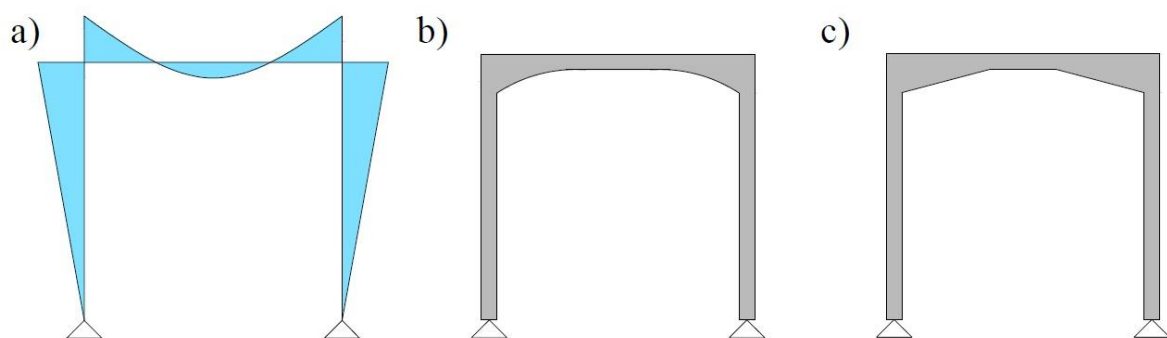
1.4 Funkce proměnného průřezu

Užívání proměnného průřezu je jedním z postupů, jak ovlivnit tuhosti konstrukce. V této diplomové práci se věnujeme vlivům proměnného průřezu na nosíkových konstrukcích, způsobené např. změnou výšky po délce nosníku. V praxi se nejčastěji setkáváme s lineární nebo parabolickou změnou výšky.

Tvarování nosníku souvisí s jeho namáháním, proto bychom mohli jeho užívání znázornit pomocí průběhu ohybového momentu případně dalších vnitřních sil. V místě maximálního momentu by tedy nosník měl mít nejvyšší průřez. Na následujících obrázcích 6,7 jsou zobrazeny možnosti využití proměnného průřezu inspirované průběhem ohybového momentu.



Obrázek 6: Spojitý nosník, konzola a) Průběh ohybového momentu b), c) možné realizace proměnného průřezu (AUTOR, 2014)



Obrázek 7: Rámová konstrukce a) Průběh ohybového momentu b), c) možné realizace proměnného průřezu (AUTOR, 2014)

Z předchozích obrázků lze tedy poznamenat, že využití proměnného průřezu je nejpravděpodobnější na nosnících, kde jsou velké rozdíly v hodnotách průběhu vnitřních sil a momentů. Na konstrukcích, kde není hospodárné měnit výšku celého prutu, proto změním odpovídající část průřezu v místě největšího zatížení. Provádění nosníků s proměnným průřezem je samozřejmě doprovázeno vyšší technologickou náročností, ale také úsporou materiálu, které se projeví na ceně provádění.

2 Odvození matice tuhosti

Zde využíváme princip virtuálních sil, z kterého se odvozuje Castiglianův variační princip, který je součtem komplementární energie vnitřních a vnějších sil, lze vyjádřit následovně (Bittnar, 1992):

$$\Pi^* = E_i^* + E_e^* = \min, \text{ je věta o minimu komplementární energie, kde} \quad (1)$$

$$E_i^* = \int_{\Omega} W^*(\boldsymbol{\sigma}) d\Omega, \text{ je komplementární energie vnitřních sil a} \quad (2)$$

$$E_e^* = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \text{ je komplementární energie vnějších sil} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \text{ je aproximace neznámých složek vektoru napětí} \quad (4)$$

Hustota komplementární energie je vyjádřena pro případ lineárně pružného materiálu následovně:

$$W^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (5)$$

Po dosazení (4) lze zapsat hustotu komplementární energie takto:

$$W^* = \frac{1}{2} (\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{C} (\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + (\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \quad (6)$$

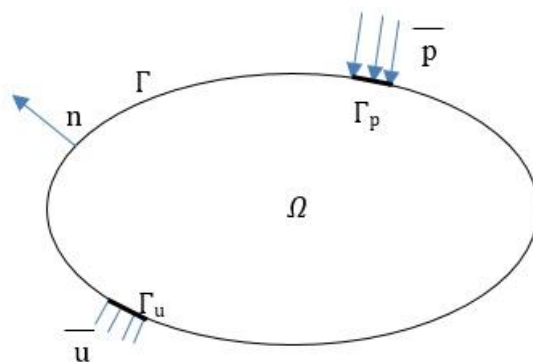
Po uplatnění tohoto zápisu v (1) dostáváme

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{C} (\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + (\mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (7)$$

Π^* je funkcí koeficientů lineární kombinace $\boldsymbol{\beta}$, které hledáme. Podmínka extrému má tedy tvar

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{p}} = 0, \text{ jsou silové okrajové podmínky na } \Gamma_p \quad (9)$$



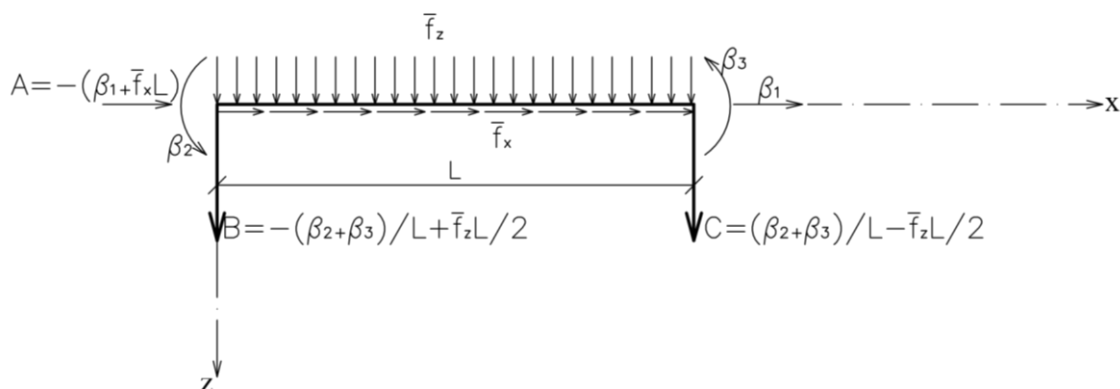
Obrázek 8: Volba souřadnicového systému (Sejnoha)

Rozepsáním vztahu (8) a vyjádření \mathbf{p} pomocí (9) a (4), získáme tuto rovnici zobecněných podmínek kompatibility diskretizovaného systému.

$$\int_{\Omega} [\mathbf{S}^T \mathbf{C} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{S}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{S}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = 0 \quad (10)$$

2.1 Princip virtuálních sil (Silová metoda)

V tomto případě výhodnější, protože aproximací napětí (vnitřních sil) lze z podmínek rovnováhy najít přesně i pro proměnný průřez, na rozdíl od aproximace posunutí v deformační variantě. Skutečná přetvoření vyjadřujeme v závislosti na hodnotách vnitřních sil, která jsou v rovnováze s vnějším zatížením. Řešení pak vede na soustavu algebraických lineárních rovnic pro neznámé staticky neurčitě reakce definované na tzv. základní soustavě. V silové metodě (aplikace na prutové konstrukce) tyto reakce vystupují jako primární neznámé. Počet neznámých tedy určuje stupeň statické neurčitosti (počet rovnic).



Obrázek 9: Prvek v lokální soustavě souřadnic (Bittnar, 1992)

Následuje odvození matice tuhosti prutu. V diplomové práci je využíván jako podklad tento zápis (Bittnar, 1992):

Prvek na obrázku 9 přenáší osové síly, ohybové momenty a posouvající síly (ohýbaný prvek). Za předpokladu rovnoměrného rozdělení zatížení f_x a f_z po délce prutu je soustava sil na obrázku v rovnováze. Na obrázku je vyznačeno šest koncových sil, z nichž jsou tři veličiny (osová síla β_1 a momenty β_2, β_3) tvořící vektor $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}^T$ nezávislé. Zbývající koncové síly jsou svázány třemi podmínkami rovnováhy na prvku – dvěma silovými a jednou momentovou.

$$\begin{aligned} \rightarrow \beta_1 + f_x * l + A = 0 &\Rightarrow A = -(\beta_1 + f_x * l) \\ \curvearrowright \beta_3 - C * l - f_z \frac{l^2}{2} = -\beta_2 &\Rightarrow C = \frac{\beta_2 + \beta_3}{l} - f_z \frac{l}{2} \\ \downarrow B + C + f_z * l = 0 &\Rightarrow B = -\left(\frac{\beta_2 + \beta_3}{l} + f_z \frac{l}{2}\right) \end{aligned}$$

Průběh vnitřních sil pak můžeme vyjádřit následovně ($x = \xi l$):

Normálová síla

$$N_x(\xi) = \beta_1 + f_x l (1 - \xi) \quad (11)$$

Ohybový moment

$$M_y(\xi) = -\beta_2 (1 - \xi) + \beta_3 \xi + f_z \frac{l^2}{2} \xi (1 - \xi) \quad (12)$$

Posouvající síla

$$Q_z(\xi) = \frac{\beta_2 + \beta_3}{l} + f_z \frac{l}{2} (1 - 2\xi) \quad (13)$$

Průřezové síly jsou z definice svázány s napětími

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_x dA = \int_A E \varepsilon_x dA = \int_A E \frac{d u_s}{dx} dA = EA \frac{d u_s}{dx} - N_0 \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA = \int_A E \varepsilon_x z dA = \int_A E \frac{d \varphi_y}{dx} z^2 dA = EI_y \frac{d \varphi_y}{dx} - M_0 \\ Q_z &= \int_A \tau_{xz} dA = \int_A kG \gamma dA = \int_A kG \left(\varphi_y + \frac{dw}{dx} \right) dA = kGA \left(\varphi_y + \frac{dw}{dx} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Fyzikální vztah mezi průměrným zkosením γ a průměrným smykem τ zapíšeme ve tvaru

$$\tau = kG\gamma \quad \text{kde } k \text{ lze spočítat ze vztahu} \quad (15)$$

$$k = \frac{I_y^2}{\int_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)} dA} \quad \text{v případě obdelníkového průřezu se } k = 5/6$$

$$N_0 = E \int_A \varepsilon_0(x, z) dA, \quad M_0 = \int_A \varepsilon_0(x, z) z dA \quad (16)$$

Je-li počáteční deformace způsobena zvýšením teploty $\varepsilon_0 = \alpha T(x, z)$, dostaneme

$$N_0 = N_T = E \alpha \int_A T dA, \quad M_0 = M_T = \int_A T z dA \quad (17)$$

Deformace odpovídající vnitřním silám vypočteme ze vzorců 0. Počáteční deformace ε_0 budeme považovat za důsledek rovnoměrného oteplení T a nerovnoměrného oteplení ($T_d - T_h$) lineárně rozděleného po výšce průřezu. Rozdělení teploty po délce průřezu uvažujeme konstantní. Osová dilatace způsobená normálovou silou

$$\frac{d u_s}{dx} = \frac{1}{EA} [\beta_1 + f_x l (1 - \xi)] + \alpha T \quad (18)$$

Změna křivosti způsobená ohybovým momentem je zapsána

$$\frac{d \varphi_y}{dx} = \frac{1}{EI_y} [-\beta_2 (1 - \xi) + \beta_3 \xi + f_z \frac{l^2}{2} \xi (1 - \xi)] + \alpha \frac{T_d - T_h}{h} \quad (19)$$

Zkosení způsobené posouvající silou je zapsáno

$$\gamma = \frac{1}{kGA} \left[\frac{\beta_2 + \beta_3}{l} + f_z \frac{l}{2} (1 - 2\xi) \right] \quad (20)$$

Maticový zápis rovnic (11) – (13) je následující

$$\begin{Bmatrix} N_x(\xi) \\ M_y(\xi) \\ Q_z(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \xi) & \xi \\ 0 & 1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x l (1 - \xi) \\ \frac{f_x l^2}{2} \xi (1 - \xi) \\ \frac{f_x l}{2} (1 - 2\xi) \end{Bmatrix}$$

neboli

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi) = \mathbf{S}(\xi) \boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\xi) \quad \text{což odpovídá výše popsané aproximaci (4)} \quad (21)$$

Maticový zápis rovnic (18) – (20) má pak tvar

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi) = \mathbf{C} [\mathbf{S}(\xi) \boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\xi)] + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\xi) \quad (22)$$

kde \mathbf{C} je maticí poddajnosti průřezu

$$C = \begin{bmatrix} 1/EA & & \\ & 1/EI_y & \\ & & 1/kGA \end{bmatrix} \quad (23)$$

Označme vektor počátečního přetvoření způsobeného změnou teploty jako $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \left\{ \alpha T, \alpha \frac{T_d - T_h}{h}, 0 \right\}^T \quad (24)$$

Rovnice kompatibility deformace dle (10), můžeme zapsat v symbolickém tvaru

$$P\boldsymbol{\beta} + \Delta_p - \Delta_u = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}^{-1}(\Delta_u - \Delta_p) = \widehat{K}(\hat{r} - \Delta_p) \quad (25)$$

V předchozím výrazu můžeme identifikovat následující členy:

1) Matice poddajnosti systému

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} d\Omega$$

2) Vektor zobecněných deformací způsobených předepsanými silami a počáteční deformací $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$

$$\Delta_p = \int_{\Omega} \mathbf{S}^T (\mathbf{C}\overline{\boldsymbol{\sigma}} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0) d\Omega$$

3) Vektor zobecněných deformací způsobených předepsanými posuny $\overline{\mathbf{u}}$, $\Delta_u = \hat{r} = \{\Delta, \vartheta_1, \vartheta_2\}$

$$\Delta_u = \int_{\Gamma_u} \mathbf{S}^T \mathbf{n}^T \overline{\mathbf{u}} d\Gamma$$

Matice poddajnosti prvku P je po dosazení S a C určena vzorcem, dle rovnice kompatibility deformace

$$P = \int_0^1 \mathbf{S}^T(\xi) \mathbf{C} \mathbf{S}(\xi) l d\xi = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{6EI_y}(2 + \kappa) & \frac{l}{6EI_y}(-1 + \kappa) \\ 0 & \frac{l}{6EI_y}(-1 + \kappa) & \frac{l}{6EI_y}(2 + \kappa) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\kappa = \frac{6EI_y}{kGA l^2} \quad (27)$$

Kde vliv proměnného průřezu se do matice poddajnosti prvku P zahrnuje pomocí matice poddajnosti prvku C , kam jsou dosazeny charakteristiky průřezu jako funkce proměnné po délce prvku. Charakteristiky lze vyjádřit např. následovně pro proměnnou výšku průřezu:

$$\text{Plocha průřezu} \quad A = bh(\xi)$$

$$\text{Moment setrvačnosti průřezu} \quad I_y = \frac{1}{12} bh(\xi)^3$$

Vektor tří deformací (Δ ...protažení prutu, ϑ_1, ϑ_2 ...pootočení koncových průřezů prostě podepřeného nosníku) způsobených vnějším zatížením a zvýšením teploty má tvar

$$\Delta_p = \int_0^1 \mathbf{S}^T(\xi) [\mathbf{C}\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\xi) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\xi)] l d\xi = \begin{Bmatrix} \frac{f_x l^2}{2EA} \\ -\frac{f_z l^3}{24EI_y} \\ \frac{f_z l^3}{24EI_y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\alpha T l}{2h} \\ -\frac{\alpha l(T_d - T_h)}{2h} \\ \frac{\alpha l(T_d - T_h)}{2h} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Následuje přechod od silové varianty řešení k posunové variantě. Cílem této transformace je sestavení základní rovnice deformační metody pro prvek. Protože jej vyjímáme z konstrukce, musíme vektor transformovaného zatížení \mathbf{R}_p doplnit o vektor koncových sil \mathbf{R} , jimiž na prvek působí okolní část. Síly \mathbf{R} a \mathbf{R}_p mají povahu vnějších sil. Základní rovnici deformačních sil zapíšeme následovně

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_p \quad (29)$$

K přechodu k posunové variantě musíme znát vztah mezi třemi parametry ryzi deformace Δ a šesti zobecněnými posuny \mathbf{r} , které v sobě zahrnují tři stupně volnosti, které má prvek jako tuhé těleso.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1 & 0 & 1/l & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 0 & 1/l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_{1y} \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_{2y} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Kompaktní tvar} \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{T} \mathbf{r} \quad (30)$$

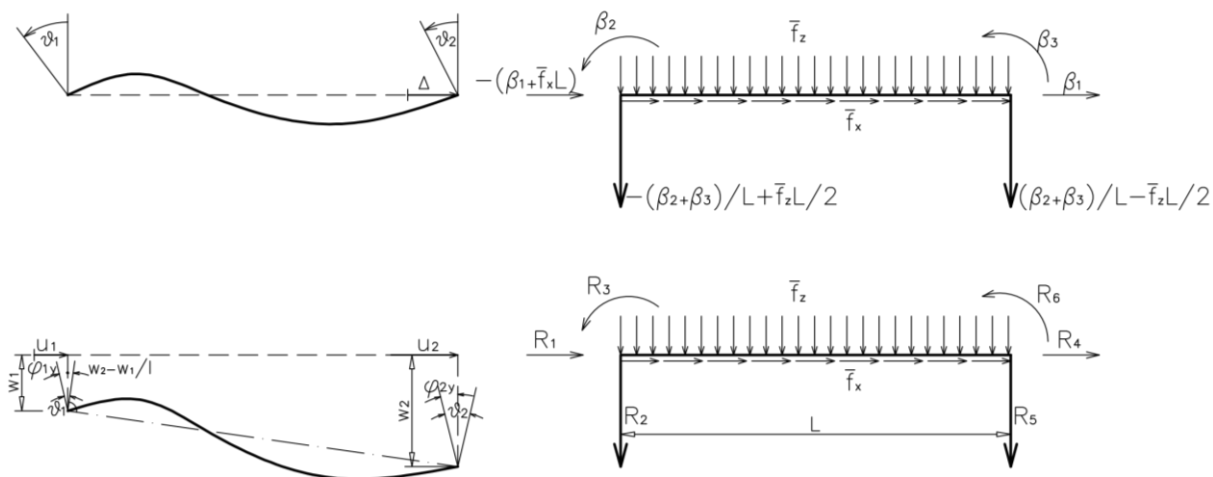
$$\mathbf{r} = \{ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \}^T = \{ u_1, w_1, \varphi_{1y}, u_2, w_2, \varphi_{2y} \}^T \quad (31)$$

Musíme také znát vztah mezi třemi nezávislými silovými faktory $\boldsymbol{\beta}$ a šesti zobecněnými koncovými silami \mathbf{R} , které jsou svázány třemi podmínkami rovnováhy.

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_x l \\ \frac{f_x l}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{f_x l}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & -1/l \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Kompaktní tvar} \quad \mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\beta} \quad (32)$$

$$\mathbf{R} = \{ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 \}^T \quad (33)$$



Obrázek 10: Závislost koncových sil (Bittnar, 1992)

Kombinací vzorců (25), (30) a (32) obdržíme hledané vyjádření

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{T} \\
 &= \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \begin{bmatrix} \frac{A(1+2\kappa)}{2I_y} & 0 & 0 & -\frac{A(1+2\kappa)}{2I_y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} & 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} \\ 0 & \frac{3}{l} & (2+\kappa) & 0 & \frac{3}{l} & (1-\kappa) \\ \text{sym.} & 0 & 0 & \frac{A(1+2\kappa)}{2I_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{l} & (2+\kappa) \end{bmatrix} \quad (34)
 \end{aligned}$$

Prvky vektoru transformovaného zatížení \mathbf{R}_p tvoří zobecnělé koncové síly, kterými prut působí na podpory.

$$\mathbf{R}_p = -\bar{\mathbf{R}} + \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}} \Delta_p \quad (35)$$

Jednotlivé prvky vektoru \mathbf{R}_p jsou vyjádřeny takto

$$\begin{aligned}
 R_{p1} &= \frac{f_x l}{2} - \bar{N}_T, \quad R_{p3} = \frac{f_x l}{2}, \quad R_{p3} = -\left(\frac{1}{12} f_x l^2 + \bar{M}_T\right), \\
 R_{p4} &= \frac{f_x l}{2} + \bar{N}_T, \quad R_{p5} = \frac{f_x l}{2}, \quad R_{p6} = \frac{1}{12} f_x l^2 + \bar{M}_T
 \end{aligned}$$

Kde prvky \bar{N}_T a \bar{M}_T jsou vyjádřeny následovně

$$\bar{N}_T = EA\alpha T, \quad \bar{M}_T = EI_y \alpha \frac{T_d - T_h}{h} \quad (36)$$

3 Odvození matice hmotnosti

V případě nosníku s konstantním průřezem tuto matici stanovujeme dvěma způsoby. Nejdříve sestavujeme konzistentní matici hmotnosti M1, která je spočtená užitím deformační posunové metody. Správnost této varianty bude ověřena pomocí vztahu (37), kterým sestavíme matici označenou M2 a porovnáme s maticí M1. Další bude matice hmotnosti, která je založena na rozdělení hmotnosti nosníku do jednotlivých uzlů nosníku. Tato matice je značena M3. V případě řešení nosníků s proměnným průřezem bylo při integraci uvažováno skutečné rozložení hmoty, avšak vztah je i tak přibližný neboť bázové funkce posunů nejsou v tomto případě přesným řešením.

Nyní bude popsáno sestavení matice M2, která slouží pouze k ověření správnosti výpočtu matice M1 dle (39). V našem případě klasického prutu s uvážením vlivu smyku lze využít následujícího vztahu pro sestavení matice hmotnosti prutu (Bittnar, 1992):

$$\mathbf{M} = \frac{\mu l}{(1+2\kappa)^2} \mathbf{K}_a \quad (37)$$

μ značí hmotnost prvku na jednotku délky
 \mathbf{K}_a představuje pomocnou matici, jejíž prvky jsou

$$K_{a11} = \frac{4\kappa^2}{3} + \frac{7\kappa}{5} + \frac{13}{35}, K_{a12} = -l \left(\frac{\kappa^2}{6} + \frac{11\kappa}{60} + \frac{11}{210} \right), K_{a13} = \frac{2\kappa^2}{3} + \frac{3\kappa}{5} + \frac{9}{70},$$

$$K_{a14} = l \left(\frac{\kappa^2}{6} + \frac{3\kappa}{20} + \frac{13}{420} \right), K_{a22} = l^2 \left(\frac{\kappa^2}{30} + \frac{\kappa}{30} + \frac{1}{105} \right), K_{a23} = -l \left(\frac{\kappa^2}{6} + \frac{3\kappa}{20} + \frac{13}{420} \right),$$

$$K_{a24} = -l^2 \left(\frac{\kappa^2}{30} + \frac{\kappa}{30} + \frac{1}{140} \right), K_{a33} = \frac{4\kappa^2}{3} + \frac{7\kappa}{5} + \frac{13}{35}, K_{a34} = l \left(\frac{\kappa^2}{6} + \frac{11\kappa}{60} + \frac{11}{210} \right)$$

Jak je zřejmé už z počtu prvků matice \mathbf{K}_a , výsledná matice hmotnosti má velikost 4x4. V této matici se nevyskytují prvky vodorovných posunů u . Jak se ale zmiňuje dále, tyto posuny budou potřeba k převedení získané konzistentní matice na matici diagonální. Proto si posuny u v koncových uzlech prvku na diagonále doplníme. Přesně se jedná o prvky M_{11} a M_{44} , které se získají pomocí první interpolační funkce h_1 . Všechny interpolační funkce využijeme a zmíníme v další variantě sestavení matice hmotnosti M1.

$$M_{11} = M_{44} = \int h_1 \mu h_1 dl = \int [^{\circ}] \mu [^{\circ}] dl = \frac{l}{2} \mu \frac{2}{3} = \frac{l}{3} \mu \quad h_1 = (1-\xi), h_2 = \xi \quad (38)$$

$$M_{14} = M_{41} = \int h_1 \mu h_2 dl = \int [^{\circ}] \mu [^{-}] dl = \frac{l}{2} \mu \frac{1}{3} = \frac{l}{6} \mu$$

Nyní máme konzistentní matici velikosti 6x6 a můžeme přejít k diagonalizaci. Všechny prvky mimo diagonálu zanedbáme, tím ale není zachována hmotnost nosníku. Proto musíme všechny prvky na diagonále přenásobit koeficientem

$$\alpha = \delta \frac{M}{\sum m_{ii}}$$

M značí celkovou hmotnost prvku
 m_{ii} jsou diagonální prvky matice, které přísluší pouze posunům
 δ představuje o kolika rozměrný prvek se jedná, v našem případě se $\delta = 2$, dvourozměrný prvek

Ve variantě konstantního průřezu bude tato matice hmotnosti sloužit k ověření správnosti matice hmotnosti M1.

3.1 M1 Konzistentní matice hmotnosti

Tuto variantu budeme využívat pro sestavení matice hmotnosti pro uvažované metody C, S a T.

Matice hmotnosti systému se spočte takto (Bittnar, 1992):

$$M = \int_{\Omega} N^T \rho N d\Omega \quad (39)$$

Vztah plyne z principu virtuálních posunutí. Kde N zde značí matici bázových funkcí, která je tvořena interpolačními funkcemi h_i , příslušejícími jednotlivým uzlovým parametrům.

$$N = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \\ 0 & h_7 & h_8 & 0 & h_9 & h_{10} \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ \varphi \\ w \end{matrix} \quad (40)$$

V následující tabulce můžeme vidět vyjádření všech interpolačních funkcí.

i	h_i
1	$1 - \xi$
2	ξ
3	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [6\xi - 6\xi^2]$
4	$\frac{1}{1+2\kappa} [(1+2\kappa) - 2(2+\kappa)\xi + 3\xi^2]$
5	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [-6\xi + 6\xi^2]$
6	$\frac{1}{1+2\kappa} [-2(1-\kappa)\xi + 3\xi^2]$
7	$\frac{1}{1+2\kappa} [(1+2\kappa) - 2\kappa\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3]$
8	$\frac{l}{1+2\kappa} [-(1+\kappa)\xi + (2+\kappa)\xi^2 - \xi^3]$
9	$\frac{1}{1+2\kappa} [2\kappa\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3]$
10	$\frac{l}{1+2\kappa} [\kappa\xi + (1-\kappa)\xi^2 - \xi^3]$

Obrázek 11: Tabulka interpolačních funkcí (Bittnar, 1992)

Nyní odvodíme prvek matice hmotnosti M_{22} , příslušící svislému posunu. Zde je využito třetího řádku svislých posunů matice bázových funkcí, konkrétně prvku h_7 .

$$NN^T = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \\ 0 & h_7 & h_8 & 0 & h_9 & h_{10} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_7 \\ 0 & h_4 & h_8 \\ h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_5 & h_9 \\ 0 & h_6 & h_{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \rho N^T N \, dx \, dz \\
&= A\rho \int_0^l h_7 h_7 \, dx = A\rho \int_0^1 \frac{1}{1+2\kappa} [(1+2\kappa) - 2\kappa\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3] \frac{1}{1+2\kappa} [(1+2\kappa) - 2\kappa\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3] l \, d\xi \\
&= A\rho \int_0^1 \frac{1}{(1+2\kappa)^2} [1+2\kappa - 2\kappa\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3 + 2\kappa + 4\kappa^2 - 4\kappa^2\xi - 6\kappa\xi^2 + 4\kappa\xi^3 - 2\kappa\xi - 4\kappa^2\xi + 4\kappa^2\xi^2 + 6\kappa\xi^3 - 4\kappa\xi^4 - 3\xi^2 - 6\kappa\xi^2 + 6\kappa\xi^3 + 9\xi^4 - 6\xi^5 + 2\xi^3 + 4\kappa\xi^3 - 4\kappa\xi^4 - 6\xi^5 + 4\xi^6] l \, d\xi \\
&= A\rho \int_0^1 \frac{l}{(1+2\kappa)^2} \left[\xi + 4\kappa\xi - 4\kappa \frac{\xi^2}{2} - 6 \frac{\xi^3}{3} + 4 \frac{\xi^4}{4} + 4\kappa^2\xi - 8\kappa^2 \frac{\xi^2}{2} - 12\kappa \frac{\xi^3}{3} + 20\kappa \frac{\xi^4}{4} + 4\kappa^2 \frac{\xi^3}{3} - 8\kappa \frac{\xi^5}{5} + 9 \frac{\xi^5}{5} - 12 \frac{\xi^6}{6} + 4 \frac{\xi^7}{7} \right]_0^1 \\
&= A\rho \int_0^1 \frac{l}{(1+2\kappa)^2} \left[1 + 4\kappa - \frac{4\kappa}{2} - \frac{6}{3} + \frac{4}{4} + \frac{4\kappa^2}{1} - 8 \frac{\kappa^2}{2} - 12 \frac{\kappa}{3} + \frac{20\kappa}{4} + \frac{4\kappa^2}{3} - \frac{8\kappa}{5} + \frac{9}{5} - \frac{12}{6} + \frac{4}{7} \right] \\
&= \frac{lA\rho}{(1+2\kappa)^2} \left[\frac{140 + 140 + 252 - 2 * 140 + 80 - 2 * 140}{140} \right. \\
&\quad \left. + \frac{240 - 120 - 240 + 300 - 96}{60} \kappa + \frac{24 - 24 + 8}{6} \kappa^2 \right] \\
&= \frac{l\mu}{(1+2\kappa)^2} \left(\frac{13}{35} + \frac{7}{5} \kappa + \frac{4}{3} \kappa^2 \right)
\end{aligned}$$

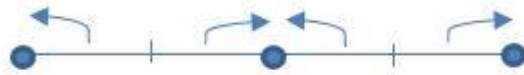
Výsledný prvek se shoduje s prvkem pomocné matice Ka_{11} dosazeného do vzorce (37) převzatého z (Bittnar, 1992). Tímto způsobem budou stanoveny i zbylé prvky matice hmotnosti pomocí interpolačních funkcí.

Při užití této metody ve variantě řešení T, zohledňujeme proměnnou výšku v hodnotě μ , hmotnosti prvku na jednotku délky, která ve vzorci (39) nahrazuje hodnotu objemové hmotnosti ρ , při integraci přes délku prvku a je funkcí polohy na nosníku. Proměnný průřez se projeví i v koeficientu kappa, který je spočten z proměnných průřezových charakteristik v místě integračních bodů, jak se zmíníme dále v implementaci matice hmotnosti M1.

Vypočtením integrálu (39) získáme konzistentní matici hmotnosti prvku. V našem případě využijeme jednodušší popis setrvačných vlastností prvku- hmota se bude soustředit do jednotlivých uzlových bodů. Převedeme tedy získanou matici hmotnosti na matici diagonální, jako v předchozím případě. Budeme postupovat stejně, prvky mimo diagonálu nahradíme nulou a celou diagonálu přenásobíme koeficientem α , který se spočte podle výše uvedeného vzorce, v tomto případě také přičítáme hmotnost vodorovných posunů. V kapitole 6.2 bude uveden rozdíl spočtených vlastních kruhových frekvencí, při využití diagonální tak i konzistentní matice hmotnosti.

3.2 Matice hmotnosti M3

Tato varianta sestavení matice hmotnosti spočívá v rozdělení celkové hmotnosti do jednotlivých uzlových bodů. Hmotnosti se přiřadí svislým posunům w podle počtu prvků, na které bude nosník rozdělen.



Obrázek 12: Znázornění rozdělení hmotnosti v případě dvou prvků (AUTOR, 2014)



Obrázek 13: Znázornění rozdělení hmotnosti v případě jednoho prvku (AUTOR, 2014)

Jak je zřejmé z obrázků, tak do středových uzlů vždy přidělíme hmotnost rovnou celkové hmotnosti vydělené počtem nosníku. Do koncových uzlů se tato hodnota bude muset ještě podělit dvěma, protože z druhé strany už nejsou prvky napojené.

Pro případ uvedený na Obrázek 12 lze zapsat hmotnosti v uzlech 1, 2, 3 takto:

$$m_2 = \frac{\mu l}{2} \quad l \dots \text{délka celého nosníku}, 2 \dots \text{počet prvků}$$

$$m_1 = m_3 = \frac{m_2}{2}$$

Matice hmotnosti nosníku pro tento případ bude tedy vypadat takto

$$M3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Implementace odvozených postupů do prototypového kódu v Matlabu

Tato kapitola se věnuje popisu a vysvětlení implementace odvozených postupů do prototypového kódu Matlab.

4.1 Implementace matice tuhosti

Popis implementace odpovídá struktuře kódu. Nejdříve se budeme věnovat charakteristikám, kódovým číslům, které se mohou lišit pro jednotlivé přístupy k přesnosti řešení a dále způsobu získání matice tuhosti.

4.1.1 Zadání charakteristik nosníku

Zde je popsáno zadávání charakteristik pro jednotlivé metody C, S a T.

4.1.1.1 Konstantní průřez C

Na úvodu kódu se zadávají konstanty, kvůli možnosti jednoduché úpravy v případě změn. Jedná se převážně o charakteristiky nosníku (např. Modul pružnosti v tahu E , Poissonovo číslo ν , rozměry průřezu, objemovou hmotnost ρ), ale také počet integračních bodů, který používáme k numerické integraci. Poté lze zadávat počet prvků na nosníku, ale v tomto případě by se výsledek přidáváním prvků neměl měnit (může sloužit jako kontrola pro metodu S). V matici tuhosti pro konstantní průřez lze na začátku zadat i pevnou hodnotu plochy, momentu setrvačnosti a koeficientu k , pokud si stanovíme tvar průřezu, s kterým budeme dále počítat. Ukázka zadání charakteristik ve skriptu Matlabu:

```
nelem=1;           %pocet prvku
nip=6;            %pocet integracnich bodu
E = 2100000000;   %Pa
b=0.1;           %m
h=0.2;           %m
A = b*h;         %plocha prurezu
Iy = 1/12*b*h^3;  %moment setrvacnosti prurezu
nu = 0.3;        %Poissonovo cislo
k = 5/6;         %platí pro obdelnik
td=0;           %teplota z dolni strany nosniku
th=0;           %teplota z horni strany nosniku
t=0;            %teplota ve srednici prvku
a=1;            %teplotni soucinitel (koeficient) delkove roztaznosti
fx=0; fz=10;    %spojite zatizeni
```

4.1.1.2 Rozdělení na více prvků S

Nastavení neměnných charakteristik je stejné jako u konstantního nosníku, ale zde je právě klíčová hodnota `nelem` tzn., na kolik prvků se rozhodneme nosník rozdělit. Se zvětšujícím se počtem prvků na nosníku bychom se měli blížit přesnému řešení proměnného průřezu po délce nosníku. V našem případě bychom se měli blížit výsledkům získaným pomocí přesného řešení T. Velikost plochy a momentu setrvačnosti počítáme pro jednotlivé prvky z průměrné hodnoty výšky na daném prvku. V této metodě se tento výpočet přesouvá až do funkce na sestavení matice poddajnosti. Ukázka zadání charakteristik ve skriptu Matlabu:

```
nelem=4;           %pocet prvku
nip=6;            %pocet integracnich bodu
E = 2100000000;   %Pa
nu = 0.3;        %Poissonovo cislo
k = 5/6;         %platí pro obdelnik
td=0;           %teplota z dolni strany nosniku
th=0;           %teplota z horni strany nosniku
t=0;            %teplota ve srednici prvku
a=1;            %teplotni soucinitel (koeficient) delkove roztaznosti
```

```
fx=0; fz=10;          %spojité zatížení
```

4.1.1.3 Přesné řešení T

Jako v předchozím variantách nastavíme neměnné charakteristiky nosníku. Dále počet prvků, na který nosník rozdělíme a počet integračních bodů nip. V této variantě se začne projevovat jejich vliv na přesnosti řešení. Implementace umožňuje měnit mezi 1 až 6 integračními body na prvek, jejich vliv zobrazíme v kapitole 5.1.3. V této variantě není také podstatný počet prvků, na který nosník bude rozdělen, ale dále bude toto rozdělení užitečné právě pro hodnocení správnosti jednotlivých variant. Jelikož výška průřezu je v této variantě uvažovaná proměnná v každém bodě nosníku, tak určujeme plochu a moment setrvačnosti průřezu v každém bodě numerické integrace. K tomu slouží funkce na výpočet plochy a momentu setrvačnosti podle toho jaký tvar průřezu je zvolen. Hlavní vstupní parametry pro tento výpočet jsou pořadí prvku, na kterém se právě vyskytujeme a také v jaké poloze se výška určuje (tyto polohy určují právě integrační body). Takto stanovené funkce se použijí ve výpočtu matice poddajnosti. Ukázka zadání charakteristik ve skriptu Matlabu:

```
nelem=4;              %počet prvku
nip=6;                %počet integračních bodů
E = 210000000;        %Pa
v = 0.3;              %Poissonovo číslo
k = 5/6;              %platí pro obdélník
td=0;                 %teplota z dolní strany nosníku
th=0;                 %teplota z horní strany nosníku
t=0;                  %teplota ve střednici prvku
a=1;                  %teplotní součinitel (koeficient) délkové roztažnosti
fx=0; fz=10;         %spojité zatížení
```

Ukázka výpočtu průřezových charakteristik pro obdélníkový průřez v Matlabu:

```
function [ A ] = funcA_obdelnik( b ,nelem,i)
%b je souřadnice Gaussových bodů
d1=0.2;               %výška průřezu
d2=0.1;               %výška průřezu
B=0.1;                %šířka průřezu
x = 0.5+0.5*b;        reálné přepočtení b na intervalu <0,1>
s = i-1;
d=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(x/nelem)));
A=B*d;
end

function [ Iy ] = funcIy_obdelnik( b,nelem,i)
d1=0.2;               %výška průřezu
d2=0.1;               %výška průřezu
B=0.1;                %šířka průřezu
x = 0.5+0.5*b;        reálné přepočtení b na intervalu <0,1>
s = i-1;
d=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(x/nelem)));
Iy=1/12*B*d^3;
end
```

Ukázka výpočtu průřezových charakteristik pro I průřez v Matlabu:

```
function [ A ] = funcA_Iprurez( b ,nelem,i)
%b je souřadnice Gaussových bodů
d1=10;                %výška průřezu
d2=2;                 %výška průřezu
B=4;                  %šířka průřezu
tf=0.5;               %šířka stojiny
tw=0.5;               %šířka pásnice
x = 0.5+0.5*b;
s = i-1;
d=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(x/nelem)));
A=2*B*tf+d*tw;
end
```



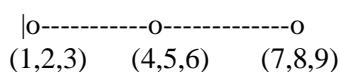
```

function [ Iy ] = funcIy_Iprurez( b,nelem,i)
d1=10;           %výška průřezu
d2=2;           %výška průřezu
B=4;            %šířka průřezu
tf=0.5;        %šířka stojiny
tw=0.5;        %šířka pásnice
x = 0.5+0.5*b;
s = i-1;
d=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(x/nelem)));
Iy=1/12*B*(d+2*tf)^3-2/12*((B-tw)/2)*d^3;
end

```

4.1.2 Přiřazení kódových čísel

Přiřazování kódových čísel probíhá ve všech variantách stejně. Každý uzel má tři stupně volnosti, takže každý by měl obsahovat tři kódová čísla příslušící třem posunům u , w , φ . Čísla přiřazujeme od předepsaných, kde je zabráněno posunu.



Obrázek 14: Pole kódových čísel (AUTOR, 2014)

Jak jde vidět na obrázku 14, jedná se nosník rozdělený na dva prvky. Na levém konci je vetknutí, nejdříve tedy přiřadíme tři kódová čísla vetknutí a pokračujeme dalšími uzly. V kódu jsou nazvány tyto předepsané posuny np a nepředepsané nn. Dále celkový počet stupňů $neq = np + nn$. V tomto případě: $np = 3$, $nn = 6$ a $neq = 9$. Z toho vyplývá, že matice tuhosti bude velikosti $neq \times neq$ s tím, že se budou určovat neznámé posuny 4-9. S přiřazením kódových čísel souvisí i pole souřadnic, které se vytvoří ze souřadnic jednotlivých uzlů a slouží ke stanovení délek jednotlivých polí a sestavení matice pro celou soustavu, viz Tabulka 18

4.1.3 Matice tuhosti

Výpočet matice tuhosti je založen na inverzi matice poddajnosti, která se spočte pomocí funkce **beam2d_maticepoddajnosti**. Ta se pro jednotlivé varianty trochu liší, protože je založena právě na průřezových charakteristikách, které se na rozdíl od konstantního nosníku u varianty S a T mění, viz Tabulka 19. Matice poddajnosti vznikne spočtením integrálu $\mathbf{P} = \int_0^1 \mathbf{S}^T(\xi) \mathbf{CS}(\xi) l d\xi$. Zde využijeme numerickou integraci přes stanovený počet integračních bodů (v tabulce označení n). Následuje popis principu této integrace.

n	ξ_i	α_i
1	0,000000000000000	2,000000000000000
2	±0.577350269189626	1,000000000000000
3	±0.774596669241483 0,000000000000000	0,555555555555555 0,888888888888888
4	±0,861136311594053 ±0,339981043584856	0,347854845137454 0,652145154862546
5	±0,906179845938664 ±0,538469310105683 0,000000000000000	0,236926885056189 0,478628670499366 0,568888888888889
6	±0,932469514203152 ±0,661209386466265 ±0,238619186083197	0,171324492379170 0,360761573048139 0,467913934572691

Tabulka 1: Souřadnice bodů a jejich váhy (Bittnar, 1992)

U integrálu typu $\int_a^b f(\xi)d\xi$ je postup následující. Máme k dispozici souřadnice Gaussových bodů ξ_i a váhové konstanty α_i pro interval $\langle -1,1 \rangle$. Při integraci na intervalu $\langle -a, b \rangle$ budou mít Gaussovy body souřadnice

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i$$

A váhové koeficienty budou

$$\frac{b-a}{2} \alpha_i$$

Numerická integrace pak spočívá v aproximaci integrálu sumací hodnot integrované funkce spočtené v integračním bodě a přenásobené příslušnými vahami (Bittnar, 1992):

$$\int_{-1}^1 f(\xi)d\xi \quad \text{ve tvaru}$$

$$\int_{-1}^1 f(\xi)d\xi \approx \alpha_1 f(\xi_1) + \alpha_2 f(\xi_2) + \dots + \alpha_n f(\xi_n)$$

4.1.3.1 Konstantní průřez C

V této variantě počet integračních bodů nijak neovlivňuje řešení. Matice poddajnosti průřezu C je nezávislá na poloze kde ji určujeme, proto může být stanovena z konstantních charakteristik průřezu a pouze dosazena do integrálu. Nyní stačí vzniklou inverzní matici poddajnosti přenásobit transformační maticí k získání matice tuhosti, viz rovnice (34). Ukázka výpočtu matice poddajnosti P v Matlabu, kde se vyskytuje ve všech metodách funkce **integration** poskytující hodnoty vah a souřadnic bodů, přes které integrujeme, viz Tabulka 20

```
function P = beam2d_maticepoddajnosti(E, v, k, A, Iy, xz, nip)
% xz = (x1, z1, x2, z2)
l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+((xz(4)-xz(2))^2));
G = E/(2*(1+v));

C=[1/(E*A) 0 0; 0 1/(E*Iy) 0; 0 0 1/(k*G*A)];

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac = 1/2;
P=zeros(3);
le=0.0;
for i=1:nip
    x = 0.5+0.5*b(i);
    S = [1 0 0; 0 -1*(1-x) x; 0 1/1 1/1];
    P = P+S'*C*S*w(i)*jac;
end;
end
```

4.1.3.2 Rozdělení na více prvků S

Zde už je matice poddajnosti prvku ovlivněna polohou na nosníku. Proto je potřeba znát vstupní parametry: pořadí nosníku, jejich celkový počet a samozřejmě tvar průřezu. Díky těmto informacím se stanoví matice C pro každý prvek a z nich také matice poddajnosti P každého prvku. Ty po přenásobení transformační maticí dle (34) pomocí funkce **assembly** sloučím s pomocí kódových čísel do matice tuhosti celého nosníku. Ukázka výpočtu matice poddajnosti P v Matlabu:

```
function P = beam2d_maticepoddajnosti_steps(E, v, k, xz, nip, i, nelem, tvar)
% xz = (x1, z1, x2, z2)
d1=0.2;
d2=0.1;
B=0.1;
s = i-1;
h1=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(0/nelem)));
h2=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(1/nelem)));
```

```

h=(h1+h2)/2;

%tvar==1 obdelnik
%tvar==2 I prurez
if tvar==1;
A=B*h;
Iy = 1/12*B*h^3;
end
if tvar==2;
A=2*B*tf+h*tw;
Iy=1/12*B*(h+2*tf)^3-2/12*((B-tw)/2)*h^3;
end
l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+(xz(4)-xz(2))^2);
G = E/(2*(1+v));

C=[1/(E*A) 0 0; 0 1/(E*Iy) 0; 0 0 1/(k*G*A)];

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac = 1/2;
P=zeros(3);
le=0.0;
for i=1:nip
    x = 0.5+0.5*b(i);
    S = [1 0 0; 0 -1*(1-x) x; 0 1/l 1/l];
    P = P+S'*C*S*w(i)*jac;
end;
end

```

4.1.3.3 Přesné řešení T

Přesné řešení je vlivem proměnnosti průřezu ovlivněno počtem integračních bodů. Proměnný průřez se promítá do charakteristik průřezu, které jsou funkcí polohy funkce pro výpočet plochy a momentu setrvačnosti v závislosti na poloze. Proto jsou parametrem funkce výpočtu matice poddajnosti. V tomto případě počet prvků neovlivňuje výsledky, jelikož se jedná o přesné řešení, ale poslouží nám k porovnávání přesnosti. Ukázka výpočtu matice poddajnosti \mathbf{P} v Matlabu:

```

function P = beam2d_maticepoddajnosti_tapered(E, v, k, funcA_Iprurez,
funcIy_Iprurez, xz, nip,nelem,o)

% xz = (x1, z1, x2, z2)
l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+(xz(4)-xz(2))^2);
G = E/(2*(1+v));

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac = 1/2;
P=zeros(3);
le=0.0;
for i=1:nip
    A=funcA_Iprurez(b(i),nelem,o);
    Iy=funcIy_Iprurez(b(i),nelem,o);
    x = 0.5+0.5*b(i);
    S = [1 0 0; 0 -1*(1-x) x; 0 1/l 1/l];
    C=[1/(E*A) 0 0; 0 1/(E*Iy) 0; 0 0 1/(k*G*A)];
    P = P+S'*C*S*w(i)*jac;
end;
end

```

Takto stanovené funkce pro výpočet matic poddajnosti \mathbf{P} jednotlivých metod jsou vloženy do skriptu, viz Tabulka 19

4.1.4 Vektor zatížení

Vektor zatížení tvoří pravou stranu soustavy rovnic. Vlastní výpočet má malé odlišnosti ve třech uváděných metodách k, které jsou způsobeny měnicími se průřezovými charakteristikami, jak tomu bylo

již při sestavování matic poddajnosti. Při sestavování vektoru zatížení vycházíme z tohoto zápisu vektoru deformací $\Delta_p = \int_0^1 \mathbf{S}^T(\xi) [\mathbf{C}\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\xi) + \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_0(\xi)] l d\xi$. K tomuto výpočtu využíváme zmíněné numerické integrace přes integrační body. Při stanovení zobecněných deformací, jež jsou způsobeny vnějším zatížením a zvýšením teploty, je do integrálu dosazena matice poddajnosti. Proto je nutné ji spočítat v této funkci znovu a doplnit ji o výpočet počátečních přetvoření $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_0 = \left\{ \alpha T, \alpha \frac{T_d - T_h}{h}, 0 \right\}^T$ a $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ f_x l (1 - \xi), \frac{f_x l^2}{2} \xi (1 - \xi), \frac{f_x l}{2} (1 - 2\xi) \right\}^T$. Vliv proměnného průřezu na výpočet matice poddajnosti je již popsán v kapitole 4.1.3, dále budou mít vliv ještě v počátečních přetvoření od oteplení. Výška h bude stejná jako při sestavování průřezových charakteristik u metody S a u metody T, bude výška h spočtena v místě integračního bodu. Po přenásobení vektoru deformací maticí poddajnosti, transformační maticí a odečtením $\bar{\mathbf{R}}$, které vychází ze závislosti koncových sil a je vyjádřeno rovnicí $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\beta}$, obdržíme vektor zatížení \mathbf{R}_p , funkcí **assemblyf** poté sloučíme vektory s pomocí kódových čísel do vektoru zatížení celého nosníku, viz Tabulka 21, Tabulka 22, Tabulka 23

4.1.5 Vektor posunů

Pomocí získané matice tuhosti a vektoru zatížení nosníku lze získat vektor posunů nosníku \mathbf{r} ($r = K \setminus R_p$), který využije jako srovnávací prostředek pro porovnávání přesnosti, při změnách parametrů a využívání jednotlivých variant. Po získání vektoru posunů už jen pro úplnost zbývá stanovit reakce na nosníku ($R = K * \mathbf{r} - R_p$), viz Tabulka 24

4.1.6 Vykreslení vnitřních sil

Nyní už lze vykreslit vnitřní síly po délce nosníku. Ve funkci **Vnitřní** využíváme předpis (21), kde hodnoty vnitřních sil stanovujeme v bodech na jednotlivých prvcích. Počet bodů si lze nastavit hodnotou q , která určuje, na kolik částí se nosník rozdělí. V tomto případě volíme $q = 1/5$ tzn., na každém prvku vykreslujeme hodnoty vnitřních sil v pěti bodech. Zde je podstatné stanovit vektor $\boldsymbol{\beta}$, nezávislých zobecněných koncových sil. $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}^{-1}(\hat{\mathbf{r}} - \Delta_p) \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}^{-1}(T\mathbf{r} - \Delta_p)$. Toto vyjádření už jen zbývá přenásobit statickou maticí \mathbf{S} a přičíst počáteční přetvoření $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ k získání vnitřních sil N_x , M_y a Q_z , viz Tabulka 25

4.2 Implementace matice hmotnosti

V této kapitole bude popsána implementace matic hmotnosti M1 a M3 na uvažované varianty konstantního průřezu C, rozdělení nosníku na více prvků o konstantní výšce S a přesnějšího řešení, kdy je výška průřezu popsána funkcí po délce nosníku T.

4.2.1 Varianta M1- Numerická integrace

Matice tuhosti M1 bude spočtena funkcí nazvanou **mass_matrix_int**. Jelikož je počítána pomocí průřezových charakteristik, tak se při použití u variant C, S a T trochu liší. Funkce slouží ke spočtení integrálu (39) pomocí numerické integrace.

Ve variantě konstantního průřezu C počet prvků nijak neovlivňuje řešení výsledné matice, musíme ale dodržovat počty prvků stanovené při tvoření matice tuhosti, k získání stejného počtu stupňů volnosti. Průřezové hodnoty a hmotnost nosníku na délku jsou brány konstantně. Můžeme tedy určit matici básových funkcí a spočítat integrál k získání matice hmotnosti, viz rovnice (39). Ukázka výpočtu matice hmotnosti M1 v Matlabu:

```
function Me = mass_matrix_int(E, v, k, A, Iy, xz, nip, ro)

l = sqrt((xz(3) - xz(1))^2 + (xz(4) - xz(2))^2);
G = E / (2 * (1 + v));
kappa = 6 * E * Iy / (k * G * A * l^2);

b = integration(nip);
w = integration(nip);
jac = 1/2;
```

```

Me=zeros(6,6);
for i=1:nip
    x = 0.5+0.5*b(i);
    h1=1-x;
    h2=x;
    h3=(1/(1*(1+2*kappa)))*(6*x-6*x^2);
    h4=(1/(1+2*kappa))*((1+2*kappa)-2*(2+kappa)*x+3*x^2);
    h5=(1/(1*(1+2*kappa)))*(-6*x+6*x^2);
    h6=(1/(1+2*kappa))*(-2*(1-kappa)*x+3*x^2);
    h7=(1/(1+2*kappa))*((1+2*kappa)-2*kappa*x-3*x^2+2*x^3);
    h8=(1/(1+2*kappa))*(-1*(1+kappa)*x+(2+kappa)*x^2-x^3);
    h9=(1/(1+2*kappa))*(2*kappa*x+3*x^2-2*x^3);
    h10=(1/(1+2*kappa))*(kappa*x+(1-kappa)*x^2-x^3);
N(1,1)=0;
N(1,2)=h7;
N(1,3)=h8;
N(1,4)=0;
N(1,5)=h9;
N(1,6)=h10;

    Me=Me+N'*ro*N*w(i)*jac;

end;
end
end

```

Při rozdělení nosníku na více prvků S, jak zde již bylo zmíněno, je výpočet ovlivněn polohou, funkce tedy už přijímá hodnoty spočtené na jednotlivých prvcích podle zvoleného tvaru a pořadí nosníku. Pro sestavení matice hmotnosti M1 funkce `mass_matrix_int` vyhovuje pro metodu C i S, ale v případě metody S musí být doplněn výpočet průměrných výšek na prvcích, které vstupují již do funkce.

V metodě T již hraje roli zvolený počet integračních bodů. Do funkce na výpočet matice hmotnosti jsou dosazeny průřezové charakteristiky jako funkce závislé na pořadí, poloze a tvaru nosníku podobně jako tomu bylo u sestavení matice tuhosti, viz rovnice (39). Ukázka výpočtu matice hmotnosti M1 v Matlabu:

```

function Me = mass_matrix_int(E, v, k, funcA_Iprurez, funcIy_Iprurez,
funcU_Iprurez, xz, nip, nelem, o, ro)

l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+((xz(4)-xz(2))^2));
G = E/(2*(1+v));

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac = l/2;
Me=zeros(6,6);
for i=1:nip;
    A=funcA_Iprurez(b(i),nelem,o);
    Iy=funcIy_Iprurez(b(i),nelem,o);
    u=ro*A;
    kappa = (6*E*Iy)/(k*G*A*l^2);
    x = 0.5+0.5*b(i);
    h1=1-x;
    h2=x;
    h3=(1/(1*(1+2*kappa)))*(6*x-6*x^2);
    h4=(1/(1+2*kappa))*((1+2*kappa)-2*(2+kappa)*x+3*x^2);
    h5=(1/(1*(1+2*kappa)))*(-6*x+6*x^2);
    h6=(1/(1+2*kappa))*(-2*(1-kappa)*x+3*x^2);
    h7=(1/(1+2*kappa))*((1+2*kappa)-2*kappa*x-3*x^2+2*x^3);
    h8=(1/(1+2*kappa))*(-1*(1+kappa)*x+(2+kappa)*x^2-x^3);
    h9=(1/(1+2*kappa))*(2*kappa*x+3*x^2-2*x^3);
    h10=(1/(1+2*kappa))*(kappa*x+(1-kappa)*x^2-x^3);

N(1,1)=0;
N(1,2)=h7;
N(1,3)=h8;

```

```

N(1,4)=0;
N(1,5)=h9;
N(1,6)=h10;

Me=Me+N'*u*N*w(i)*jac;

end;
end

```

Nyní nám už nic nebrání sestavit matici celé soustavy pomocí funkce **assemblyM** a kódových čísel pro všechny varianty.

4.2.2 Varianta M3

Jednoduchá funkce založená na celkové hmotnosti nosníku a jejím rozdělení svislým posunům do jednotlivých uzlů. Této varianty je využito pro sestavení matice hmotnosti pro metodu C, S a T. Tato funkce obsahuje pouze přenos ploch s objemovou hmotností materiálu a přidělení hmotnosti do příslušících uzlů. Ukázka výpočtu matice hmotnosti M3 v Matlabu:

```

m=0;
M3= zeros(neq,neq);
for i=1:nelem
    m=mass(u, [0; 0 ;1.5 ;0],m);
end
% mass je fce na výpočet hmotnosti, vstupuje hmotnosti nosníku na jednotku délky
for i=1:(nelem-1)
M3((i)*3+2,(i)*3+2)=m/nelem;
M3(2,2)=(m/nelem)/2;
M3(neq-1,neq-1)=(m/nelem)/2;
end

```

4.3 Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Nyní bychom měli mít dle předchozího postupu k dispozici matici tuhosti **K** i matici hmotnosti **M** pro celý nosník, pokud jsme dodrželi stejný počet prvků u obou výpočtů, mají tyto matice stejnou velikost $neq \times neq$. Ty lze dosadit do funkce **eig**, kterou Matlab nabízí a řeší problém vlastních čísel. V našem případě do funkce dosazujeme pouze ty prvky matic, které slouží k určení neznámých posunů, toho docílíme pomocí hodnoty np (předepsaných posunů). Výstupem této funkce je matice velikosti $(neq - np) \times (neq - np)$, na jejíž diagonále jsou jednotlivá vlastní čísla představující druhou mocninu vlastní frekvence ω_n^2 a matice druhá obsahující vlastní vektory představující tvary vlastního kmitání φ_n , kdy pořadí sloupce vlastní čísla a příslušného vlastního vektoru se shoduje. Vlastní čísla a jejich příslušné vektory seřadíme pomocí funkce **sort** a můžeme přejít k vykreslování vlastních tvarů. Vlastní tvary budou sloužit společně s vlastními frekvencemi jako pomůcka k určování odchylek mezi jednotlivými variantami řešení, viz Tabulka 26

Vykreslení vlastních tvarů

Nejdříve budou získané vlastní tvary znormovány dle (Máca, 2013) :

$$\hat{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\sqrt{\varphi_n^T M \varphi_n}} \quad (41)$$

Ve funkci na vykreslování vlastních tvarů jde o stejný problém proměnného průřezu jako u matice tuhosti, opakuje se zde stejný princip konstantních hodnot průřezových charakteristik u konstantního průřezu, informací o poloze na nosníku u metody S a zařazení funkce na průřezové charakteristiky v případě metody T. Do výchylek vstupují již znormované vlastní tvary, jejich počet určuje index, v našem případě volíme čtyři vlastní tvary a hodnota q, která určuje, v kolika místech na prvku se vlastní tvar vykreslí. Pro vykreslení svislých výchylek jsou zde využity prvky z matice básových funkcí **N** příslušejícím řádku svislého posunu a hodnot w, φ z vlastního tvaru.

$$w(x) = h_7(x)w_1 + h_8(x)\varphi_1 + h_9(x)w_2 + h_{10}(x)\varphi_2$$

Takto lze stanovit výchylky v jednotlivých uzlech a následně vykreslit do grafu. Vodorovná osa představuje délku nosníku a svislá osa normované hodnoty svislých výchylek, viz Tabulka 27

5 Porovnání a ověření výsledků

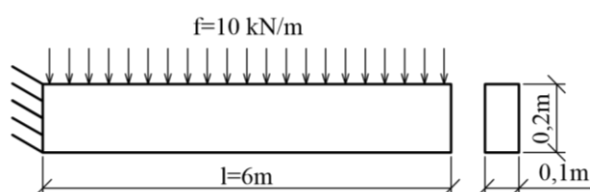
Tato kapitola bude věnována ověření správnosti vlastní implementace na řešení vybraných příkladů. Pro kontrolu matice tuhosti konstantního průřezu využijí ručního výpočtu. V případě proměnného průřezu využijeme výsledky publikované v práci (Yaw, 2009). Zde ověřím správnost sestavení matice tuhosti i vektoru výsledných posunů.

5.1 Ověření správnosti matice tuhosti

K ověření matice tuhosti je využito vlastního zadání příkladu, které je pak ověřeno ručním výpočtem.

5.1.1 Konstantní průřez

Zadání příkladu:



Obrázek 15: Konstantní nosník (AUTOR, 2014)

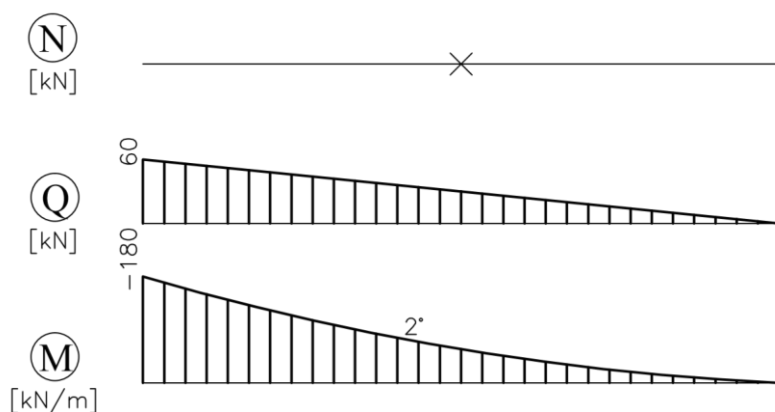
Konzola vetknutá na levém konci. Její délka je $l=6\text{ m}$, šířka $b=0,1\text{ m}$ a výška $h=0,2\text{ m}$. Modul pružnosti $E=30\,000\,000\text{ Pa}$. Konzola je zatížena spojitým zatížením $f=10\text{ kN/m}$.

Výsledky Matlab:

V tabulce je spočtená matice tuhosti \mathbf{K} , vektor posunů \mathbf{r} , vektor zatížení \mathbf{f} , reakce \mathbf{R}

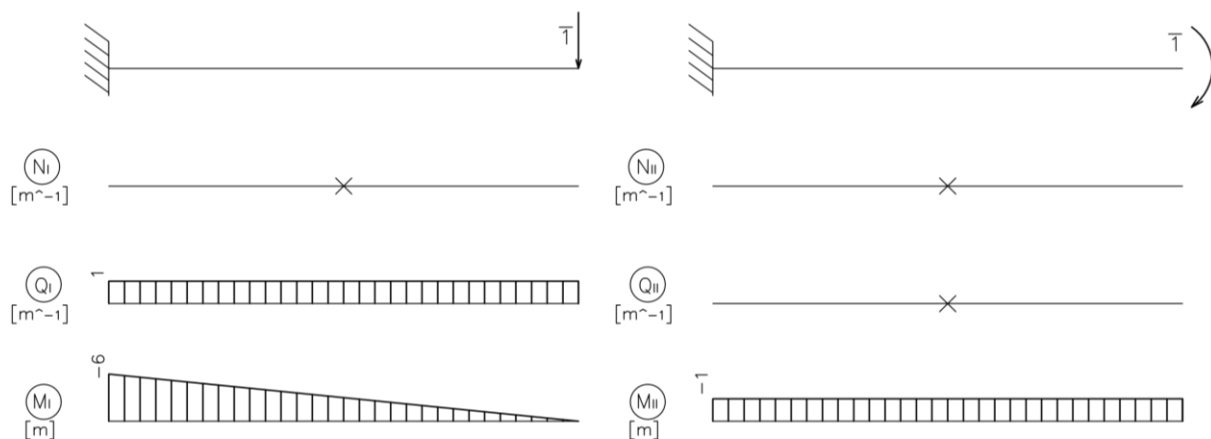
$\mathbf{K} =$	$\mathbf{r} =$	$\mathbf{f} =$	$\mathbf{R} =$
$1.0\text{e}+005 *$			
1.0000 0 0 -1.0000 0 0	0	0	0
0 0.0011 -0.0033 0 -0.0011 -0.0033	0	30.0000	-60.0000
0 -0.0033 0.0133 0 0.0033 0.0066	0	-30.0000	180.0000
-1.0000 0 0 1.0000 0 0	0	0	0
0 -0.0011 0.0033 0 0.0011 0.0033	0.8109	30.0000	-0.0000
0 -0.0033 0.0066 0 0.0033 0.0133	-0.1800	30.0000	-0.0000

Z vektoru posunů \mathbf{r} můžeme odečíst, že posun na volném konci je $w=0,8109\text{ m}$ a pootočení $\varphi=-0,18\text{ rad}$. Správnosti řešení odpovídá i průběh vnitřních sil na nosníku.



Obrázek 16: Průběh vnitřních sil. N- normálová síla, Q- posouvací síla, M- ohybový moment (AUTOR, 2014)

Ruční ověření výpočtu



Obrázek 17: Vykreslení vnitřních sil pro jednotkové stavy hledaného přetvoření (AUTOR, 2014)

Svislý posun w

$$\bar{1} * w = \int \frac{M_F M_I}{EI} ds + \int \frac{N_F N_I}{EA} ds + \int \frac{\kappa Q_F Q_I}{AG} ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} * 180 * 6 * 6 \right) + \frac{\kappa}{AG} \left(\frac{1}{2} * 60 * 1 * 6 \right)$$

$$= 0,81 \text{ m}$$

$$\kappa = \frac{6EI}{5GA I^2} = \frac{13}{7500}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{30000000}{2(1 + 0,3)}$$

Pootočení φ

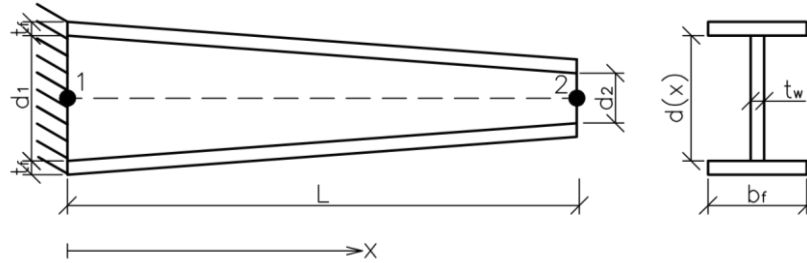
$$\bar{1} * \varphi = \int \frac{M_F M_{II}}{EI} ds + \int \frac{N_F N_{II}}{EA} ds + \int \frac{\kappa Q_F Q_{II}}{AG} ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} * 180 * 1 * 6 \right) = 0,18 \text{ rad}$$

Posun a pootočení na volném konci, spočtené v Matlabu, se s ručním výpočtem shodují.

5.1.2 Proměnný průřez

K ověření matice tuhosti využíváme výsledky publikované v práci (Yaw, 2009).

Zadání příkladu:



Obrázek 18: Lineárně proměnný I- nosník (Yam, 2009)

Jedná se o konzolu vetknutou na levém konci nosníku. Nosník má následující vlastnosti: $d_1=10$ palců, $d_2= 2$ palce, $t_f= 0,5$ palců, $t_w= 0,5$ palců, $b_f= 4$ palce, $L= 120$ palců. Modul pružnosti $E= 29\,000\,000$ Pa. Na volném konci je umístěna síla $F= 10$ kN.

Výška $d(x) = d_1 + (d_2 - d_1)\frac{x}{L}$

Plocha $A(x) = 2t_f b_f + t_w d(x)$

Moment setrvačnosti $I(x) = t_w \frac{d(x)^3}{12} + 2t_f b_f \left(\frac{d(x)+t_f}{2}\right)^2 + \frac{2b_f t_f^3}{12}$

Výsledky Matlab:

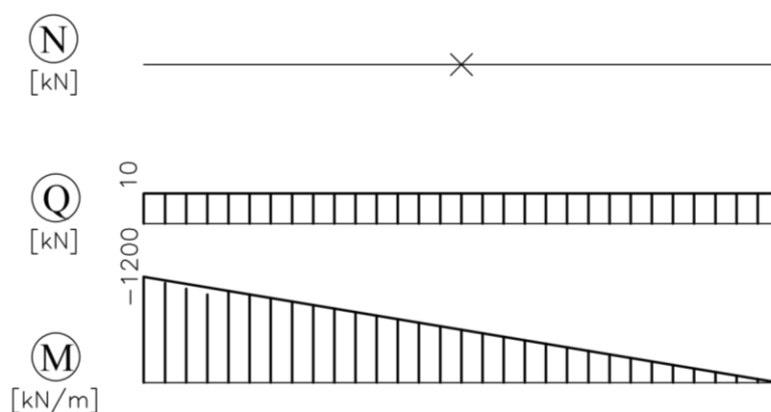
Matice poddajnosti p

$$p = 1 * 10^3 \begin{bmatrix} 0.6081 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0175 & -0.0184 \\ 0 & -0.0184 & 0.0838 \end{bmatrix}$$

V tabulce je spočtená matice tuhosti K , vektor posunů r , vektor zatížení f , reakce R

K =	r =	f =	R =
1.0e+004 *			
0.1645 0 0 -0.1645 0 0	0	0	0
0 0.0008 -0.0753 0 -0.0008 -0.0265	0	0	-10
0 -0.0753 7.4128 0 0.0753 1.6256	0	0	1200
-0.1645 0 0 0.1645 0 0	0	0	0
0 -0.0008 0.0753 0 0.0008 0.0265	2.5228	10	0
0 -0.0265 1.6256 0 0.0265 1.5500	-0.0431	0	0

Z vektoru posunů r vyplývá, že posun na volném konci je $w= 2,5228$ palců a pootočení $\varphi= -0,0431$ rad. Správnosti řešení odpovídá i průběh vnitřních sil na nosníku.



Obrázek 19: Průběh vnitřních sil. N- normálová síla, Q- posouvací síla, M- ohybový moment (AUTOR, 2014)

Výsledky článku (Yaw, 2009):

Matice poddajnosti D_n

$$D_n = \begin{bmatrix} +6.05055e - 4 & +0.00000000 & +0.00000000 \\ +0.00000000 & +1.75211e - 5 & -1.83650e - 5 \\ +0.00000000 & -1.83650e - 5 & 8.37943e - 5 \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti k

$$k = \begin{bmatrix} 1644.6 & 0 & 0 & -1644.6 & 0 & 0 \\ 0 & 8.4769 & 752.79 & 0 & -8.4769 & 264.44 \\ 0 & 752.79 & 74096 & 0 & -752.79 & 16239 \\ -1644.6 & 0 & 0 & 1644.6 & 0 & 0 \\ 0 & -8.4769 & -752.79 & 0 & 8.4769 & -264.44 \\ 0 & 264.44 & 16239 & 0 & -264.44 & 15493 \end{bmatrix}$$

Reakce ve vetknutí jsou: Vodorovná = 0.0, Svislá = 10 kN směrem nahoru, Moment = 1200 kNm.

Nyní můžeme ověřit, že naše matice tuhosti, matice poddajnosti a přemístění volného konce odpovídá hodnotám z článku, a hodnoty svislého posunu $\delta_i = 2,523$ palců a pootočení je $\varphi = -0,043063$ rad na volném konci jsou shodné.

5.1.3 Vliv metod C, S a T na statické účinky

V této kapitole bude zobrazen rozdíl mezi přístupy k sestavování matic tuhosti pro jednotlivé metody C, S a T. Účinky metod zobrazíme v tabulkách pomocí posunů na volném konci nosníku dle zadání příkladu v kapitole 5.3. Metoda T je přesným řešením matice tuhosti, proto budou ostatní přístupy porovnávány s výsledky získané touto metodou (v tabulce vyznačeno šedou barvou).

$$\%Chyba = \left(\frac{\delta - \delta^P}{\delta^P} \right) 100\%$$

δ	Metoda C	Metoda S-4	Metoda S-12	Metoda T
w (m)	0,2745	0,1743	0,1695	0,1689
φ (rad)	-0,061	-0,0432	-0,0422	-0,0421

Tabulka 2: Posuny na volném konci (AUTOR, 2014)

V tabulce je zobrazena chyba pro metodu C a S při rozdělení nosníku na 4 a 12 prvků.

Chyba % δ	Metoda C	Metoda S-4	Metoda S-12
w (%)	62,52	3,20	0,36
φ (%)	44,89	2,61	0,24

Tabulka 3: Chyba mezi posuny pro přístupy C, S, T (AUTOR, 2014)

Z tabulky je zřejmé, že při rozdělení nosníku u metody S na 12 prvků se chyba sníží přibližně 10x oproti variantě rozdělení na 4 prvky, což lze považovat za dobrou shodu vzhledem k jednoduchosti výpočtu metody S oproti přesnému řešení získaného metodou T, kde je komplikované popsat měnící se průřezové charakteristiky, ovšem za cenu toho, že máme mnohem více stupňů volnosti.

Následující tabulka popisuje vliv volby počtu integračních bodů nip na posuny a pootočení na volném konci nosníku, tato volba se projevuje v metodách S a T. Jednotlivé hodnoty porovnáváme s vypočteným posunem a pootočením metodou T, při volně integrace přes šest bodů (v tabulce vyznačeno šedou barvou).

Počet prvků (nelem)	Počet int. bodů (nip)	Metoda C		Metoda S		Metoda T	
		w (m)	φ (rad)	w (m)	φ (rad)	w (m)	φ (rad)
1	1	0,2745	-0,061	0,2745	-0,061	0,1373	-0,0457
	2	0,2745	-0,061	0,2745	-0,061	0,1687	-0,0413
	3	0,2745	-0,061	0,2745	-0,061	0,0837	-0,0313
	4	0,2745	-0,061	0,2745	-0,061	0,1689	-0,0421
	5	0,2745	-0,061	0,2745	-0,061	0,1689	-0,0421
	6	0,2745	-0,061	0,2745	-0,061	0,1689	-0,0421
4	1	0,2745	-0,061	0,167	-0,042	0,167	-0,042
	2	0,2745	-0,061	0,1743	-0,0432	0,1689	-0,042
	3	0,2745	-0,061	0,144	-0,0371	0,1517	-0,0393
	4	0,2745	-0,061	0,1743	-0,0432	0,1689	-0,0421
	5	0,2745	-0,061	0,1743	-0,0432	0,1689	-0,0421
	6	0,2745	-0,061	0,1743	-0,0432	0,1689	-0,0421

Tabulka 4: Posuny na volném konci ovlivněné volbou počtu integračních bodů (AUTOR, 2014)

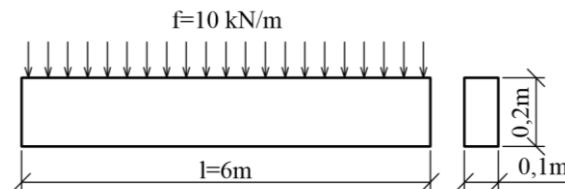
Počet prvků (nelem)	Počet int. bodů (nip)	Metoda C		Metoda S		Metoda T	
		w (%)	φ (%)	w (%)	φ (%)	w (%)	φ (%)
1	1	31,44	38,95	62,52	44,89	18,71	8,55
	2	31,44	38,95	62,52	44,89	0,12	1,90
	3	31,44	38,95	62,52	44,89	50,44	25,65
	4	31,44	38,95	62,52	44,89	0,00	0,00
	5	31,44	38,95	62,52	44,89	0,00	0,00
	6	31,44	38,95	62,52	44,89	0,00	0,00
4	1	31,44	38,95	1,12	0,24	1,12	0,24
	2	31,44	38,95	3,20	2,61	0,00	0,24
	3	31,44	38,95	14,74	11,88	10,18	6,65
	4	31,44	38,95	3,20	2,61	0,00	0,00
	5	31,44	38,95	3,20	2,61	0,00	0,00
	6	31,44	38,95	3,20	2,61	0,00	0,00

Tabulka 5: Chyba mezi posuny a pootočením při volbě integračních bodů (AUTOR, 2014)

5.2 Ověření správnosti výpočtu matice hmotnosti

5.2.1 Konstantní průřez

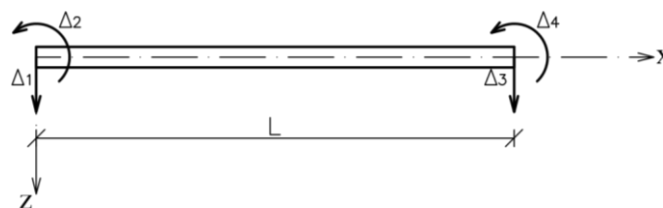
Zde je využito stejného příkladu jako v kapitole 5.1.1 pro ověření správnosti matice tuhosti.



Obrázek 20: Konstantní nosník (AUTOR, 2014)

Konzola vetknutá na levém konci. Její délka je $l=6\text{ m}$, šířka $b=0,1\text{ m}$ a výška $h=0,2\text{ m}$. Modul pružnosti $E=30\,000\,000\text{ Pa}$.

Pokud je implementace varianty matice hmotnosti pro konstantní průřez M1 správná, tak by se její výsledek měl shodovat s výsledkem implementace matice hmotnosti M2.



Obrázek 21: Zobrazení posunů (AUTOR, 2014)

Implementace matice hmotnosti dle vzorce (37)

M2 =

$$\begin{pmatrix} 0.1114 & -0.0942 & 0.0386 & 0.0558 \\ 0 & 0.1028 & -0.0558 & -0.0772 \\ 0 & 0 & 0.1114 & 0.0942 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1028 \end{pmatrix}$$

$$m_{ii} = 0.4228$$

$$\text{alfa} = \text{delta} * m / \sum m_{ii}$$

$$\text{alfa} = 1.4192$$

Matice M2 po diagonalizaci

M2 =

$$\begin{pmatrix} 0.1581 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1459 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1581 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1459 \end{pmatrix}$$

Implementace matice hmotnosti M1 dle (39)

M1 =

$$\begin{pmatrix} 0.1114 & -0.0942 & 0.0386 & 0.0558 \\ -0.0942 & 0.1028 & -0.0558 & -0.0772 \\ 0.0386 & -0.0558 & 0.1114 & 0.0942 \\ 0.0558 & -0.0772 & 0.0942 & 0.1028 \end{pmatrix}$$

M1 =

$$\begin{pmatrix} 0.1581 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1459 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1581 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1459 \end{pmatrix}$$

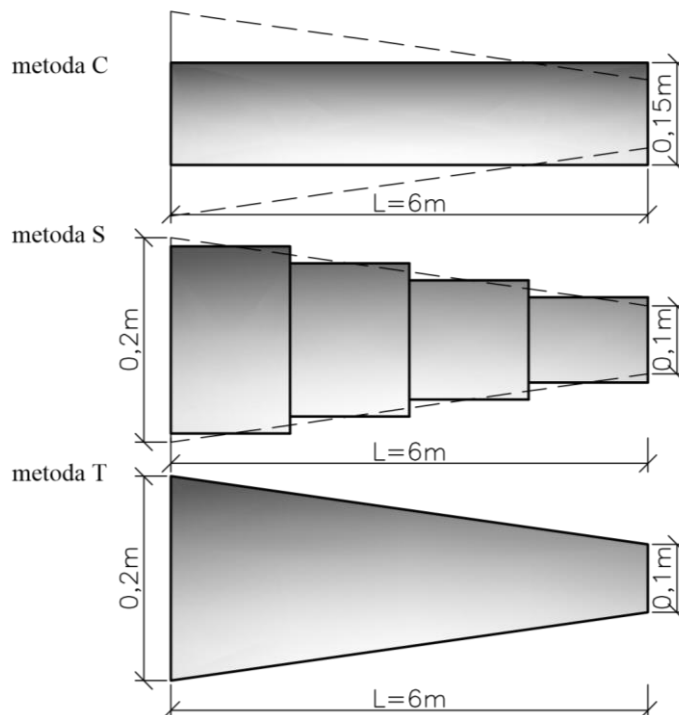
Jak lze vidět, matice hmotnosti M1 a M2 se po diagonalizaci shodují, můžeme tedy variantu M1- numerickou integraci použít pro řešení zbylých metod S a T. K získání koeficientu α , kterým přenásobujeme hodnoty na diagonále slouží pouze hmotnosti příslušející posunům. Vodorovný posun získáme dle postupu stanoveném v kapitole 3.1.

5.3 Vlastní kmitání nosníku s proměnným průřezem

Zde se budeme věnovat porovnávání výsledků vlastního kmitání jednotlivých metod C, S, T a variant stanovování matic hmotnosti na zvoleném příkladu.

Zadání příkladu

Jedná se o konzolu vetknutou na levém konci nosníku. Nosník má následující vlastnosti: $L=6$ metrů, modul pružnosti $E=210\,000\,000$ Pa, Poissonovo číslo $\nu=0,3$, $k=5/6$, objemová hmotnost $\rho=7850$ kg/m³, šířka nosníku $b=0,1$ m. Metoda C: nosník má po délce konstantní výšku $h=0,15$ m. Metoda S: $h_1=0,2$ m, $h_2=0,1$ m. Metoda T: $h_1=0,2$ m, $h_2=0,1$ m.



Obrázek 22: Schéma zvoleného příkladu (AUTOR, 2014)

Ve všech případech budeme uvažovat rozdělení nosníku na čtyři prvky o délce 1,5 m, z důvodu získání matic tuhosti a hmotnosti o stejné velikosti, tedy jednotlivá řešení budou mít shodný počet stupňů volnosti.

Metoda C

Matice tuhosti

K=1.0e+006 *

2.1000	0	0	-2.1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0204	-0.0153	0	-0.0204	-0.0153	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0153	0.0154	0	0.0153	0.0075	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.1000	0	0	4.2000	0	0	-2.1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0204	0.0153	0	0.0407	0	0	-0.0204	-0.0153	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0153	0.0075	0	0	0.0308	0	0.0153	0.0075	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2.1000	0	0	4.2000	0	0	-2.1000	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0204	0.0153	0	0.0407	0	0	-0.0204	-0.0153	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0153	0.0075	0	0	0.0308	0	0.0153	0.0075	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2.1000	0	0	4.2000	0	0	-2.1000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0204	0.0153	0	0.0407	0	0	-0.0204	-0.0153	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0153	0.0075	0	0	0.0308	0	0.0153	0.0075	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.1000	0	0	2.1000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0204	0.0153	0	0.0204	0.0153	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0153	0.0075	0	0.0153	0.0154	0	0

Matice hmotnosti

M1=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0929	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0053	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.1859	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.0107	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1859	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0107	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1859	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0107	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0929	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0053

Matice hmotnosti
M3=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0883	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.1766	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1766	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1766	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0883	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vlastní čísla

$(K-\omega_n^2\mathbf{M1})\varphi_n=0$	$(K-\omega_n^2\mathbf{M3})\varphi_n=0$
1.0e+006 *	1.0e+005 *
0.0004	0.0045
0.0142	0.1554
0.0958	1.0809
0.2950	3.2421
1.6211	Inf
2.4967	Inf
3.5697	Inf
4.3134	Inf
Inf	Inf
Inf	Inf
Inf	Inf
Inf	Inf

Metoda S

Matice tuhosti

 $\mathbf{K}=1.0e+006^*$

2.6250	0	0	-2.6250	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0391	-0.0293	0	-0.0391	-0.0293	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0293	0.0297	0	0.0293	0.0143	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.6250	0	0	4.9000	0	0	-2.2750	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0391	0.0293	0	0.0649	0.0100	0	-0.0258	-0.0193	0	0	0	0	0	0
0	-0.0293	0.0143	0	0.0100	0.0492	0	0.0193	0.0095	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2.2750	0	0	4.2000	0	0	-1.9250	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0258	0.0193	0	0.0415	0.0075	0	-0.0158	-0.0118	0	0	0
0	0	0	0	-0.0193	0.0095	0	0.0075	0.0314	0	0.0118	0.0058	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1.9250	0	0	1.9250	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0158	0.0118	0	0.0158	0.0118	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0118	0.0058	0	0.0118	0.0119	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Matice hmotnosti

 $\mathbf{M1} =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.1160	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.2166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.0124	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1859	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0107	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1551	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0089	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0698	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0040

Matice hmotnosti

M3=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.1104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.2061	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1766	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1472	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0662	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vlastní čísla

$(K-\omega_n^2 \mathbf{M1})\varphi_n=0$	$(K-\omega_n^2 \mathbf{M3})\varphi_n=0$
1.0e+006 *	0.0008
	1.0e+005 *
	0.0088
	0.0155
	0.1707
	0.0875
	0.9940
	0.2963
	3.3669
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf

Metoda T

Matice tuhosti

K=1.0e+006*

2.6211	0	0	-2.6211	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0390	-0.0312	0	-0.0390	-0.0273	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0312	0.0326	0	0.0312	0.0142	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.6211	0	0	4.8916	0	0	-2.2705	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0390	0.0312	0	0.0647	0.0066	0	-0.0257	-0.0178	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0273	0.0142	0	0.0066	0.0484	0	0.0207	0.0094	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2.2705	0	0	4.1902	0	0	-1.9197	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0257	0.0207	0	0.0414	0.0049	0	-0.0157	-0.0107	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0178	0.0094	0	0.0049	0.0307	0	0.0128	0.0058	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1.9197	0	0	3.4882	0	0	-1.5685	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0157	0.0128	0	0.0243	0.0035	0	-0.0086	-0.0058	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0107	0.0058	0	0.0035	0.0179	0	0.0072	0.0032	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.5685	0	0	1.5685	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0086	0.0072	0	0.0086	0.0058	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0058	0.0032	0	0.0058	0.0055	0

Matice hmotnosti

M1=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.1201	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.2166	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.0124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1859	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0107	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1551	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0089	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0657	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0039

Matice hmotnosti

M3=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.1104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.2061	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1766	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1472	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0662	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vlastní čísla

$(K-\omega_n^2 \mathbf{M1})\varphi_n=0$	$(K-\omega_n^2 \mathbf{M3})\varphi_n=0$
1.0e+006 *	0.0009
	1.0e+005 *
	0.0091
	0.0165
	0.1779
	0.0929
	1.0505
	0.3201
	3.5951
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf
	Inf

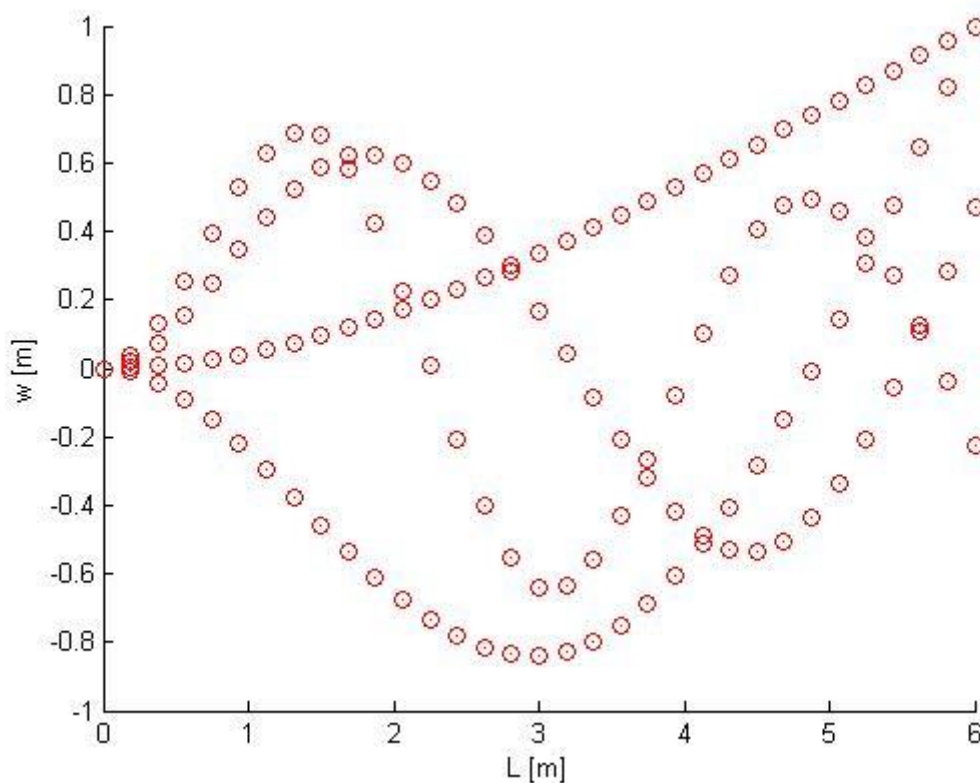
5.3.1 Porovnání vlastních frekvencí

Nyní můžeme přistoupit k porovnávání vlastních kruhových frekvencí jednotlivých metod a přístupů. Jejich hodnoty budou zobrazeny v tabulkách a doplněny o výpočet chyby mezi jednotlivými variantami.

V případě vlastních kruhových frekvencí je chyba stanovována následovně

$$\%Chyba = \left(\frac{\omega - \omega^P}{\omega^P} \right) 100\%$$

Při porovnávání spočtených frekvencí mezi přístupy, pro sestavení matice hmotnosti M1 a M3, značí ω^P přesné řešení. Za to budeme v našem případě považovat frekvence získané maticí M1 v metodě T rozděleného nosníku na dvacet prvků.



Obrázek 23: Příklad vykreslení vlastních tvarů pro matici M1 v metodě C

Chybu určujeme pro první čtyři vlastní frekvence. Hodnoty ω_n pro zadání nosníku rozdělného na čtyři prvky jsou pro metody C, S a T zobrazeny v tabulce. Námí uvažované přesné řešení rozdělení metody T na 20 prvků, s kterým budeme hodnoty porovnávat, je v tabulce popsané T- 20 (v tabulce vyznačeno šedou barvou).

Vlastní frekvence	Metoda C		Metoda S		Metoda T		T- 20
	M1	M3	M1	M3	M1	M3	
ω_n	M1	M3	M1	M3	M1	M3	M1
ω_1	20,74	21,21	28,81	29,66	29,66	30,17	20,74
ω_2	119,08	124,66	124,58	130,65	128,41	133,38	119,08
ω_3	309,55	328,77	295,79	315,28	304,78	324,11	309,55
ω_4	543,13	569,39	544,38	580,25	565,74	599,59	543,13

Tabulka 6: Vlastní frekvence (AUTOR, 2014)

Ze zobrazených hodnot je zřejmé, že hodnota vlastních frekvencí klesá se snižující se hmotností nosníku. V následující tabulce je zobrazena chyba pro jednotlivé metody C, S a T mezi variantami sestavení matice hmotnosti M1, M3 a přesným řešením.

Chyba % ω	Metoda C		Metoda S		Metoda T	
ω_n (%)	M1	M3	M1	M3	M1	M3
ω_1 (%)	33,07	31,53	7,02	4,26	4,26	2,64
ω_2 (%)	19,53	15,76	15,82	11,71	13,23	9,87
ω_3 (%)	18,28	13,21	21,92	16,77	19,54	14,44
ω_4 (%)	24,26	20,60	24,08	19,08	21,11	16,38

Tabulka 7: Chyba frekvencí varianty matic M1 a M3 (AUTOR, 2014)

V případě metody S a využití matice M1 je chyba u prvního vlastního tvaru 7,02 %, v případě metody T je chyba 4,26 %, což nepovažujeme za velkou odchylku, vzhledem k tomu, že nosníky jsou zde rozděleny na čtyři prvky.

Pro doplnění je v další tabulce spočtena chyba frekvencí mezi metodami C, S a T pro jednotlivé varianty matic hmotnosti M1 a M3, při rozdělení nosníku na čtyři prvky. Vlastní frekvence jsou ve vzorcích značeny C, S a T podle toho, které metodě přísluší.

Chyba % ω	M1			M3		
ω_n (%)	$\left(\frac{C-T}{T}\right) 100\%$	$\left(\frac{C-S}{S}\right) 100\%$	$\left(\frac{S-T}{T}\right) 100\%$	$\left(\frac{C-T}{T}\right) 100\%$	$\left(\frac{C-S}{S}\right) 100\%$	$\left(\frac{S-T}{T}\right) 100\%$
ω_1 (%)	30,10	28,02	2,88	29,68	28,49	1,66
ω_2 (%)	7,27	4,41	2,99	6,54	4,59	2,04
ω_3 (%)	1,56	4,65	2,95	1,44	4,28	2,73
ω_4 (%)	4,00	0,23	3,78	5,04	1,87	3,23

Tabulka 8: Chyba frekvencí mezi přístupy C, S a T, pro čtyři prvky (AUTOR, 2014)

Ve třetím sloupci je spočtena chyba mezi metodami S a T, která je zde stěžejní. Lze pozorovat zvyšující se chybu s pořadím vlastního tvaru, která se pohybuje většinou do tří procent, již při rozdělení nosníku na čtyři prvky. Díky jednoduchosti zvyšování počtu prvků na nosníku je možné přiblížit se k řešení metodou T, která je v tomto případě nejpřesnější s poměrně malou chybou. V příkladech vložených do kapitoly 6.1 bude uvedeno zpřesnění metod S a T, rozdělením nosníku na více prvků, k získání přesnějšího řešení. Budou zde spočteny vlastní frekvence a z nich stanovené chyby, z nichž bude možné pozorovat snižující se odchylky mezi metodami se zvyšujícím se počtem nosníků. Kvůli rozsáhlosti matic tuhostí a hmotností je zde již nebudeme zobrazovat.

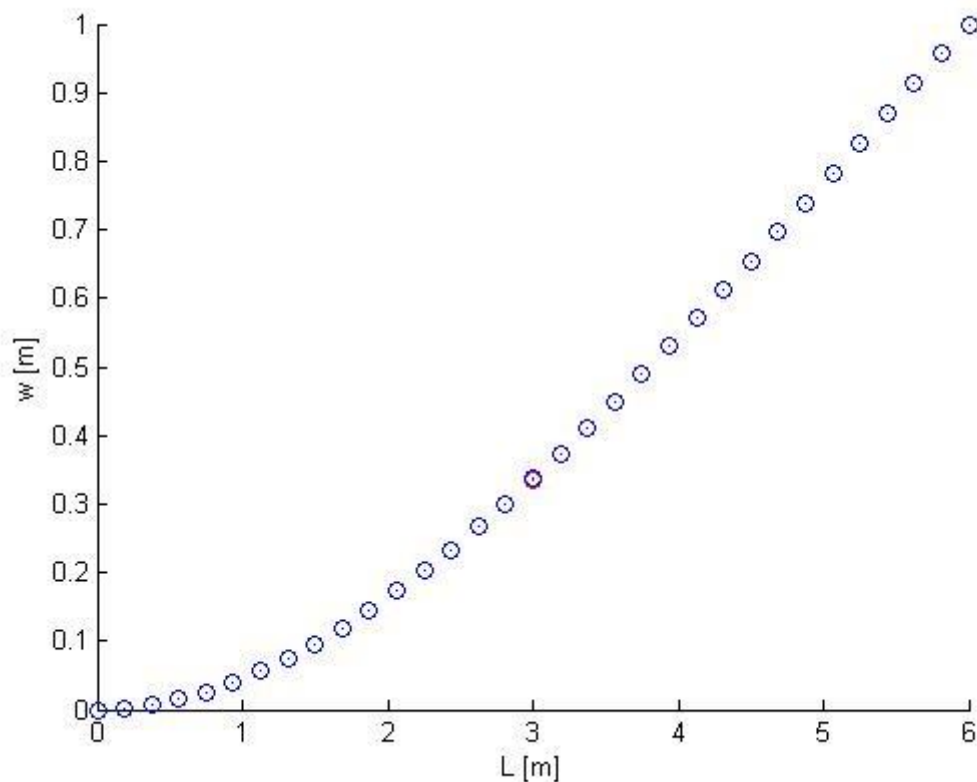
5.3.2 Porovnání vlastních tvarů

Při porovnávání vlastních tvarů je chyba stanovována takto

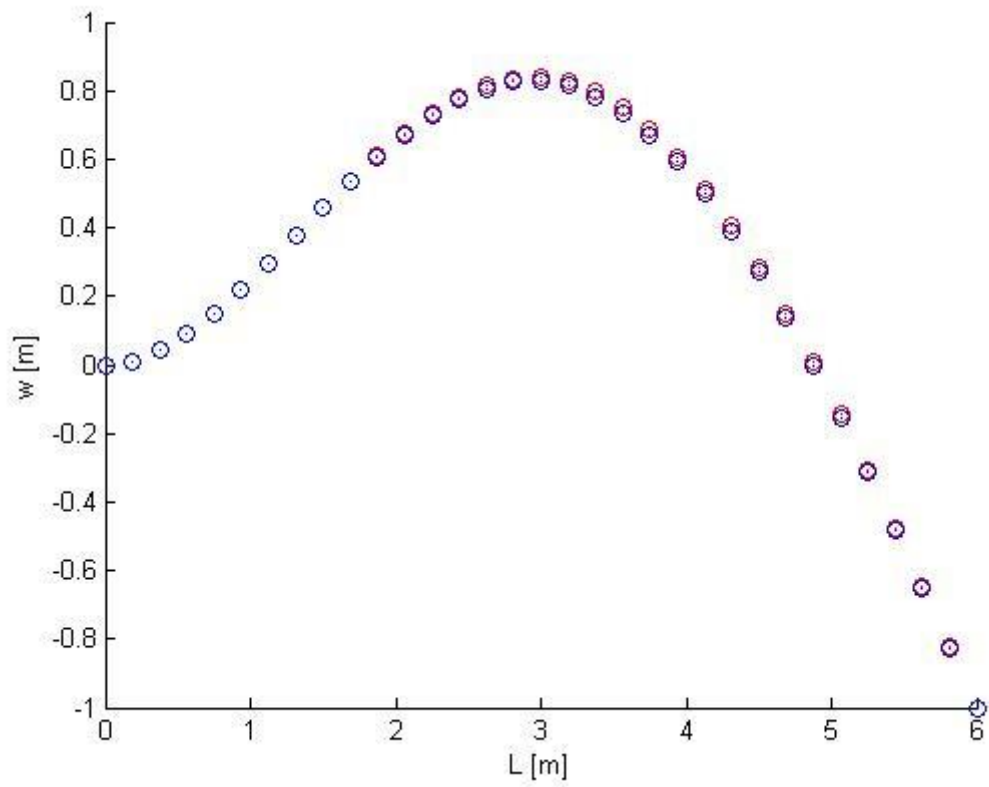
$$\int (\varphi - \varphi^p)^2 * 100\%$$

Je zde využito numerické integrace v Matlabu, kdy se výpočet porovnávaných variant matic hmotnosti vyskytuje v jednom skriptu. Poté je možné spočítat chybu mezi jednotlivými variantami pro naše tři metody. Před spočtením chyby se stanovuje pořadí vlastního tvaru, u kterého chceme chybu určit. Do funkce na výpočet chyb vstupují normované vlastní tvary dvou porovnávaných variant, pořadí nosníků a také průřezové charakteristiky. Z toho plyne, že tato funkce bude mít malé odlišnosti pro porovnávání jednotlivých přístupů C, S, T, viz Tabulka 28. V následujících obrázcích budou zobrazeny rozdíly ve vykreslení čtyř vlastních tvarů při užití variant M1 a M3. Varianta M1 je v obrázcích zobrazena červenou barvou a varianta M3 modrou. Toto zobrazení slouží jen pro představení odchylek mezi jednotlivými variantami. Konkrétní chyby budou spočteny v tabulkách.

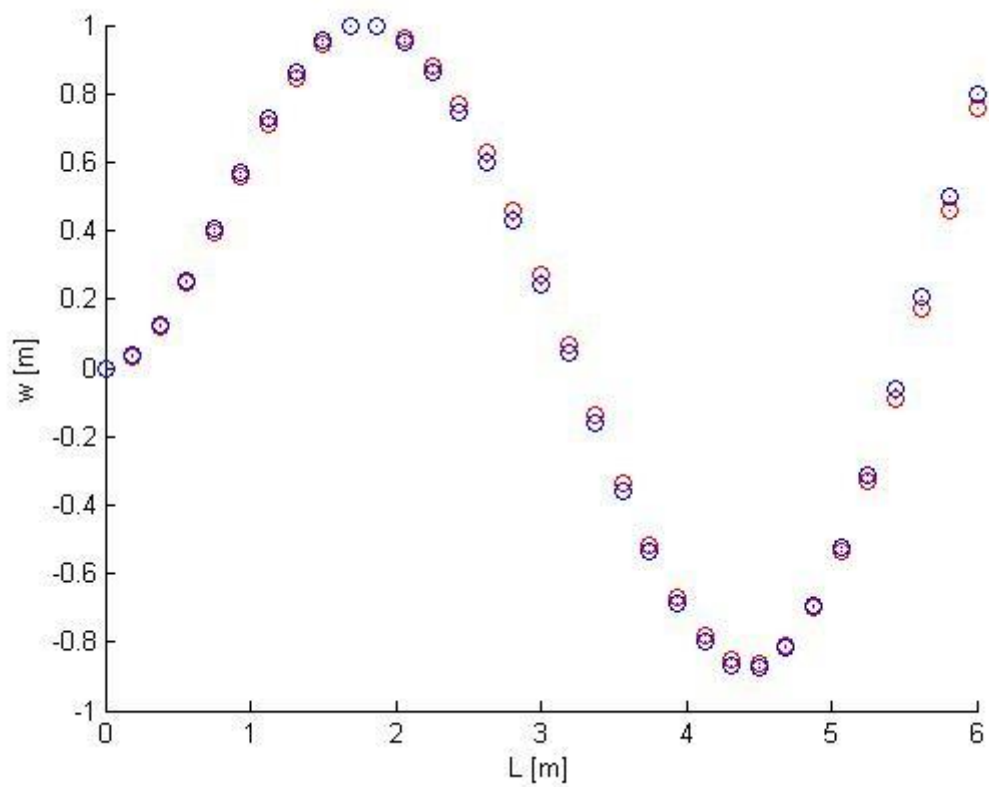
V tomto případě budeme považovat za nejpřesnější řešení φ^p získané metodou T, při rozdělení nosníku na čtyři prvky, protože je obtížné v Matlabu porovnávat vlastní tvary s rozdílným počtem stupňů volnosti, jak tomu bylo v případě vlastních frekvencí, kdy jsme využili rozdělení na 20 prvků. Porovnávat budeme toto řešení s vlastními tvary metod C, S a T spočítané maticemi M1 a M3. Vlastní tvary jsou normovány na hodnotu 1 v místě největšího výkmitu daného vlastního tvaru a následně porovnávány.



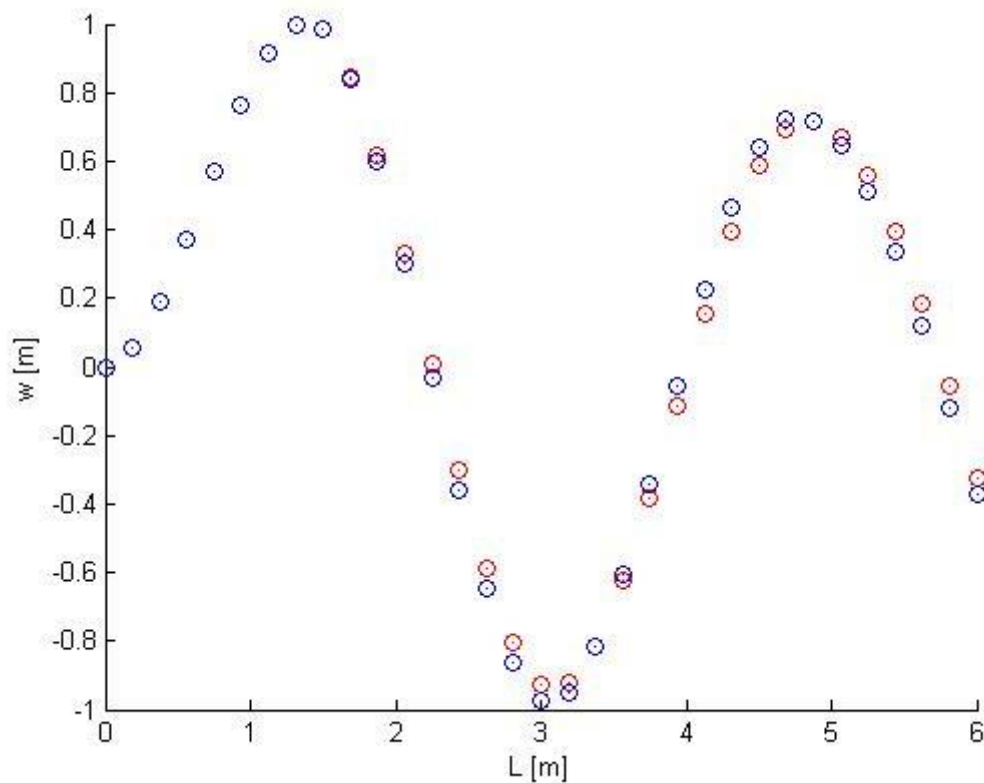
Obrázek 24: Vykreslení 1. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)



Obrázek 25: Vykreslení 2. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)



Obrázek 26: Vykreslení 3. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)



Obrázek 27: Vykreslení 4. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)

V předchozích čtyřech obrázcích je uveden příklad prvních čtyř vlastních tvarů pro metodu konstantního průřezu C užitím matic hmotnosti M1 a M3.

Pro každou metodu C, S a T tedy máme čtyři vlastní tvary spočítané pomocí matice M1 a M3. Budeme tedy stanovovat chybu mezi přesným (v tabulce vyznačeno šedou barvou) a zbylými řešeními. V následující tabulce je znázorněno porovnávání.

Metoda C		Metoda S		Metoda T	
M1	M3	M1	M3	M3	M1
φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1	φ_1
φ_2	φ_2	φ_2	φ_2	φ_2	φ_2
φ_3	φ_3	φ_3	φ_3	φ_3	φ_3
φ_4	φ_4	φ_4	φ_4	φ_4	φ_4

Tabulka 9: Postup stanovování chyb mezi vlastními tvary (AUTOR, 2014)

Chyba φ (%)	Metoda C		Metoda S		Metoda T	
	M1	M3	M1	M3	M3	M1
φ_n (%)						
φ_1 (%)	0,810	0,750	0,002	0,003	0,00014	0,00
φ_2 (%)	10,530	9,830	0,190	0,060	0,079	0,00
φ_3 (%)	17,290	20,450	0,480	0,630	0,270	0,00
φ_4 (%)	15,000	23,010	0,580	2,200	3,370	0,00

Tabulka 10: Chyba mezi jednotlivými metodami C, S a T (AUTOR, 2014)

V tabulce můžeme vidět, že mezi jednotlivými vlastními tvary získanými využitím matice M1 pro metody S a T chyba nepřesahuje 1%, ovšem s uvážením toho, že se jedná o nosník rozdělený na čtyři prvky. Jak lze sledovat z tabulky, chyba se s pořadím vlastního tvaru zvyšuje což lze očekávat i od následujících vlastních tvarů, které zde již neporovnáváme.

Pro doplnění bude v tabulkách stanovena chyba vlastních tvarů jednotlivých metod pro varianty matic hmotnosti M1 a M3. Vlastní tvary jsou ve vzorcích značeny s indexem C, S a T podle toho, které metodě přísluší.

Chyba φ (%)	M1		
	$\int(\varphi^C - \varphi^T)^2 100\%$	$\int(\varphi^C - \varphi^S)^2 100\%$	$\int(\varphi^S - \varphi^T)^2 100\%$
φ_1 (%)	0,8100	0,7000	0,0020
φ_2 (%)	10,5300	8,8900	0,1900
φ_3 (%)	17,2900	18,6900	0,4800
φ_4 (%)	15,0000	18,1600	0,5800

Tabulka 11: Chyba tvarů pro M1 mezi přístupy C, S a T (AUTOR, 2014)

Chyba φ (%)	M3		
	$\int(\varphi^C - \varphi^T)^2 100\%$	$\int(\varphi^C - \varphi^S)^2 100\%$	$\int(\varphi^S - \varphi^T)^2 100\%$
φ_1 (%)	0,8400	0,7400	0,0038
φ_2 (%)	8,7300	8,6800	0,0206
φ_3 (%)	17,4800	18,1600	0,3300
φ_4 (%)	11,5100	14,7700	0,6800

Tabulka 12: Chyba tvarů pro M3 mezi přístupy C, S a T (AUTOR, 2014)

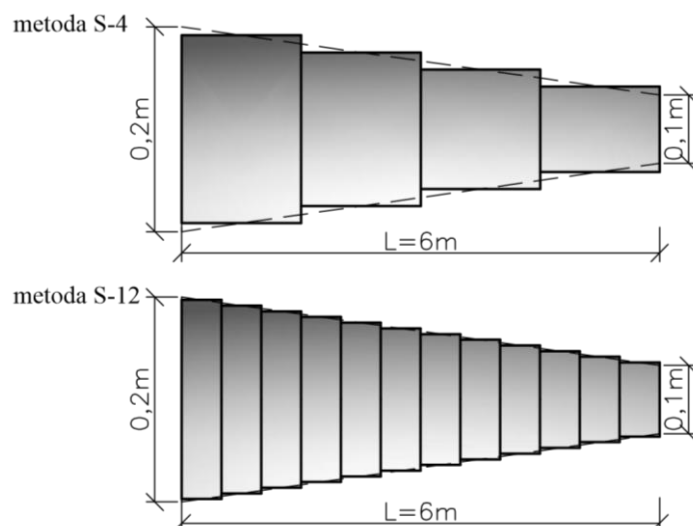
V tabulce 11 a 12 považujeme za nejzajímavější právě třetí sloupec, kde je zobrazena chyba mezi metodou S a T, při rozdělení na čtyři prvky ve variantě matice hmotnosti M1 chyba dosahuje 0,58 % a variantě jednodušší matice hmotnosti M3 je chyba 0,68 %. Se zpřesňováním metody S, zvyšujícím se počtem prvků, na který nosník rozdělíme, se předpokládá další snížení této chyby, umožňuje nám tedy přiblížit se námi uvažovanému přesnému řešení, nevýhodou je opět zvyšující se hodnota stupňů volnosti. Zpřesňování vlastních kruhových frekvencí metody S rozdělením na 12 prvků je zobrazeno v kapitole 6.1.

6 Ukázky příkladů

Tato kapitola je doplněna příklady sloužící k doplnění popsaní zpřesňování metodou S a rozdílu mezi využitím konzistentních a diagonálních matic.

6.1 Příklad metody C, S, T rozdělené na 12 prvků

Zde bude spočtena varianta příkladu z kapitoly 5.3, s rozdělením nosníku na 12 prvků a využitím matice hmotnosti M1. Vlastní frekvence jsou porovnávány s námi uvažovaným přesným řešením metody T, rozdělené na dvacet prvků T- 20 (v tabulce vyznačeno šedou barvou).



Obrázek 28: Schéma porovnávaných metod S - 4 a S - 12 (AUTOR, 2014)

Vlastní frekvence	Metoda C	Metoda S-12	Metoda T-12	T- 20
ω_n	M1	M1	M1	M1
ω_1	20,74	30,66	30,82	20,74
ω_2	119,08	145,12	146,05	119,08
ω_3	309,55	367,98	369,49	309,55
ω_4	543,13	689,78	692,45	543,13

Tabulka 13: Vlastní frekvence při rozdělení nosníku na 12 prvků (AUTOR, 2014)

Chyba % ω	Metoda C	Metoda S-12	Metoda T-12
ω_n (%)	M1	M1	M1
ω_1 (%)	33,07	1,05	0,52
ω_2 (%)	19,53	1,94	1,31
ω_3 (%)	18,28	2,86	2,46
ω_4 (%)	24,26	3,81	3,44

Tabulka 14: Chyba mezi přesným řešením a rozdělení metod na 12 prvků (AUTOR, 2014)

Chyba se v metodě S pomocí zvýšení počtu prvků ze čtyř na dvanáct snížila u čtvrtého tvaru z 24,08% na 3,81%, což je přesně snížení 6,3x. Rozdíl v řešení nosníku dvanácti a čtyřmi prvky je v případě metody T snížení z 21,11% na 3,44%, což je 6,2x. Tímto způsobem se nám podařilo získat poměrně shodné řešení s metodou T, ovšem za cenu více stupňů volnosti.

6.2 Rozdíl ve výpočtu s konzistentní maticí a diagonální maticí

Po získání konzistentní matice hmotnosti se v předešlých příkladech hmota soustřeďuje do uzlů nosníků, převádí se na diagonální pomocí koeficientu α , kterým se přenásobují prvky na diagonále konzistentní matice. Setrvačné vlastnosti těchto matic se liší, následuje vyčíslení odchylek vlastních kruhových frekvencí při využitím konzistentní K a diagonální D matice pro jednotlivé varianty C, S a T. Tyto chyby jsou počítány pro variantu sestavení matice hmotnosti M1, pro totožný příklad jako při porovnávání vlastních frekvencí v kapitole 5.3. Pro variantu diagonální matice jsme již vlastní frekvence uvedli v tabulce 6 a jejich chyby v tabulce 7. Pro porovnání budou uvedeny v tabulce 15 a 16 také. Vlastní frekvence jsou ve variantě konzistentní matice porovnávány s námi uvažovaným přesným řešením metody T, rozděleného nosníku na dvacet prvků spočteným konzistentní maticí hmotnosti (v tabulce vyznačeno šedou barvou).

Vlastní frekvence	Metoda C		Metoda S		Metoda T		Metoda T-20	
	M1- D	M1- K	M1-D	M1- K	M1-D	M1-K	M1-D	M1-K
ω_n								
ω_1	20,74	21,91	28,81	30,82	29,66	31,62	30,98	31,62
ω_2	119,08	136,89	124,58	147,31	128,41	151,49	147,99	151,49
ω_3	309,55	384,84	295,79	380,67	304,78	390,87	378,81	389,45
ω_4	543,13	756,37	544,38	728,18	565,74	759,37	717,08	741,48

Tabulka 15: Vlastní frekvence pro diagonální a konzistentní maticí (AUTOR, 2014)

Jak bylo popsáno výše, hodnoty chyb ve sloupci M1- D jsou tedy shodné s chybami uvedenými v tabulce 7. Hodnoty chyb ve sloupci M1- K jsou spočtené mezi metodami C, S, T a přesným řešením T- 20.

Chyba % ω	Metoda C		Metoda S		Metoda T		Metoda T-20	
	M1- D	M1- K	M1-D	M1- K	M1-D	M1-K	M1-D	M1-K
ω_n (%)								
ω_1 (%)	33,07	30,72	7,02	2,53	4,26	0,00	0,00	0,00
ω_2 (%)	19,53	9,64	15,82	2,76	13,23	0,00	0,00	0,00
ω_3 (%)	18,28	1,18	21,92	2,25	19,54	0,37	0,00	0,00
ω_4 (%)	24,26	2,01	24,08	1,79	21,11	2,41	0,00	0,00

Tabulka 16: Chyba frekvencí diagonální a konzistentní matice porovnáváné s námi uvažovaným přesným řešením (AUTOR, 2014)

Jak vyplývá ze spočtených chyb, rozdíl při výpočtu vlastních frekvencí diagonální a konzistentní maticí je značný. Chyba pro první dvě frekvence je v případě metody T dokonce nulová, kdy při výpočtu diagonální maticí byly tyto chyby 4,26% a 13,23%. Zvyšující se chybu s pořadím vlastního tvaru můžeme pozorovat pouze v případě metody T.

Dále jsou uvedeny konzistentní matice hmotnosti pro metody C, S a T, jim příslušející diagonální matice jsou uvedeny v kapitole 5.3.

Metoda C

Konzistentní matice hmotnosti M1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0654	-0.0138	0	0.0229	0.0083	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0138	0.0038	0	-0.0083	-0.0029	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0229	-0.0083	0	0.1308	0.0000	0	0.0229	0.0083	0	0	0	0	0	0
0	0.0083	-0.0029	0	0.0000	0.0075	0	-0.0083	-0.0029	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0229	-0.0083	0	0.1308	0.0000	0	0.0229	0.0083	0	0	0
0	0	0	0	0.0083	-0.0029	0	0.0000	0.0075	0	-0.0083	-0.0029	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0229	-0.0083	0	0.1308	0.0000	0	0.0229	0.0083
0	0	0	0	0	0	0	0.0083	-0.0029	0	0.0000	0.0075	0	-0.0083	-0.0029
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0229	-0.0083	0	0.0654	0.0138
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0083	-0.0029	0	0.0138	0.0038

Metoda S

Konzistentní matice hmotnosti M1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0816	-0.0171	0	0.0288	0.0105	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0171	0.0047	0	-0.0105	-0.0036	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0288	-0.0105	0	0.1523	0.0022	0	0.0249	0.0090	0	0	0	0	0	0
0	0.0105	-0.0036	0	0.0022	0.0087	0	-0.0090	-0.0031	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0249	-0.0090	0	0.1307	0.0023	0	0.0210	0.0076	0	0	0
0	0	0	0	0.0090	-0.0031	0	0.0023	0.0075	0	-0.0076	-0.0026	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0210	-0.0076	0	0.1091	0.0023	0	0.0171	0.0062
0	0	0	0	0	0	0	0.0076	-0.0026	0	0.0023	0.0063	0	-0.0062	-0.0021
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0171	-0.0062	0	0.0491	0.0104
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0062	-0.0021	0	0.0104	0.0028

Metoda T

Konzistentní matice hmotnosti M1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0844	-0.0175	0	0.0288	0.0105	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0175	0.0047	0	-0.0104	-0.0036	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0288	-0.0104	0	0.1524	0.0015	0	0.0249	0.0091	0	0	0	0	0	0
0	0.0105	-0.0036	0	0.0015	0.0087	0	-0.0090	-0.0031	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0249	-0.0090	0	0.1308	0.0015	0	0.0210	0.0077	0	0	0
0	0	0	0	0.0091	-0.0031	0	0.0015	0.0075	0	-0.0075	-0.0026	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0210	-0.0075	0	0.1091	0.0015	0	0.0171	0.0063
0	0	0	0	0	0	0	0.0077	-0.0026	0	0.0015	0.0063	0	-0.0061	-0.0021
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0171	-0.0061	0	0.0462	0.0100
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0063	-0.0021	0	0.0100	0.0028

7 Závěr

V této kapitole je zhodnoceno dosažení cílů a přínosů této diplomové práce. Hlavním cílem bylo provést analýzu nosníků proměnného průřezu, a zohlednit jeho efekt na statické a dynamické účinky.

7.1 Zhodnocení dosažení cílů a přínosů práce

V úvodu byly nastíněny tři dílčí cíle, které vedou ke splnění hlavního cíle, věnující se odvození matic tuhosti a hmotnosti, implementace do prototypového kódu Matlab a porovnání výsledků na řešení vybraných příkladů.

Prvního dílčího cíle bylo dosaženo v kapitolách 2 a 3, kdy první z těchto kapitol je věnovaná odvození matice tuhosti na teoretické úrovni pro možné využití na konstantní a proměnný průřez, druhá odvození matice hmotnosti pro přístupy, jimiž je matice sestavována. Nejdříve je popsána konzistentní matice hmotnosti $M1$ získaná pomocí matice bázevých funkcí N , kde je doplněn výpočet kontrolní matice. Dále matice $M3$, která rozděluje celkovou hmotnost do uzlů nosníku.

Druhému dílčímu cíli je věnována kapitola 4, která se skládá ze tří podkapitol, oddělující implementaci matice tuhosti, matice hmotnosti a výpočty vlastních čísel a vlastních tvarů. První podkapitola se věnuje zadávání charakteristik nosníku, přiřazení kódových čísel a vlastnímu sestavení matice tuhosti pro jednotlivé metody C, S a T. V druhé podkapitole je popsána implementace matic hmotnosti pro varianty $M1$, $M3$, které mají při využití metod C, S a T, také odlišnosti.

Ověřování a porovnávání výsledků na řešení vybraných příkladů, je třetím dílčí cílem a dosaženo ho bylo v kapitole 5. V první podkapitole je ověřena správnost sestavení matice hmotnosti pro konstantní a proměnný průřez pomocí ručního výpočtu a existujících příkladů. Tuto podkapitolu doplňuje porovnání dopadů metod C, S a T na statické účinky. Druhá podkapitola ověřuje správnost sestavení matice $M1$, která je využívána pro výpočet veškerých příkladů. Slouží zde k tomu matice sestavená dle (37), s kterou je srovnávána. Třetí podkapitola je věnována vlastnímu kmitání. Nejdříve jsou zobrazovány chyby pro matice hmotnosti $M1$ a $M3$ porovnané s uvažovaným přesným řešením prostřednictvím prvních čtyř vlastních kruhových frekvencí a vlastních tvarů pro jednotlivé metody C, S a T. Dále je zobrazena chyba právě mezi těmito metodami. S třetím dílčím cílem je spjatá i kapitola 6, kde dochází ke zpřesňování metody S, pro jasnější zobrazení chyb, ale také k pozorování odchylek při použití konzistentních a diagonálních matic.

Dílčích cílů bylo dosaženo převážně díky zpracování problematiky v teoretické části a následné implementaci do Matlabu. Při plnění cílů jsem využívala znalostí získaných v předmětech stavební mechaniky a matematiky při studiu na vysoké škole, ale také nových zkušeností s prototypovým kódem Matlab, které jsem během práce na diplomové práci získala.

Přínosy této diplomové práce vyplývají z jejich cílů. Hlavním přínosem je analýza nosníků s proměnným průřezem, ověření a porovnání výsledků (viz kapitoly 5 a 6), implementace výpočtu do prototypového kódu Matlab, využitelného pro více variant nosníků modelovaných ve 2D v praktické části (viz kapitola 4). Tato implementace tedy umožňuje sledovat vliv proměnného průřezu pro nosníky různých charakteristik, průřezů a uložení, dle volby uživatele. Pro usnadnění chápání problému jsou využity v práci tři varianty nosníků, na kterých pozorujeme vlivy proměnného průřezu, které jsou společně porovnávány. Zde je nejprínosnější možnost zvyšování počtu prvků, se kterým problém proměnného průřezu řešíme.

8 Terminologický slovník

Následující tabulka obsahuje popis termínů využitých v této diplomové práci.

Název	Zkratka	Popis
Modul pružnosti	E	Modul pružnosti v tahu
Poissonovo číslo	ν	Poměr mezi podélnou a příčnou délkovou změnou
Objemová hmotnost	ρ	Hmotnost v poměru k objemu
Tuhost	K	Odolnost pružného tělesa vůči deformaci při působení síly
Deformace	ε	Změna tvaru v důsledku působení síly
Napětí		Představuje rozložení vnitřních sil na jednotku plochy
Vlastní frekvence		Počet kmitů za sekundu
Vlastní tvar		Tvar kmitání konstrukce, příslušící vlastní frekvenci
Palec		Jednotka délky (1 palec= 2,54 cm)
PVP		Princip virtuálních prací
Matlab		Interaktivní programové prostředí a skriptovací programovací jazyk
Implementace		Uskutečnění teoretických myšlenek
Dilatace		Délková změna materiálu
Diagonální matice		Matice, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále

Tabulka 17: Terminologický slovník (AUTOR, 2014)

9 Použitá literatura

Následující tabulka obsahuje seznam literatury použité v této diplomové práci.

(Bittnar, 1992)	Z. Bittnar, J. Šejnoha, NUMERICKÉ METODY MECHANIKY 1, ČVUT, 1992, Dostupné z: http://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/6/69/Nmm1.pdf
(Sejnoha)	M. Sejnoha, STAVEBNÍ MECHANIKA 3, ČVUT, Dostupné z: http://ksm.fsv.cvut.cz/~sejnom/download/sm3.pdf
(Hájková, 2012)	K. Hájková, Stavební mechanika 3, osobní zápisky z předmětu SM3
(Krejsa, 2014)	Krejsa, SMP. [online]. [cit. 2014-11-09]. Dostupné z: http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/pp_tema09.pdf
(Lekon TSK, 2011)	Lekon, taros-tsk. [online]. [cit. 2014-11-09]. Dostupné z: http://www.taros-tsk.cz/telocvicna-pri-4.-zs-v-jirkove-u-chomutova
(Vonka, 2005)	Vonka, foto.fabriky. [online]. [cit. 2014-11-09]. Dostupné z: http://www.foto.fabriky.cz/displayimage.php?album=24&pos=0
(Shooshtari, 2014)	A. Shooshtari, R. Khajavi, An efficient procedure to find shape function and stiffness matrices of nonprosmatic Euler – Bernoulli and Timoshenko beam elements
(Máca, 2013)	J. Máca, Dynamika stavebních konstrukcí 1, ČVUT, Přednáška 02, Dostupné z: http://www.ulozto.sk/xZRnESh/micek-rar
(Yaw, 2009)	Louie L. Yaw, Stiffness matrix for 2D tapered beams, Walla University, 2009. Dostupné z: http://people.wallawalla.edu/~louie.yaw/structuralanalysis/taperframe.pdf

10 Seznam obrázků a tabulek

Tato kapitola obsahuje seznam obrázků a seznam tabulek uvedených v této diplomové práci.

10.1 Seznam obrázků

Následuje seznam obrázků uvedených v této diplomové práci.

Obrázek 1: Schéma zpřesňování řešení metodami C- konstantní průřez, S- rozdělení na více prvků o stejné výšce, T- výška dosazena jako funkce po délce nosníku (AUTOR, 2014).....	7
Obrázek 2: Lví brána, Mykény (Vonka, 2005)	8
Obrázek 3: Bogenberg bridge, Bogen, Německo (Krejša, 2014).....	8
Obrázek 4: Tělocvična, Chomutov (Lekon TSK, 2011)	9
Obrázek 5: Donau-wald bridge, Winzer, Německo (Krejša, 2014)	9
Obrázek 6: Spojitý nosník, konzola a) Průběh ohybového momentu b), c) možné realizace proměnného průřezu (AUTOR, 2014)	10
Obrázek 7: Rámová konstrukce a) Průběh ohybového momentu b), c) možné realizace proměnného průřezu (AUTOR, 2014)	10
Obrázek 8: Volba souřadnicového systému (Sejnoha).....	11
Obrázek 9: Prvek v lokální soustavě souřadnic (Bittnar, 1992).....	12
Obrázek 10: Závislost koncových sil (Bittnar, 1992).....	16
Obrázek 11: Tabulka interpolačních funkcí (Bittnar, 1992).....	18
Obrázek 12: Znázornění rozdělení hmotnosti v případě dvou prvků (AUTOR, 2014).....	20
Obrázek 13: Znázornění rozdělení hmotnosti v případě jednoho prvku (AUTOR, 2014).....	20
Obrázek 14: Pole kódových čísel (AUTOR, 2014).....	23
Obrázek 15: Konstantní nosník (AUTOR, 2014).....	30
Obrázek 16: Průběh vnitřních sil. N-normálová síla, Q- posouvací síla, M- ohybový moment (AUTOR, 2014).....	31
Obrázek 17: Vykreslení vnitřních sil pro jednotkové stavy hledaného přetvoření (AUTOR, 2014)	31
Obrázek 18: Lineárně proměnný I- nosník (Yam, 2009)	32
Obrázek 19: Průběh vnitřních sil. N-normálová síla, Q- posouvací síla, M- ohybový moment (AUTOR, 2014).....	33
Obrázek 20: Konstantní nosník (AUTOR, 2014).....	35
Obrázek 21: Zobrazení posunů (AUTOR, 2014)	35
Obrázek 22: Schéma zvoleného příkladu (AUTOR, 2014).....	37
Obrázek 23: Příklad vykreslení vlastních tvarů pro matici M1 v metodě C	44
Obrázek 24: Vykreslení 1. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)...	46
Obrázek 25: Vykreslení 2. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)...	47
Obrázek 26: Vykreslení 3. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)...	47
Obrázek 27: Vykreslení 4. vlastního tvaru při užití matic M1 a M3 pro metodu C (AUTOR, 2014)...	48
Obrázek 28: Schéma porovnávaných metod S - 4 a S - 12 (AUTOR, 2014).....	50

10.2 Seznam tabulek

Následuje seznam tabulek uvedených v této diplomové práci.

Tabulka 1: Souřadnice bodů a jejich váhy (Bittnar, 1992).....	23
Tabulka 2: Posuny na volném konci (AUTOR, 2014)	34
Tabulka 3: Chyba mezi posuny pro přístupy C, S, T (AUTOR, 2014).....	34
Tabulka 4: Posuny na volném konci ovlivněné volbou počtu integračních bodů (AUTOR, 2014).....	34
Tabulka 5: Chyba mezi posuny a pootočením při volbě integračních bodů (AUTOR, 2014)	35
Tabulka 6: Vlastní frekvence (AUTOR, 2014)	45
Tabulka 7: Chyba frekvencí varianty matic M1 a M3 (AUTOR, 2014)	45
Tabulka 8: Chyba frekvencí mezi přístupy C, S a T, pro čtyři prvky (AUTOR, 2014)	45
Tabulka 9: Postup stanovování chyb mezi vlastními tvary (AUTOR, 2014).....	48

Tabulka 10: Chyba mezi jednotlivými metodami C, S a T (AUTOR, 2014).....	48
Tabulka 11: Chyba tvarů pro M1 mezi přístupy C, S a T (AUTOR, 2014)	49
Tabulka 12: Chyba tvarů pro M3 mezi přístupy C, S a T (AUTOR, 2014)	49
Tabulka 13: Vlastní frekvence při rozdělení nosníku na 12 prvků (AUTOR, 2014)	50
Tabulka 14: Chyba mezi přesným řešením a rozdělení metod na 12 prvků (AUTOR, 2014)	50
Tabulka 15: Vlastní frekvence pro diagonální a konzistentní matici (AUTOR, 2014).....	51
Tabulka 16: Chyba frekvencí diagonální a konzistentní matice porovnávané s námi uvažovaným přesným řešením (AUTOR, 2014)	51
Tabulka 17: Terminologický slovník (AUTOR, 2014).....	55
Tabulka 18: Přiřazení kódových čísel	59
Tabulka 19: Výpočet matice tuhosti.....	59
Tabulka 20: Funkce vah a souřadnic numerické integrace.....	60
Tabulka 21: Metoda C- funkce Zobecnenedeformace	61
Tabulka 22: Metoda S - funkce Zobecnenedeformace_S.....	61
Tabulka 23: Metoda T - funkce Zobecnenedeformace_tapered.....	62
Tabulka 24: Vektor posunů	62
Tabulka 25: Vykreslení vnitřních sil	62
Tabulka 26: Výpočet vlastních čísel a vektorů.....	63
Tabulka 27: Vlastní tvary	63
Tabulka 28: Chyba mezi vlastními tvary.....	65

11 Přílohy

V této kapitole jsou uvedeny zdrojové kódy z prototypového kódu Matlab, na které se v textu odkazujeme.

```
% pole kodovych cisel (predepsane cislujeme nejdrive)
% |o-----o-----o
% (1,2,3) (4,5,6) (7,8,9)

lm = [ 1 2 3 4 5 6;
       4 5 6 7 8 9;
       7 8 9 10 11 12;
       10 11 12 13 14 15];

% pocet predepsanych a neznamych stupnu volnosti
np = 3;
nn = 12;
%celkem rovnic
neq = np+nn;

% pole souradnic
xz =[0 0 1.5 0;
     1.5 0 3 0;
     3 0 4.5 0;
     4.5 0 6 0];
```

Přiřazení kódových čísel

Tabulka 18

```
Ke = zeros(6,6);
K = zeros(neq,neq);
f = zeros(neq,1);
pe = zeros(3);
dp=zeros(3,1);

for i = 1:nelem
    pe = beam2d_maticepoddajnosti (E, v, k, A, Iy, [0; 0 ;1.5 ;0],nip);
    l = sqrt((xz(1,3)-xz(1,1))^2+(xz(1,4)-xz(1,2))^2);
    T = Transformacnimaticice( l );
    Ke = Maticetuhosti( T,pe );
    K=assembly(K,Ke,lm,i)
end
```

Výpočet matice tuhosti

Tabulka 19

```
function [ b,w ] = integration(nip)
if nip==6;
b=[0.932469514203152; 0.661209386466265; 0.238619186083197; -0.932469514203152; -
0.661209386466265; -0.238619186083197];
w=[0.171324492379170; 0.360761573048139; 0.467913934572691; 0.171324492379170;
0.360761573048139; 0.467913934572691];
end
if nip==5;
b=[0.906179845938664; 0.538469310105683; 0; -0.906179845938664; -
0.538469310105683];
```

```

w=[0.236926885056189; 0.478628670499366; 0.568888888888889; 0.236926885056189;
0.478628670499366];
end
if nip==4;
b=[0.861136311594053; 0.339981043584856; -0.861136311594053; -0.339981043584856];
w=[0.347854845137454; 0.652145154862546; 0.347854845137454; 0.652145154862546];
end
if nip==3;
b=[0.774596669241483; 0; 0.238619186083197; -0.774596669241483];
w=[0.555555555555555; 0.888888888888888; 0.555555555555555];
end
if nip==2;
b=[0.577350269189626; -0.577350269189626];
w=[1; 1];
end
if nip==1;
b=[0];
w=[2];
end
end

```

Funkce vah a souřadnic numerické integrace

Tabulka 20

Pro jednotlivé varianty C, S, T se obdobně jako u matice poddajnosti mění pouze změnou funkce na sestavení vektoru zobecněných deformací **Zobecnenedeformace**.

```

% sestaveni vektoru zatizeni
for i=1:nelem
    dp = Zobecnenedeformace(E, v, k, A, Iy, fx, fz, t, td, th, a, h, [0; 0 ;1.5
;0],nip);
end

fe=Vektortranszat( l, fx, fz, T, pe, dp );% Rp

f=assemblyf(f, fe, lm, 1);
f=assemblyf(f, fe, lm, 2);
f=assemblyf(f, fe, lm, 3);
f=assemblyf(f, fe, lm, 4);

```

```

function dp = Zobecnenedeformace(E, v, k, A, Iy, fx, fz, t, td, th, a, h, xz, nip)
%
% xz = (x1, z1, x2, z2)

l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+((xz(4)-xz(2))^2));
G = E/(2*(1+v));
kappa = 6*E*Iy/(k*G*A*l^2);

C=[1/(E*A) 0 0; 0 1/(E*Iy) 0; 0 0 1/(k*G*A)];

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac = 1/2;
dp=zeros(3,1);
le=0.0;

```

```

for i=1:nip
    x = 0.5+0.5*b(i);
    S = [1 0 0; 0 -1*(1-x) x; 0 1/1 1/1];
    N = [fx*1*(1-x); (fz*1^2)/2*x*(1-x); fz*1/2*(1-2*x)];
    Eo = [a*t; a*(td-th)/h;0];%poc.deformace
    dp = dp+(S'*C*N*w(i)*jac+S'*Eo*w(i)*jac);
end;
end

```

Metoda C- funkce Zobecnenedeformace

Tabulka 21

```

function dp = Zobecnenedeformace_steps(E, v, k, fx, fz, t, td, th, a,
xz,nip,i,nelem,tvar)
%
% xz = (x1, z1, x2, z2)
d1=0.2;
d2=0.1;
B=0.1;
s = i-1;
h1=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(0/nelem)));
h2=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(1/nelem)));
h=(h1+h2)/2;
%tvar==1 obdelnik
%tvar==2 I prurez
if tvar==1;
A=B*h;
Iy = 1/12*B*h^3;
end
if tvar==2;
A=2*B*tf+h*tw;
Iy=1/12*B*(h+2*tf)^3-2/12*((B-tw)/2)*h^3;
end

l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+((xz(4)-xz(2))^2));
G = E/(2*(1+v));
kappa = 6*E*Iy/(k*G*A*l^2);
C=[1/(E*A) 0 0; 0 1/(E*Iy) 0; 0 0 1/(k*G*A)];

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac = 1/2;
dp=zeros(3,1);
le=0.0;
for i=1:nip
    x = 0.5+0.5*b(i);
    S = [1 0 0; 0 -1*(1-x) x; 0 1/1 1/1];
    N = [fx*1*(1-x); (fz*1^2)/2*x*(1-x); fz*1/2*(1-2*x)];
    Eo = [a*t; a*(td-th)/h;0];%poc.deformace
    dp = dp+(S'*C*N*w(i)*jac+S'*Eo*w(i)*jac);
end;
end

```

Metoda S - funkce Zobecnenedeformace_steps

Tabulka 22

```

function dp = Zobecnenedeformace_tapered(E, v, k, fx, fz, t, td, th, a,
funcA_Iprurez, funcIy_Iprurez,xz,nip, nelem,o)
%
% xz = (x1, z1, x2, z2)

l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+((xz(4)-xz(2))^2));
G = E/(2*(1+v));

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac = 1/2;
dp=zeros(3,1);
le=0.0;
for i=1:nip
    A=funcA_Iprurez(b(i),nelem,o);
    Iy=funcIy_Iprurez(b(i),nelem,o);
    x = 0.5+0.5*b(i);
    d1=10;
    d2=2;
    d=d1+((d2-d1)*(x));
    S = [1 0 0; 0 -1*(1-x) x; 0 1/l 1/l];
    C=[1/(E*A) 0 0; 0 1/(E*Iy) 0; 0 0 1/(k*G*A)];
    N = [fx*1*(1-x); (fz*1^2)/2*x*(1-x);fz*1/2*(1-2*x)];
    Eo = [a*t; a*(td-th)/d;0];%poc.deformace
    dp = dp+(S'*C*N*w(i)*jac+S'*Eo*w(i)*jac);
end;
end

```

Metoda T - funkce Zobecnenedeformace_tapered

Tabulka 23

```

ru = K(np+1:neq, np+1:neq)\f(np+1:neq);
%doplneni do vektoru posunuti cele konstrukce
r = zeros(neq,1);
r(np+1:neq) = ru;
r

%Reakce
R=K*r-f;

```

Vektor posunů

Tabulka 24

```

function [ VS ] = Vnitрни ( pe,T,r,fx,fz,g,l,lm,pn,dp)

B=inv(pe)*(T*r(lm(pn,:))-dp);
S = [1 0 0; 0 -1*(1-g) g; 0 1/l 1/l];
N = [fx*1*(1-g); (fz*1^2)/2*g*(1-g);fz*1/2*(1-2*g)];
VS=S*B+N; %Vnitрни sily
end

```

Vykreslení vnitřních sil

Tabulka 25


```
[tvary, eigval]=eig(K(np+1:neq, np+1:neq),-MM(np+1:neq, np+1:neq));
```

```
%vlastni cisla,vektory
```

```
eigval=diag(eigval)
```

```
[eigval, tvary]=sorteigval (abs(eigval),tvary); %serazeni vl. cisel,vektoru
```

Výpočet vlastních čísel a vektorů

Tabulka 26

```
function [ w ] = vychylky( E,Iy,v,k,A,xz,bb,tvary,x)
w=0;
l = sqrt((xz(1,3)-xz(1,1))^2+(xz(1,4)-xz(1,2))^2);
G = E/(2*(1+v));
kappa = (6*E*Iy)/(k*G*A*l^2);
h7=(1/(1+2*kappa))*(1+2*kappa)-2*kappa*x-3*x^2+2*x^3);
h8=(1/(1+2*kappa))*(-1*(1+kappa)*x+(2+kappa)*x^2-x^3);
h9=(1/(1+2*kappa))*(2*kappa*x+3*x^2-2*x^3);
h10=(1/(1+2*kappa))*(kappa*x+(1-kappa)*x^2-x^3);
w=w+(h7*tvary(3*bb+2)+h8*tvary(3*bb+3)+h9*tvary(3*bb+5)+h10*tvary(3*bb+6));
end
```

```
function [ w ] = vychylky_tapered( E,v,k,xz,bb,tvary,x,nelem,i,tvar)
w=0;
l = sqrt((xz(3)-xz(1))^2+(xz(4)-xz(2))^2);
G = E/(2*(1+v));
d1=0.2;
d2=0.1;
B=0.1;
tf=0.5;
tw=0.5;
s = i-1;
d=d1+((d2-d1)*((s/nelem)+(x/nelem)));
if tvar==1;
A=B*d;
Iy=1/12*B*d^3;
end
if tvar==2;
A=2*B*tf+d*tw;
Iy=1/12*B*(d+2*tf)^3-2/12*((B-tw)/2)*d^3;
end
kappa = (6*E*Iy)/(k*G*A*l^2);
h7=(1/(1+2*kappa))*(1+2*kappa)-2*kappa*x-3*x^2+2*x^3);
h8=(1/(1+2*kappa))*(-1*(1+kappa)*x+(2+kappa)*x^2-x^3);
h9=(1/(1+2*kappa))*(2*kappa*x+3*x^2-2*x^3);
h10=(1/(1+2*kappa))*(kappa*x+(1-kappa)*x^2-x^3);
w=w+(h7*tvary(3*bb+2)+h8*tvary(3*bb+3)+h9*tvary(3*bb+5)+h10*tvary(3*bb+6));
end
```

Vlastní tvary

Tabulka 27

```
function [ chyba ] = Odchylky_const( E,Iy,v,k,A,xz,bb,tvary1, tvary2,nip )
chyba=0;
l = sqrt((xz(1,3)-xz(1,1))^2+(xz(1,4)-xz(1,2))^2);
```

```

G = E/(2*(1+v));

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac=1/2;
for i=1:nip
x = 0.5+0.5*b(i);
kappa = (6*E*Iy)/(k*G*A*l^2);
h7=(1/(1+2*kappa))*(1+2*kappa)-2*kappa*x-3*x^2+2*x^3);
h8=(1/(1+2*kappa))*(-1*(1+kappa)*x+(2+kappa)*x^2-x^3);
h9=(1/(1+2*kappa))*(2*kappa*x+3*x^2-2*x^3);
h10=(1/(1+2*kappa))*(kappa*x+(1-kappa)*x^2-x^3);
w1=(h7*tvary1(3*bb+2)+h8*tvary1(3*bb+3)+h9*tvary1(3*bb+5)+h10*tvary1(3*bb+6));
w2=(h7*tvary2(3*bb+2)+h8*tvary2(3*bb+3)+h9*tvary2(3*bb+5)+h10*tvary2(3*bb+6));
chyba=chyba+(w1-w2)^2*w(i)*jac;

end;
end

```

```

function [ chyba ] = Odchylky_steps( E,IyC, IyS,v,k,AC,AS,xz,bb,tvary1,
tvary2,nip )
%tvary1....metoda C
%tvary2....metoda S
chyba=0;
l = sqrt((xz(1,3)-xz(1,1))^2+(xz(1,4)-xz(1,2))^2);
G = E/(2*(1+v));
b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac=1/2;
for i=1:nip
x = 0.5+0.5*b(i);
kappaC = (6*E*IyC)/(k*G*AC*l^2);
h7C=(1/(1+2*kappaC))*(1+2*kappaC)-2*kappaC*x-3*x^2+2*x^3);
h8C=(1/(1+2*kappaC))*(-1*(1+kappaC)*x+(2+kappaC)*x^2-x^3);
h9C=(1/(1+2*kappaC))*(2*kappaC*x+3*x^2-2*x^3);
h10C=(1/(1+2*kappaC))*(kappaC*x+(1-kappaC)*x^2-x^3);

kappaS = (6*E*IyS)/(k*G*AS*l^2);
h7S=(1/(1+2*kappaS))*(1+2*kappaS)-2*kappaS*x-3*x^2+2*x^3);
h8S=(1/(1+2*kappaS))*(-1*(1+kappaS)*x+(2+kappaS)*x^2-x^3);
h9S=(1/(1+2*kappaS))*(2*kappaS*x+3*x^2-2*x^3);
h10S=(1/(1+2*kappaS))*(kappaS*x+(1-kappaS)*x^2-x^3);
w1=(h7C*tvary1(3*bb+2)+h8C*tvary1(3*bb+3)+h9C*tvary1(3*bb+5)+h10C*tvary1(3*bb+6))
;
w2=(h7S*tvary2(3*bb+2)+h8S*tvary2(3*bb+3)+h9S*tvary2(3*bb+5)+h10S*tvary2(3*bb+6))
;
chyba=chyba+(w1-w2)^2*w(i)*jac;
end;
end

```

```

function [ chyba ] = Odchylky_tapered( E,v,k,funcA_obdelnik,AC,
funcIy_obdelnik,IyC,xz,bb,tvary1, tvary2,nip,o,nelēm)
chyba=0;
l = sqrt((xz(1,3)-xz(1,1))^2+(xz(1,4)-xz(1,2))^2);
G = E/(2*(1+v));

```

```

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac=1/2;
for i=1:nip
AT=funcA_obdelnik(b(i),nelem,o);
IyT=funcIy_obdelnik(b(i),nelem,o);
x = 0.5+0.5*b(i);
kappaC = (6*E*IyC)/(k*G*AC*1^2);
h7C=(1/(1+2*kappaC))*(1+2*kappaC)-2*kappaC*x-3*x^2+2*x^3);
h8C=(1/(1+2*kappaC))*(-1*(1+kappaC)*x+(2+kappaC)*x^2-x^3);
h9C=(1/(1+2*kappaC))*(2*kappaC*x+3*x^2-2*x^3);
h10C=(1/(1+2*kappaC))*(kappaC*x+(1-kappaC)*x^2-x^3);

kappaT = (6*E*IyT)/(k*G*AT*1^2);
h7T=(1/(1+2*kappaT))*(1+2*kappaT)-2*kappaT*x-3*x^2+2*x^3);
h8T=(1/(1+2*kappaT))*(-1*(1+kappaT)*x+(2+kappaT)*x^2-x^3);
h9T=(1/(1+2*kappaT))*(2*kappaT*x+3*x^2-2*x^3);
h10T=(1/(1+2*kappaT))*(kappaT*x+(1-kappaT)*x^2-x^3);
w1=(h7C*tvary1(3*bb+2)+h8C*tvary1(3*bb+3)+h9C*tvary1(3*bb+5)+h10C*tvary1(3*bb+6))
;
w2=(h7T*tvary2(3*bb+2)+h8T*tvary2(3*bb+3)+h9T*tvary2(3*bb+5)+h10T*tvary2(3*bb+6))
;
chyba=chyba+(w1-w2)^2*w(i)*jac;

end;
end

function [ chyba ] = Odchyly_tapered_tapered( E,v,k,funcA_obdelnik,
funcIy_obdelnik,xz,bb,tvary1, tvary2,nip,o,nelem)
chyba=0;
l = sqrt((xz(1,3)-xz(1,1))^2+(xz(1,4)-xz(1,2))^2);
G = E/(2*(1+v));

b= integration(nip);
w= integration (nip);
jac=1/2;
for i=1:nip
A=funcA_obdelnik(b(i),nelem,o);
Iy=funcIy_obdelnik(b(i),nelem,o);
x = 0.5+0.5*b(i);
kappa = (6*E*Iy)/(k*G*A*1^2);
h7=(1/(1+2*kappa))*(1+2*kappa)-2*kappa*x-3*x^2+2*x^3);
h8=(1/(1+2*kappa))*(-1*(1+kappa)*x+(2+kappa)*x^2-x^3);
h9=(1/(1+2*kappa))*(2*kappa*x+3*x^2-2*x^3);
h10=(1/(1+2*kappa))*(kappa*x+(1-kappa)*x^2-x^3);
w1=(h7*tvary1(3*bb+2)+h8*tvary1(3*bb+3)+h9*tvary1(3*bb+5)+h10*tvary1(3*bb+6));
w2=(h7*tvary2(3*bb+2)+h8*tvary2(3*bb+3)+h9*tvary2(3*bb+5)+h10*tvary2(3*bb+6));
chyba=chyba+(w1-w2)^2*w(i)*jac;
end;
end

```

Chyba mezi vlastními tvary

Tabulka 28