

Návod k použití programu pro výpočet dynamické odezvy spojitého nosníku

Obsah

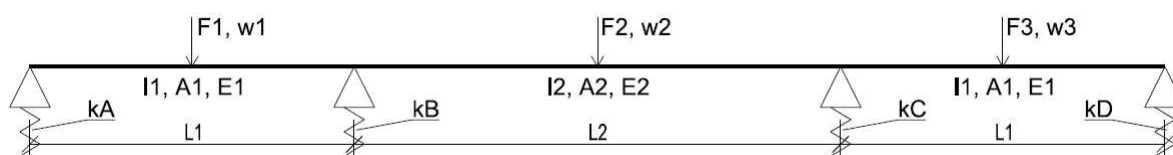
1. Úvod.....	2
2. Popis řešené problematiky	2
2.1. Konstrukce.....	2
3. Výpočet	2
3.1. Prohlížení výsledků	4
4. Dodatky	6
4.1. Newmarkova metoda.....	6
4.2. Matice tuhosti a hmotnosti	7
5. Literatura	8

1. Úvod

Tento manuál slouží jako návod pro práci s programem Odezva.exe. V jádru programu se stanovuje dynamická odezva spojitého nosníku o třech polích na vynucené kmitání. Odezva je stanovena pomocí Newmarkovy metody.

2. Popis řešené problematiky

Jak již bylo zmíněno, v programu se řeší odezva na dynamické zatížení. Konkrétně vynucené kmitání spojitého nosníku o třech polích. Statické schéma problematiky je znázorněno na Obr. 1.



Obr. 1 Statické schéma spojitého nosníku na pružných podporách

Problematika řešení vynuceného kmitání pomocí Newmarkovy metody je známá, více v teoretické části tohoto manuálu. Zajímavé je sledovat, jakým způsobem ovlivňují jednotlivé parametry chování konstrukce. Především pak pružné uložení nosníku. Tento typ uložení může reprezentovat například nedokonalé založení stavby, nebo tuhost pilířů mostu.

2.1. Konstrukce

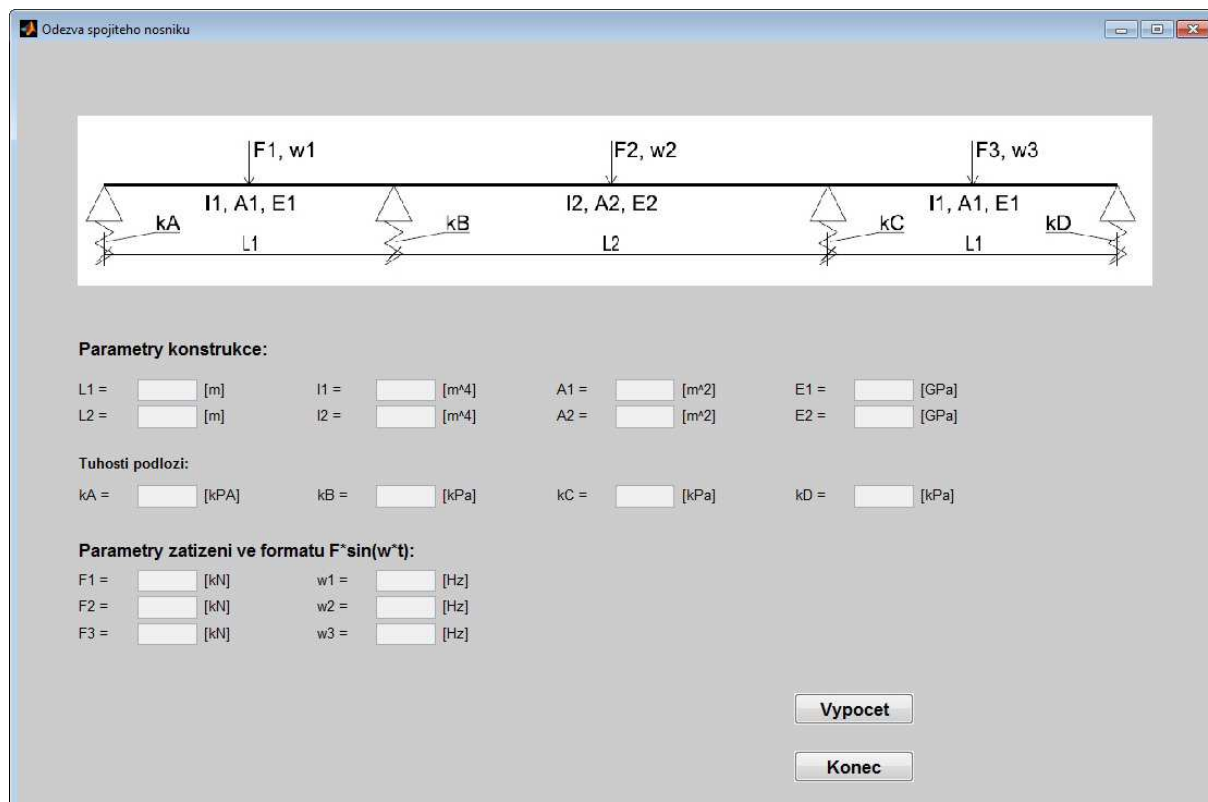
Jedná se o spojitý nosník o třech polích uložený na pružných podporách. Konstrukce je zatížena osamělým břemenem uprostřed každého pole. U konstrukce se volí konstrukční parametry shodné pro první a třetí pole. Prostřední, druhé, pole může mít parametry odlišné, záleží pouze na uživateli. Je možné volit parametry, které ovlivňují tuhost konstrukce, tzn. rozpětí pole, moment setrvačnosti průřezu a modul pružnosti uvažovaného materiálu. Dále je možné volit tuhost pružného uložení.

Plocha příčného řezu průřezu je zahrnuta ve výpočtu matice hmotnosti. Pro výpočet matice hmotnosti je uvažován materiál o objemové hmotnosti 2500 kg/m^3 . Dále nelze ovlivnit sledovanou dobu odezvy, ta je nastavena na 20 s, stejně tak je fixní iterační krok $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.

Konstrukce je zatížena pomocí osamělých břemen umístěných uprostřed každého pole. Pro každé pole zvlášť je možné volit amplitudu a frekvenci zatížení. Osamělé břemeno je uvažováno jako $F \cdot \sin(\omega \cdot t)$ a na konstrukci působí po dobu 10 s.

3. Výpočet

Po spuštění programu Odezva_xx.exe se otevře okno (Obr. 2), ve kterém je možné zadávat jednotlivé hodnoty, které vstupují do výpočtu. U názvu programu xx značí variantu operačního systému (32bit nebo 64bit), pro kterou je program nakompilován.

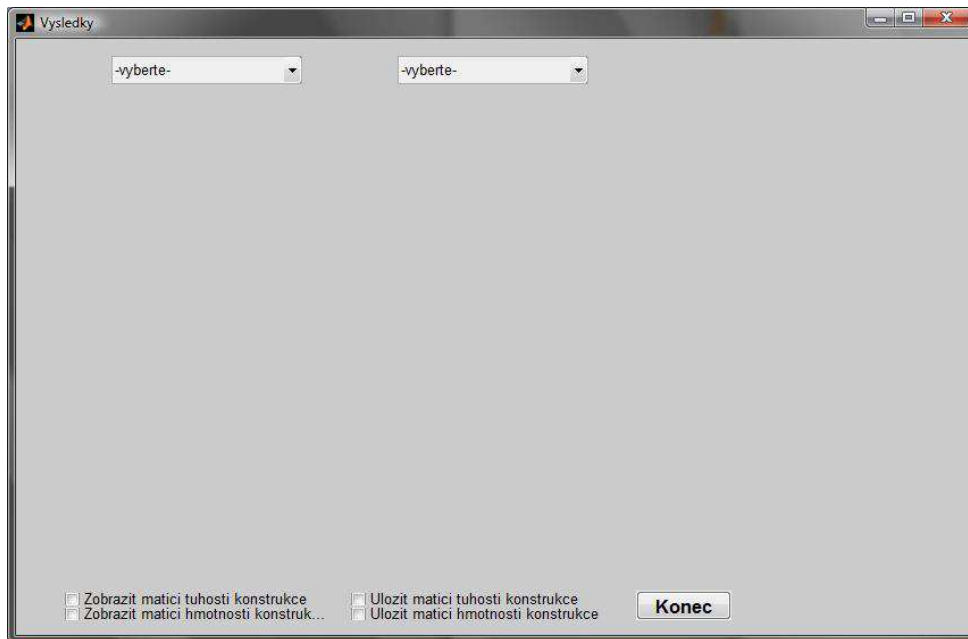


Obr. 2 Vstupní obrazovka grafického rozhraní

Na schématu konstrukce je označení všech parametrů, které je možné volit. Tyto parametry vstupují do výpočtu a přímo ovlivňují odezvu konstrukce. L_i je rozpětí příslušného pole, I_i je moment setrvačnosti, A_i je plocha příčného průřezu, E_i je modul pružnosti materiálu, k_i je tuhost podpory, F_i je amplituda (velikost) síly a w_i je frekvence síly.

V sekci „Parametry konstrukce“ se v horním řádku zadávají veličiny, které jsou pro první a třetí pole. Ve spodním řádku se zadávají parametry prostředního pole. V „Tuhosti podloží“ se zadávají tuhosti jednotlivých podpor. U zatížení číselné indexy označují síly v jednotlivých polích, viz schéma konstrukce.

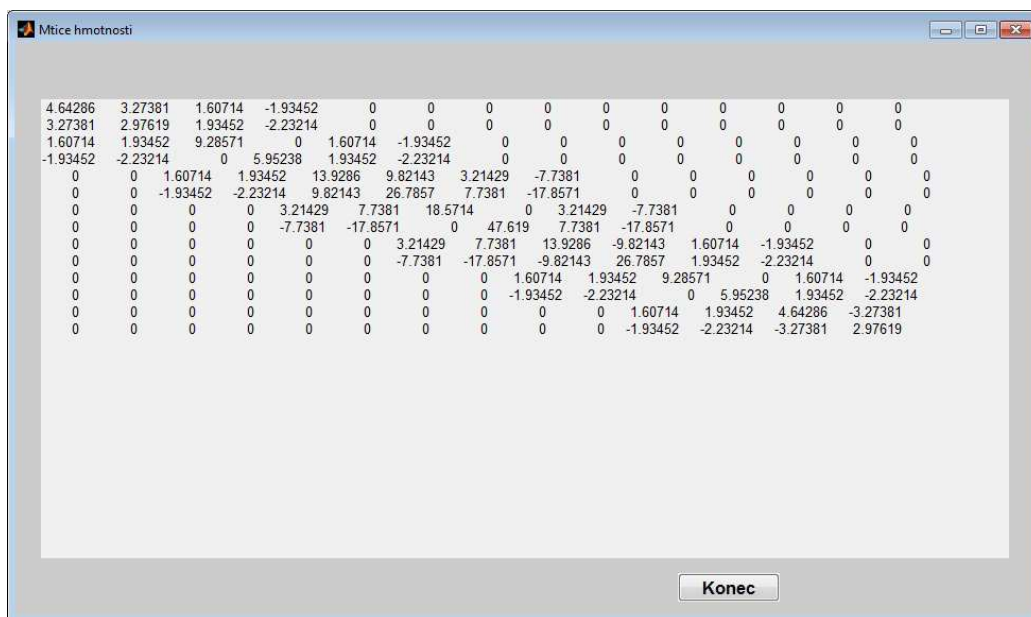
Po zadání všech parametrů a stisku tlačítka „Výpočet“ (viz Obr. 2) proběhne výpočet a otevře se okno (Obr. 3), ve kterém je možné prohlížet výsledky. K ukončení programu slouží tlačítko „Konec“. Po stisku tohoto tlačítka se zavřou veškerá otevřená okna programu Odezva.



Obr. 3 Okno pro zobrazování výsledků

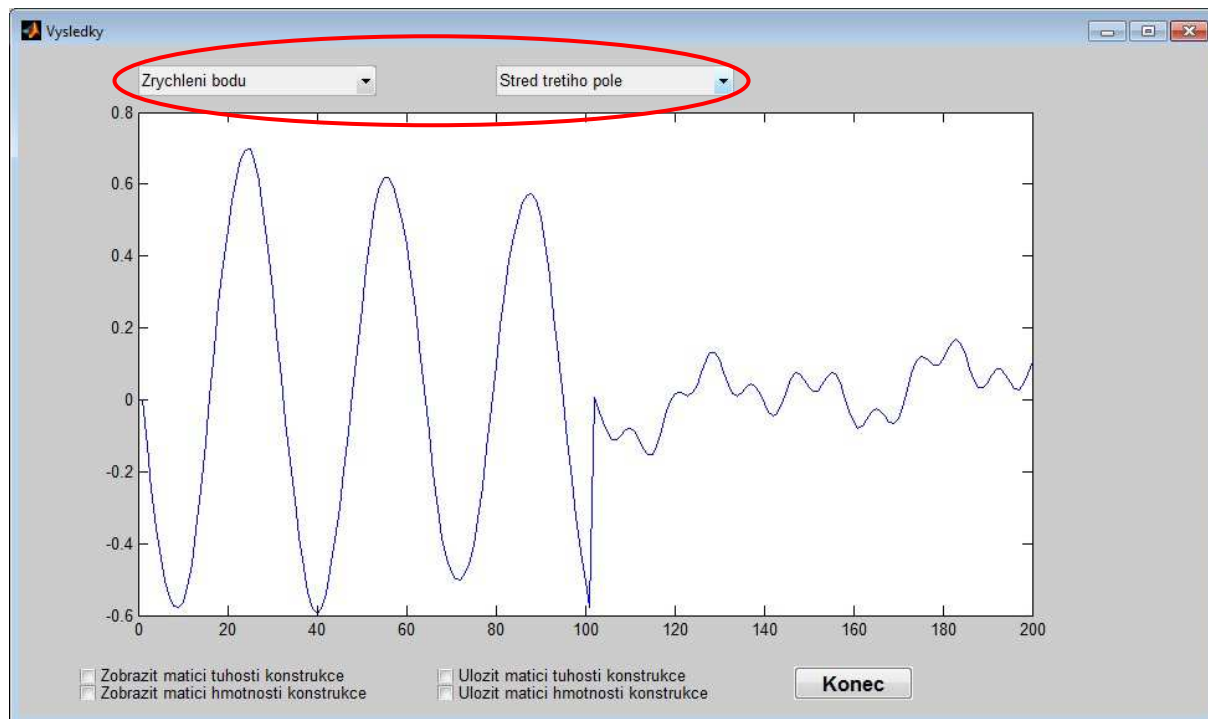
3.1. Prohlížení výsledků

V okně, které slouží pro prohlížení výsledků, je možné zobrazit sestavenou matici tuhosti a matici hmotnosti celé konstrukce. Tyto matice je také možné uložit do textového souboru. Tyto textové soubory se dají dále využít například jako vstup do programu Jakobi_program1, který na základě matice tuhosti a hmotnosti stanoví vlastní frekvence konstrukce, kterou charakterizuje matice tuhosti a hmotnosti. Více na [www](#)... I pro okno s prohlížením matice tuhosti nebo hmotnosti slouží tlačítko „Konec“ k zavření aktuálního okna.



Obr. 4 Zobrazení matice tuhosti/hmotnosti

V okně, pro zobrazení výsledků, jsou v horní části okna, dvě rolovací menu, viz Obr. 5. Tato menu slouží k volbě zobrazení odezvy konstrukce. V levém rolovacím menu je možné zvolit veličinu, která bude vykreslována. Na výběr je zrychlení bodu, rychlost bodu a průhyb sledovaného bodu. Tento bod se volí v pravém rolovacím menu. Je možné sledovat odezvu ve všech podporách a uprostřed rozpětí každého pole. Grafy s odezvou jsou vykreslovány vždy pro aktuální kombinaci veličina a místo.



Obr. 5 Obrazovka s vykreslenou odezvou

Po prohlédnutí výsledků a zavření okna s výsledky (tlačítko „Konec“) je možné zadat nové parametry konstrukce a provést nový výpočet bez toho, aby se musel program znovu spouštět. Po provedení výpočtu se opět nabízí výše zmíněné možnosti.

4. Dodatky

4.1. Newmarkova metoda

Newmarkova metoda je jedno z metod, které se dají použít pro řešení dynamické odezvy. Jedná se o metodu, kdy dohází k přímé integraci pohybových rovnic. Rovnice (1) je zapsána ve formě pro vynucené kmitání, kde $p(t)$ charakterizuje zatížení konstrukce budícími silami.

$$Ku(t) + C\dot{u}(t) + M\ddot{u}(t) = p(t) \quad (1)$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (2)$$

Základním principem přímé integrace pohybových rovnic je řešení pohybových rovnic v jednotlivých časových krocích $t_0, t_1, t_{i+1}, \dots, t_n$. Délka jednoho kroku je tzv. integrační délka a odpovídá rozdílu dvou sousedních kroků (2), pro zajištění dostatečné přesnosti a stability musí být volena rozumných mezích. Při příliš jemném dělení trvá výpočet dlouho a není dosaženo výrazného zlepšení přesnosti. Při velké délce integračního kroku je metoda nestabilní. Pomocí tohoto principu se derivace v pohybových rovnicích nahradí diferencemi a soustava diferenciálních rovnic se tak převede na soustavu rovnic algebraických.

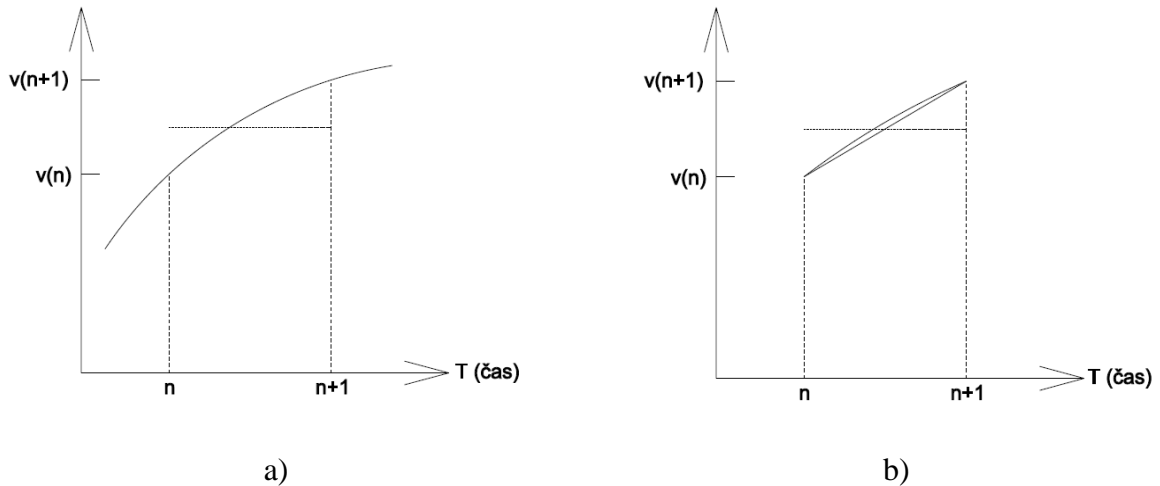
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{x}_n + \beta \ddot{x}_{n+1} \Delta t^2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{x}_n + \gamma \Delta t \ddot{x}_{n+1} \quad (4)$$

Po dosazení diferenčních náhrad za výchylku (3) a rychlost bodu v čase t_{n+1} (4) do pohybových rovnic, získáme základní pohybovou rovnici Newmarkovy metody (5), ze které je možné vyřešit zrychlení bodu \ddot{x}_{n+1} . Pokud je známé zrychlení bodu v čase t_{n+1} , je možné zpětně dopočítat rychlost a průhyb bod.

$$\left[M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K \right] \ddot{x}_{n+1} = f_{n+1} - C \left[\dot{x}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{x}_n \right] - K \left[x_n + \Delta t \dot{x}_n + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{x}_n \right] \quad (5)$$

Newmarkova metoda je metoda podmíněně stabilní. Stabilita metody je zajištěna vhodnou volbou parametrů β a γ . Pro metodu průměrného zrychlení jsou voleny parametry $\beta = 1/2$ a $\gamma = 1/4$, u metody lineárního zrychlení se volí $\beta = 1/2$ a $\gamma = 1/6$.



Obr. 6 Schéma volby difference Newmarkovy metody, a) průměrné zrychlení, b) lineární zrychlení

Na základě volby varianty Newmarkovy metody jsou do výpočtu uvažovány různé diferenční náhrady podle Tab. 1.

Tab. 1 Diferenční náhrady Newmarkovy metody

Veličina	Průměrné zrychlení	Lineární zrychlení
Zrychlení	$\ddot{u} = \frac{\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}}{2}$	$\ddot{u} = \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{h} t + \ddot{u}_n$
Rychlost	$\dot{u} = \frac{\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}}{2} t + \dot{u}_n$	$\dot{u} = \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{h} \frac{t^2}{2} + \ddot{u}_n t + \dot{u}_n$
Výchylka	$u = \frac{\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}}{2} \frac{t^2}{2} + \dot{u}_n t + u_n$	$u = \frac{\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n}{h} \frac{t^3}{6} + \ddot{u}_n \frac{t^2}{2} + \dot{u}_n t + u_n$

4.2. Matice tuhosti a hmotnosti

Jak je patrné z rovnice (5), pro výpočet odezvy z pohybových rovnic je nutné sestavit matici tuhosti a matici hmotnosti konstrukce. Při tvorbě obou těchto matic se postupovalo stejným způsobem. Nejprve byla vytvořena matice pro daný element, ta byla posléze lokalizována do matice tuhosti/hmotnosti celé konstrukce.

Pro sestavení matice hmotnosti byla využita konzistentní matice hmotnosti [2], která lépe popisuje spojitě rozloženou hmotu na konstrukci. Pokud byla využita diagonální matice hmotnosti, díky její špatné podmíněnosti nastávaly problémy s přesností řešení. V rovnici (6) je uvedena podoba konzistentní matice hmotnosti pro dvouuzlový nosníkový element délky l , plochy příčného průřezu A , a objemové hmotnosti ρ .

$$M_{AB} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pro zjednodušení bylo v příkladu uvažováno pružné podepření konstrukce, nebyla uvažována pružná rotační tuhost průřezu nad podporami atd. Do matice tuhosti prutu je ke svislé tuhosti přičtena tuhost podloží. V matici tuhosti prutu (7) členy k_{ij} odpovídají tuhostem pro daný typ prutu a daný typ přetvoření a prvky k_w odpovídají tuhosti podloží, více v [1] a [3]. Prvky modifikující matici tuhosti se objevují pouze u diagonálních členů matice tuhosti daného elementu. To znamená objevují se v místě a směru, ve kterém „dodatečná“ tuhost působí.

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} k_{11} + k_{w,A} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{41} & \cdots & \cdots & k_{44} + k_{w,B} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Více k řešení dané problematiky viz [5].

Vypracováno v rámci řešení projektu FRVŠ 112121328A: Nová výuková pomůcka pro předmět Dynamika stavebních konstrukcí.

5. Literatura

- [1] Bittnar, Z. - Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky I. ČVUT, Praha, 1992. ISBN 80-01-00855-X.
- [2] Brzobohatý, T. - Markopoulos, A.: Vliv modifikace matice hmotnosti na výsledky modální analýzy. Technical Computing Prague 2009.
- [3] Kuklík, P. – Blažek, V. – Kufner, V.: Stavební mechanika 40, ČVUT, Praha 2002. ISBN 80-01-02450-4.
- [4] Šobra, K. - Máca, J.: Vliv tuhosti podloží na dynamickou odezvu spojitého nosníku. *In 10th international Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*. Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, 2012. p. 250-252. ISBN 978-80-227-3786-9. (in Czech).