



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební
Katedra mechaniky

Silová metoda pro tradiční příklady rozměrové optimalizace

Force method for sizing optimization benchmarks

Soutěžní práce

Studijní program: Stavební inženýrství
Studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby

Vedoucí práce: Doc. Ing. Matěj Lepš, Ph.D.

Eva Pohlídalová

Praha 2014

Obsah

1 Úvod	4
2 Implementace v programu MATLAB	4
2.1 Silová metoda	4
2.2 Redukční věta	6
2.3 Sestavení geometrické matice	7
2.4 Sestavení matice poddajnosti a určení výsledných vnitřních sil	10
2.5 Výpočet posunů	10
2.6 Výpočet napětí a hmotnosti	11
3 Vlastnosti matic	11
4 Převod do symbolického zápisu a implementace v C++	11
5 Testování rychlostí výpočtu a porovnání s deformační metodou	12
6 Závěr	12
Přílohy	14
Příloha A Použité benchmarky	14
A.1 Desetiprutová příhradová 2D konzola	14
A.2 Dvacetipětiprutová příhradová 3D věž	15
A.3 Padesátidvouprutová příhradová 2D konstrukce	15
A.4 Sedmdesátidvouprutová příhradová 3D konstrukce	17
Příloha B Přehled užitých anglosaských jednotek s převodem do SI soustavy	18
Příloha C Grafické porovnání velikostí matic a zastoupení nenulových prvků	19
C.1 Matice tuhosti	19
C.2 Geometrická matice	19
C.3 Matice poddajnosti	19

Abstrakt

Tato práce se zabývá vývojem použití silové metody pro příklady rozměrové diskretní optimalizace. Z důvodu několikanásobného spouštění výpočtu je nutné najít metodu, která bude z hlediska výpočetní rychlosti co nejefektivnější. Pro porovnání byly vybrány čtyři, v literatuře nejpoužívanější, příhradové konstrukce, z nichž 10-prutová příhradová konzola je pouze pro názornou ukázkou postupu výpočtu.

V bakalářské práci ing. Pospíšilové byla použita deformační metoda s různými možnostmi řešení soustavy rovnic [Pospíšilová, 2010].

V této práci bylo použito silové metody pro výpočet normálových sil, respektive napětí v prutech, a redukční věty pro výpočet posunů jednotlivých uzlů konstrukce v prostředí MATLAB. Takto vytvořený kód byl převeden do symbolického zápisu a dále do kódu $C++$. Poté bylo provedeno porovnání výsledků a výpočetních časů s deformační metodou.

Na základě porovnání bylo zjištěno, že silová metoda je pro dané sledované konstrukce 3x-5x rychlejší než deformační metoda.

Abstract

This contribution focuses on an application of a force method for sizing optimization benchmarks. Due to multiple runs of the computation it is necessary to find a method whose computational demands are as low as possible. For a comparison, four most often used benchmark structures found in literature was used. Ten bar structure is only for demonstration of the calculation procedure.

We follow a bachelor thesis by ing. Pospíšilová where a stiffness method with various options for solving a system of equations was studied.

In this work, the force method and a principle of virtual work were used to calculate the tension in rods and displacements of each node, respectively. A developed MATLAB code was converted into symbolic notation and converted into a $C++$ code. Results and computational demands of the force method and stiffness method were compared.

Comparison showed that usage of the force method for these particular benchmarks is 3 to 5 times faster than the stiffness method.

Klíčová slova

rozměrová optimalizace, testované konstrukce, silová metoda, implementace, výpočetní nároky, symbolické řešení

Keywords

sizing optimization, benchmarks, force method, implementation, computational demands, symbolic solution

1 Úvod

V oblasti stavebních konstrukcí se často setkáváme s optimalizačními úlohami. Jedním z typů optimalizace je tzv. rozměrová optimalizace, při které se hledá nejvhodnější konfigurace příčných řezů např. příhradových konstrukcí za určitých omezujících podmínek (maximální posuny či napětí).

V bakalářské práci ing. Pospíšilové byla použita deformační metoda s různými možnostmi řešení soustavy rovnic (např. LU faktorizace, Choleského dekompozice, LDL^T rozklad, metoda sdružených gradientů apod.), s různými možnostmi ukládání matic a jejich implementací a provedeno jejich celkové porovnání.

V optimalizačních úlohách chceme obvykle porovnávat napětí v prutech, normálové síly a posuny. V deformační metodě vystupují jako neznámé posuny uzlů v jednotlivých směrech souřadnicových os a ty také přímo získáme řešením soustavy $[K]\{u\} = \{f\}$, kde $[K]$ je globální matice tuhosti konstrukce, $\{u\}$ vektor uzlových posunů a $\{f\}$ vektor pravých stran. Normálové síly a napětí je pak nutné dopočítat. Naopak v silové metodě vystupují jako neznámé staticky neurčitě veličiny a z nich získáme přímo vnitřní síly (v případě příhradových konstrukcí normálové síly) a reakce. Pokud chceme určit posuny, je nutné je dopočítat, např. redukční větou.

Z důvodu velkého počtu neznámých v deformační metodě se dá předpokládat, že výpočet normálových sil a napětí zabere více výpočetního času, než metoda silová, která počítá normálové síly přímo. Je ovšem nutné také zohlednit fakt, že se v silové metodě navíc musí vyřešit vnitřní síly na staticky určité základní soustavě a posuny, které jsou omezující podmínkou u 25-ti prutové a 72-ti prutové konstrukce.

Pro implementaci je použito prostředí MATLAB a pomocí symbolického zápisu je kód převeden do prostředí C++, kde je provedeno porovnání výpočetní rychlosti s deformační metodou. K řešení soustavy rovnic je použito přímého řešiče.

Obsah této práce je následující: kapitola 2.1 této práce popisuje princip silové metody a kapitola 2.2 použití redukční věty pro výpočet posunů. Kapitoly 2.3 - 2.6 se zabývají samotnou implementací v MATLABu, od sestavení geometrické matice až po výpočet napětí a posunů. V kapitole 3 je proveden rozbor velikostí matic v silové a deformační metodě a porovnání počtu nenulových prvků. Kapitola 4 popisuje převod do symbolického zápisu a do kódu C++. Práce je zakončena kapitolou 5, kde je provedeno porovnání výpočetních rychlostí silové a deformační metody.

2 Implementace v programu MATLAB

2.1 Silová metoda

Silová metoda je jednou z metod sloužící k výpočtu vnitřních sil na staticky neurčitých konstrukcích. Její princip spočívá v určení staticky neurčitých veličin takových, aby byla splněna podmínka ekvivalence přetvoření mezi zadanou konstrukcí - staticky neurčitou a konstrukcí základní - staticky určitou - zatíženou daným zatížením a staticky neurčitými veličinami X_i . Staticky neurčitými veličinami mohou být vnější nebo vnitřní reakce, případně vnitřní síly. Staticky neurčitě veličiny vystupují v silové metodě jako neznámé, ve výpočtu se uvažují jako jednotkové. [Petrtyl and Vondrová, 2003]

Řeší se statická odezva na zatěžovací stavy odpovídající jednotkovému zatížení příslušnými staticky neurčitými veličinami a vnějším zatížením na základní soustavu. Výsledná odezva na

staticky neurčité konstrukci se pak určí superpozicí jednotlivých stavů. Jelikož řešíme pouze příhradové konstrukce, postačí nám zabývat se pouze normálovými silami a vnějšími reakcemi:

$$N = N_f + \sum_{i=1}^n N_i X_i \quad (1)$$

kde N_f představuje normálovou sílu od zatížení, N_i normálovou sílu od i -tého zatěžovacího stavu a X_i staticky neurčitou normálovou sílu,

$$R = R_f + \sum_{i=1}^n R_i X_i \quad (2)$$

kde R_f představuje reakci od zatížení, R_i reakci od i -tého zatěžovacího stavu a X_i staticky neurčitou reakci.

Staticky neurčité veličiny X_i se určí z přetvárných podmínek - podmíněčných rovnic. Rovnice vyjadřují podmínky, že výsledné přetvoření základní soustavy odpovídá přetvoření původní soustavy. Součinitelé δ_{ij} ve vztahu (3) představují přetvoření v místě a směru působení veličiny X_i od zatížení základní soustavy veličinou $X_j = 1$. [Petrtyl and Vondrová, 2003]

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1f} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2f} &= 0 \\ \vdots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nf} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Součinitele δ_{ij} můžeme uspořádat do čtvercové matice (4), kterou nazýváme matice poddajnosti $[C]$.

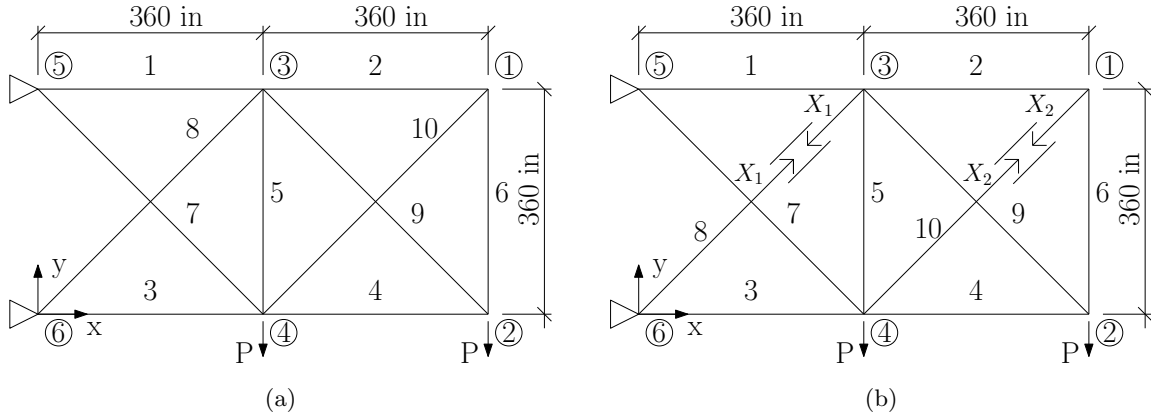
$$C = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Součinitelé δ_{ij} se určí pomocí principu virtuální práce a pro příhradové konstrukce tedy platí:

$$\delta_{ij} = \int_s \frac{N_i N_j}{EA} ds \quad (5)$$

kde N_i a N_j normálové síly od i -tého a j -tého zatěžovacího stavu, E Youngův modul pružnosti a A plocha průřezu.

Na obrázku 1a je desetiprutová konzola použitá ve výpočtech. Základní soustava byla vytvořena přerušením diagonálních prutů číslo 8 a 10, jak je naznačeno na obrázku 1b.



Obrázek 1: (a) 10-prutová příhradová 2D konzola, (b) základní soustava 10-prutové příhradové 2D konzoly

Soustava podmíněných rovnic (3) se pak zjednoduší na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1f} = 0 \quad (6)$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2f} = 0 \quad (7)$$

a výsledné normálové síly a reakce staticky neurčité veličiny se určí superpozicí příspěvků od jednotlivých staticky neurčitých veličin a vnějšího zatížení na základní soustavě.

$$N = N_f + N_1X_1 + N_2X_2 \quad (8)$$

$$R = R_f + R_1X_1 + R_2X_2 \quad (9)$$

Jelikož je průběh normálových sil na jednotlivých prutech příhradové konstrukce konstantní, zjednoduší se vztah pro výpočet součinitele δ_{ij} takto:

$$\delta_{ij} = \int_s \frac{N_i N_j}{EA} ds = \sum_{k=1}^n \frac{N_{ik} N_{jk}}{E_k A_k} \int_0^{l_k} ds = \sum_{k=1}^n \frac{N_{ik} N_{jk}}{E_k A_k} l_k \quad (10)$$

2.2 Redukční věta

Pro výpočet posunů uzlů konstrukce byla použita redukční věta. Ta slouží k výpočtu deformací staticky neurčitých konstrukcí. K určení deformace se aplikuje jednotkové zatížení v požadovaném směru a místě na základní soustavu a určí se vnitřní síly (\bar{M} , \bar{Q} a \bar{N}). Průběh vnitřních sil (M , Q a N) od skutečného zatížení musí odpovídat původní staticky neurčité konstrukci. Tu už však máme spočítanou pomocí silové metody. Pro posun u_a platí vztah:

$$\bar{1}u_a = \int_s \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \beta^* \int_s \frac{Q\bar{Q}}{GA} ds + \int_s \frac{N\bar{N}}{EA} ds \quad (11)$$

Zjednodušením vztahu (11) pro příhradovou konstrukci získáme:

$$\bar{1}u_a = \int_s \frac{N\bar{N}}{EA} ds = \sum_{k=1}^n \frac{N_k \bar{N}_k}{E_k A_k} \int_0^{l_k} ds = \sum_{k=1}^n \frac{N_k \bar{N}_k}{E_k A_k} l_k \quad (12)$$

2.3 Sestavení geometrické matice

Pro výpočet statické odezvy na jednotlivé zatěžovací stavy je třeba sestavit geometrickou matici konstrukce, která představuje podmínky rovnováhy ve všech uzlech konstrukce ve směrech souřadnicových os.

Konstrukce je charakterizována počátečními a koncovými uzly jednotlivých prutů, souřadnicemi uzlů, plochami příčných řezů prutů a modulem pružnosti:

Řádky 4-10 kódu

```

4  %% Zadání konstrukce
5  inode =[ 5      3      6      4      4      2      4      6      2      4];
6  jnode =[ 3      1      4      2      3      1      5      3      3      1];
7  X   =[720      720      360      360      0      0];
8  Y   =[ 360      0      360      0      360      0];
9  Area = 0.1*ones(1,10);
10 Emod= 1.e4*ones(1,10);

```

Následně je třeba specifikovat polohu podpór (vnitřních reakcí) a vnějšího zatížení:

Řádky 11-15 kódu

```

11 %% Lokalizace reakcí a vnějšího zatížení
12 reactx =[5 6];
13 reacty =[5 6];
14 idfx =[2 4];  fx =[0 0];
15 idfy =[2 4];  fy =[-100 -100];

```

Pro sestavení podmínek rovnováhy je třeba normálové síly rozložit do směrů souřadnicových os pomocí směrových cosinů, v případě rovinné příhradové konstrukce do směrů osy x a y:

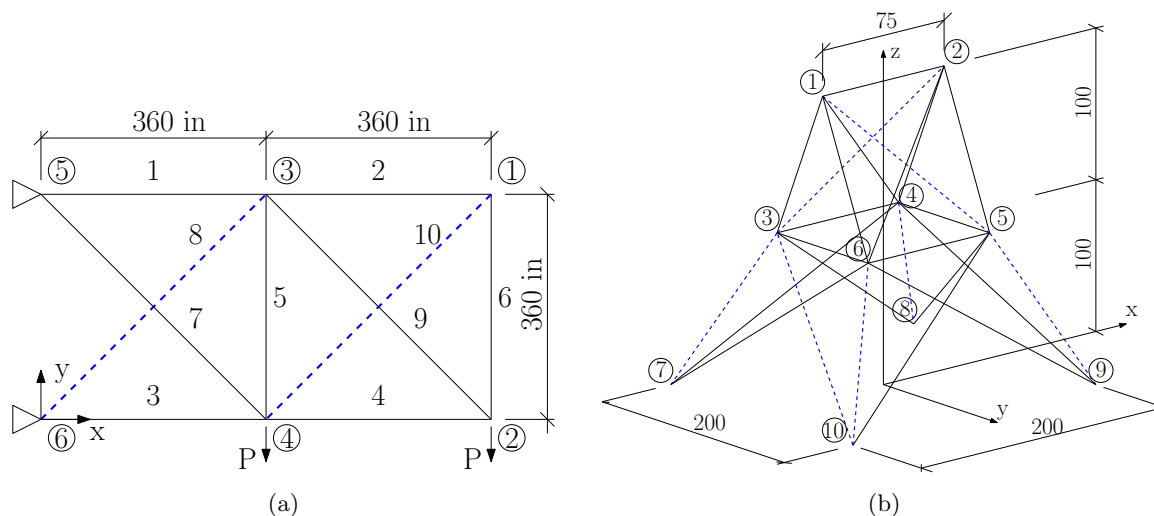
Řádky 18-28 kódu

```

18 %% Vstupní výpočty
19 % Průměty prutů do souřadnicových os
20 xx=(X(jnode)-X(inode));
21 yy=(Y(jnode)-Y(inode));
22 % Délky prutů
23 l=sqrt(xx.^2+yy.^2);
24 % Směrové cosiny
25 cosx=xx./l;
26 cosy=yy./l;
27
28 Tuhost=Area.*Emod;

```

Následuje vytvoření základní soustavy, tento krok je nutné zadat ručně. Na obrázcích 2a - 3b jsou znázorněny základní soustavy jednotlivých řešených konstrukcí, modře čárkované jsou zvýrazněny přerušované pruty. Podrobnější informace o konstrukcích vizte přílohu A.



Obrázek 2: (a) 10-prutová příhradová 2D konzola - základní soustava, (b) 25-prutová příhradová konstrukce - základní soustava; (přerušované pruty znázorněny modře čárkovaně), převzato z [Pospíšilová, 2011] a upraveno

Řádky 29-49 kódu

```

29 %% Vytvoření základní soustavy
30 % Počet uzlů
31 N=max(max(inode),max(jnode))
32 % Stupeň statické neurčitosti
33 SN=abs(length(X)*2-(length(inode))-length(reactx)-length(reacty));
34
35 % Přerušované pruty
36 ZS=[8 10];
37
38 % Vytvoření virtuálních zatěžovacích stavů
39 idfxvirt =zeros(1, 2*length(ZS));
40 idfxvirt(1:2:2*length(ZS))=jnode(ZS);
41 newnode=[N+1:1:N+length(ZS)];
42 jnode(ZS)=newnode;
43 idfyvirt(2:2:2*length(ZS))=jnode(ZS);
44 fxvirt([1:2:2*length(ZS) 2:2:2*length(ZS)])=[cosx(ZS) -cosx(ZS)];
45 fyvirt([1:2:2*length(ZS) 2:2:2*length(ZS)])=[cosy(ZS) -cosy(ZS)];
46 idfyvirt=idfxvirt;
47
48 % Sestavení matice kódových čísel
49 ij=[2*inode'-1,2*inode',2*jnode'-1,2*jnode'];

```

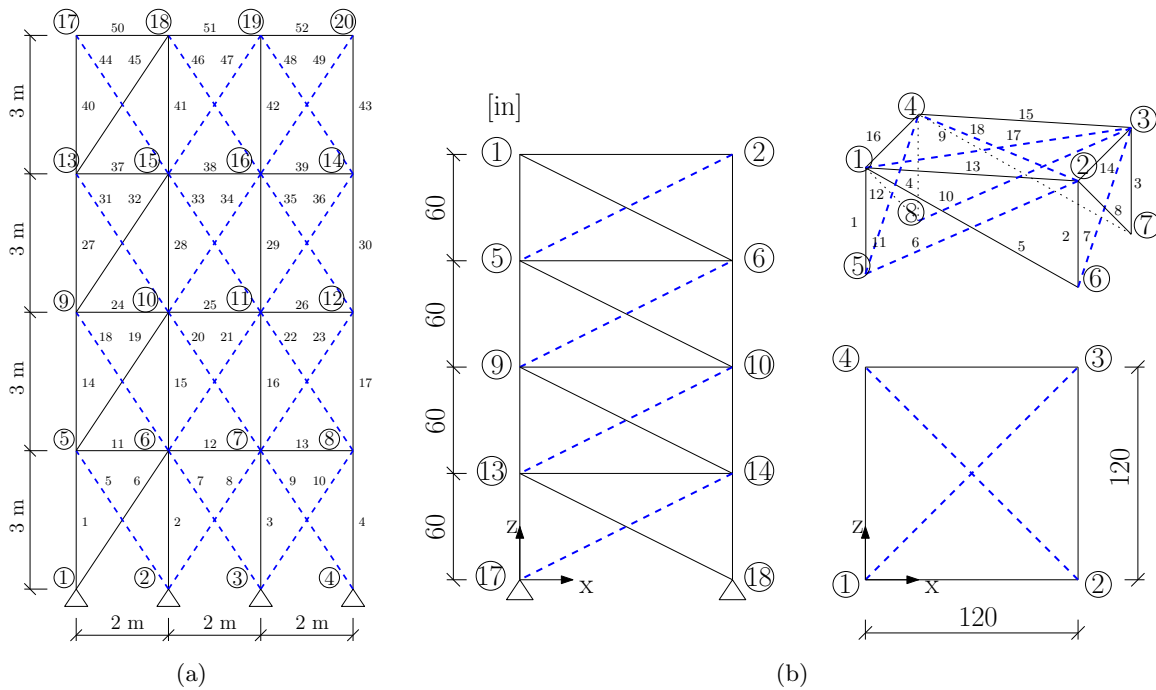
Geometrickou matici sestavíme tak, že si vytvoříme matici nul o rozměru $2 \cdot \text{uzly} \times \text{pruty}$, kde každý řádek představuje podmínky rovnováhy v jednotlivých uzlech vždy ve směru vodorovném a svislém. Dále se do matice zavedou reakce, a to jako matice o rozměrech $2 \cdot \text{uzly} \times (\text{length}(\text{reactx}) + \text{length}(\text{reacty}))$.

Řádky 50-81 kódu

```

50 %% Sestavení geometrické matice konstrukce
51 uzly=N+length(ZS);

```

Obrázek 3: (a) 52-prutová příhradová konstrukce - základní soustava, (b) 72-prutová příhradová konstrukce - základní soustava; (přerušované pruty znázorněny modře čárkovaně), převzato z [Pospíšilová, 2011] a upraveno

```

52 pruty=length(Area);
53 Geom=zeros(2*uzly,pruty);
54 React=zeros(2*uzly, length(reactx)+length(reacty));
55
56 sl=1;
57 %Zavedení reakcí do matice
58 for m=1:length(reactx)
59     r=reactx (m);
60     React(2*r-1,sl)=1;
61     sl=sl+1;
62 end
63 for m=1:length(reacty)
64     r=reacty (m);
65     React(2*r,sl)=1;
66     sl=sl+1;
67 end
68 React;
69
70 % Sestavení geometrické matice
71 for m=1:pruty
72
73     i=inode(m); j=jnode(m);
74     c=cosx(m);
75     s=cosy(m);
76     k=[c;s;-c;-s];
77
78     n=(ij(m,:))';
79     Geom(n,m)=k;
80 end
81 Geom=[React [Geom]];

```

Maticе pravých stran obsahuje jednak virtuální zatěžovací stavy a také skutečné vnější zatížení konstrukce. Nejprve si vytvoříme matici nul o rozměru $2 \cdot \text{uzly} \times (\text{SN}+1)$ do ní vložíme jednotlivé zatěžovací stavy:

Řádky 82-87 kódu

```

82 %% Sestavení matice pravých stran
83 f=zeros(uzly*2, SN+1);
84 for m=1:SN
85     f([2*idfxvirt(2*m-1:2*m)']-1;2*idfyvirt(2*m-1:2*m)'],m)=[fxvirt(2*m-1:2*m)';fyvirt(2*m-1:2*m)'];
86 end
87 f([2*idfx'-1;2*idfy'],3)=[-fx';-fy'];

```

2.4 Sestavení matice poddajnosti a určení výsledných vnitřních sil

Řešením soustavy rovnic získáme normálové síly N_{ij} od jednotlivých zatěžovacích stavů na základní soustavě, z těchto sil můžeme vypočítat součinitele δ_{ij} , sestavit tak matici poddajnosti a vypočítat staticky neurčité veličiny X_i a následně superpozicí výsledné osově síly a reakce.

Řádky 88-117 kódu

```

88 %% Řešení soustav rovnic
89 x=Geom\ f;
90 % Rozdělení na reakce a osově síly
91 xR=x(1:(length(reactx)+length(reacty)),1:end);
92 xN=x((length(reactx)+length(reacty))+1:end,1:end);
93 % Sestavení matice poddajnosti a příslušné pravé strany
94 finalA=zeros(SN,SN);
95 finalb=zeros(SN,1);
96 for m=1:SN
97     for n=m:SN
98         finalA(m,n)=sum(xN(:,m).*xN(:,n).*1'./Area');
99         finalA(n,m)=sum(xN(:,m).*xN(:,n).*1'./Area');
100     end
101     finalb(m,1)=-sum(xN(:,m).*xN(:,SN+1)).*1'./Area');
102 end
103 finalx=finalA\ finalb;
104 finalx=[finalx; [1]];
105 %% Výsledné reakce a osově síly
106 R=zeros(size(xR,1),1);
107 Nj=zeros(size(xN,1),1);
108 for m=1:size(xR,1)
109     for n=1:SN+1
110         R(m,1)=R(m,1)+xR(m,n)*finalx(n);
111     end
112 end
113 for m=1:size(xN,1)
114     for n=1:SN+1
115         Nj(m,1)=Nj(m,1)+xN(m,n)*finalx(n);
116     end
117 end

```

2.5 Výpočet posunů

Posuny uzlů byly vypočteny pomocí redukční věty následovně:

Řádky 120-130 kódu

```

120 %% Posuny uzlů
121 Disp=zeros((length(X)-2)*2,1);
122
123 for m=1:(N-SN)*2
124     b=zeros(uzly*2,1);
125     b(m)=1;

```

```

126     xf=Geom;
127     Nf=zeros(length(inode),1);
128     Nf=xf(5:end);
129     Disp(m)=sum(Nf.*Nj.*1'./Tuhost');
130 end

```

2.6 Výpočet napětí a hmotnosti

Na závěr bylo třeba dopočítat už jen napětí v prutech a výslednou hmotnost konstrukce:

Řádky 132-136 kódu

```

132     %% Napětí v prutech
133     s=Nj./Area';
134     maxs=max(abs(s));
135     %% Hmotnost konstrukce
136     w=0.1*sum(Area*1');

```

3 Vlastnosti matic

K použití silové metody se přistoupilo především proto, že v jejím řešení vystupuje výrazně menší počet neznámých. U silové metody je navíc nutné řešit vnitřní síly na základní staticky určité soustavě, ale geometrické matice jsou řídké. Tabulka 1 ukazuje rozměry geometrické matice, matice poddajnosti v porovnání s maticí tuhosti používanou v deformační metodě a počty nenulových prvků. Grafické porovnání velikostí matic a zastoupení nenulových prvků je v příloze C.

Typ konstrukce	10-ti prutová	25-ti prutová	52-ti prutová	72-ti prutová
DM - matice tuhosti	8×8	18×18	32×32	48×48
Počet nenulových prvků	40	160	240	456
SM - geometrická matice	16×14	51×37	80×60	132×84
Počet nenulových prvků	32	134	160	236
SM - matice poddajnosti	2×2	7×7	20×20	24×24
Počet nenulových prvků	4	49	326	320

Tabulka 1: Porovnání velikosti matice tuhosti, geometrické matice a matice poddajnosti

4 Převod do symbolického zápisu a implementace v C++

Protože budou do výpočtu vstupovat různé kombinace příčných řezů a výpočet tak bude probíhat mnohokrát, bylo nutné z důvodu úspory výpočetního času převést kód vytvořený v prostředí MATLAB do C++. To bylo provedeno pomocí symbolického zápisu. Ideální by bylo získat vztahy pro vnitřní síly, napětí a posuny přímo, pouze v závislosti na plochách jednotlivých příčných řezů. Takové množství dat se ale nevejde do paměti, proto bylo nutné rozdělit celý proces na více fází. V první fázi získáme matici poddajnosti $[C]$ a příslušnou pravou stranu $\{\delta_f\}$ v závislosti na plochách příčných řezů. Řešením soustavy rovnic pak dostaneme staticky neurčitě veličiny $X_i = \{X_1 \dots X_n\}$. V závislosti na veličinách X_i si vyjádříme napětí a posuny.

Kód převedený do symbolického zápisu byl pomocí příkazu `ccode` převeden do syntaxe C/C++ s přeindexováním prvků pole z 1 až n prvků na 0 až (n-1) prvků. Pro řešení soustav rovnic byl převzat řešič od doc. Kruise [Jaroslav Kruise a kolektiv, 2010].

5 Testování rychlostí výpočtu a porovnání s deformační metodou

Testování rychlostí bylo provedeno v kompilovaném C++ kódu a bylo provedeno porovnání s rychlostí výpočtu pomocí deformační metody. Pomocí náhodného generátoru čísel se z množiny ploch vyberou plochy příčných průřezů prutů v jejich potřebném počtu a spočítá se napětí v prutech. Tabulka 2 ukazuje porovnání výpočetních časů silové a deformační metody jako průměr z deseti spuštění.

Typ konstrukce	25-ti prutová	52-ti prutová	72-ti prutová
Deformační metoda	0,037	0,149	0,508
Silová metoda	0,012	0,054	0,108

Tabulka 2: Porovnání výpočetní rychlosti deformační a silové metody

6 Závěr

Jak je patrné z tabulky 2, je použití silové metody pro námi sledované konstrukce zhruba 3x až 5x rychlejší než použití deformační metody. Je tomu tak především proto, že v silové metodě je výrazně menší počet neznámých než v metodě deformační a také proto, že geometrická matice konstrukce je řídká. Nemůžeme ovšem opomenout nevýhodu silové metody, která spočívá v nutnosti zadávání základní soustavy ručně, což však není pro konstrukce podobného typu velký problém.

Do budoucna je zde možný prostor pro další zrychlení použitím jiného řešiče soustav rovnic, či jiného způsobu uložení matice do paměti.

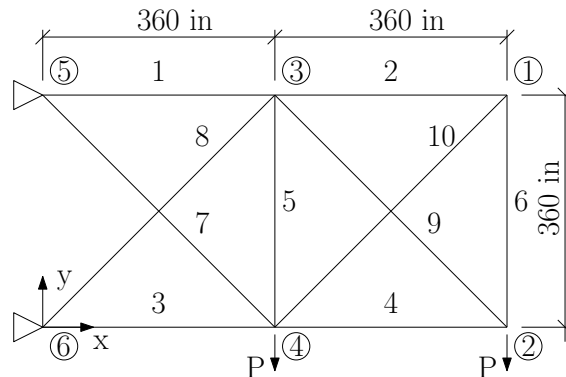
Reference

- [Cai and Thierauf, 1996] Cai, J. and Thierauf, G. (1996). Evolution strategies for solving discrete optimization problems. *Advances in Engineering Software*, 25:177–183.
- [Fox and Schmit, 1966] Fox, R. L. and Schmit, L. A. (1966). Advances in the integrated approach to structural synthesis. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 3(6):858–866.
- [Giger and Ermanni, 2006] Giger, M. and Ermanni, P. (2006). Evolutionary truss topology optimization using a graph-based parameterization concept. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32(4):313–326.
- [Jaroslav Kruis a kolektiv, 2010] Jaroslav Kruis a kolektiv (2010). Homepage of SIFEL. <http://mech.fsv.cvut.cz/~sifel/>.
- [Lemonge and Barbosa, 2003] Lemonge, A. C. C. and Barbosa, H. J. C. (2003). An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:703–736.
- [Petrtýl and Vondrová, 2003] Petrtýl, M. and Vondrová, R. (2003). *Stavební mechanika 32: Příručka základů stavební mechaniky a pružnosti*. Skriptum. České vysoké učení technické v Praze.
- [Pospíšilová, 2010] Pospíšilová, A. (2010). *Analýza tradičních příkladů rozměrové optimalizace*. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze.
- [Pospíšilová, 2011] Pospíšilová, A. (2011). *Analýza implementace tradičních příkladů rozměrové optimalizace*. Soutěžní práce. České vysoké učení technické v Praze.
- [Venkayya, 1971] Venkayya, V. B. (1971). Design of optimum structures. *Computers & Structures*, 1:265–309.
- [Wu and Chow, 1995a] Wu, S.-J. and Chow, P.-T. (1995a). Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms. *Computers & Structures*, 55(4):495–702.
- [Wu and Chow, 1995b] Wu, S.-J. and Chow, P.-T. (1995b). Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of trusses. *Computers & Structures*, 56(6):979–991.

Příloha A Použité benchmarky

Konstrukce použité k testování převzaty z [Pospíšilová, 2011]. Jedná se o desetiprutovou příhradovou konzolu ve 2D, dvacetipětiprutovou příhradovou věž ve 3D, padesátidvouprutovou příhradovou konstrukci ve 2D a sedmdesátidvouprutovou příhradovou konstrukci ve 3D.

A.1 Desetiprutová příhradová 2D konzola

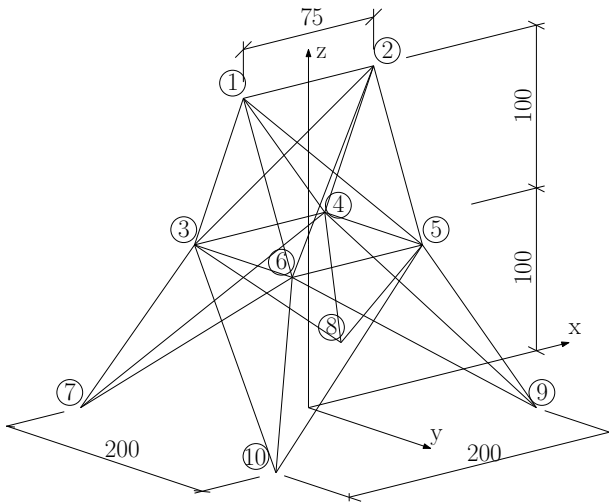


Obrázek A4: 10-prutová příhradová 2D konzola

Tato konstrukce byla poprvé zveřejněna Venkayyou v článku [Venkayya, 1971]. Konstrukce byla řešena spojitou rozměrovou optimalizací. Prvního případu diskrétní rozměrové optimalizace se bohužel dopátrat nepodařilo, ale nejstarší článek, který je k dispozici a který tuto konstrukci zmiňuje, je [Cai and Thierauf, 1996]. Použité charakteristiky materiálu konstrukce, omezující podmínky a zatížení konstrukce jsou v tabulce A3, konstrukce je vyobrazena na obrázku A4. Sada testovacích ploch příčných průřezů obsahuje tyto hodnoty (v in^2): 1,62, 1,80, 1,99, 2,13, 2,38, 2,62, 2,63, 2,88, 2,83, 3,09, 3,13, 3,38, 3,47, 3,55, 3,63, 3,84, 3,87, 3,88, 4,18, 4,22, 4,49, 4,59, 4,80, 4,97, 5,12, 5,74, 7,22, 7,97, 11,50, 13,50, 13,90, 14,20, 15,50, 16,00, 16,90, 18,80, 19,90, 22,00, 22,90, 26,50, 30,00, 33,50. Tato vstupní data byla převzata z [Lemonge and Barbosa, 2003]. Hodnoty byly ponechány v původních anglosaských jednotkách. Přehled všech těchto jednotek včetně převodu do SI soustavy naleznete v příloze B.

Materiál:	hliník
Objemová hmotnost:	0,1 lb/in ³
Youngův modul pružnosti E:	10 ⁷ psi
Limitní napětí:	25 000 psi
Limitní posun:	2 in
Zatížení P:	100 kips

Tabulka A3: Charakteristiky materiálu a omezující a okrajové podmínky 10-prutové konzoly



Obrázek A5: 25-prutová příhradová 3D konstrukce věže

Skupina	Připojení prutů k uzlům
A ₁	1-2
A ₂	1-4, 2-3, 1-5, 2-6
A ₃	2-5, 2-4, 1-3, 1-6
A ₄	3-6, 4-5
A ₅	3-4, 5-6
A ₆	3-10, 6-7, 4-9, 5-8
A ₇	3-8, 4-7, 6-9, 5-10
A ₈	3-7, 4-8, 5-9, 6-10

Tabulka A4: Sdružení ploch příčných průřezů do skupin (25-prutová konstrukce)

A.2 Dvacetipřipřutová příhradová 3D věž

Dle [Venkayya, 1971] byla tato konstrukce poprvé zveřejněna Foxem a Schmitem ve článku [Fox and Schmit, 1966]. Nejstarší objevený článek uveřejňující tuto konstrukci s diskrétními proměnnými je z roku 1995 [Wu and Chow, 1995a]. Konstrukce je znázorněna na obrázku A5, charakteristiky materiálu jsou uvedené v tabulce A5 a zatížení konstrukce naleznete v tabulce A6. Jednotlivé plochy příčných průřezů byly vybírány z této množiny (v in²): 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,3, 1,4, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8, 1,9, 2,0, 2,1, 2,2, 2,3, 2,4, 2,5, 2,6, 2,8, 3,0, 3,2, 3,4 uveřejněné ve článku [Wu and Chow, 1995b]. Tato konstrukce je symetrická, proto byly jednotlivé pruty sdruženy do skupin, které můžete nalézt v tabulce A4.

Materiál:	hliník
Objemová hmotnost:	0,1 lb/in ³
Youngův modul pružnosti E:	10 ⁷ psi
Limitní napětí:	40 000 psi
Limitní posun:	2 in

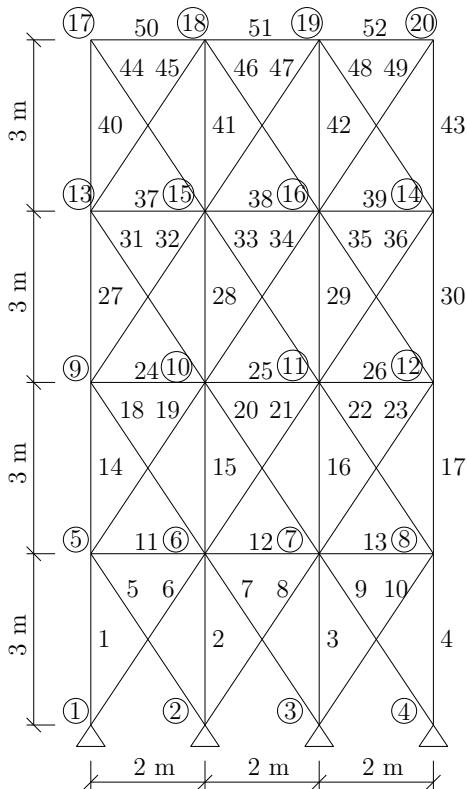
Tabulka A5: Charakteristiky materiálu a omezující podmínky 25-prutové věže

Uzel	F _x	F _y	F _z
1	1,0	-10,0	-10,0
2	0	-10,0	-10,0
3	0,5	0	0
6	0,6	0	0

Tabulka A6: Zatížení 25-prutové konstrukce v kip jednotkách

A.3 Padesátidvouprutová příhradová 2D konstrukce

Nejstarší článek, který je k dispozici a který tuto konstrukci zkoumá a popisuje, je [Wu and Chow, 1995b]. Sada ploch příčných průřezů prutů byla pro výpočet použita dle [Giger and Ermanni, 2006]. Jedná se o tuto množinu: 71,613, 90,968, 126,451, 161,290, 198,064, 252,258, 285,161, 363,225, 388,386, 494,193, 506,451, 641,289, 645,160, 792,256, 816,773,



Obrázek A6: 52-prutová příhradová 2D konstrukce

A ₁	1, 2, 3, 4
A ₂	5, 6, 7, 8, 9, 10
A ₃	11, 12, 13
A ₄	14, 15, 16, 17
A ₅	18, 19, 20, 21, 22, 23
A ₆	24, 25, 26
A ₇	27, 28, 29, 30
A ₈	31, 32, 33, 34, 35, 36
A ₉	37, 38, 39
A ₁₀	40, 41, 42, 43
A ₁₁	44, 45, 46, 47, 48, 49
A ₁₂	50, 51, 52

Tabulka A7: Sdružení ploch příčných průřezů do skupin (52-prutová konstrukce)

Objemová hmotnost:	7 860 kg/m ³
Modul pružnosti E:	2,07 × 10 ⁵ MPa
Limitní napětí:	180 MPa

Tabulka A8: Charakteristiky materiálu a omezující podmínky 52-prutové věže

Uzel	F _x	F _y
17	100,0	200,0
18	100,0	200,0
19	100,0	200,0
20	100,0	200,0

Tabulka A9: Zatížení 52-prutové konstrukce v kN

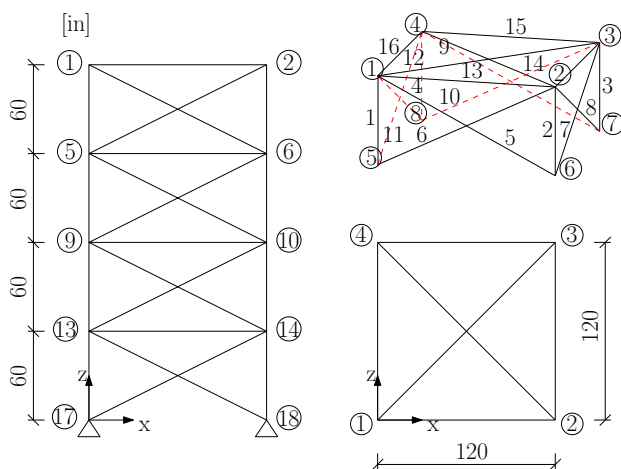
940,000, 1 008,385, 1 045,159, 1 161,288, 1 283,868, 1 374,191, 1 535,481, 1 690,319, 1 696,771, 1 858,061, 1 890,319, 1 993,544, 2 019,351, 2 180,641, 2 238,705, 2 290,318, 2 341,191, 2 477,414, 2 496,769, 2 503,221, 2 696,769, 2 722,575, 2 896,768, 2 961,284, 3 096,768, 3 206,445, 3 303,219, 3 703,218, 4 658,055, 5 141,925, 5 503,215, 5 999,998, 6 999,986, 7 419,340, 8 709,660, 8 967,724, 9 161,272, 9 999,980, 10 322,560, 10 903,204, 12 129,008, 12 838,684, 14 193,520, 14 774,164, 15 806,420, 17 096,740, 18 064,480, 19 354,800, 21 612,860 (v mm²). Konstrukce je vyobrazena na obrázku A6, charakteristiky materiálu a omezující podmínky jsou uvedeny v tabulce A8 a zatížení naleznete v tabulce A9. Konstrukce je opět symetrická, proto jsou plochy sdruženy do skupin, které jsou uvedeny v tabulce A7 [Lemonge and Barbosa, 2003].

A.4 Sedmdesátidvouprutová příhradová 3D konstrukce

Konstrukce na obrázku A7 byla poprvé uveřejněna dle [Venkayya, 1971] Venkayyou, Knotem a Reddym v roce 1968. Jako u 10-prutové konstrukce je však řešena spojitou rozměrovou optimalizací. V článku [Wu and Chow, 1995b] je tato konstrukce diskrétní optimalizací řešena. Jednotlivé plochy příčných průřezů byly vybírány z této množiny (v in²): 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,3, 1,4, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8, 1,9, 2,0, 2,1, 2,2, 2,3, 2,4, 2,5, 2,6, 2,7, 2,8, 2,9, 3,0, 3,1, 3,2 viz [Wu and Chow, 1995b]. Materiálové charakteristiky a omezující podmínky (vizte tabulku A12) a zatížení (vizte tabulku A10) byly převzaty z [Lemonge and Barbosa, 2003]. Plochy byly opět sdruženy do skupin z důvodu symetrie konstrukce, vizte tabulku A11.

Uzel	F_x	F_y	F_z
1	5	5	-5

Tabulka A10: Zatížení 72-prutové konstrukce [kip]



Obrázek A7: 72-prutová příhradová 3D konstrukce

Skupina	Pruty
A ₁	1, 2, 3, 4
A ₂	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
A ₃	13, 14, 15, 16
A ₄	17, 18
A ₅	19, 20, 21, 22
A ₆	23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
A ₇	31, 32, 33, 34
A ₈	35, 36
A ₉	37, 38, 39, 40
A ₁₀	41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48
A ₁₁	49, 50, 51, 52
A ₁₂	53, 54
A ₁₃	55, 56, 57, 58
A ₁₄	59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66
A ₁₅	67, 68, 69, 70
A ₁₆	71, 72

Tabulka A11: Sdružení ploch průřezů do skupin (72-prutová konstrukce)

Objemová hmotnost:	0,1 lb/in ³
Youngův modul pružnosti E:	10 ⁷ psi
Limitní napětí:	25 ksi
Limitní posun:	0,25 in

Tabulka A12: Charakteristiky materiálu a omezující podmínky 72-prutové věže

Příloha B Přehled užitých anglosaských jednotek s převodem do SI soustavy

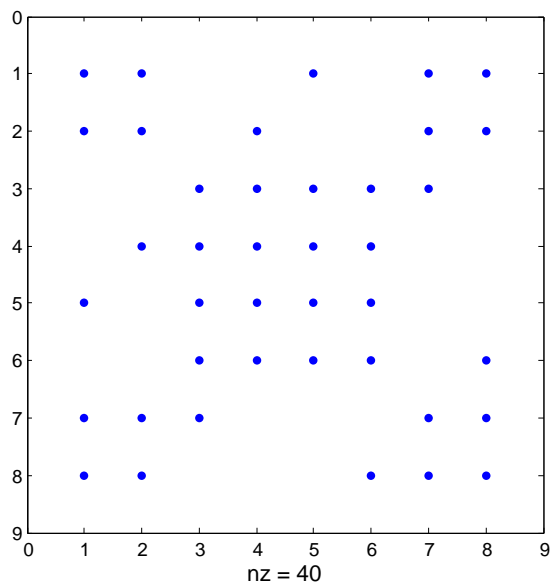
999 Jednotka	Název anglický	Název český	Převod do SI soustavy
in	inch	palec	1 in = 25,4 mm
psi	pound per square inch	libra síly na čtverečný palec	1 psi = 6.894,757 Pa
kp	kip	-	1 kip = 4.448,222 N
lb/in ³	pound per cubic inch	libra síly na kubický palec	3,613 · 10 ⁻⁵ lb/in ³ = 1 kg/m ³

Tabulka B13: Přehled užitých anglosaských jednotek s převodem do SI soustavy

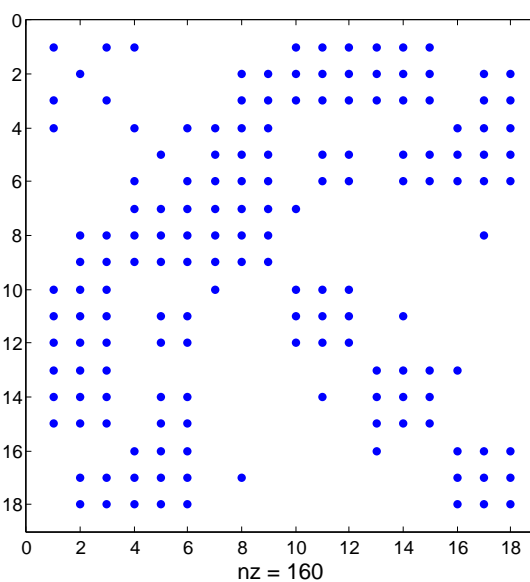
Příloha C Grafické porovnání velikostí matic a zastoupení nenulových prvků

C.1 Matice tuhosti

Obrázky C8 - C11 znázorňují zastoupení nenulových prvků v geometrické matici, (**nz** představuje počet nenulových prvků matice). Obrázky převzaty z [Pospíšilová, 2011].



Obrázek C8: 10-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice tuhosti



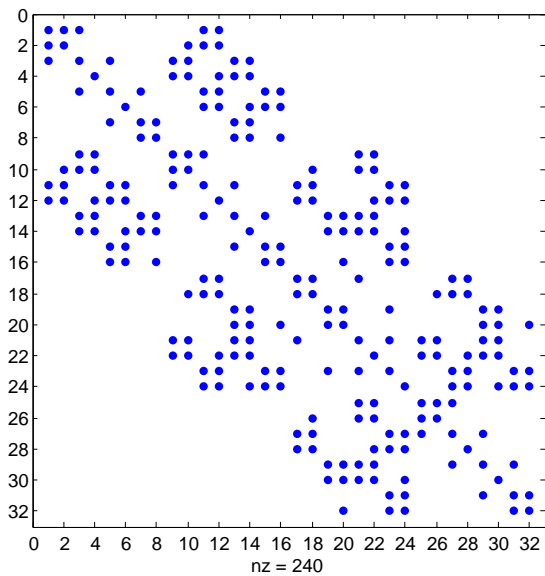
Obrázek C9: 25-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice tuhosti

C.2 Geometrická matice

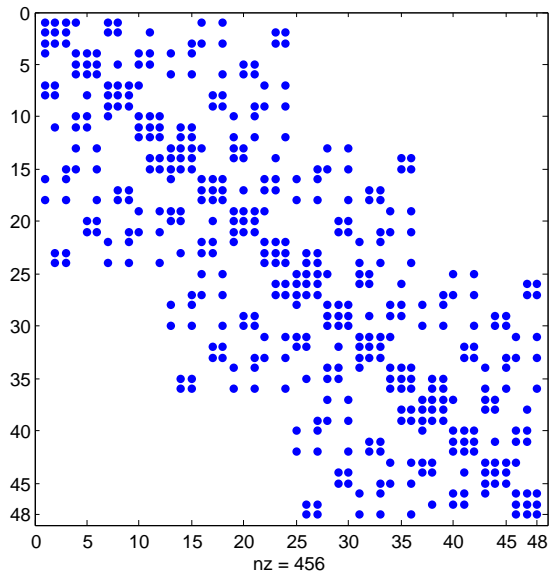
Obrázky C12 - C15 znázorňují zastoupení nenulových prvků v geometrické matici, (**nz** představuje počet nenulových prvků matice).

C.3 Matice poddajnosti

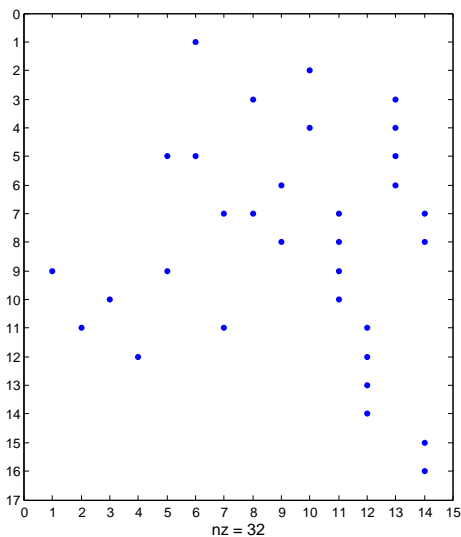
Obrázky C16 - C19 znázorňují zastoupení nenulových prvků v geometrické matici, (**nz** představuje počet nenulových prvků matice).



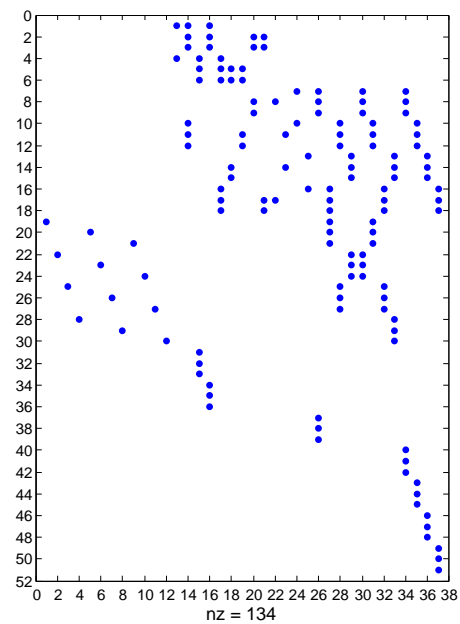
Obrázek C10: 52-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice tuhosti



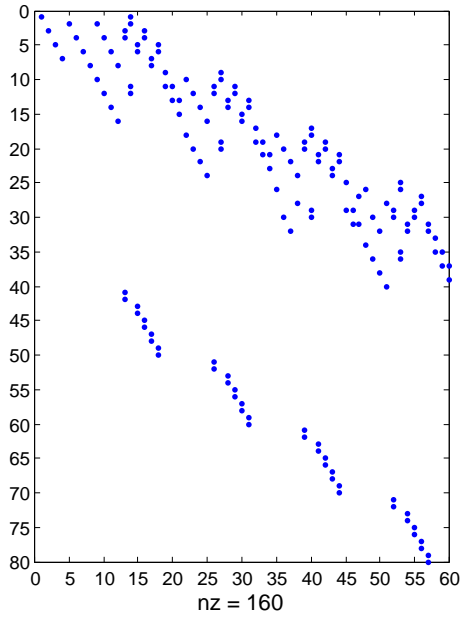
Obrázek C11: 72-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice tuhosti



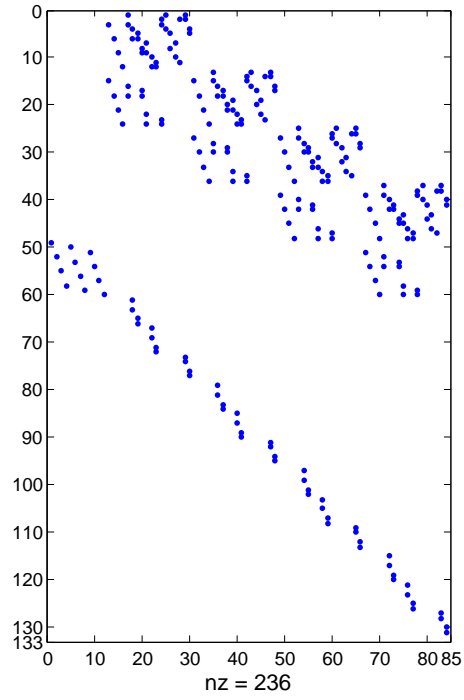
Obrázek C12: 10-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků geometrické matice



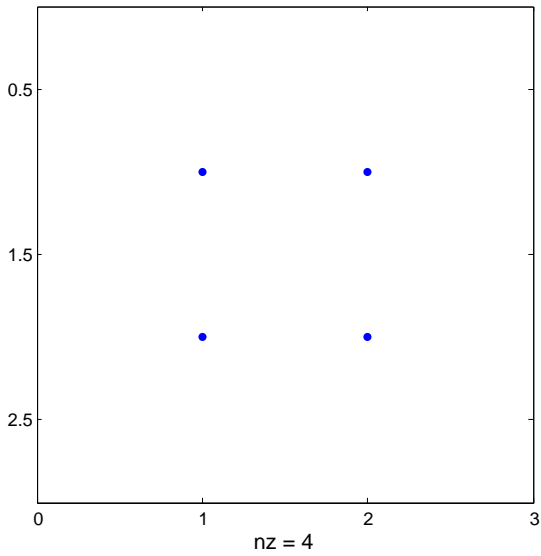
Obrázek C13: 25-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků geometrické matice



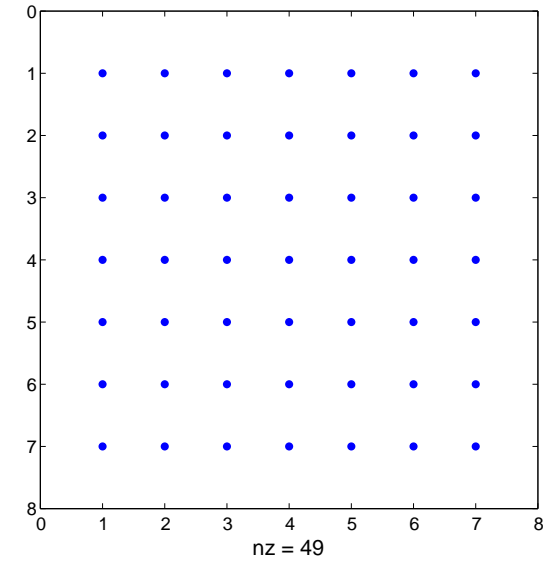
Obrázek C14: 52-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků geometrické matice



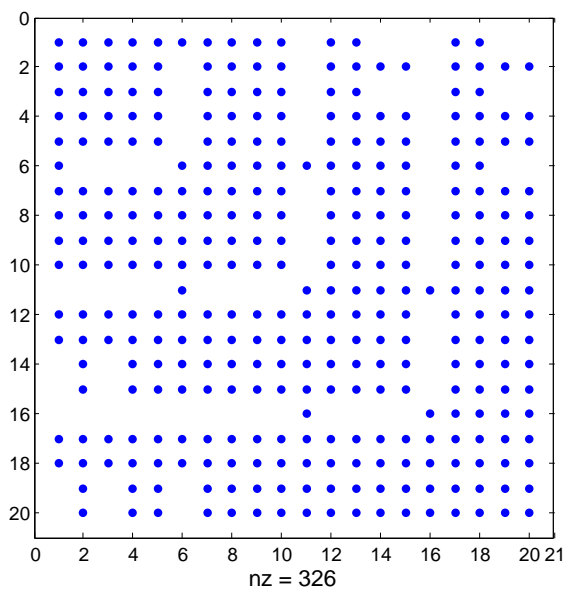
Obrázek C15: 72-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků geometrické matice



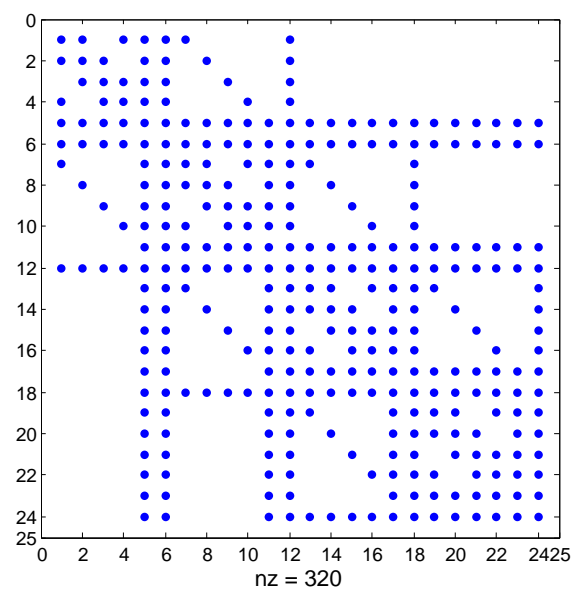
Obrázek C16: 10-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice poddajnosti



Obrázek C17: 25-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice poddajnosti



Obrázek C18: 52-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice poddajnosti



Obrázek C19: 72-prutová příhradová konstrukce - počet nenulových prvků matice poddajnosti