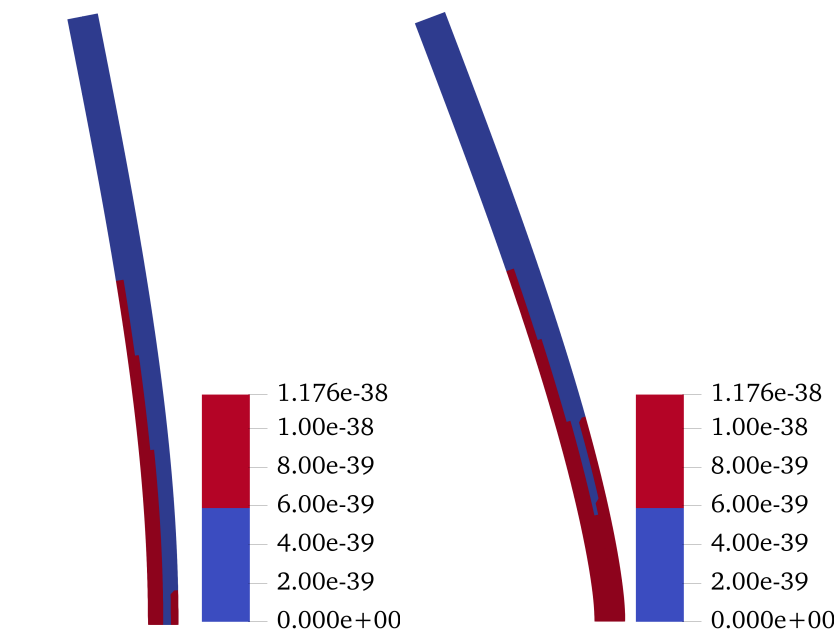


(a) krok 39,  $\kappa = \kappa_{el}$ , bod A      (b) krok 42,  $P = P_{max}$ , bod B



(c) krok 83,  $\kappa = \kappa_{ep}$ , bod C      (d) krok 235, bod D

Obr. 3.7: Vykreslení plastické deformace v různých časech

chování prutu. Maximální síla, kterou je prut schopen přenést, je rovna 1.3923 MN, poměr maximální síly a kritické síly  $\frac{P_{max}}{P_{cr}}$  je roven 0.8599. Průhyb  $w_u$  při maximální síle je roven 0.0302 m a maximální průhyb v bodě, kdy se průřez uprostřed dostane do mezního plastického stavu, je roven 0.1215 m.

Na Obr. 3.9 jsou porovnány výsledky metody konečných prvků a výsledky podle metody střelby pro pružnoplastický výpočet. Na grafu je opět znázorněn bod D, ve kterém se prostřední průřez nachází v mezním plastickém stavu. Body křivky, které se nacházejí napravo od tohoto bodu, jsou dopočítané analyticky. Předpokládá-li se, že pro větší průhyby bude nejnamáhanější průřez stále v mezním plastickém stavu, ohybový moment je pro danou normálovou sílu jednoznačně určen. Ze znalosti ohybového momentu a velikosti působícího zatížení je pak znám i průhyb v prostředním průřezu. Ten se vypočítá jako  $w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{M}{P}$ .

Na Obr. 3.10 je vykreslen interakční diagram zmíněného průřezu. V průběhu zatěžování se nejdříve zvětšovala tlaková síla, dokud její hodnota nedosáhla maxima, které je prut schopen přenést. Poté zatížení klesalo. Každé hodnotě síly lze přiřadit ohybový moment, který v daném průřezu působil. Tyto body jsou zobrazeny v interakčním diagramu. Dále jsou do grafu vykresleny zmíněné body A, B, C a D. Je patrné, že body ležící za bodem D kopírují křivku mezního plastického stavu.

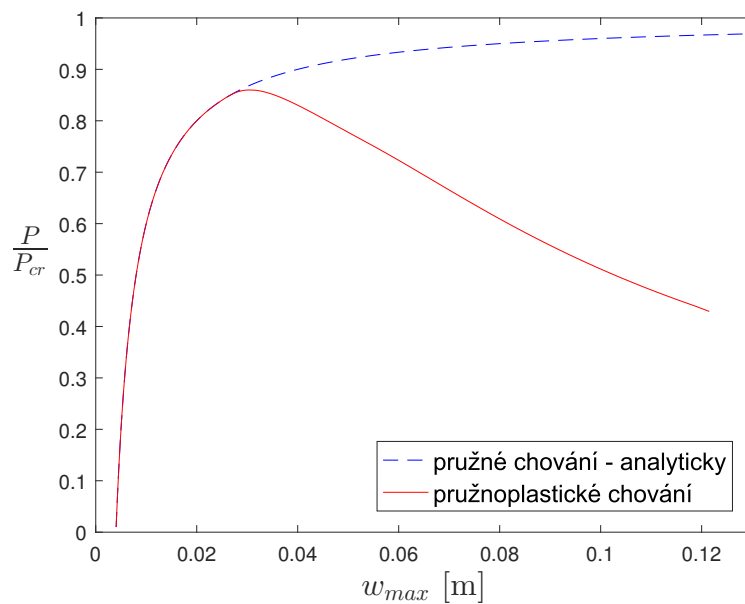
Z Obr. 3.9 je vidět, že výsledky metody střelby a podle MKP se výrazněji liší až v oblasti, kde průhyby dosahují vysokých hodnot. Výpočet metodou střelby je platný pouze za předpokladu malých deformací, zatímco program OOFEM toto omezení nemá.

Na Obr. 3.11 je zobrazen detail Obr. 3.9 pro oblast, kdy je dosaženo maximální síly. V Tab. 3.4 jsou zobrazeny hodnoty maximální dosažené síly podle metody konečných prvků a podle metody střelby a jejich odchylka. Z grafu i číselných hodnot je vidět, že výsledky jsou velmi podobné.

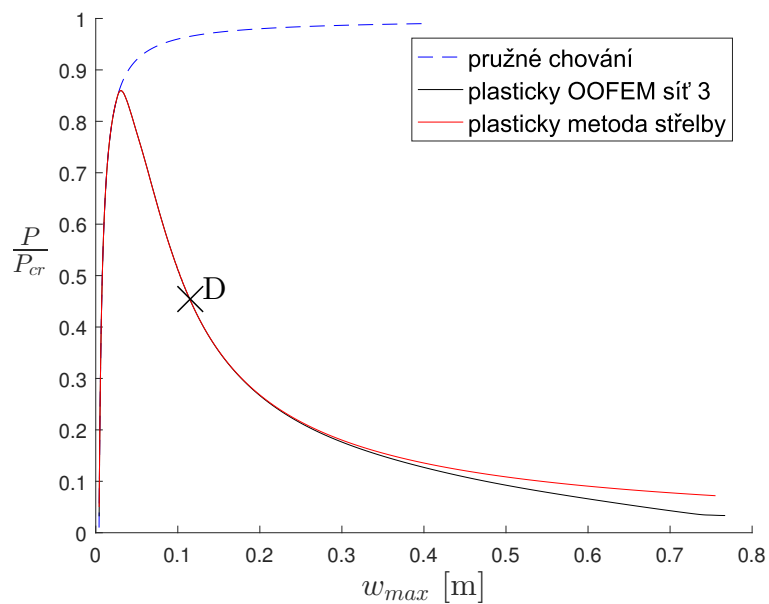
### 3.3 Vliv parametrů

V této sekci budou provedeny výpočty metodou střelby pro pruty s různými geometrickými charakteristikami a rozměry. Z výsledků bude patrný vliv jednotlivých parametrů na průběh odezvy prutu na dané zatížení.

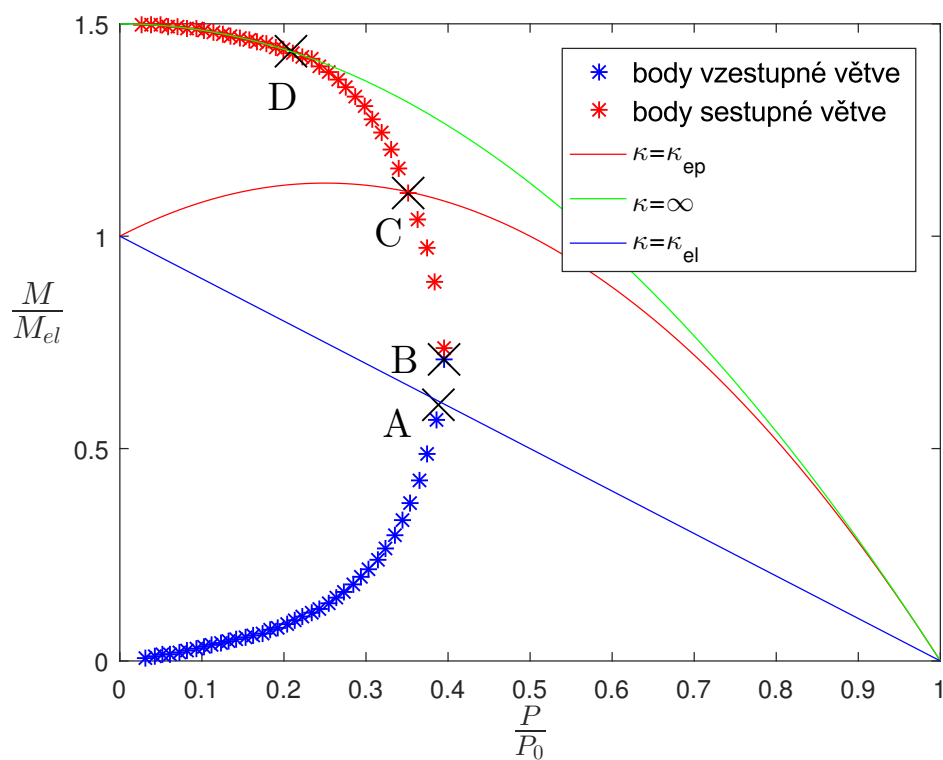
Na Obr. 3.12 jsou zobrazeny zatěžovací křivky pro tři různě velké průřezy. Šířka průřezu  $b = 0.15\text{m}$  je stále stejná, mění se pouze výška průřezu  $h$ . Postupně bude nabývat hodnot 0.05m, 0.1m a 0.15m.



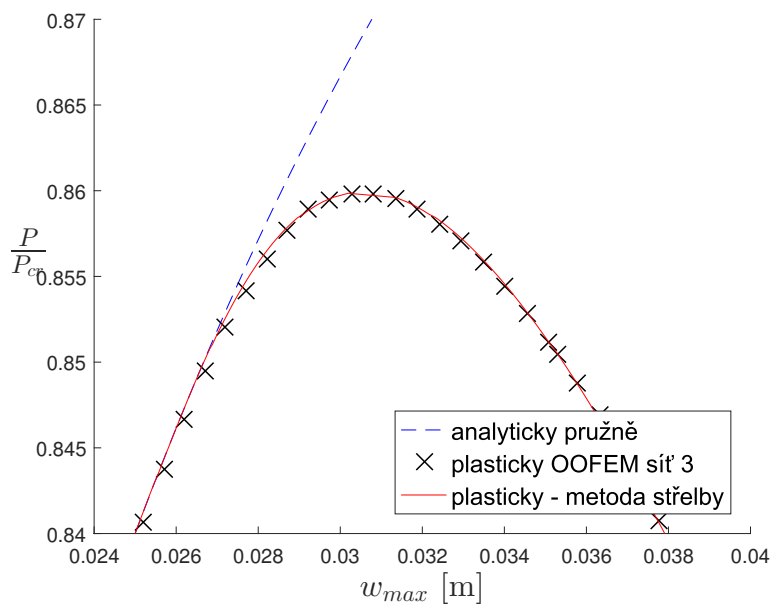
Obr. 3.8: Závislost  $\frac{P}{P_{cr}}$  na průhybu uprostřed prutu



Obr. 3.9: Porovnání pružnoplastického výpočtu podle MKP a metody střelby



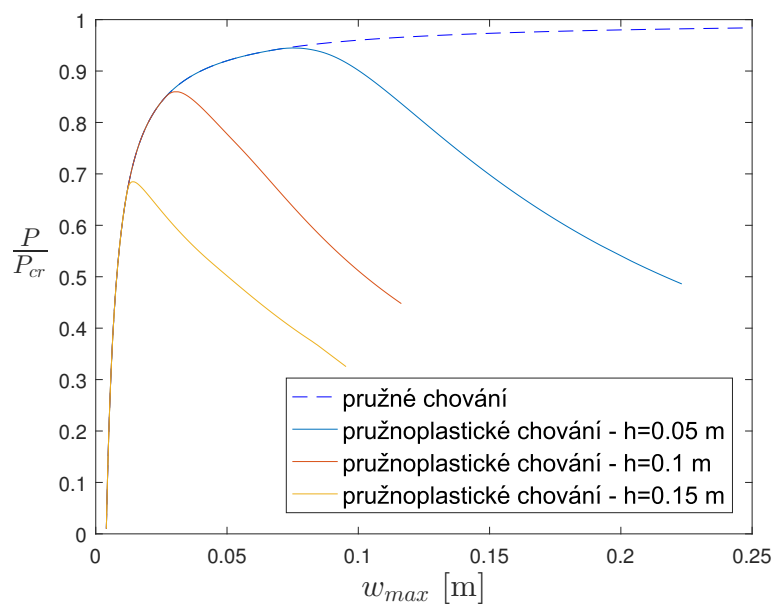
Obr. 3.10: Interakční diagram



Obr. 3.11: Detail Obr. 3.9

	$\frac{P_{max, OOFEM}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max, matlab}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{max, OOFEM} - P_{max, matlab}}{P_{max, matlab}} \cdot 100$ [%]
Síť 3	0.8598	0.8599	$-5.7459 \cdot 10^{-4}$

Tab. 3.4: Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby



Obr. 3.12: Porovnání pro různé průřezy

Na Obr. 3.13 je vyobrazen interakční diagram průřezu uprostřed prutu. Jsou na něm zobrazeny křivky odpovídající meznímu pružnému stavu ( $\kappa = \kappa_{el}$ ), meznímu plastickému stavu ( $\kappa = \infty$ ) a křivka odpovídající přechodnému stavu mezi možnostmi 2 a 3 ( $\kappa = \kappa_{ep}$ ), viz sekce 2.4. Dále jsou do grafů zakresleny kombinace ohybového momentu a normálové síly pro každý zatěžovací krok. V grafu jsou celkem tři sady těchto bodů, každá odpovídající dané výšce prutu. Modré křížky jsou body odpovídající rostoucí části zatěžovací křivky a červené křížky odpovídají části klesající.

Z grafů je patrné, že čím je výška průřezu větší, tím je prut méně štíhlý a plastické chování materiálu má větší vliv na maximální únosnost prvku.

Na Obr. 3.14 jsou zobrazeny zatěžovací křivky pro měnící se délky průřezu. Rozměry průřezu jsou tentokrát stejné pro všechny křivky, tedy  $b = 0.15$  m a  $h = 0.1$  m. Délka prutu  $L$  bude mít hodnoty 2 m, 3 m a 4 m.

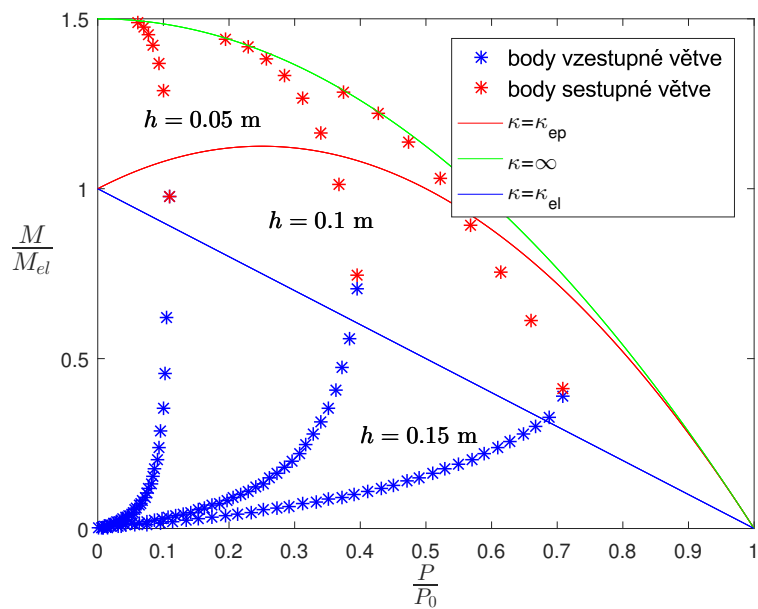
Na Obr. 3.15 jsou pak opět vyobrazeny interakční diagramy průřezu uprostřed prutu pro různě dlouhé prvky.

Opět je vidět, že zkracující se délka prutu a tedy zmenšující se štíhlost výrazně ovlivňuje maximální hodnotu zatížení, které je prut schopen přenést s uvážením pružnoplastického chování materiálu.

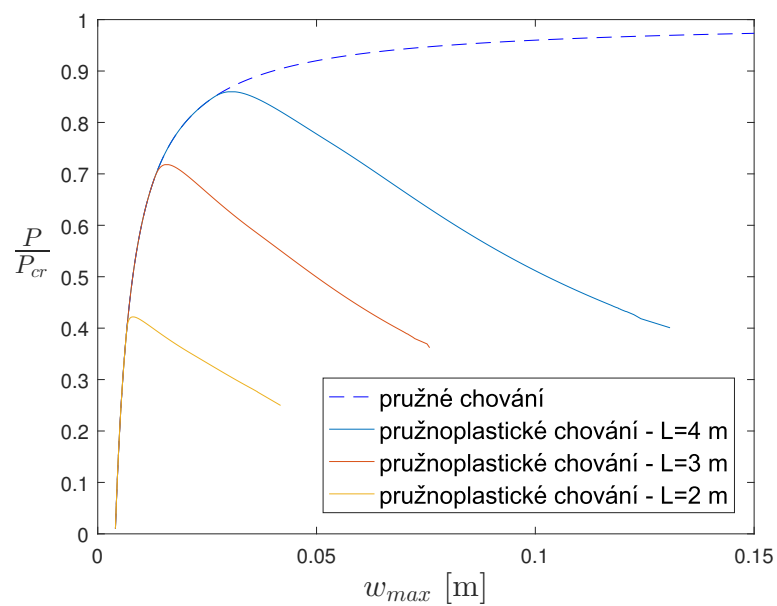
Vliv počáteční excentricity na chování prutu v průběhu zatěžování je ukázán na Obr. 3.18. Konkrétní hodnoty poměru počáteční excentricity a délky prutu  $\delta_0/L$  jsou 0.001, 0.0055 a 0.01.

Je vidět, že zvětšení počáteční excentricity snižuje maximální únosnost. Na Obr. 3.17 je pak opět zobrazen interakční diagram prostředního průřezu a zanesené kombinace ohybového momentu a normálové síly pro zvětšující se zatížení a pro různé excentricity. Prozatím bylo ze všech zmíněných interakčních diagramů vidět, že k překročení křivky, pro kterou platí  $\kappa = \kappa_{ep}$ , došlo až po dosažení maximální síly, tedy v sestupné části zatěžovací křivky. Až pro větší počáteční excentricity dochází k plastizaci v tažené oblasti ještě před dosažením maximální síly, jak je vidět na Obr. 3.17 pro počáteční excentricitu  $\delta_0/L = 0.01$ .

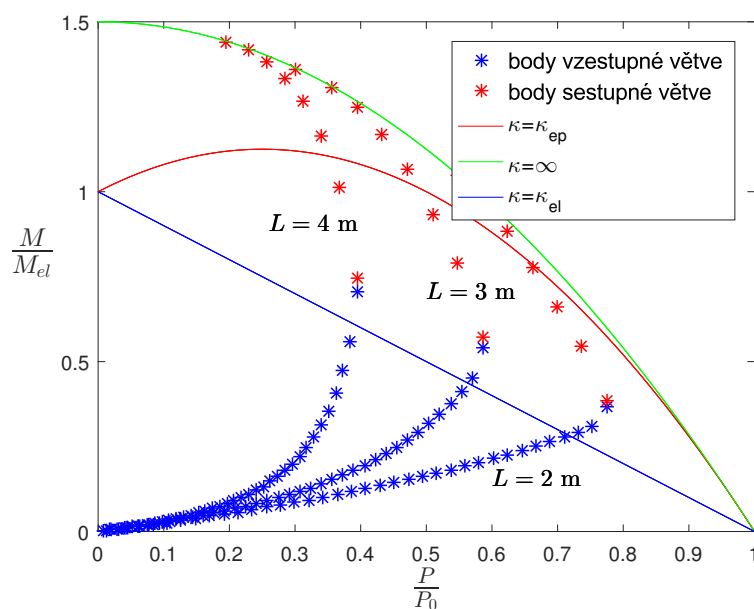
Zatím bylo na několika případech ukázáno, že zvětšující se excentricita a štíhlost prutu snižují maximální únosnost prvku. Bude názorné vykreslit si tyto závislosti do grafů. Na Obr. 3.18 je vykreslen vztah mezi maximálním zatížením a počáteční excentricitou. Blíží-li se počáteční excentricita k 0, maximální tlaková síla se bude přibližovat k hodnotě kritické síly  $P_{cr}$ . To však není obecným pravidlem, záleží na poměru kritické síly a plastické síly  $P_0 = bh\sigma_0$ . Bude-li  $\frac{P_{cr}}{P_0} < 1$  a počáteční excentricita blízká 0, bude platit  $\frac{P_{max}}{P_0} = \frac{P_{cr}}{P_0}$ . Pro případ  $\frac{P_{cr}}{P_0} > 1$  platí  $\frac{P_{max}}{P_0} = 1$  pro  $\delta_0 \rightarrow 0$ . Například zvětší-li se výška



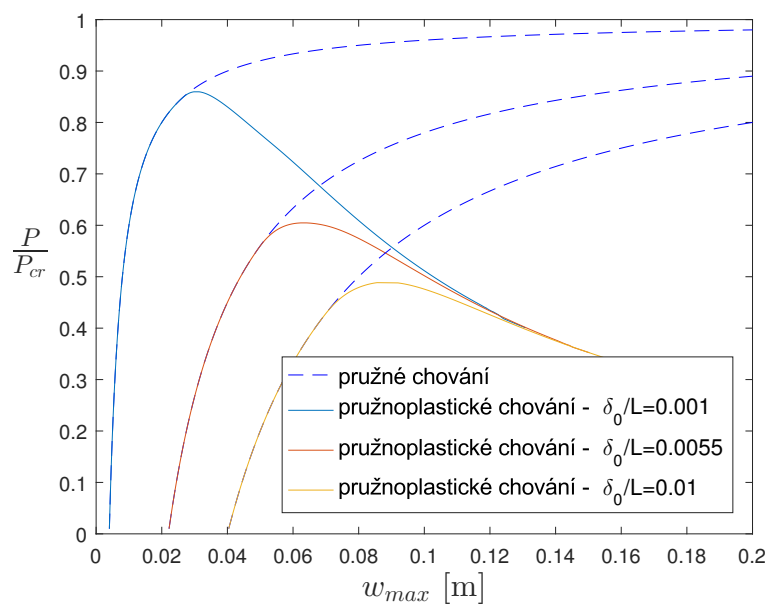
Obr. 3.13: Interakční diagram pro různé výšky průřezu



Obr. 3.14: Porovnání pro různé délky prutu

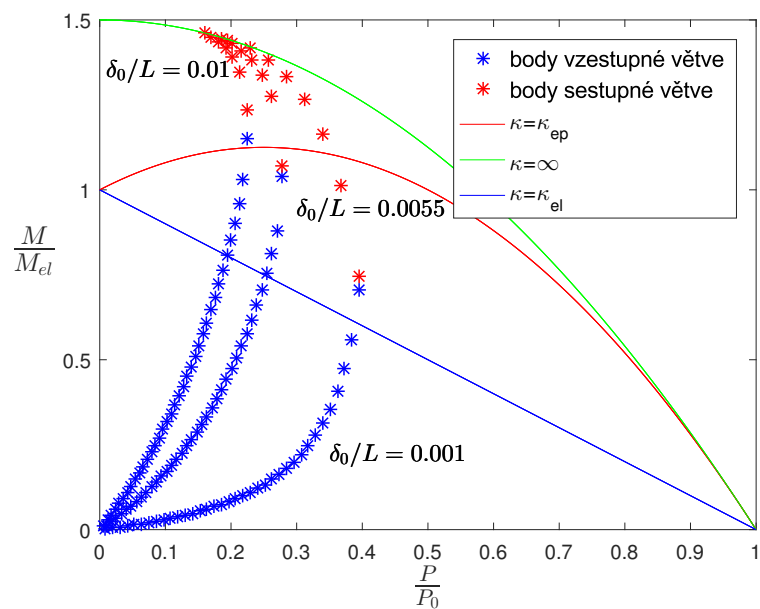


Obr. 3.15: Interakční diagram pro různé délky prutu

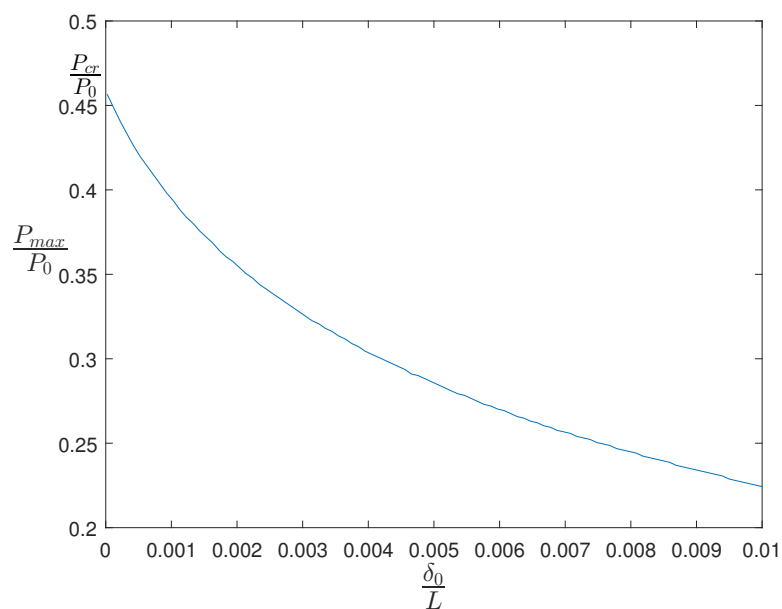


Obr. 3.16: Porovnání pro různé počáteční excentricity





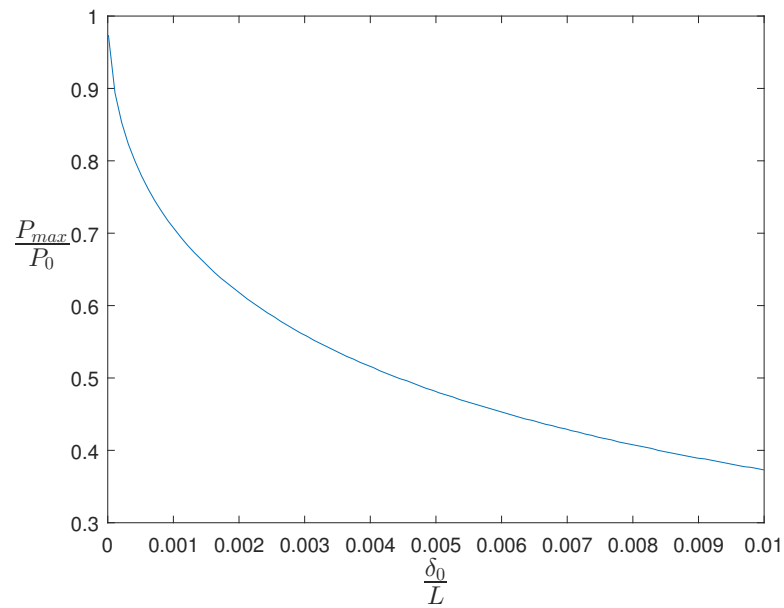
Obr. 3.17: Interakční diagram pro různé počáteční excentricity

Obr. 3.18: Závislost  $\frac{P_{max}}{P_0}$  na počáteční excentricitě pro  $\frac{P_{cr}}{P_0} < 1$

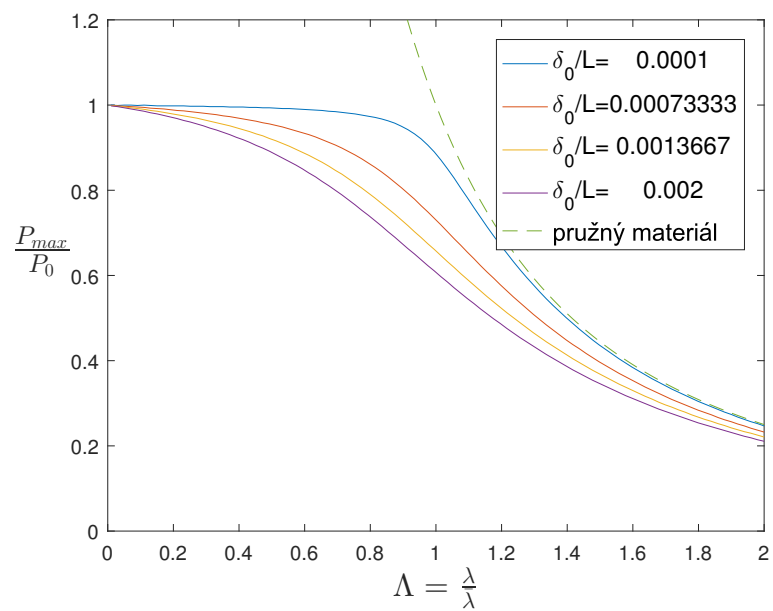
průřezu  $h$  na 0.15 m, pak platí, že  $\frac{P_{cr}}{P_0} > 1$ . Odpovídající graf závislosti  $\frac{P_{max}}{P_0}$  na počáteční excentricitě je zobrazen na Obr. 3.19

Dalším názorným grafem je vykreslení závislosti maximální síly na štíhlosti, tedy stabilitní křivky. V sekci 1.1 byl odvozen tento vztah pro ideální průřez. Na Obr. 3.20 jsou vykresleny stabilitní křivky pro čtyři různé počáteční excentricity. Pro malé  $\delta_0$  je v oblastech  $\Lambda > 1$  chování prutu velice podobné pružnému prvku. Až pro štíhlosti  $\lambda$  blíží se  $\bar{\lambda}$ , tedy  $\Lambda \rightarrow 1$ , se náhle začne projevovat vliv plasticity. U prutů s větší počáteční excentricitou ovlivní plastické chování materiálu zatěžovací proces i při větších štíhlostech a ve větší míře. Výsledky numerického řešení tedy potvrzují odhad průběhu, který byl odvozen pro ideální průřez.

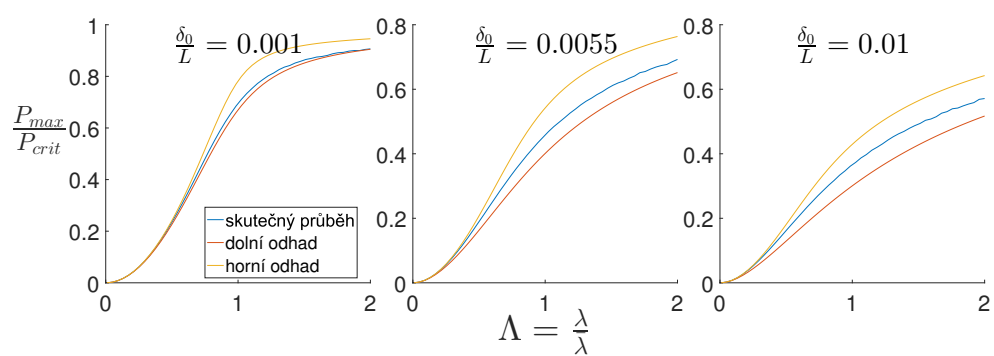
V sekci 1.2 byly sestrojeny odhady závislosti poměru  $\frac{P_{max}}{P_{crit}}$  na štíhlosti. Konkrétně byl sestrojen dolní odhad, ve kterém se uvažovalo, že průřez je v mezním pružném stavu. Horní odhad uvažoval s mezním plastickým stavem, nicméně vztah mezi průhybem  $w$  a zatížením  $P$ , který byl při odvození využit, neplatí pro případ pružnoplastického materiálu. Na Obr. 3.21 jsou znázorněny výše zmíněné odhady a skutečný průběh podle numerického výpočtu pro pruty se třemi různými počátečními excentricitami, konkrétně  $\frac{\delta_0}{L} = 0.001$ ,  $\frac{\delta_0}{L} = 0.0055$  a  $\frac{\delta_0}{L} = 0.01$ . Podle očekávání se křivka skutečného průběhu nachází mezi dolním a horním odhadem. Z grafů je vidět, že pro malé štíhlosti se křivka přimyká k hornímu plastickému odhadu. Dále je možné usoudit, že pro počáteční excentricity blíží se nule bude křivka téměř shodná s dolním pružným odhadem.



Obr. 3.19: Závislost  $\frac{P_{max}}{P_0}$  na počáteční excentricitě pro  $\frac{P_{cr}}{P_0} > 1$



Obr. 3.20: Závislost  $\frac{P_{max}}{P_0}$  na štíhlosti



Obr. 3.21: Závislost  $\frac{P_{max}}{P_{crit}}$  na štíhlosti



# Závěr

V první části práce je popsána problematika vlivu plastického chování na stabilitu tlačенého prvku. Pro jednoduchost jsou nejdříve odvozeny vztahy pro ideální průřez. Pro ten je možné určit průběh stabilitní křivky prutu s imperfekcí analyticky. Dále je první kapitola zaměřená na sestavení odhadů chování tlačенého prvku obdélníkového průřezu. Pro dolní odhad se předpokládá, že při maximálním zatížení bude prostřední nejnamáhanější průřez v mezním pružném stavu. Naopak pro horní odhad se předpokládá, že průřez je v mezním plastickém stavu. S využitím vztahů ohybového momentu a normálové síly ve zmíněných mezních stavech lze sestavit průběh závislosti maximální přenesené síly na štíhlosti  $\lambda$ .

Ve druhé kapitole je detailně popsán výpočet metodou střelby a algoritmus, podle kterého vytvořený program funguje. Ten je založen na principu rovnováhy vnějších a vnitřních sil. V každém bodě prutu musí být splněna momentová a silová podmínka rovnováhy. S využitím obou podmínek lze v každém průřezu vyjádřit hodnotu neznámé křivosti  $\kappa$ . Diskretizuje-li se osa prutu na konečné dílky a aproximuje-li se křivost diferenční náhradou pro druhou derivaci průhybu, je možné určit hodnotu průhybu v každém diskretizovaném bodě. Zopakováním výpočtu pro zvyšující se zatížení se získají body zatěžovací křivky a hodnota maximálního zatížení.

Třetí kapitola je věnována ukázkám výpočtu na konkrétním příkladu a porovnání výsledků s metodou konečných prvků. Ukáže se, že výsledky vychází velice podobně. Dále je v této sekci proveden rozbor výsledků pro měnící se geometrické parametry, přesněji pro různé šířky průřezu, délky prutu a počáteční excentricity. Na závěr jsou porovnány vypočítané hodnoty s odhady, které byly sestaveny v první kapitole. Podle očekávání se skutečná hodnota nachází mezi horním a dolním odhadem.

Oproti MKP je snížena dimenze problému. Je potřeba diskretizovat pouze osu prutu a díky tomu je i výpočetní náročnost mnohem nižší. Možné použití v praxi se nabízí například pro posouzení stability tlačенých prvků příhradových konstrukcí, kde jsou využity spoje pomocí styčnickových plechů. V budoucnu

se nabízí zobecnění programu například pro pruty s proměnnými průřezy, pro materiál se zpevněním nebo pro jiné tvary průřezu.

# Bibliografie

- [1] Wai-Fah Chen a Toshio Atsuta. *Theory of beam-columns, volume 2: space behavior and design*. Sv. 2. J. Ross Publishing, 2007. ISBN: 1932159770.
- [2] Zdeněk BAŽANT a Luigi CEDOLIN. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. Singapore: World Scientific, 2010. ISBN: 978-981-4317-03-0.
- [3] Borek Patzák. “Oofem element library manual”. In: (2018).
- [4] Borek Patzák. “Material model library manual”. In: (2019).