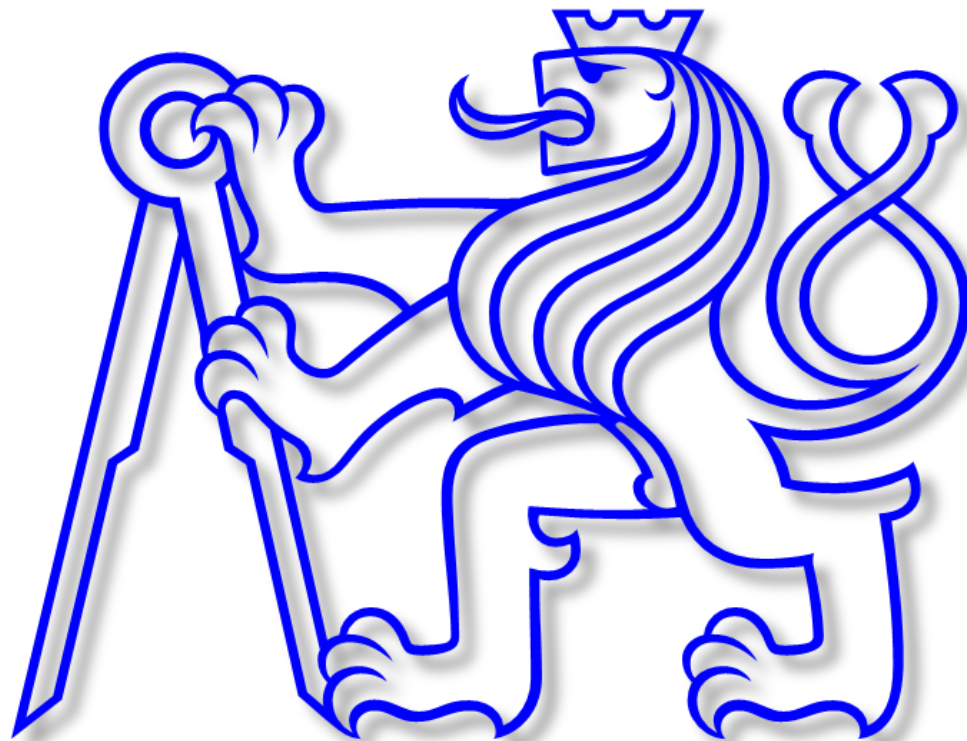


Předmět: SM02
Průřezové charakteristiky



Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

© 2024

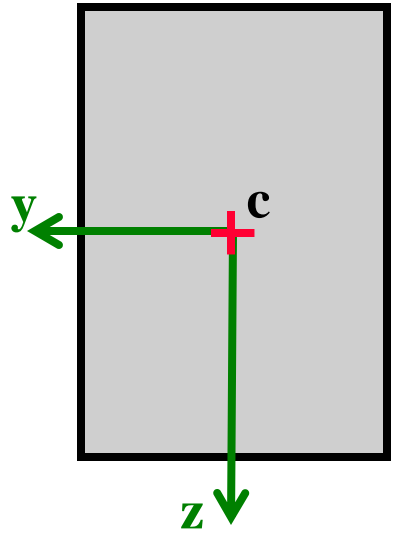
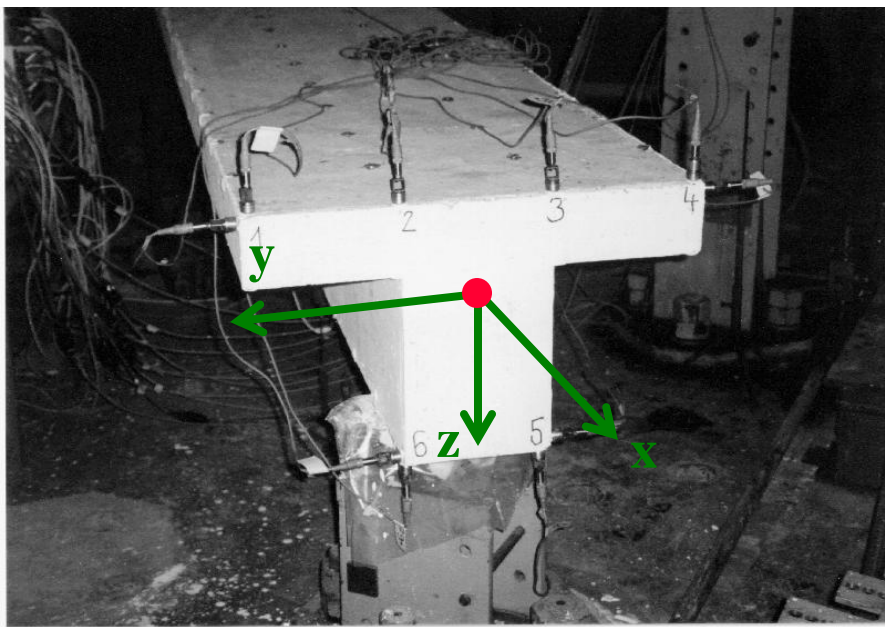
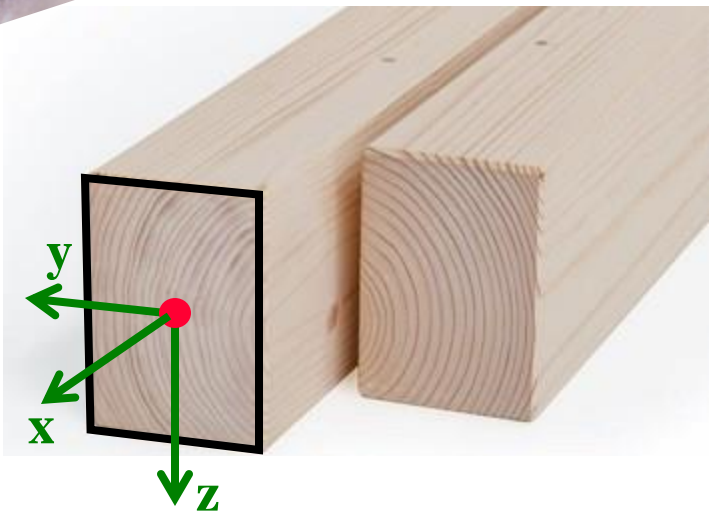
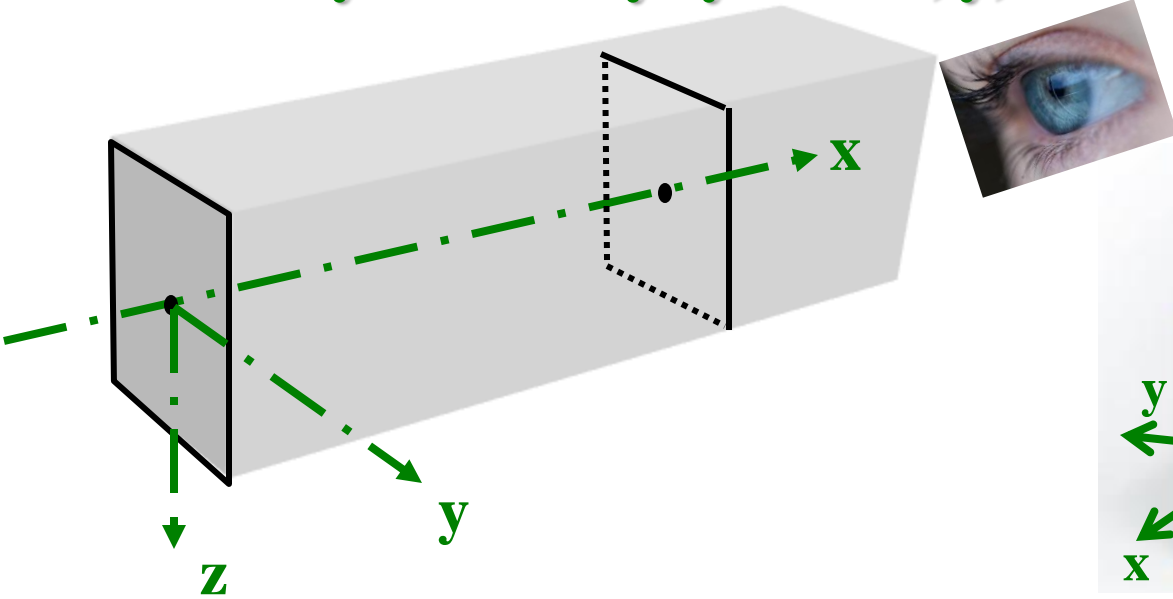
Přehled okruhů otázek – SM02 :

1. Průřezové charakteristiky:

- **Definice statických momentů, momentů setrvačnosti a deviačního momentu průřezu.**
- **Postup výpočtu polohy těžiště složeného průřezu.**
- **Postup výpočtu momentů setrvačnosti a deviačního momentu složeného průřezu.**
- **Definice hlavních těžišťových os a momentů setrvačnosti průřezu a jejich využití při výpočtu napětí.**

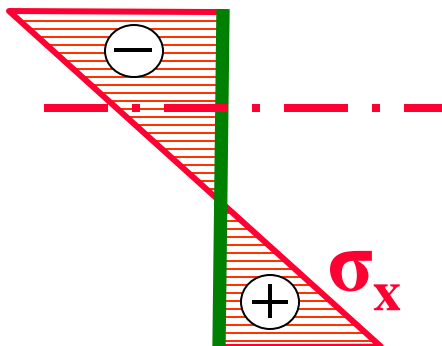
Průřezové charakteristiky:

Pravotočivý souřadný systém x, y, z :



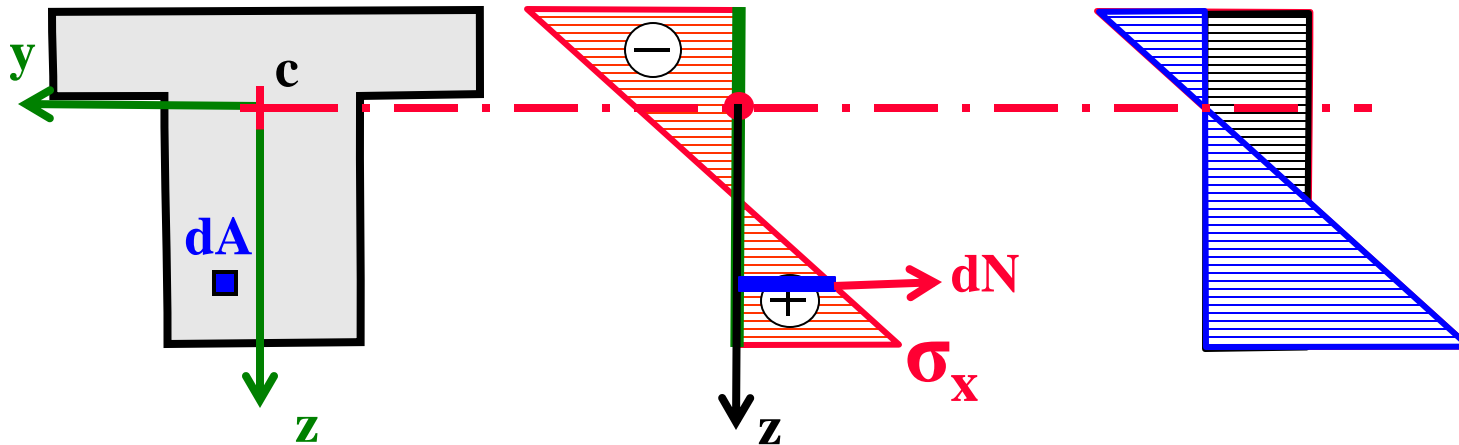
Průřezové charakteristiky:

Předpoklad o rozložení napětí v průřezu prutové konstrukce
– Bernoulliho - Navierova hypotéza:



Průřezové charakteristiky:

Vztahy mezi vnitřními silami N, V, M a normálovým napětím σ_x :



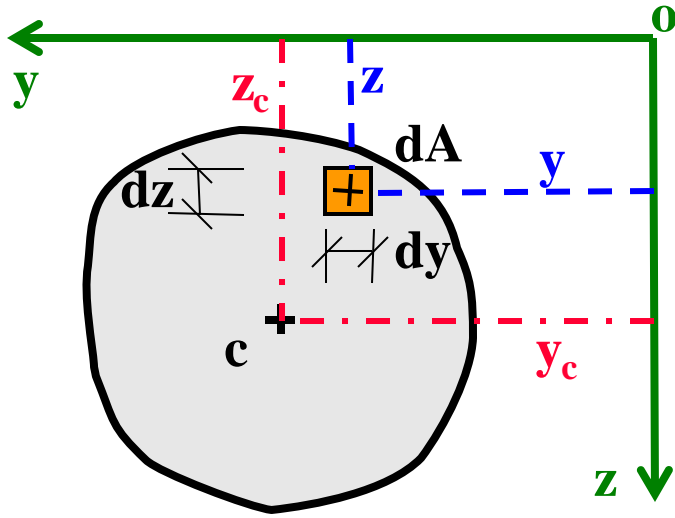
$$N = \iint_A dN = \iint_A \sigma_x(y, z) dA = \iint_A E \varepsilon_x dA = E \iint_A \left(u'_0(x) - \frac{dw^2(x)}{dx^2} z - \frac{dv^2(x)}{dx^2} y \right) dA =$$
$$= E \left(u'_0(x) \iint_A dA - \frac{dw^2(x)}{dx^2} \iint_A z dA - \frac{dv^2(x)}{dx^2} \iint_A y dA \right)$$

$$M_y = \iint_A z dN = \iint_A z \sigma_x(y, z) dA = \iint_A E \varepsilon_x z dA = E \iint_A z \left(u'_0(x) - \frac{dw^2(x)}{dx^2} z - \frac{dv^2(x)}{dx^2} y \right) dA =$$
$$= E \left(u'_0(x) \iint_A z dA - \frac{dw^2(x)}{dx^2} \iint_A z^2 dA - \frac{dv^2(x)}{dx^2} \iint_A z y dA \right)$$

Průřezové charakteristiky:

Definice průřezových charakteristik – statických momentů, momentů setrvačnosti a deviačního momentu setrvačnosti:

Obecný příčný řez konstrukcí:



y_c, z_c – souřadnice těžiště průřezu.

A - plocha průřezu,

S_y - statický moment průřezu k ose y,

S_z - statický moment průřezu k ose z,

I_y - moment setrvačnosti průřezu k ose y,

I_z - moment setrvačnosti průřezu k ose z,

I_o – polární moment setrvačnosti průřezu k bodu o,

D_{yz} – deviační moment setrvačnosti průřezu k souřadnému systému y, z.

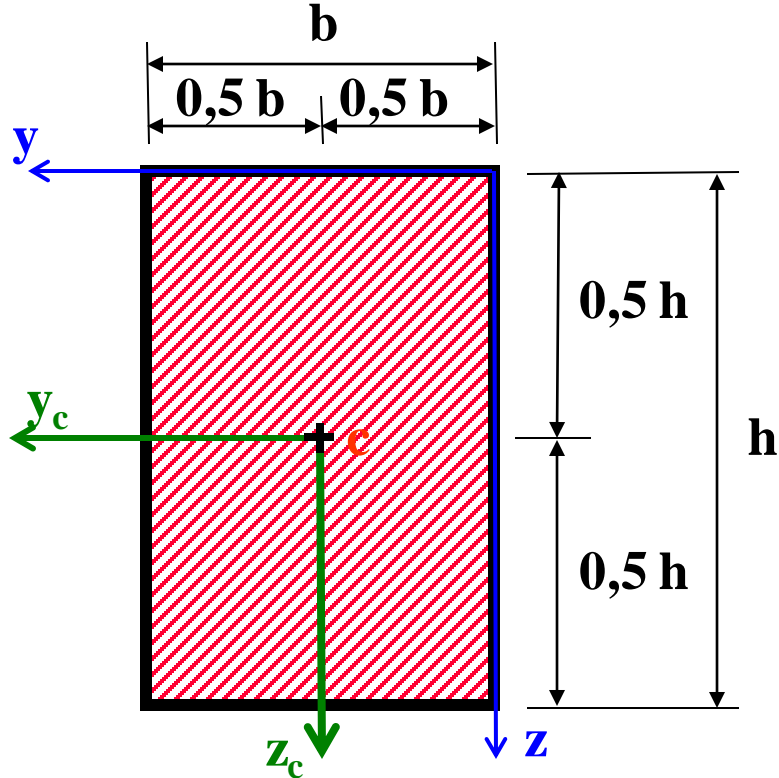
$$dA = dy dz$$

$$A = \iint_A dA \quad S_y = \iint_A z dA \quad S_z = \iint_A y dA \quad y_c = \frac{S_z}{A} \quad z_c = \frac{S_y}{A}$$

$$I_y = \iint_A z^2 dA \quad I_z = \iint_A y^2 dA \quad D_{yz} = \iint_A y z dA \quad I_o = I_y + I_z$$

Průřezové charakteristiky:

Příklad odvození momentů setrvačnosti I_y a I_{yc} obdélníka:

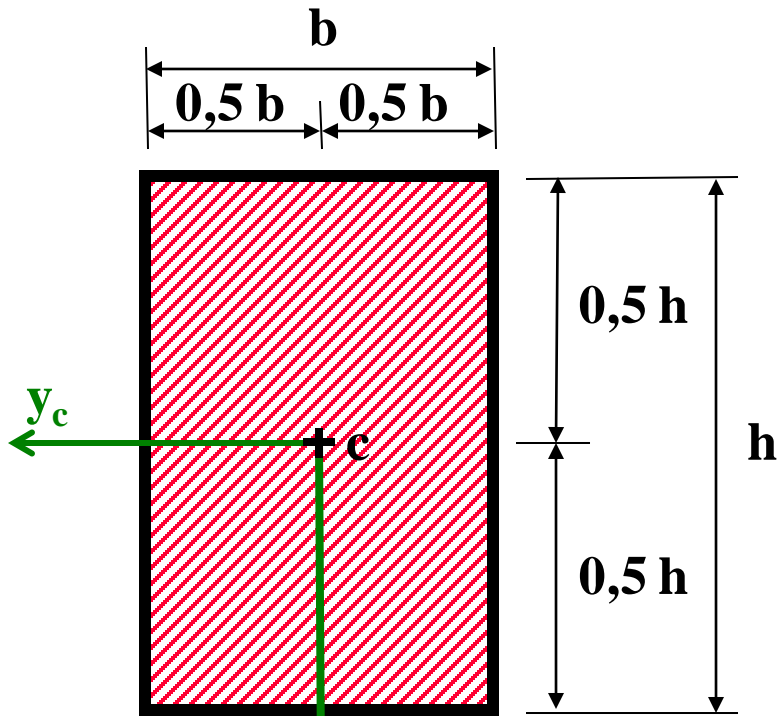


$$\begin{aligned} I_y &= \iint_A z^2 dA = \int_0^h \int_0^b z^2 dz dy = \\ &= \int_0^h [z^2 y]_0^b dz = \int_0^h (z^2 b - 0) dz = \\ &= b \int_0^h z^2 dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yc} &= \iint_A z^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [z^2 y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [z^2 \frac{b}{2} - z^2 (-\frac{b}{2})] dz = \\ &= 2 \frac{b}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \left[\frac{h^3}{3 \cdot 8} - \left(-\frac{h^3}{3 \cdot 8} \right) \right] = 2 \frac{1}{24} b h^3 = \frac{1}{12} b h^3 \end{aligned}$$

Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti základních plošných obrazců:



$$I_{yc} = \frac{1}{12} b h^3$$

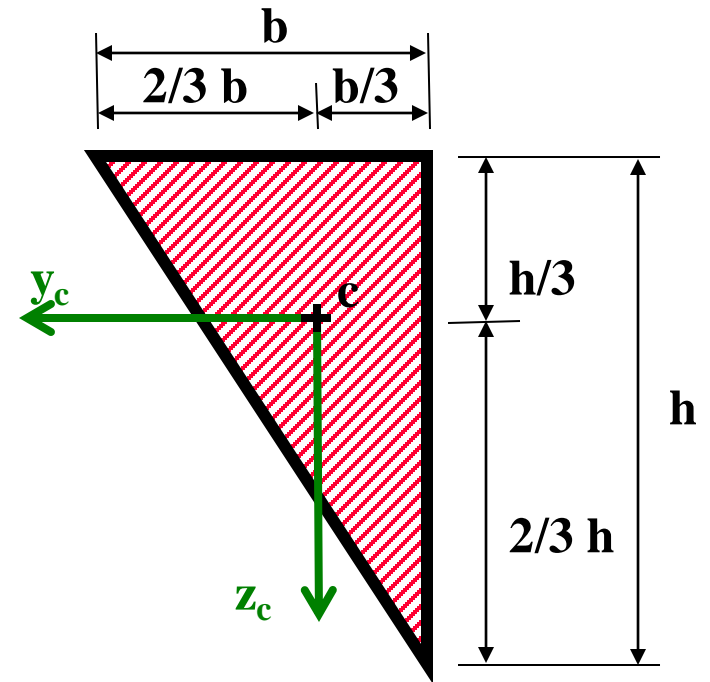
$$I_{zc} = \frac{1}{12} h b^3$$

$$D_{yczc} = 0$$

$$I_{yc} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_{zc} = \frac{1}{36} h b^3$$

$$D_{yczc} = -\frac{1}{72} h^2 b^2$$

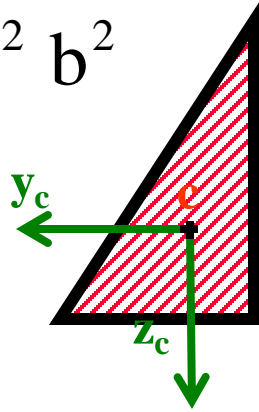


Průřezové charakteristiky:

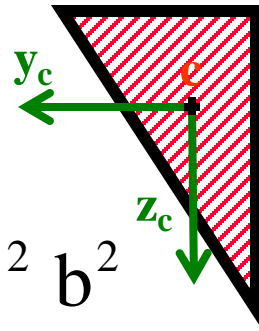
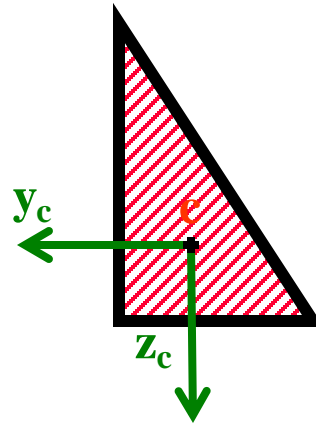
Momenty setrvačnosti základních plošných obrazců:

Deviační moment setrvačnosti pravoúhlého trojúhelníka D_{yczc} a jeho znaménka:

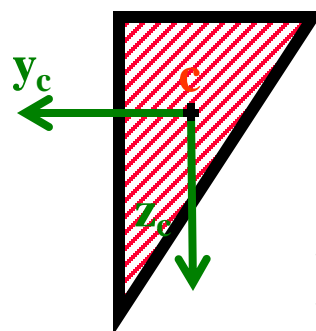
$$D_{yczc} = +\frac{1}{72} h^2 b^2$$



$$D_{yczc} = -\frac{1}{72} h^2 b^2$$



$$D_{yczc} = -\frac{1}{72} h^2 b^2$$



$$D_{yczc} = +\frac{1}{72} h^2 b^2$$

Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti základních plošných obrazců:

GEOMETRICKÉ CHARAKTERISTIKY ROVINNÝCH OBRAZCŮ TÁBULKA 3.

TVAR OBRAZCE	PLOCHA A	SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ $C_g(y_c, z_c)$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI I	DEVIČNÍ MOMENTY D
	$A = bh$	$y_c = \frac{b}{2}$ $z_c = \frac{h}{2}$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{12}$, $I_{z_c} = \frac{hb^3}{12}$ $I_y = \frac{bh^3}{3}$, $I_z = \frac{hb^3}{3}$	$D_{y_c z_c} = \frac{b^2 h^2}{4}$ $D_{y_c z_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{bh^3}{4}$	
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$, $I_{z_c} = \frac{hb^3}{48}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$	$D_{y_c z_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3}$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$, $I_{z_c} = \frac{hb^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$, $I_z = \frac{hb^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{bh^3}{4}$	$D_{y_c z_c} = -\frac{b^2 h^2}{72}$ $D_{yz} = \frac{b^2 h^2}{24}$ $D_{y'z'} = -\frac{b^2 h^2}{8}$ ZNAMÉNKA!
	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = 3,1416 r^2 = 0,7854 d^2$		$I_{y_c} = I_{z_c} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} = 0,7854 r^4 = 0,0491 d^4$	$D_{y_c z_c} = 0$
	$A = \frac{2}{3} bh$	$y_c = \frac{3}{8} b$ $z_c = \frac{2}{5} h$	$I_{y_c} = \frac{8}{175} bh^3 = 0,0457 bh^3$ $I_{z_c} = \frac{19}{480} hb^3 = 0,0396 hb^3$ $I_y = \frac{16}{105} bh^3 = 0,1524 bh^3$ $I_z = \frac{2}{15} hb^3 = 0,1333 hb^3$ $I_{y'} = \frac{2}{7} bh^3 = 0,2857 bh^3$ $I_{z'} = \frac{3}{10} hb^3 = 0,3000 hb^3$	

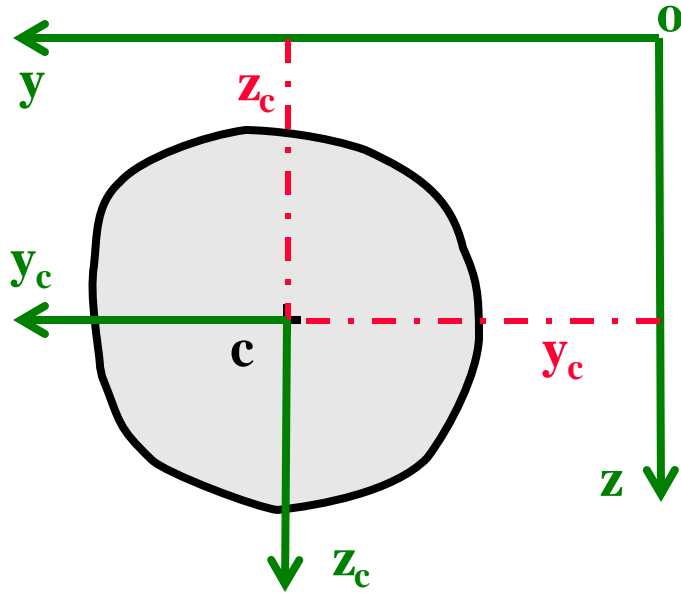
Pokračování tabulky 3.

TVAR OBRAZCE	PLOCHA A	SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ $C_g(y_c, z_c)$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI I	DEVIČNÍ MOMENTY D
	$A = \frac{bh}{3}$	$y_c = \frac{3}{4} b$ $z_c = \frac{3}{10} h$	$I_{y_c} = \frac{37}{2400} bh^3 = 0,0176 bh^3$ $I_{z_c} = \frac{1}{80} hb^3 = 0,0125 hb^3$ $I_y = \frac{1}{24} bh^3 = 0,0476 bh^3$ $I_z = \frac{1}{5} hb^3 = 0,2000 hb^3$ $I_{y'} = \frac{19}{105} bh^3 = 0,1810 bh^3$ $I_{z'} = \frac{1}{30} hb^3 = 0,0333 hb^3$	
	$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8} = 4,5708 r^2 = 0,3927 d^2$	$y_c = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi} = 0,4244 r$	$I_{y_c} = (\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}) r^4 = 0,1098 r^4$ $I_{z_c} = I_y = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} = 0,3928 r^4 = 0,0246 d^4$	$D_{y_c z_c} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^2}{16} = 0,7854 r^2 = 0,1964 d^2$	$y_c = z_c = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi} = 0,4244 r$	$I_{y_c} = I_{z_c} = (\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}) r^4 = 0,0549 r^4$ $I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{16} = 0,1963 r^4$	$D_{y_c z_c} = (\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}) r^4 = -0,0165 r^4$ $D_{yz} = \frac{r^4}{8}$ ZNAMÉNKA!
	$A = \frac{\alpha}{180} \pi r^2 = -\text{arc } \alpha r^2$	$y_c = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ $z_c = \frac{2r(1 - \cos \alpha)}{3\alpha}$	$I_{y_c} = r^4 (\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{4 \sin^2 \alpha}{9\alpha})$ $I_{z_c} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $I_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha)$	$D_{y_c z_c} = 0$
	$A = r^2 (\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{2})$	$y_c = \frac{4r \sin^3 \alpha}{3(\frac{\alpha}{2} - \sin^2 2\alpha)}$	$I_{y_c} = r^4 (\frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16} - \frac{4 \sin^6 \alpha}{9\alpha - \sin 2\alpha})$ $I_{z_c} = \frac{r^4}{4\alpha} (12\alpha - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$ $I_y = \frac{r^4}{16} (4\alpha - \sin 4\alpha)$	$D_{y_c z_c} = 0$
	$A = \pi ab$		$I_{y_c} = \frac{\pi}{4} ab^3$ $I_{z_c} = \frac{\pi}{4} ba^3$	$D_{y_c z_c} = 0$

Průřezové charakteristiky:

Plošné momenty setrvačnosti k rovnoběžným osám – Steinerova věta:

Obecný příčný řez konstrukcí:



y_c, z_c – souřadnice těžiště průřezu v souřadném systému y, z .

A - plocha průřezu,

I_y - moment setrvačnosti průřezu k ose y ,

I_z - moment setrvačnosti průřezu k ose z ,

I_{y_c} - moment setrvačnosti průřezu k ose y_c ,

I_{z_c} - moment setrvačnosti průřezu k ose z_c ,

$D_{y_c z_c}$ – deviační moment setrvačnosti průřezu k souřadnému systému y_c, z_c .

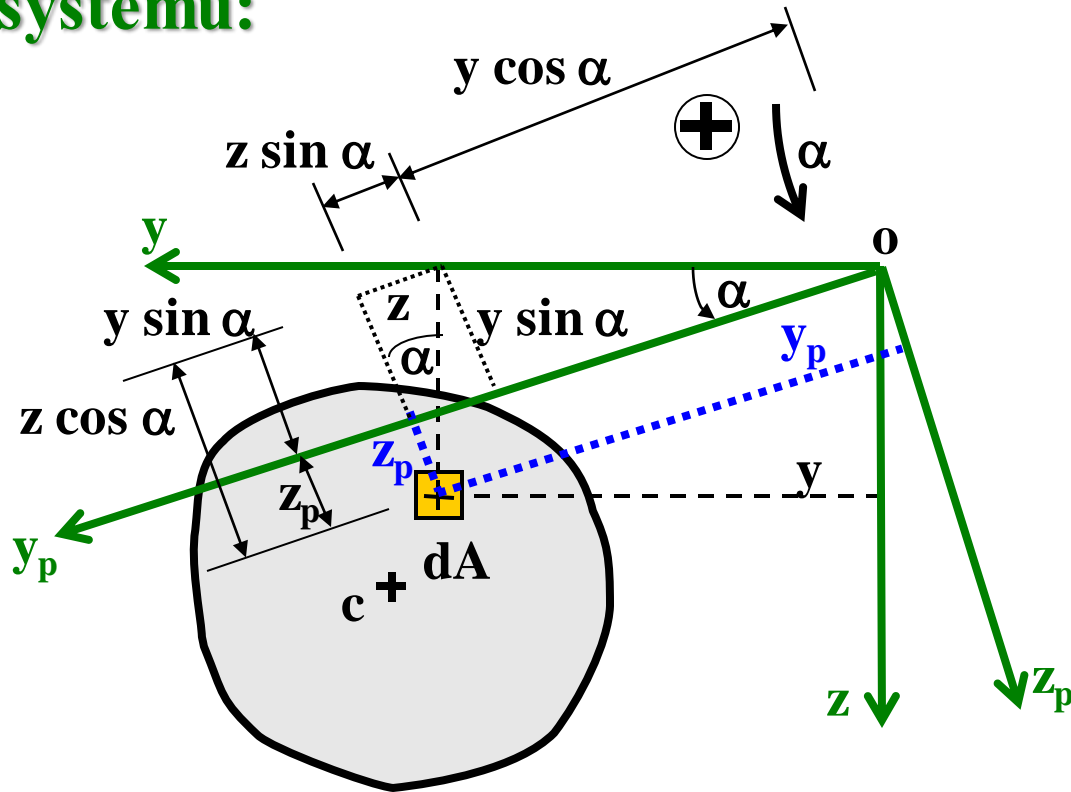
$$I_y = I_{y_c} + A z_c^2$$

$$I_z = I_{z_c} + A y_c^2$$

$$D_{yz} = D_{y_c z_c} + A y_c z_c$$

Průřezové charakteristiky:

Plošné momenty setrvačnosti k potočenému souřadnému systému:



$$y_p = +y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$z_p = -y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

$$\begin{Bmatrix} y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_{y_p} &= \iint_A z_p^2 dA = \iint_A (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dA = \iint_A (z^2 \cos^2 \alpha - 2 z y \cos \alpha \sin \alpha + y^2 \sin^2 \alpha) dA = \\ &= \cos^2 \alpha \iint_A z^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \iint_A z y dA + \sin^2 \alpha \iint_A y^2 dA = \cos^2 \alpha I_y - \sin 2\alpha D_{yz} + \sin^2 \alpha I_z \end{aligned}$$

Průřezové charakteristiky:

Plošné momenty setrvačnosti k potočenému souřadnému systému:

Shrnutí vzorců:

$$I_{yp} = \cos^2 \alpha I_y - \sin 2\alpha D_{yz} + \sin^2 \alpha I_z$$

$$I_{zp} = \sin^2 \alpha I_y + \sin 2\alpha D_{yz} + \cos^2 \alpha I_z$$

$$D_{ypzp} = \frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha + \cos 2\alpha D_{yz}$$

$$\begin{bmatrix} I_{yp} & -D_{ypzp} \\ -D_{ypzp} & I_{zp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_y & -D_{yz} \\ -D_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{I}_p] = [\mathbf{T}] [\mathbf{I}] [\mathbf{T}]^T$$

$[\mathbf{I}]$, $[\mathbf{I}_p]$ – tenzory setrvačnosti,

$[\mathbf{T}]$ – transformační matice.

Průřezové charakteristiky:

Extrémy momentů setrvačnosti I_{yp} a I_{zp} v závislosti na úhlu pootočení α (hlavní momenty setrvačnosti):

$$\begin{aligned}\frac{dI_{yp}}{d\alpha} &= -2 I_y \cos \alpha \sin \alpha - 2 D_{yz} \cos 2 \alpha + 2 I_z \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= (I_z - I_y) \sin 2 \alpha - 2 D_{yz} \cos 2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_{zp}}{d\alpha} &= 2 I_y \cos \alpha \sin \alpha + 2 D_{yz} \cos 2 \alpha - 2 I_z \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= (I_y - I_z) \sin 2 \alpha + 2 D_{yz} \cos 2 \alpha\end{aligned}$$

$$(I_z - I_y) \sin 2 \alpha_0 - 2 D_{yz} \cos 2 \alpha_0 = 0$$

$$\frac{\sin 2 \alpha_0}{\cos 2 \alpha_0} \Rightarrow \operatorname{tg} 2 \alpha_0 = \frac{2 D_{yz}}{I_z - I_y}$$

Průřezové charakteristiky:

Hlavní momenty setrvačnosti, poloměry setrvačnosti - shrnutí:

Pootočení hlavních os:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 D_{yz}}{I_z - I_y} \Rightarrow \alpha_0$$

Hlavní momenty setrvačnosti - vzorce:

$$I_{y_0} = \cos^2 \alpha_0 I_y - \sin 2\alpha_0 D_{yz} + \sin^2 \alpha_0 I_z$$

$$I_{z_0} = \sin^2 \alpha_0 I_y + \sin 2\alpha_0 D_{yz} + \cos^2 \alpha_0 I_z$$

$$D_{y_0 z_0} = \frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha_0 + \cos 2\alpha_0 D_{yz} = 0$$

Ekvivalentní vzorce pro hlavní momenty setrvačnosti:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 D_{yz}}{I_z - I_y} \Rightarrow \alpha_0 \quad I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4D_{yz}^2}$$

$$I_1 > I_2 \Rightarrow I_1 \equiv I_{\text{MAX}} \quad I_2 \equiv I_{\text{MIN}}$$

$$i_1 \equiv i_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \quad i_2 \equiv i_{\text{MIN}} = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

Průřezové charakteristiky:

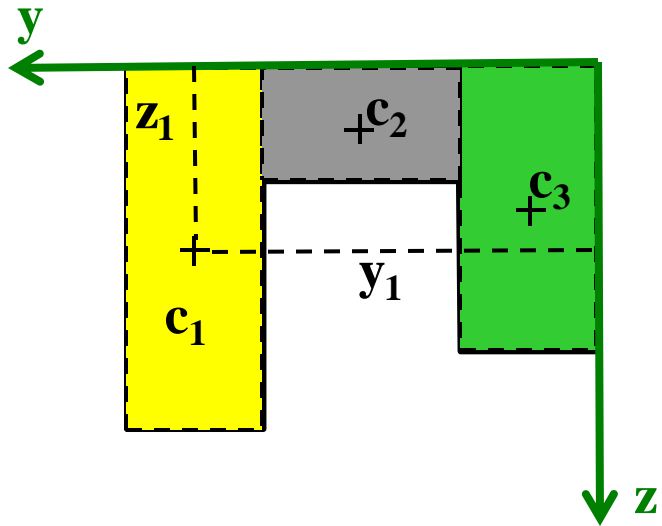
Hlavní centrální momenty setrvačnosti průřezu:

- **V každém bodu průřezu existují dvě vzájemně kolmé osy, ke kterým jsou momenty setrvačnosti extrémní, k jedné ose je moment setrvačnosti maximální a ke druhé je minimální. Mluvíme o hlavních osách a hlavních momentech setrvačnosti.**
- **Je-li počátek souřadného systému o shodný s těžištěm průřezu c – pak mluvíme o hlavních centrálních osách a hlavních centrálních momentech setrvačnosti.**

Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti složeného průřezu:

Složený průřez – postup výpočtu polohy těžiště, hlavních centrálních momentů setrvačnosti a poloměrů setrvačnosti:

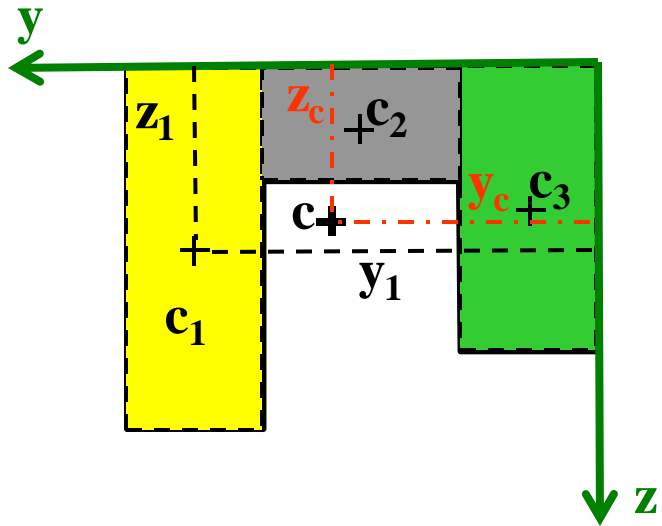


- 1) Složený průřez rozdělíme na základní rovinné obrazce:
 - obdélníky,
 - trojúhelníky,
 - kruhy apod.
- 2) Volba souřadného systému y, z pro výpočet polohy těžiště.
- 3) Stanovení souřadnic těžišť základních obrazců v souřadném systému y, z :
 $c_i [y_i ; z_i]$

Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti složeného průřezu:

Složený průřez – postup výpočtu polohy těžiště, hlavních centrálních momentů setrvačnosti a poloměrů setrvačnosti:



4) Určení plochy základních obrazců:

$$A_i$$

5) Určení celkové plochy složeného průřezu A:

$$A = \sum_{i=1}^N A_i$$

6) Určení polohy těžiště složeného průřezu:

$$c [y_c, z_c]$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} \quad z_c = \frac{S_y}{A}$$

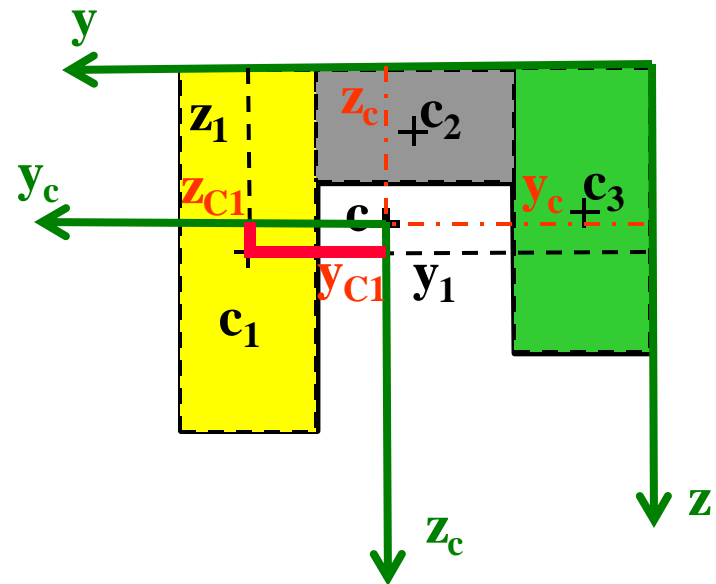
$$S_y = \sum_{i=1}^N z_i A_i$$

$$S_z = \sum_{i=1}^N y_i A_i$$

Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti složeného průřezu:

Složený průřez – postup výpočtu polohy těžiště, hlavních centrálních momentů setrvačnosti a poloměrů setrvačnosti:



7) Volba těžišťového souřadného systému:

y_c, z_c ($c \equiv$ počátek).

($y_c \parallel y, z_c \parallel z$)

8) Stanovení souřadnic těžišť základních obrazců v souřadném systému y_c, z_c :

$c_i [y_{ci}; z_{ci}]$

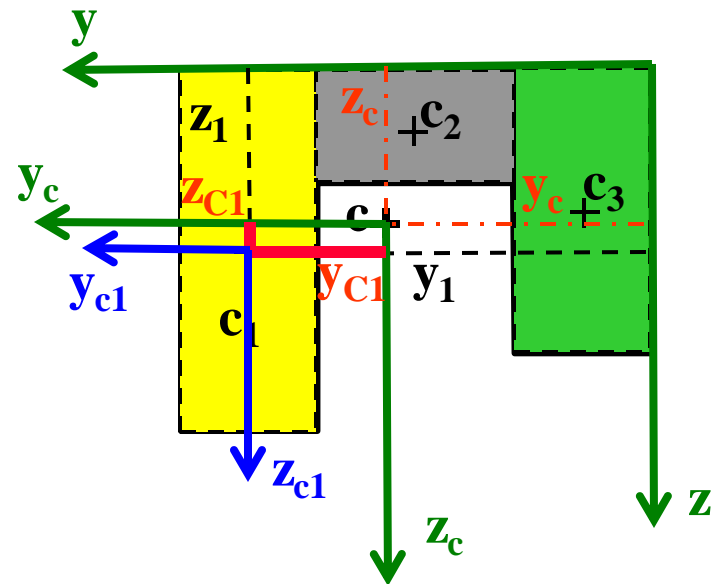
$$y_{ci} = y_i - y_c$$

$$z_{ci} = z_i - z_c$$

Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti složeného průřezu:

Složený průřez – postup výpočtu polohy těžiště, hlavních centrálních momentů setrvačnosti a poloměrů setrvačnosti:



9) Určení centrálních momentů setrvačnosti složeného rovinného obrazce k souřadnému systému y_c, z_c :

$$I_{y_c} = \sum_{i=1}^N (I_{y_{c_i}} + A_i z_{c_i}^2)$$

$$I_{z_c} = \sum_{i=1}^N (I_{z_{c_i}} + A_i y_{c_i}^2)$$

$$D_{y_c z_c} = \sum_{i=1}^N (D_{y_{c_i} z_{c_i}} + A_i y_{c_i} z_{c_i})$$

Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti složeného průřezu:

Složený průřez – postup výpočtu polohy těžiště, hlavních centrálních momentů setrvačnosti a poloměrů setrvačnosti:

10) Určení hlavních centrálních momentů setrvačnosti složeného rovinného obrazce:

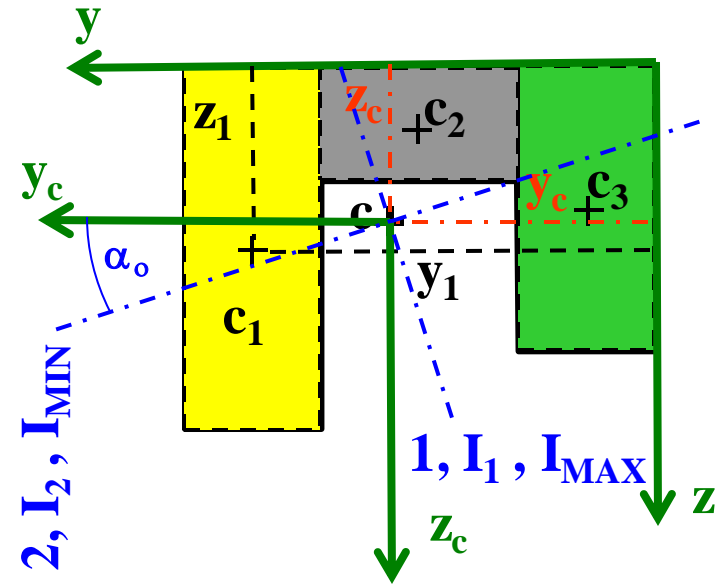
$$I_1 \equiv I_{\text{MAX}}, I_2 \equiv I_{\text{MIN}}, \alpha_0.$$

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 D_{yczc}}{I_{zc} - I_{yc}} \Rightarrow \alpha_0$$

$$I_{1,2} = \frac{I_{yc} + I_{zc}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yc} - I_{zc})^2 + 4D_{yczc}^2}$$

$D_{yczc} < 0 \rightarrow$ osa $I_{\text{MAX}} \rightarrow$ I. a III. kvadrant

$D_{yczc} > 0 \rightarrow$ osa $I_{\text{MAX}} \rightarrow$ II. a IV. kvadrant



Průřezové charakteristiky:

Momenty setrvačnosti složeného průřezu:

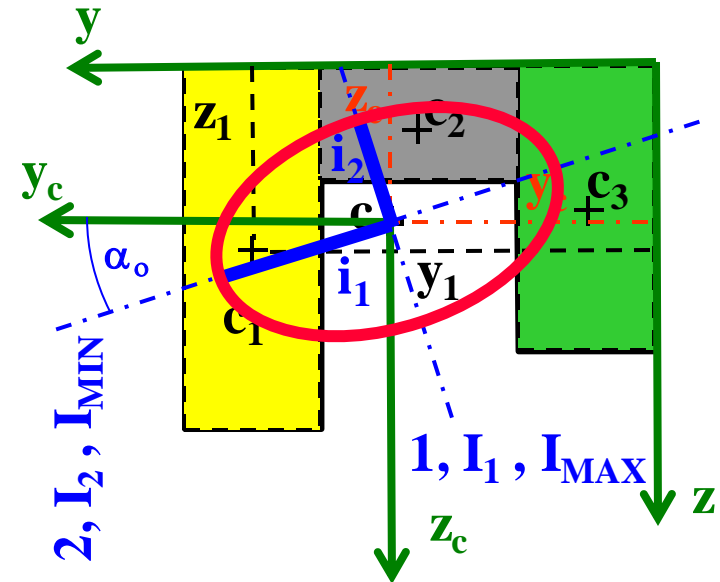
Složený průřez – postup výpočtu polohy těžiště, hlavních centrálních momentů setrvačnosti a poloměrů setrvačnosti:

10) Určení poloměrů setrvačnosti centrální elipsy setrvačnosti:

$$i_1 \equiv i_{\text{MAX}} , i_2 \equiv i_{\text{MIN}}$$

$$i_1 \equiv i_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{I_1}{A}}$$

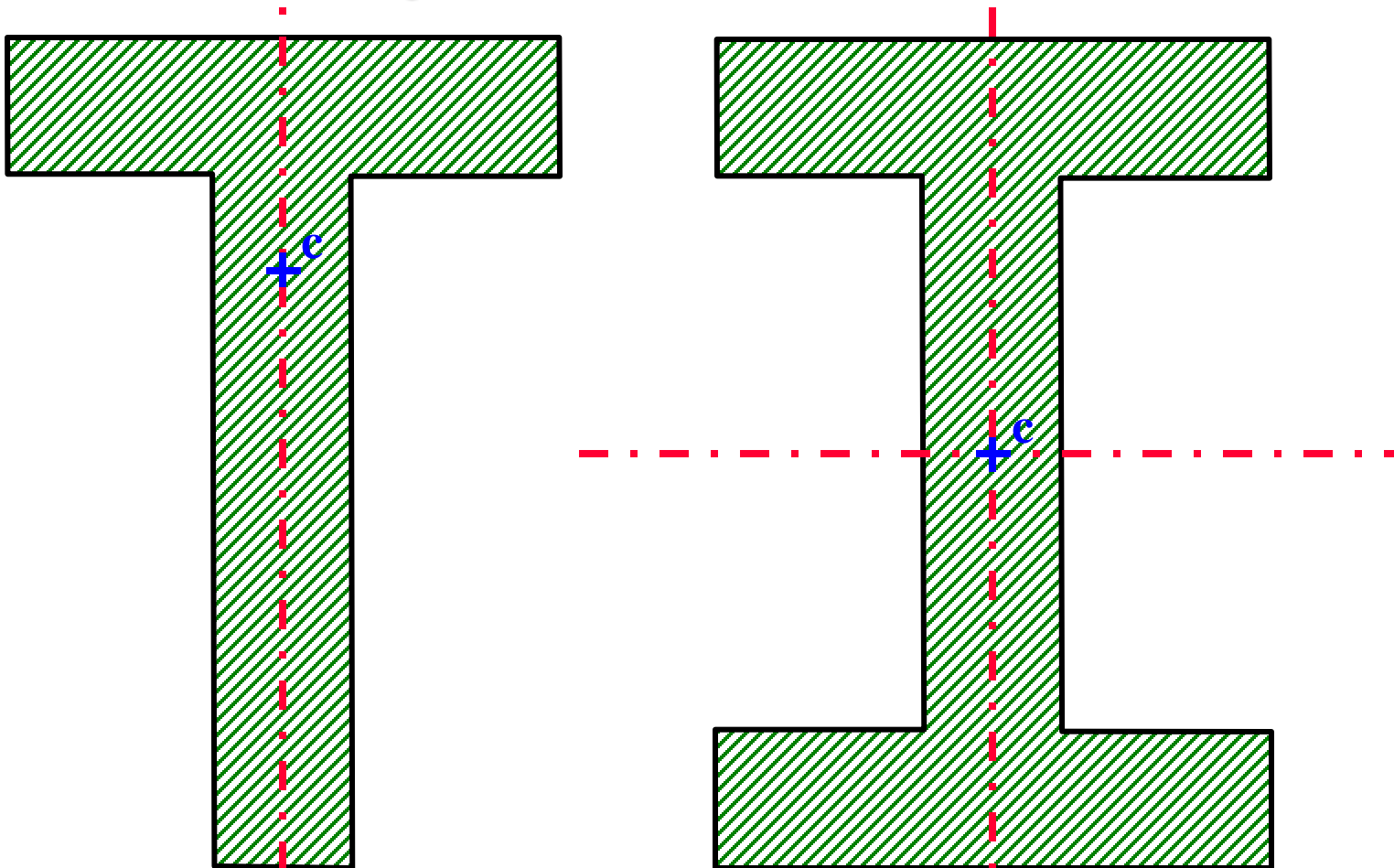
$$i_2 \equiv i_{\text{MIN}} = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$



Průřezové charakteristiky:

Osově symetrické průřezy:

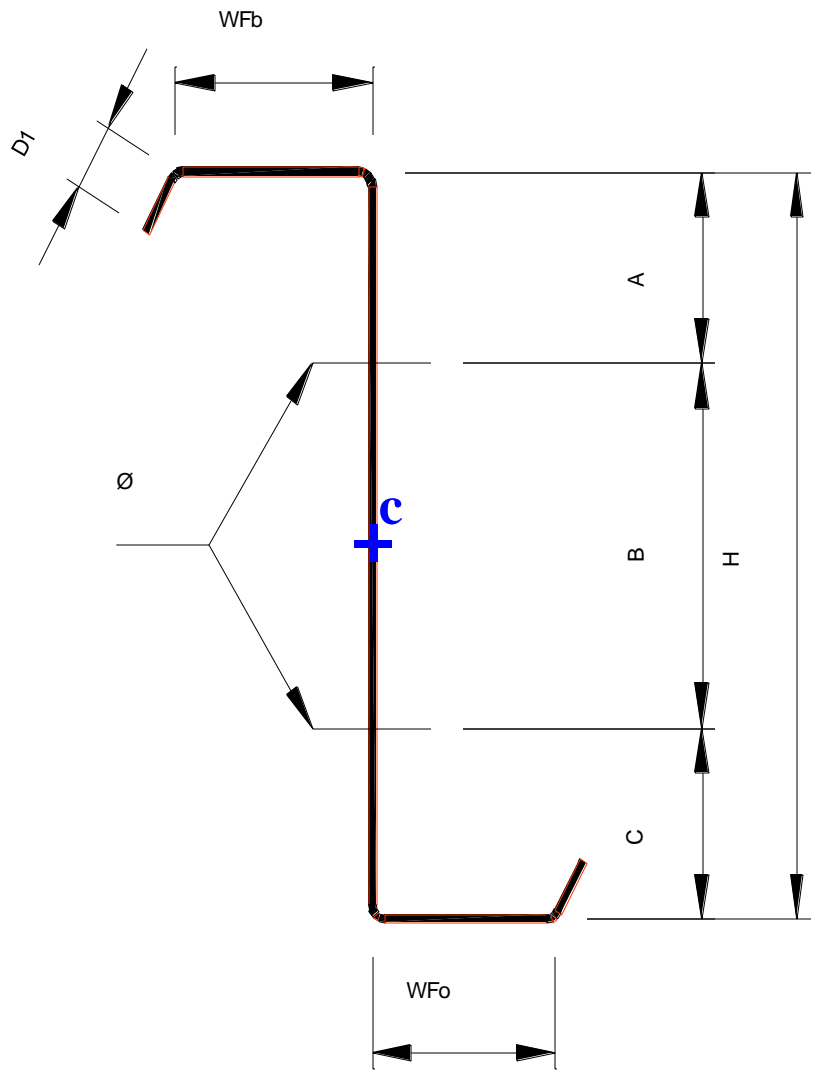
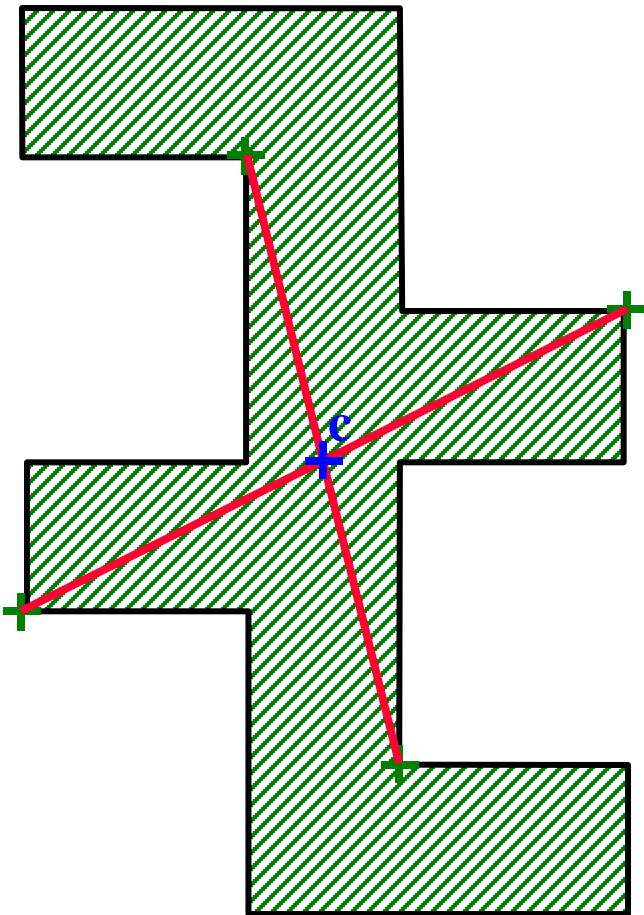
- Těžiště průřezu leží na ose symetrie.
- Osa symetrie je hlavní centrální osou a tedy deviační moment setrvačnosti je roven 0.



Průřezové charakteristiky:

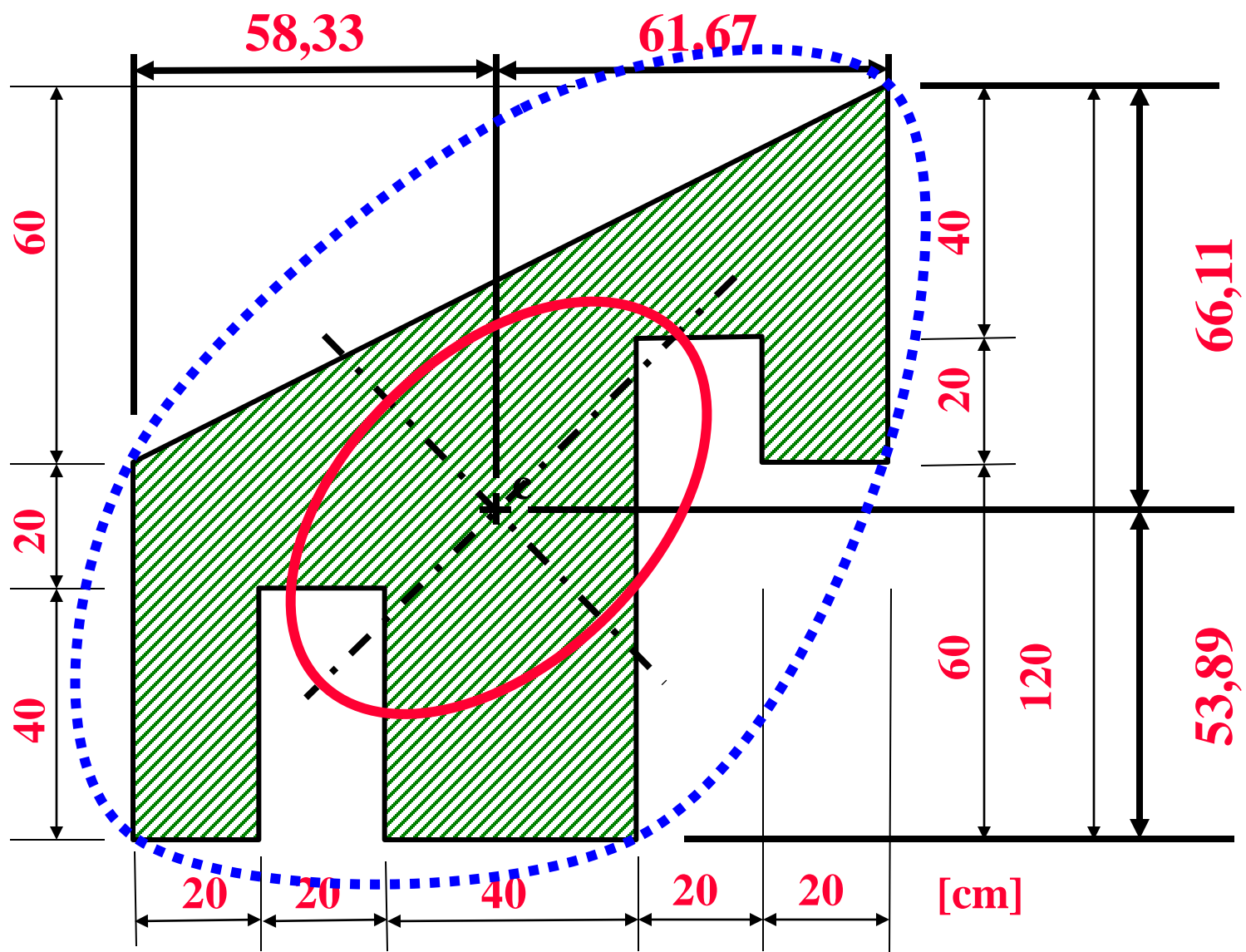
Středově symetrické průřezy:

- Těžiště průřezu leží ve středu symetrie.



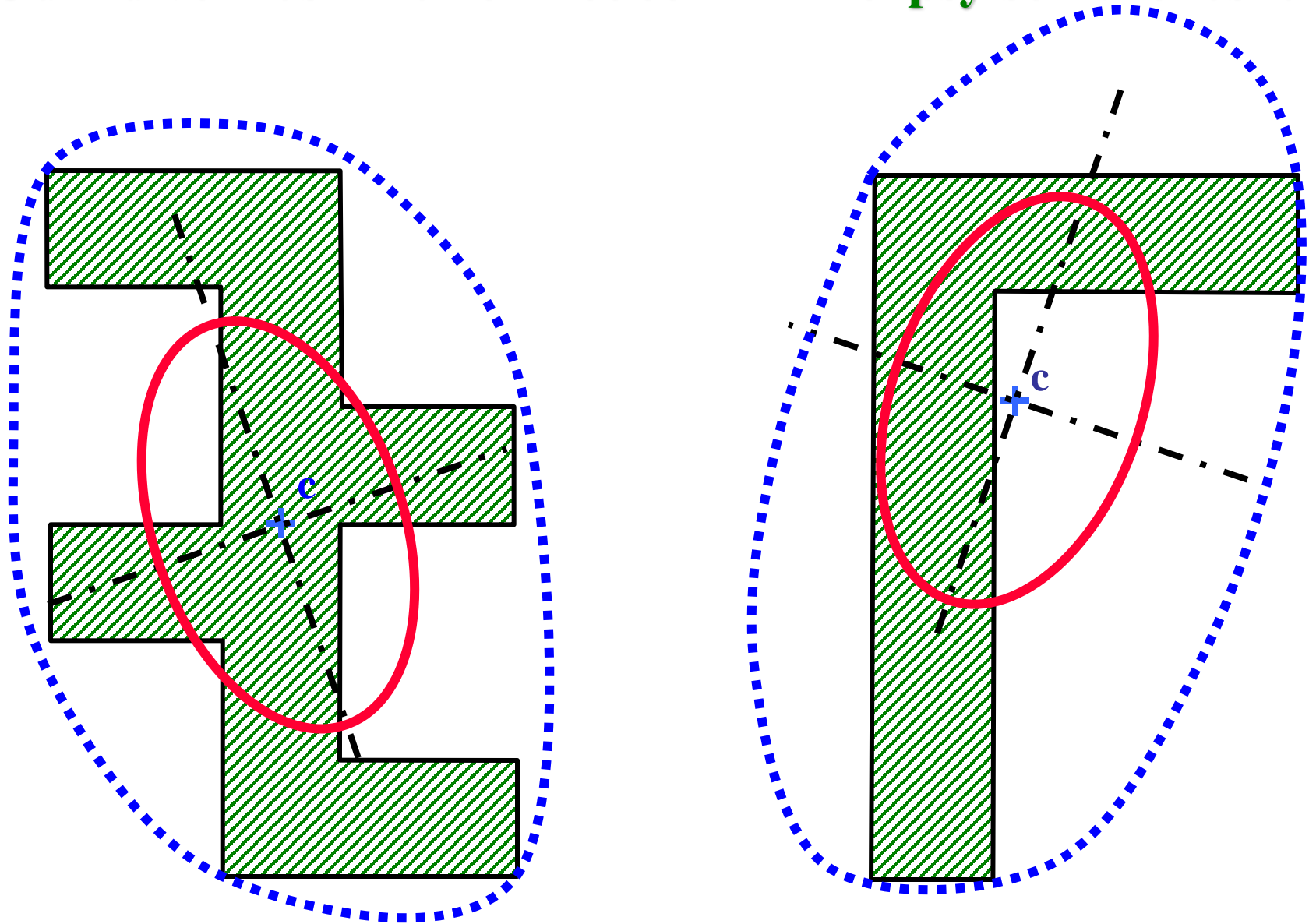
Průřezové charakteristiky:

Odhad velikosti a orientace centrální elipsy setrvačnosti:



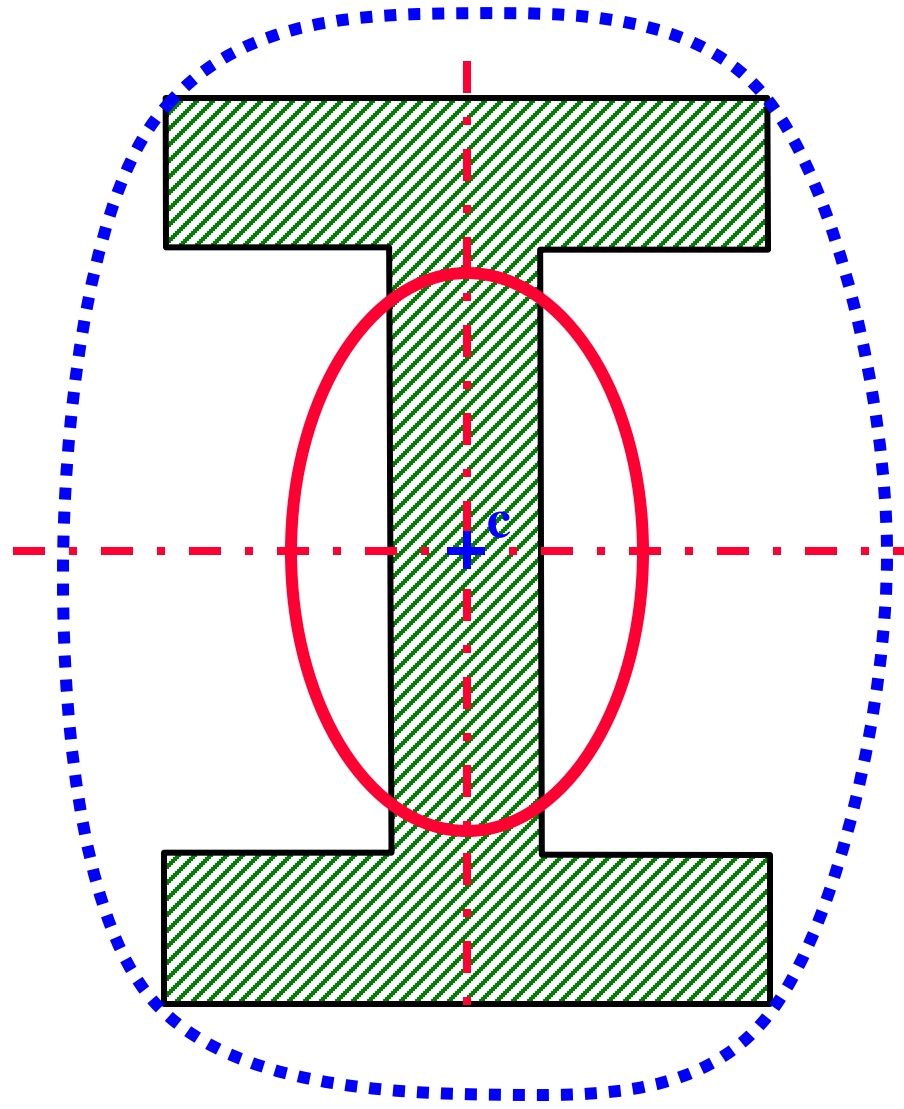
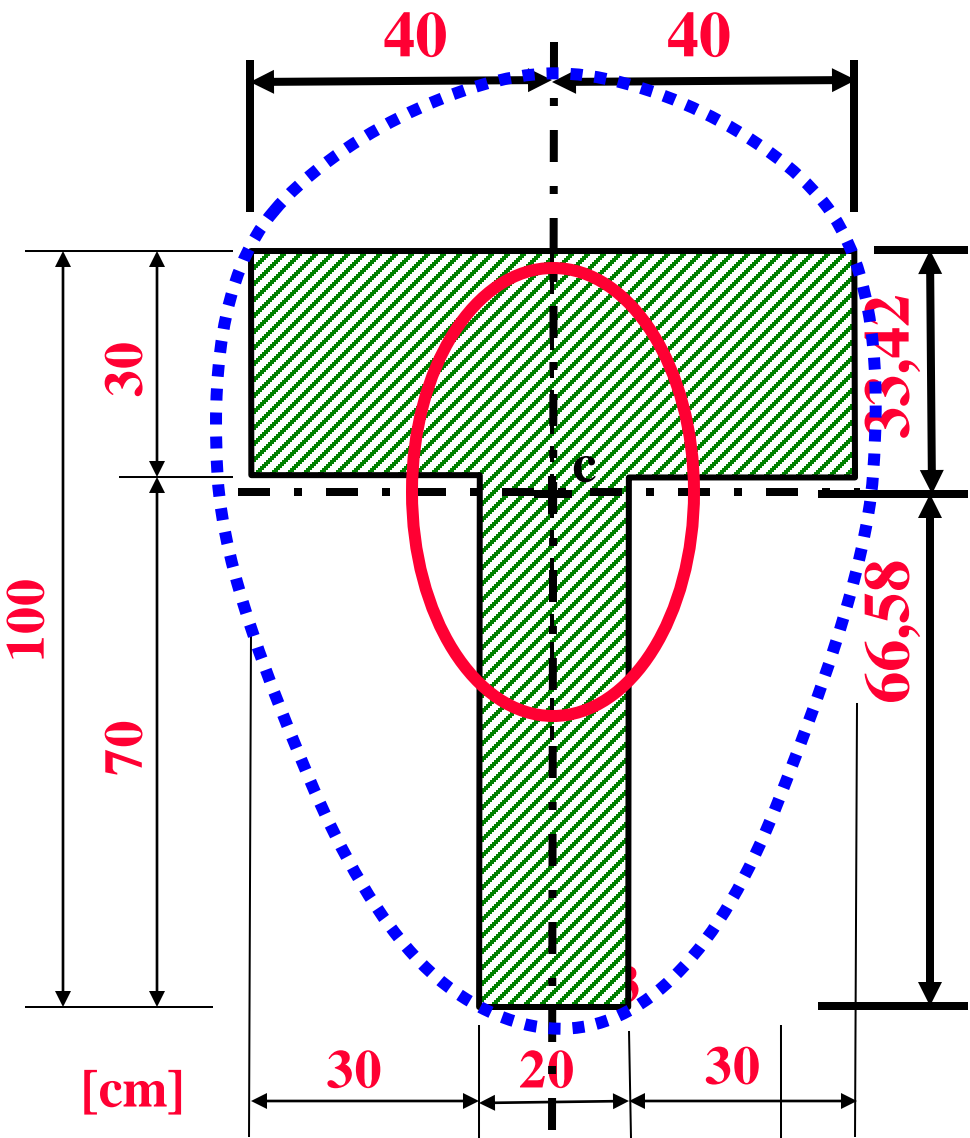
Průřezové charakteristiky:

Odhad velikosti a orientace centrální elipsy setrvačnosti:



Průřezové charakteristiky:

Odhad velikosti a orientace centrální elipsy setrvačnosti:



Konec