VPLYV GEOMETRIE NA HODNOTU EFEKTÍVNEHO POISSONOVHO SÚČINITEĽA AUXETICKÉHO METAMATERIÁLU

Semestrálna práca

Pružnosť a pevnosť

Katedra mechaniky

2022/2023

Nataša Jošková

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební

Poďakovanie

Rada by som sa poďakovala pánovi inžinierovi Martinovi Doškářovi za jeho ochotu, čas a usmernenie pri písaní semestrálnej práce.

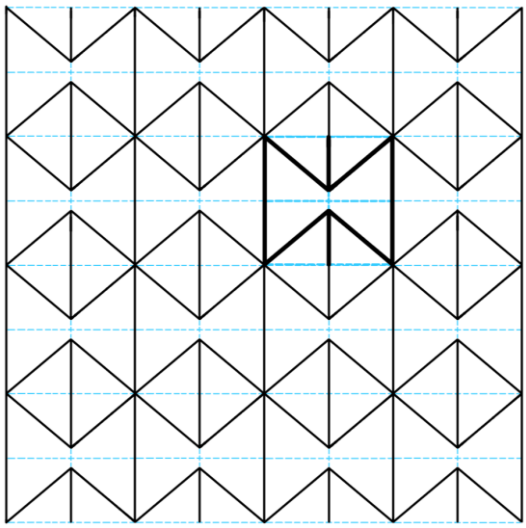
Obsah

1 Teoretický úvod

Poissonovo číslo uvádza pomer priečnej a pozdĺžnej deformácie materiálu. Jeho hodnoty zvyknú byť v rozmedzí od 0 do 0,5. Bežný materiál s kladným Poissonovým číslom sa po zúžení v jednom smere predĺži v smere kolmom a naopak.

Poznáme však aj špeciálne materiály so záporným Poissonovým číslom, čo znamená, že pri skrátení v priečnom smere skráti aj v smere pozdĺžnom. Do spomínanej kategórie patrí práve auxetický metamateriál, ktorému sa budeme venovať v našej semestrálnej práci. Tento typ materiálu sa v prírode nenachádza a je tvorený opakujúcou sa štruktúrou malých geometrických buniek. Práve vďaka nej má špeciálne mechanické vlastnosti, ktorými sa líši od bežných materiálov. V našej semestrálnej práci budeme skúmať vplyv geometrie auxetického metamateriálu na hodnotu Poissonovho čísla.

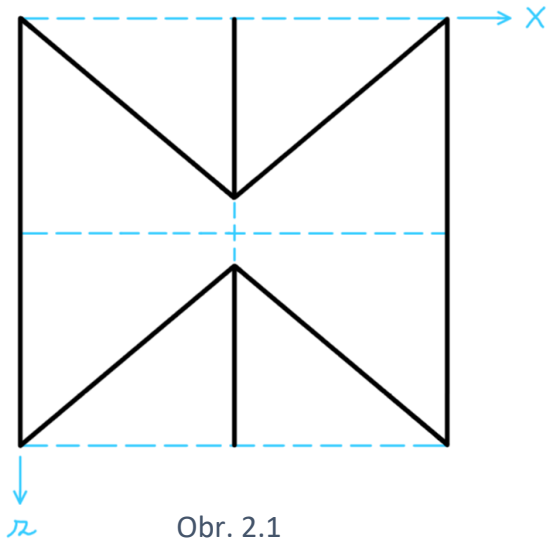
Na obrázku Obr. 1.1 máme znázornenú štruktúru auxetického materiálu.



Obr. 1.1

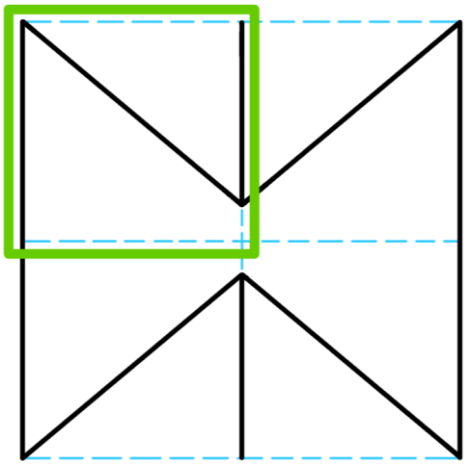
2 Predpoklady

Predpokladajme auxetický metamateriál so štruktúrou znázornenou na Obr. 2.1 a zavedený súradným systémom xz v ktorom kladná osa z smeruje zhora nadol a kladná osa x zľava doprava. Tento materiál stlačíme v smere osi z, v dôsledku čoho sa následne zdeformuje v smere osi x. Označme si posun štruktúry materiálu v smere osi x ako *u*, v smere osi z ako *w* a jej kladné pootočenie proti smeru hodinových ručičiek ako φ.



Obr. 2.1

Cieľom našej práce je odvodiť vzťah medzi posunmi *w* a *u*, z ktorého je možné určiť Poissonovo číslo. Následne budeme skúmať vplyv geometrie na hodnotu efektívneho Poissonovho čísla auxetického metamateriálu.



Obr. 2.2

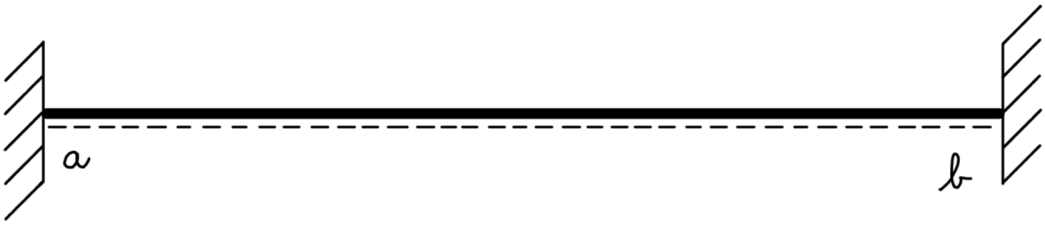
Ako máme možnosť pozorovať, v auxetickom metamateriáli sa jedna bunka periodicky opakuje. Aj vďaka tomu získal svoje jedinečné vlastnosti a nám to umožňuje skúmať iba jednu konkrétnu bunku, pretože správanie ostatných buniek v štruktúre je identické.

Auxetický metamateriál je navyše na úrovni mikroštruktúry dvojoso symetrický, čo nám dovoľuje zjednodušiť úlohu na skúmanie vlastností jedného kvadrantu bunky.

3 Vzťah medzi posunmi *u* a *w*

3.1 Použitie diferenciálnej rovnice ohybovej čiary prutu

Na začiatok je potrebné odvodiť maticu tuhosti prutu, ktorá nám určuje závislosť koncových síl a momentov prutu na posunutí *u*, *w* a pootočení φ. Pre tento účel budeme zatiaľ uvažovať jeden prut, obojstranne votknutý.



Obr. 3.1

Diferenciálna rovnica ohybovej čiary prutu má tvar 3.1.1.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI_y\frac{d^2w}{dx^2}(x)\right] = \bar{f_z}(x)$$

(3.1.1)

Integráciou x z diferenciálnej rovnice ohybovej čiary prutu odvodíme vzťah 3.1.3 pre koncovú silu *V* a moment *M*. Spojité zaťaženie $\bar{f_z}$ je rovné nule, preto ho môžeme zanedbať.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI_y\frac{d^2w}{dx^2}(x)\right] = \bar{f_z}(x) \qquad / \int$$

$$\frac{d}{dx}\left[EI_y\frac{d^2w}{dx^2}(x)\right] = \bar{f_z}(x)x + c_1 \qquad / \int$$

$$EI_y\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \bar{f_z}(x)\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 \qquad / \int$$

$$EI_y\frac{dw}{dx}(x) = \bar{f_z}(x)\frac{x^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 \qquad / \int$$

$$EI_yw(x) = \bar{f_z}(x)\frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4$$

(3.1.2)

$$V = -EI_y\frac{d^3w}{dx^3}(x) = -\bar{f_z}(x)x - c_1 = -c_1$$

$$M = -EI_y\frac{d^2w}{dx^2}(x) = -\bar{f_z}(x)\frac{x^2}{2} - c_1x - c_2 = -c_1x - c_2$$

(3.1.3)

3.2 Použitie DR namáhania prutu v ťahu a tlaku

Do diferenciálnej rovnice prutu namáhaného v ťahu-tlaku dosadíme relatívne predĺženie ε v závislosti na *x* 3.2.2. V našom prípade nemáme spojité zaťaženie $\bar{f}_x$, takže ho položíme rovné nule.

$$\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}(x)\right] + \bar{f}_x(x) = 0 \tag{3.2.1}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}(x) \tag{3.2.2}$$

$$\frac{d}{dx}[EA\varepsilon(x)] + \bar{f}_x(x) = 0 \;\wedge\; \bar{f}_x(x) = 0$$

$$\frac{dN}{dx}(x) = 0 \tag{3.2.3}$$

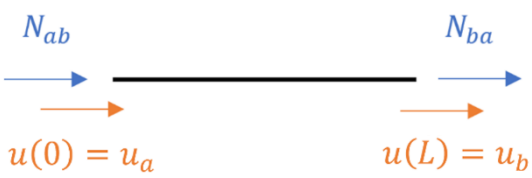
$$N(x) = EA\varepsilon(x) \quad \rightarrow \quad \varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA} \tag{3.2.4}$$

Normálová sila N je konštantná, preto jej derivácia podľa *x* je rovná nule, z čoho dostaneme vzťah 3.2.4. Dáme do rovnosti obidve vyjadrenia relatívneho predĺženia $\varepsilon(x)$ a rovnicu zintegrujeme. Premennú *x* si označíme ako *L*, pretože v ďalších výpočtoch budeme uvažovať *L* ako dĺžku prutu.

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{N}{EA} \qquad / \int$$

$$u(x) = \frac{Nx}{EA} + c_1$$

$$N = \frac{EA\Delta u}{L} \tag{3.2.5}$$



Obr. 3.2

Dostaneme konečný vzťah pre normálovú silu *N*. Podľa konvencie síl v obecnej deformačnej metóde majú naše vnútorné sily smer zhodný so smerom ôs súradnicového systému, preto môžeme napísať vzťah 3.2.6. Nazývajú sa koncovými silami a sú zavedené podľa konvencie na Obr. 3.2. Kladnú koncové sily majú smer a orientáciu kladných polos a kladné momenty točia proti smeru hodinových ručičiek. V našej práci budeme ďalej pracovať s koncovými silami.

$$-N_{ab} = \frac{EA\Delta u}{L} = N_{ba} \tag{3.2.6}$$

Pre jednoduchší zápis si zavedieme normálovú tuhosť prutu n definovanú vzťahom 3.2.7 a pomocou nej vyjadríme normálovú silu *N*.

$$n_{ab} = \frac{EA}{L} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned} N_{ab} &= n_{ab}\Delta u \\ N_{ab} &= n_{ab}(u_a - u_b) \\ N_{ba} &= n_{ab}(u_b - u_a) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

3.3 Matica tuhosti prutu

Matica tuhosti prutu má tvar 3.3.1. Zvýraznené konštanty k_{11}, k_{14}, k_{41}, k_{44} sme určili z vyjadrenia normálovej sily *N* a dosadíme ich do matice tuhosti *K*.

$$\begin{Bmatrix} N_{ab} \\ V_{ab} \\ M_{ab} \\ N_{ba} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{ab} \\ V_{ab} \\ M_{ab} \\ N_{ba} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} \tag{3.3.2}$$

Vidíme, že posuny u_a, u_b závisia iba na koncových silách N_{ab} a N_{ba} , ktoré sú naopak závislé výhradne na posunoch u_a, u_b, preto si pri hľadaní vzťahu medzi ďalšími vnútornými silami, posunmi a pootočeniami budeme môcť dovoliť vynechať u_a, u_b, N_{ab}, N_{ba} a vznikne nám matica 4x4, s ktorou sa bude lepšie pracovať.

$$\begin{Bmatrix} N_{ab} \\ V_{ab} \\ M_{ab} \\ N_{ba} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & -n & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ -n & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} \tag{3.3.3}$$

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ k_{32} & k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} \tag{3.3.4}$$

3.3.1 Posun w_a

Z matice tuhosti 3.3.3 sme pri riešení posunu *w* a pootočenia φ dočasne odstránili vyjadrenú koncovú silu *N* a posun *u*, aby riešenie bolo prehľadnejšie. V ďalších krokoch budeme vždy jednému z posunutí, alebo pootočení (w_a, w_b, φ_a, φ_b) priradzovať hodnotu 1, ostatným trom ponecháme hodnotu 0 a vyriešime diferenciálnu rovnicu s odpovedajúcimi okrajovými podmienkami.

Zvolíme si $w_a = 1$, spočítané koncové sily potom odpovedajú príslušnému stĺpcu matice. Vďaka zvolenému posunu budeme vedieť vypočítať konštanty k_{22}, k_{32}, k_{52} a k_{62}, patriace k posunu w_a.

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ k_{32} & k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.3.1.1)

V diferenciálnej rovnici ohybovej čiary 3.1.2 má $\bar{f}_z(x)$ nulovú hodnotu, preto ho odstránime a vzniknú nám vzťahy 3.3.1.2.

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \qquad / \int$$

$$EI_y w(x) = c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

(3.3.1.2)

Pootočenie sa rovná zápornej hodnote derivácie posunu *w* podľa x. Vďaka tomu prepíšeme rovnice 3.3.1.2 do finálnej podoby 3.3.1.3.

$$-EI_y \varphi_a(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \qquad \varphi_a = -\frac{dw}{dx}(x)$$

$$EI_y w(x) = c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

(3.3.1.3)

Dosadíme hodnoty posunu *w* a pootočenia φ do diferenciálnej rovnice ohybovej čiary s nulovým $\bar{f}_z(x)$ 3.3.1.3 a vypočítame hodnoty konštánt c_1, c_2, c_3 a c_4.

$$w_a = 1 \quad \rightarrow \quad c_4 = EI_y w_a = EI_y$$
$$\varphi_a = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$w_b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} + EI_y$$
$$\varphi_b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -c_1 \frac{L^2}{2} - c_2 L$$

$$-EI_y = c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2}$$
$$c_2 = -c_1 \frac{L}{2}$$

$$-EI_y = c_1 \frac{L^3}{6} - c_1 \frac{L^3}{4}$$
$$-EI_y = -c_1 \frac{2L^3}{24}$$
$$-EI_y = -c_1 \frac{L^3}{12}$$

$$c_1 = \frac{12EI_y}{L^3}$$

$$c_2 = -\frac{12EI_y}{L^3} \frac{L}{2}$$

$$c_2 = -\frac{6EI_y}{L^2}$$

(3.3.1.4)

Ohybová tuhosť prutu k_{ab} sa rovná 3.3.1.5. Budeme ju pre prehľadnosť využívať pri výpočte matice tuhosti.

$$k_{ab} = \frac{2EI_y}{L}$$

(3.3.1.5)

Do vzťahov 3.3.1.6 a 3.3.1.7 pre výpočet koncovej sily *V* a momentu *M* vložíme konštanty c_1, c_2, c_3, c_4 a vyjadríme jednotlivé koncové sily v závislosti na posune w_a.

Koncové sily V_{ab} a V_{ba} v závislosti na posune w_a.

$$V_{ab} = c_1 = \frac{12EI_y}{L^3} = \frac{6k_{ab}}{L^2}$$

$$V_{ba} = -c_1 = -\frac{12EI_y}{L^3} = -\frac{6k_{ab}}{L^2}$$

(3.3.1.6)

Koncové momenty M_{ab} a M_{ba} v závislosti na posune w_a.

$$M_{ab} = -c_1 L - c_2 = -\frac{12EI_y}{L^3} L + \frac{6EI_y}{L^2} = -\frac{6EI_y}{L^2} = -\frac{3k_{ab}}{L}$$

$$M_{ba} = -\frac{3k_{ab}}{L}$$

(3.3.1.7)

3.3.2 Pootočenie φ_a

Pre výpočet pootočenia φ_a si zvolíme $\varphi_a = 1$ a ostatným posunom a pootočeniam priradíme hodnotu 0. Vďaka tomuto kroku budeme vedieť získať konštanty k_{23}, k_{33}, k_{53} a k_{63}.

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ k_{32} & k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.3.2.1)

Pri diferenciálnej rovnici ohybovej čiary s nulovým $\bar{f}_z(x)$ 3.3.1.2, ktorú sme si predtým vyjadrili, konštanty c_1, c_2, c_3 a c_4 nie sú zhodné s prípadom, kedy bol posun $w_a = 1$. V tomto prípade máme rozdielne predpoklady a to $\varphi_a = 1$, takže w_a má nulovú hodnotu, dôsledkom čoho musíme konštanty c_1, c_2, c_3 a c_4 znovu vyjadriť.

$$w_a = 0 \quad \rightarrow \quad c_4 = 0$$
$$\varphi_a = 1 \quad \rightarrow \quad c_3 = -EI_y\varphi_a = -EI_y$$

$$w_b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = c_1\frac{L^3}{6} + c_2\frac{L^2}{2} - EI_yL \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{6EI_y}{L^2}$$

$$\varphi_b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -c_1\frac{L^2}{2} - c_2L + EI_y \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{4EI_y}{L}$$

(3.3.2.2)

Do vzťahov 3.3.2.3 a 3.3.2.4 pre výpočet koncovej sily *V* a momentu *M* vložíme konštanty c_1, c_2, c_3, c_4 a vyjadríme jednotlivé posúvajúce sily a pootočenia závisiace na posune w_a.

Koncové sily V_{ab} a V_{ba} v závislosti na pootočení φ_a.

$$V_{ab} = c_1 = -\frac{6EI_y}{L^2} = -\frac{3k_{ab}}{L}$$

$$V_{ba} = -c_1 = \frac{6EI_y}{L^2} = \frac{3k_{ab}}{L}$$

(3.3.2.3)

Koncové momenty M_{ab} a M_{ba} v závislosti na pootočení φ_a.

$$M_{ab} = c_1 0 + c_2 = 0 + \frac{4EI_y}{L} = \frac{4EI_y}{L} = 2k_{ab}$$

$$M_{ba} = -c_1L - c_2 = \frac{6EI_y}{L^2}L - \frac{4EI_y}{L} = \frac{2EI_y}{L} = k_{ab}$$

(3.3.2.4)

3.3.3 Posun w_b

Pri výpočet posunu w_b priradíme w_b hodnotu 1, čo nám umožní určiť konštanty k_{25}, k_{35}, k_{55} a k_{65}.

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ k_{32} & k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.3.3.1)

$$w_a = 0 \quad \rightarrow \quad c_4 = 0$$
$$\varphi_a = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$w_b = 1 \quad \rightarrow \quad EI_y = c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{6k_{ab}}{L^2}$$

$$\varphi_b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -c_1 \frac{L^2}{2} - c_2 L \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{3k_{ab}}{L}$$

(3.3.3.2)

Po vypočítaní konštánt môžeme určiť koncovú silu V a moment M.

Koncové sily V_{ab} a V_{ba} v závislosti na posune w_b.

$$V_{ab} = -c_1 = -\frac{6k_{ab}}{L^2}$$

$$V_{ba} = c_1 = \frac{6k_{ab}}{L^2}$$

(3.3.3.3)

Koncové momenty M_{ab} a M_{ba} v závislosti na posune w_b.

$$M_{ab} = -c_1 L - c_2 = \frac{6k_{ab}}{L^2} L - \frac{3k_{ab}}{L} = \frac{3k_{ab}}{L}$$

$$M_{ba} = \frac{3k_{ab}}{L}$$

(3.3.3.4)

3.3.4 Pootočenie φ_b

Pre výpočet pootočenia φ_b určíme $\varphi_b = 1$ z čoho následne podobným spôsobom ako v predchádzajúcich príkladoch vypočítame konštanty k_{26}, k_{36}, k_{56} a k_{66}.

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ k_{32} & k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

(3.3.4.1)

$$w_a = 0 \quad \rightarrow \quad c_4 = 0$$
$$\varphi_a = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$w_b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{6EI_y}{L^2}$$

$$\varphi_b = 1 \quad \rightarrow \quad EI_y = -c_1 \frac{L^2}{2} - c_2 L \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{2EI_y}{L}$$

(3.3.4.2)

Koncové sily V_{ab} a V_{ba} v závislosti na pootočení φ_b.

$$V_{ab} = -c_1 = -\frac{6EI_y}{L^2} = -\frac{3k_{ab}}{L}$$

$$V_{ba} = c_1 = \frac{6EI_y}{L^2} = \frac{3k_{ab}}{L}$$

(3.3.4.3)

Koncové momenty M_{ab} a M_{ba} v závislosti na pootočení φ_b.

$$M_{ab} = -c_1 0 - c_2 = 0 + \frac{2EI_y}{L} = \frac{2EI_y}{L} = k_{ab}$$

$$M_{ba} = -c_1 L - c_2 = -\frac{6EI_y}{L^2} L + \frac{2EI_y}{L} = -\frac{4EI_y}{L} = -2k_{ab}$$

(3.3.4.4)

3.3.5 Kompletná matica tuhosti prutu

Na základe vyjadrených vzťahov medzi koncovou silou *V*, momentom *M*, posunom *w* a pootočením φ dosadíme za konštanty matice tuhosti 3.3.5.1 príslušné veličiny.

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ k_{32} & k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

(3.3.5.1)

Dostaneme maticu tuhosti *K* pre koncovú silu *V* a koncový moment *M*.

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6k_{ab}}{L^2} & -\frac{3k_{ab}}{L} & -\frac{6k_{ab}}{L^2} & -\frac{3k_{ab}}{L} \\ -\frac{3k_{ab}}{L} & 2k_{ab} & \frac{3k_{ab}}{L} & k_{ab} \\ -\frac{6k_{ab}}{L^2} & \frac{3k_{ab}}{L} & \frac{6k_{ab}}{L^2} & \frac{3k_{ab}}{L} \\ -\frac{3k_{ab}}{L} & k_{ab} & \frac{3k_{ab}}{L} & 2k_{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = k_{ab} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} \\ -\frac{3}{L} & 2 & \frac{3}{L} & 1 \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} \\ -\frac{3}{L} & 1 & \frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

(3.3.5.2)

Maticu tuhosti 3.3.5.2 rozšírime o koncovú silu N a posun u, čím získame kompletnú maticu tuhosti *K* 3.3.5.3 s posunmi *u*, *w* a pootočením φ pre prut v 2D rovnobežný s osou *x*.

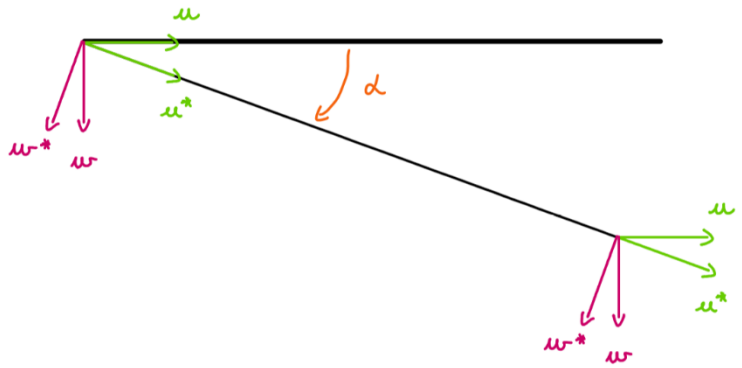
$$\begin{Bmatrix} N_{ab} \\ V_{ab} \\ M_{ab} \\ N_{ba} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ab} & 0 & 0 & -n_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6k_{ab}}{L^2} & -\frac{3k_{ab}}{L} & 0 & -\frac{6k_{ab}}{L^2} & -\frac{3k_{ab}}{L} \\ 0 & -\frac{3k_{ab}}{L} & 2k_{ab} & 0 & \frac{3k_{ab}}{L} & k_{ab} \\ -n_{ab} & 0 & 0 & n_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6k_{ab}}{L^2} & \frac{3k_{ab}}{L} & 0 & \frac{6k_{ab}}{L^2} & \frac{3k_{ab}}{L} \\ 0 & -\frac{3k_{ab}}{L} & k_{ab} & 0 & \frac{3k_{ab}}{L} & 2k_{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

(3.3.5.3)

3.4 Transformácia do globálneho súradnicového systému

3.4.1 Transformačná matica

Na Obr. 3.3 máme znázornenú polohu a smer posunov *u*, *w* rovnobežných s osami v globálnom súradnicovom systéme. My predpokladáme prut pootočený o uhol α. Tým nám vznikne lokálny súradnicový systém, v ktorom sa nachádzajú pootočené posuny *u**, *w**. Ak chceme aj naďalej pracovať v globálnom súradnicovom systéme, musíme transformovať pootočené posuny *u**, *w** na posuny *u*, *w* rovnobežné s osami globálneho súradnicového systému.



Obr. 3.3

Pre posuny *u**, *w** a pootočenie φ* pootočené o uhol α platia vzťahy 3.4.1.1

$$
\begin{aligned}
u_a^* &= u_a \cos\alpha + w_a \sin\alpha \\
w_a^* &= -u_a \sin\alpha + w_a \cos\alpha \\
\varphi_a^* &= \varphi_a \\
u_b^* &= u_b \cos\alpha + w_b \sin\alpha \\
w_b^* &= -u_b \sin\alpha + w_b \cos\alpha \\
\varphi_b^* &= \varphi_b
\end{aligned}
\tag{3.4.1.1}
$$

$$
\begin{bmatrix} u^* \\ w^* \\ \varphi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}
\tag{3.4.1.2}
$$

Maticu tuhosti K^l patriacej lokálnemu súradnicovému systému vieme previesť na maticu tuhosti K^g globálneho súradnicového systému pomocou vzťahov 3.4.1.3. T je transformačná matica a T^T je matica transponovaná.

$$
K^g = T^T K^l T
\tag{3.4.1.3}
$$

Transformačnú maticu T získame zo vzťahov 3.4.1.2 pre posuny $u*$, $w*$ a pootočenie $\varphi*$.

$$T = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.1.4}$$

Pri ortogonálnej transformácii súradníc sa inverzná matica rovná transponovanej. Vďaka tomu sme vo vzťahu 3.4.1.3 použili transponovanú maticu T^T.

$$T^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.1.5}$$

3.4.2 Matica tuhosti *K* v globálnom súradnicovom systéme

$$K^g = T^T K^l T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{ab} & 0 & 0 & -n_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6k_{ab}}{L^2} & -\frac{3k_{ab}}{L} & 0 & -\frac{6k_{ab}}{L^2} & -\frac{3k_{ab}}{L} \\ 0 & -\frac{3k_{ab}}{L} & 2k_{ab} & 0 & \frac{3k_{ab}}{L} & k_{ab} \\ -n_{ab} & 0 & 0 & n_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6k_{ab}}{L^2} & \frac{3k_{ab}}{L} & 0 & \frac{6k_{ab}}{L^2} & \frac{3k_{ab}}{L} \\ 0 & -\frac{3k_{ab}}{L} & k_{ab} & 0 & \frac{3k_{ab}}{L} & 2k_{ab} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.4.2.1)

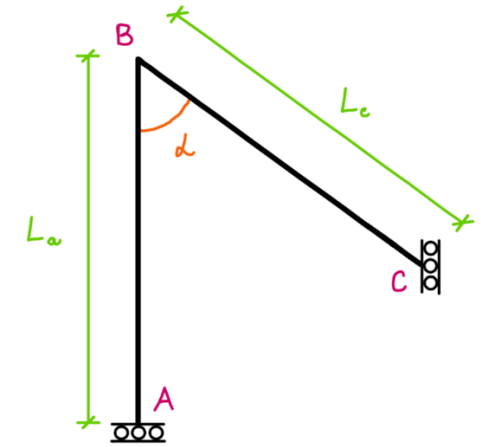
Dosadením do vzorca 3.4.2.1 pre výpočet matice tuhosti K^g v globálnom súradnicovom systéme získame jej konečnú podobu 3.4.2.2.

$$\begin{Bmatrix} N_{ab} \\ V_{ab} \\ M_{ab} \\ N_{ba} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ab}cos^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -n_{ab}cos^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha \\ \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{ab}sin^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{ab}sin^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha \\ \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & 2k_{ab} & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & k_{ab} \\ -n_{ab}cos^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & n_{ab}cos^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha \\ \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{ab}sin^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{ab}sin^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha \\ \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & k_{ab} & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & 2k_{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

(3.4.2.2)

4 Matica tuhosti K pre sústavu 2 prutov

Zaujíma nás tvar matice tuhosti *K* pre sústavu 2 prutov znázornených na Obr. 4.1. Jeden prut je rovnobežný so súradnicovými osami, druhý je pootočený o uhol α. Spojením matíc tuhosti 3.3.5.3 a 3.4.2.2 pre jednotlivé pruty získame jednu maticu tuhosti *K*, ktorá nám určuje vzťah medzi koncovými silami, momentami, posunutiami a pootočeniami sústavy.



Obr. 4.1

$$
\begin{Bmatrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_b \\ Z_b \\ M_b \\ X_{cb} \\ Z_{cb} \\ M_{cb} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & n_{ab} & 0 & 0 & -n_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6k_{ab}}{L_a^2} & 0 & -\frac{3k_{ab}}{L_a} & -\frac{6k_{ab}}{L_a^2} & 0 & -\frac{3k_{ab}}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3k_{ab}}{L_a} & 0 & 2k_{ab} & \frac{3k_{ab}}{L_a} & 0 & k_{ab} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -n_{ab} & 0 & n_{bc}cos^2\alpha + \frac{6k_{bc}}{L_c^2}sin^2\alpha & \left(n_{bc} - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & -n_{bc}cos^2\alpha - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{bc}}{L_c^2} - n_{bc}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha \\
-\frac{6k_{ab}}{L_a^2} & 0 & \frac{3k_{ab}}{L_a} & \frac{6k_{ab}}{L_a^2} + \left(n_{bc} - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{bc}sin^2\alpha + \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L_a} - \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & \left(\frac{6k_{bc}}{L_c^2} - n_{bc}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{bc}sin^2\alpha - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha \\
-\frac{3k_{ab}}{L_a} & 0 & k_{ab} & \frac{3k_{ab}}{L_a} + \frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & 2k_{ab} + 2k_{bc} & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & k_{bc} \\
0 & 0 & 0 & -n_{bc}cos^2\alpha - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{bc}}{L_c^2} - n_{bc}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & n_{bc}cos^2\alpha + \frac{6k_{bc}}{L_c^2}sin^2\alpha & \left(n_{bc} - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha \\
0 & 0 & 0 & \left(\frac{6k_{bc}}{L_c^2} - n_{bc}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{bc}sin^2\alpha - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & \left(n_{bc} - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{bc}sin^2\alpha + \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha \\
0 & 0 & 0 & \frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & k_{bc} & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & 2k_{bc}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \\ u_c \\ w_c \\ \varphi_c \end{Bmatrix}
\tag{4.1}
$$

w_a, φ_a, u_c, φ_c majú nulové hodnoty, preto ich môžeme z matice odstrániť.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -n_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & n_{bc}cos^2\alpha + \frac{6k_{bc}}{L_c^2}sin^2\alpha & \left(n_{bc} - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & \left(\frac{6k_{bc}}{L_c^2} - n_{bc}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\ -\frac{6k_{ab}}{L_a^2} & \frac{6k_{ab}}{L_a^2} + \left(n_{bc} - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{bc}sin^2\alpha + \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L_a} - \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & -n_{bc}sin^2\alpha - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha \\ -\frac{3k_{ab}}{L_a} & \frac{3k_{ab}}{L_a} + \frac{3k_{bc}}{L_c}\sin\alpha & -\frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & 2k_{ab} + 2k_{bc} & \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha \\ 0 & \left(\frac{6k_{bc}}{L_c^2} - n_{bc}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{bc}sin^2\alpha - \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{bc}}{L_c}\cos\alpha & n_{bc}sin^2\alpha + \frac{6k_{bc}}{L_c^2}cos^2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \\ w_c \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

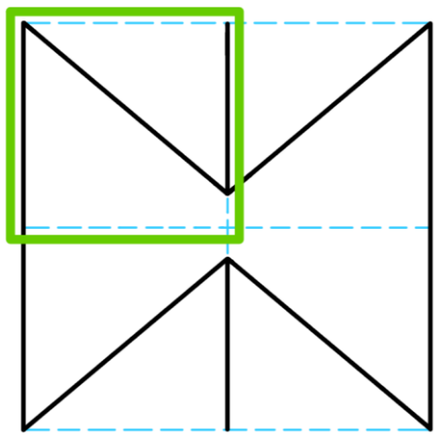
Za ohybovú tuhosť prutu *k* a normálovú tuhosť prutu *n* dosadíme pôvodné výrazy n_{ab}, n_{bc}, k_{ab}, k_{bc}. Po úpravách nám vznikne finálna matica tuhosti *K* 4.3. Prišli sme na to, že naše predpoklady správania sa konštrukcie neboli správne, preto s týmto odvodením ďalej nebudeme pracovať.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{EA}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L_c}cos^2\alpha + \frac{12EI_y}{L_c^3}sin^2\alpha & \left(\frac{EA}{L_c} - \frac{12EI_y}{L_c^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{6EI_y}{L_c^2}\sin\alpha & \left(\frac{12EI_y}{L_c^3} - \frac{EA}{L_c}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\ -\frac{12EI_y}{L_a^3} & \frac{12EI_y}{L_a^3} + \left(\frac{EA}{L_c} - \frac{12EI_y}{L_c^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{EA}{L_c}sin^2\alpha + \frac{12EI_y}{L_c^3}cos^2\alpha & \frac{6EI_y}{L_a^2} - \frac{6EI_y}{L_c^2}\cos\alpha & -\frac{EA}{L_c}sin^2\alpha - \frac{12EI_y}{L_c^3}cos^2\alpha \\ -\frac{6EI_y}{L_a^2} & \frac{6EI_y}{L_a^2} + \frac{6EI_y}{L_c^2}\sin\alpha & -\frac{6EI_y}{L_c^2}\cos\alpha & \frac{4EI_y}{L_a} + \frac{4EI_y}{L_c} & \frac{6EI_y}{L_c^2}\cos\alpha \\ 0 & \left(\frac{12EI_y}{L_c^3} - \frac{EA}{L_c}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{EA}{L_c}sin^2\alpha - \frac{12EI_y}{L_c^3}cos^2\alpha & \frac{6EI_y}{L_c^2}\cos\alpha & \frac{EA}{L_c}sin^2\alpha + \frac{12EI_y}{L_c^3}cos^2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \\ w_c \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

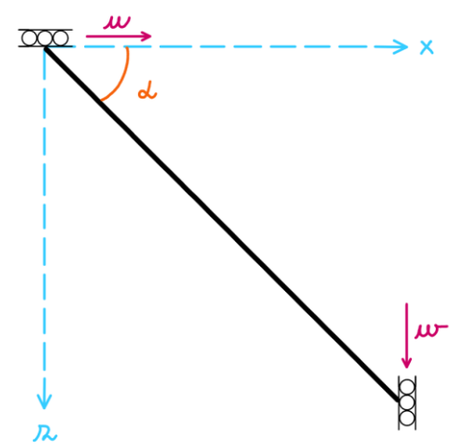
5 Model auxetického metamateriálu s jedným prutom

5.1 Odstránenie $\boldsymbol{\varphi_b}$

Zistili sme, že nemôžeme počítať s pootočením φ_b, pretože by nám nevznikla periodicky deformovaná bunka. V materiáli by neostávala požadovaná štruktúra, ale vznikli by medzery medzi jednotlivými časťami materiálu, prípadne by sa prekrývali, čomu sa chceme vyhnúť. Budeme uvažovať nestlačiteľnosť zvislých prutov pri zachovaní stlačiteľnosti šikmých. Preto zavedieme nulové pootočenie vo všetkých koncových bodoch. Vďaka tomu vieme previesť zadanú sústavu prutov na úlohu o jednom pootočenom prute, pričom nás bude stále zaujímať súvislosť medzi posunom *u* a *w* znázornenom na Obr. 5.2.



Obr. 5.1



Obr. 5.2

5.2 Matica tuhosti *K* modelu s jedným prutom

Znovu si zoberieme vyjadrenú maticu tuhosti *K* transformovanú do globálneho súradnicového systému xz a tentokrát odstránime zvýraznené výrazy patriace nulovému pootočeniu φ_b. Vznikne nám matica 2x2 pre koncové sily X, Z a posuny *u*, *w* na obidvoch stranách prutu. Zjednodušenie sústavy na jeden šikmý môžeme spraviť z dôvodu, že posuny zvyšných prutov, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami x, z budú zhodné s posunmi *u* a *w*.

$$\begin{Bmatrix} X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \\ X_c^* \\ Z_c^* \\ M_c^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ab}cos^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -n_{ab}cos^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha \\ \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{ab}sin^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{ab}sin^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha \\ \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & 2k_{ab} & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & k_{ab} \\ -n_{ab}cos^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & n_{ab}cos^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha \\ \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{ab}sin^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{ab}sin^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha \\ \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & k_{ab} & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & 2k_{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_b^* \\ Z_b^* \\ M_b^* \\ X_c^* \\ Z_c^* \\ M_c^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ab}cos^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -n_{ab}cos^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha \\ \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{ab}sin^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{ab}sin^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha \\ \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & 2k_{ab} & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & k_{ab} \\ -n_{ab}cos^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & n_{ab}cos^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha \\ \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)\sin\alpha\cos\alpha & -n_{ab}sin^2\alpha - \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & \left(n_{ab} - \frac{6k_{ab}}{L^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & n_{ab}sin^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha \\ \frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & -\frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & k_{ab} & -\frac{3k_{ab}}{L}\sin\alpha & \frac{3k_{ab}}{L}\cos\alpha & 2k_{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ \varphi_b \\ u_c \\ w_c \\ \varphi_c \end{Bmatrix}$$

(5.2.1)

5.3 Vzťah medzi posunmi *u* a *w*

Odstránením nulových posunov a pootočení z matice tuhosti K 5.2.1 sme získali maticu 2x2 v ktorej sa nachádzajú iba posuny u_a a w_b.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ R_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ab}cos^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}sin^2\alpha & \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)sin\,\alpha\,cos\,\alpha \\ \left(\frac{6k_{ab}}{L^2} - n_{ab}\right)sin\,\alpha\,cos\,\alpha & n_{ab}sin^2\alpha + \frac{6k_{ab}}{L^2}cos^2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ w_c \end{Bmatrix}$$

(5.3.1)

Za ohybovú tuhosť prutu *k* a normálovú tuhosť prutu *n* dosadíme výrazy 5.3.2 a zjednodušíme jednotlivé členy matice tuhosti *K*.

$$n_{ab} = \frac{EA}{L}$$

$$k_{ab} = \frac{2EI_y}{L}$$

(5.3.2)

Vyjadríme si u_b v závislosti na w_b.

$$0 = \frac{L^2EAcos^2\alpha + 12EI_ysin^2\alpha}{L^3}u_b + \left(\frac{12EI_y - L^2EA}{L^3}\right)sin\,\alpha\,cos\,\alpha\,w_c$$

$$\frac{L^2EAcos^2\alpha + 12EI_ysin^2\alpha}{L^3}u_b = -\left(\frac{12EI_y - L^2EA}{L^3}\right)sin\,\alpha\,cos\,\alpha\,w_c$$

$$u_b = -\frac{\left(12I_y - L^2A\right)sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{L^2Acos^2\alpha + 12I_ysin^2\alpha}w_c$$

(5.3.3)

Pre zjednodušenie použijeme vzťah 5.3.4 pre polomer zotrvačnosti.

$$i^2 = \frac{I_y}{A}$$

(5.3.4)

$$u_b = -\frac{(12i^2 - L^2)\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{L^2cos^2\alpha + 12i^2sin^2\alpha}w_c$$

(5.3.5)

Dĺžka prutu L neostáva konštantná, ale mení sa nám s rozdielnym uhlom α, preto jej postupnú zmenu musíme zapracovať do nášho vzťahu. Zvolíme si premennú H, ktorá predstavuje polovicu dĺžky reprezentatívnej bunky.

$$L = \frac{H}{cos\,\alpha} \tag{5.3.6}$$

$$u_b = -\frac{\left(12i^2 - \frac{H^2}{cos^2\alpha}\right) sin\,\alpha\, cos\,\alpha}{\frac{H^2}{cos^2\alpha} cos^2\alpha + 12i^2 sin^2\alpha} w_c$$

$$u_b = -\frac{\left(12i^2 - \frac{H^2}{cos^2\alpha}\right) sin\,\alpha\, cos\,\alpha}{H^2 + 12i^2 sin^2\alpha} w_c \tag{5.3.7}$$

Rovnicu 5.3.7 vieme ešte prepísať pomocou parametru λ, ktorý si zavedieme ako 5.3.8.

$$\lambda = \frac{i}{H} \tag{5.3.8}$$

$$u_b = -\frac{\left(12\frac{i^2}{H^2} - \frac{H^2}{H^2 cos^2\alpha}\right) sin\,\alpha\, cos\,\alpha}{\frac{H^2}{H^2} + 12\frac{i^2}{H^2} sin^2\alpha} w_c$$

$$u_b = -\frac{\left(12\lambda^2 - \frac{1}{cos^2\alpha}\right) sin\,\alpha\, cos\,\alpha}{1 + 12\lambda^2 sin^2\alpha} w_c \tag{5.3.9}$$

Získali sme konečný vzťah závislosti posunu u_a na predpísanom posune w_c.

5.4 Poissonovo číslo $\boldsymbol{\nu}$

Vyjadrení závislosti u_b na w_c vieme zo vzťahu 5.4.1 určiť hodnotu Poissonovho čísla ν.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$$

(5.4.1)

$$\nu = -\frac{\frac{u_b}{H}}{\frac{w_c}{H}} \qquad \varepsilon_x \approx \frac{u_b}{H}$$

$$\nu = -\frac{u_b}{w_c} \qquad \varepsilon_z \approx \frac{w_c}{H}$$

(5.4.2)

$$\nu = \frac{\left(12\lambda^2 - \frac{1}{cos^2\alpha}\right) sin\,\alpha\, cos\,\alpha}{1 + 12\lambda^2 sin^2\alpha}$$

(5.4.3)

λ^2 vychádza ako veľmi malé číslo blížiace sa k nule, preto je možné ho vo výpočte zanedbať. Vyjadrili sme Poissonovo číslo ν a môžeme s ním ďalej pracovať.

$$\nu \cong -\frac{1}{cos^2\alpha} sin\,\alpha\, cos\,\alpha$$

$$\nu \cong -\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

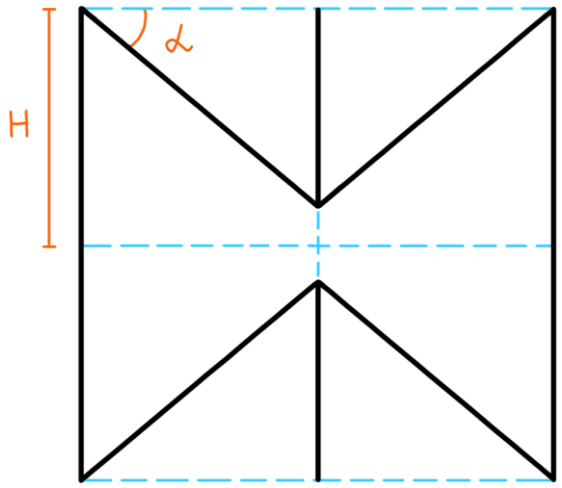
$$\nu \cong -\tan\alpha$$

(5.4.4)

6 Geometria auxetického materiálu

Na overenie správnosti výsledku 5.4.3 sme použili program EduBeam. V našom vyjadrení závislosti posunu *u* na *w* sme zanedbali smykové deformácie, preto sme v parametroch materiálu nastavili modul pružnosti v smyku *G* rovný nekonečnu. Dĺžku prutu H sme si zvolili 10 m, aby bolo jasne vidno priebeh deformácie. Pomocou prierezových charakteristík sme si nastavili vhodný tvar prutu. Plocha prierezu *A* bude mať v našom prípade 1 m^2 a moment zotrvačnosti I_y sme zvolili 0,001 m^4. Posun *w* v smere osi z má hodnotu 1 m. Zvyšné parametre sme ponechali preddefinované.

Zároveň sme v Matlabe napísali kód z ktorého sme dostali hodnoty Poissonovho čísla ν a vykreslenie grafov v závislosti na geometrii auxetického metamateriálu.



Obr. 6.1

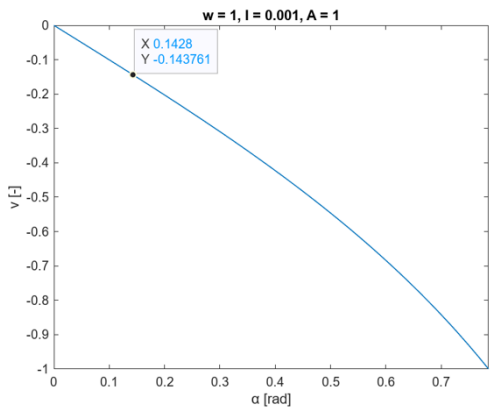
Uhlu α priradíme hodnoty v rozmedzí od 0° do 45°, aby sa zachovala celistvosť bunky. Tým sme zaručili, že pruty ostanú iba vo svojom kvadrante, nebudú presahovať do okolitých a dôjde k spojeniu 2 a 2 šikmých prutov s prutom na zvislej ose symetrie bunky.

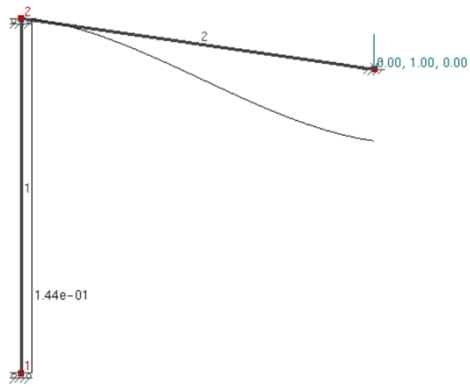
V odvodenom vzorci pre výpočet hodnoty Poissonovho čísla ν vidíme, že Poissonovo číslo sa mení iba pri zmene uhlu α, pričom ostatné veličiny pri konkrétnom materiáli ostávajú konštantné. Reprezentuje nám ich zavedený parameter λ.

Týmto sme docielili, že môžeme skúmať priamo vplyv geometrie na hodnotu Poissonovho čísla auxetického metamateriálu.

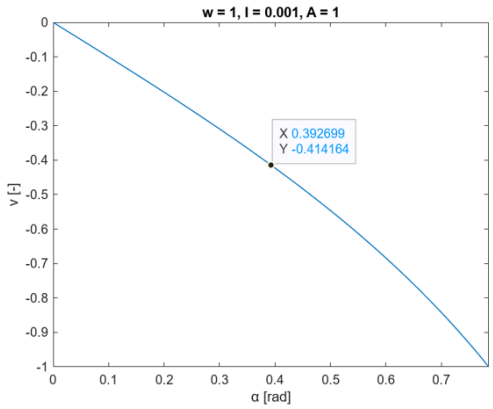
V priložených grafoch máme možnosť vidieť vľavo graf závislosti geometrie auxetického metamateriálu na hodnote Poissonovho čísla. Na pravej strane je zobrazený priebeh deformácie metamateriálu, pričom sme pre lepšiu prehľadnosť vynechali zvislý prut na ose symetrie, ktorého vodorovný posun *u* je nulový.

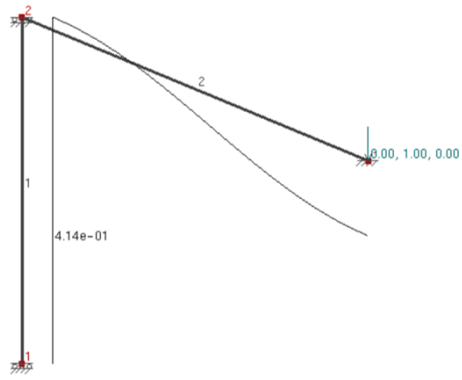
V tabuľke sú zaznačené posuny štruktúry nášho metamateriálu, posun *u* má opačné znamienko ako je hodnota Poissonovo číslo v grafe. Vzniklo to pretože Poissonovo číslo reprezentuje záporný pomer horizontálneho posunu *u* k vertikálnemu posunu *w*.



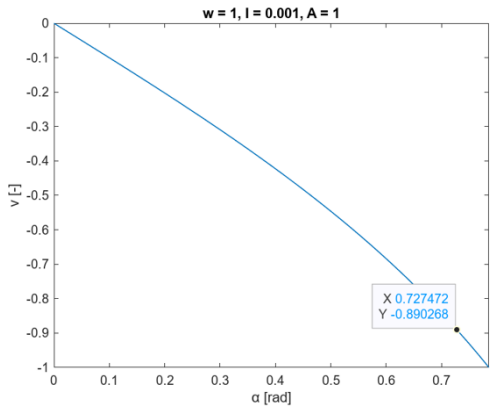


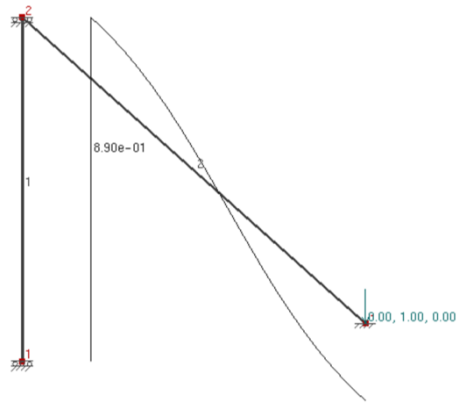
Uzel	x [~m]	y [~m]	z [~m]	u [~m]	w [~m]	phi [~rad]
1	0	0	10	0.14376275	0	0
2	0	0	0	0.14376275	0	0
3	10	0	1.4378	0	1	0





Uzel	x [~m]	y [~m]	z [~m]	u [~m]	w [~m]	phi [~rad]
1	0	0	10	0.4141603	0	0
2	0	0	0	0.4141603	0	0
3	10	0	4.1421	0	1	0

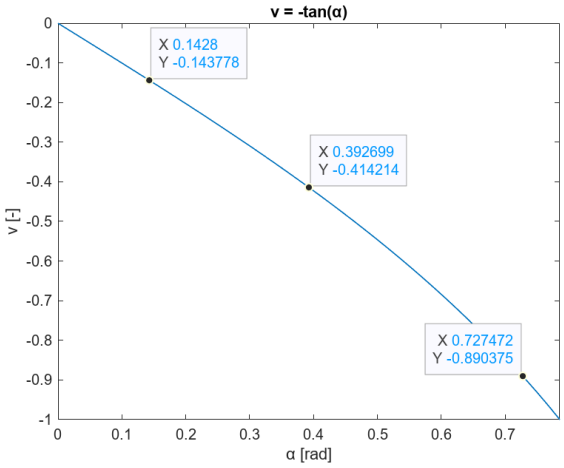




Uzel	x [~m]	y [~m]	z [~m]	u [~m]	w [~m]	phi [~rad]
1	0	0	10	0.89027316	0	0
2	0	0	0	0.89027316	0	0
3	10	0	8.9038	0	1	0

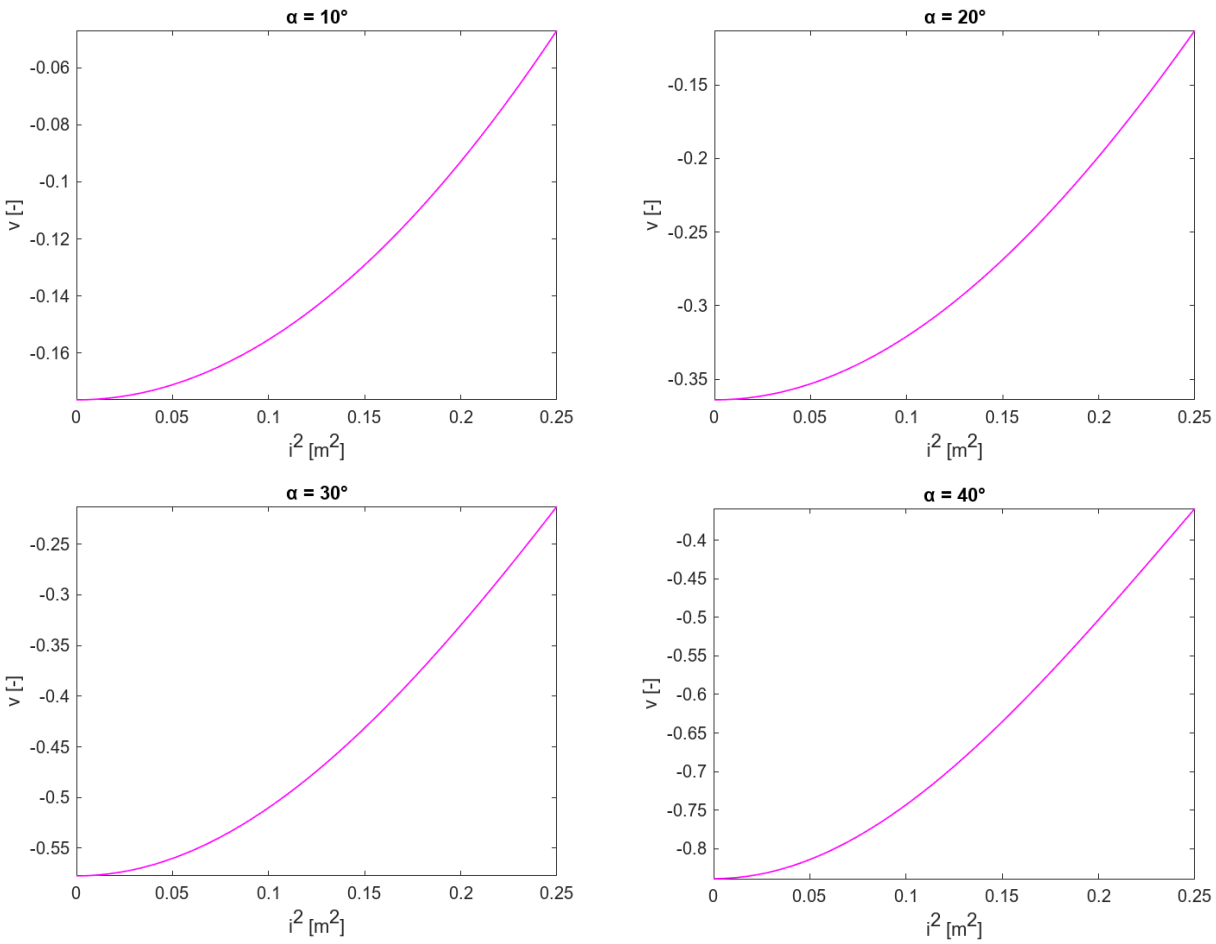
(6.1)

V nasledujúcom grafe sú vyobrazené hodnoty vypočítané pomocou vzťahu 5.4.4, v ktorom bola zanedbaná hodnota λ^2, preto sa v tomto prípade Poissonovo číslo rovná zápornej hodnote tangensu uhlu α.



(6.2)

V grafoch 6.3 sa nachádza závislosť hodnoty Poissonovho číslo od polomeru zotrvačnosti i^2. S rastúcim uhlom sa Poissonovo číslo zmenšuje, ale jeho absolútna hodnota sa zväčšuje, z čoho vyplýva že narastá aj veľkosť posunu u.



(6.3)

7 Záver

S použitím diferenciálnej rovnice pre ohybovú čiaru prutu a obecnej deformačnej metódy sme si vyjadrili vzťah medzi koncovými silami *N*, *V*, *M*, posunmi *u*, *w* a pootočením φ. Vznikla nám matica tuhosti *K*, z ktorej sme následne vyjadrili vzťah medzi posunmi *u* a *w*.

Poissonovo číslo ν reprezentuje záporne vzatý pomer posunu *u* k posunu *w*. Zistili sme, že parameter λ charakterizujúci geometrické vlastnosti prutov z mikroštruktúry auxetického metamateriálu je veľmi malé číslo, takže ho môžeme zanedbať vo výraze odvodenia Poissonovho čísla, čím Poissonovo číslo vyjadríme ako zápornú hodnotu tangensu uhlu α, ktorý zviera šikmý prut s kladnou polosou x.

Vďaka predchádzajúcim vzťahom sme určili vplyv geometrie na efektívnu hodnotu auxetického metamateriálu. Naše výsledky sme zaznačili do grafov a porovnali so skutočnosťou, pričom sme si overili aj predpoklad, že pri výpočte Poissonovho čísla ν môžeme zanedbať parameter λ s minimálnou stratou presnosti výsledkov. Zistili sme, že absolútna hodnota Poissonovho čísla rastie so zväčšujúcim sa uhlom α a klesá s nárastom polomeru zotrvačnosti i^2.