
Výpočet tenkostěnných nosníků

Magdaléna Doleželová

Výpočet tenkostěnných nosníků

- I. Úvod
 - II. Deplanace průřezu
 - III. Normálové namáhání
 - IV. Tečná napětí
 - V. Deformace
 - VI. Příklad
 - V. Přehled použité literatury
-

I. Úvod

Dělení těles

- Celistvá
- Desky a skořepiny
- Pruty plného průřezu
- Tenkostěnné pruty

$$\frac{\delta}{d} \leq 0,1$$

δ ... tloušťka skořepiny

d ... h nebo b

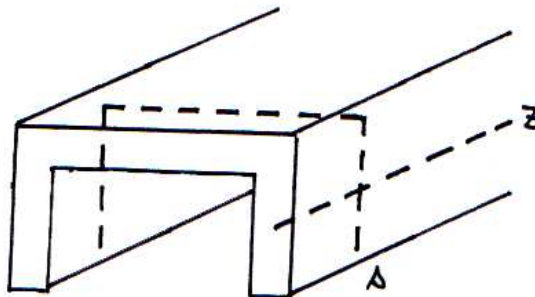
$$\frac{d}{l} \leq 0,1$$

l ... délka

I. Úvod

Pojmy

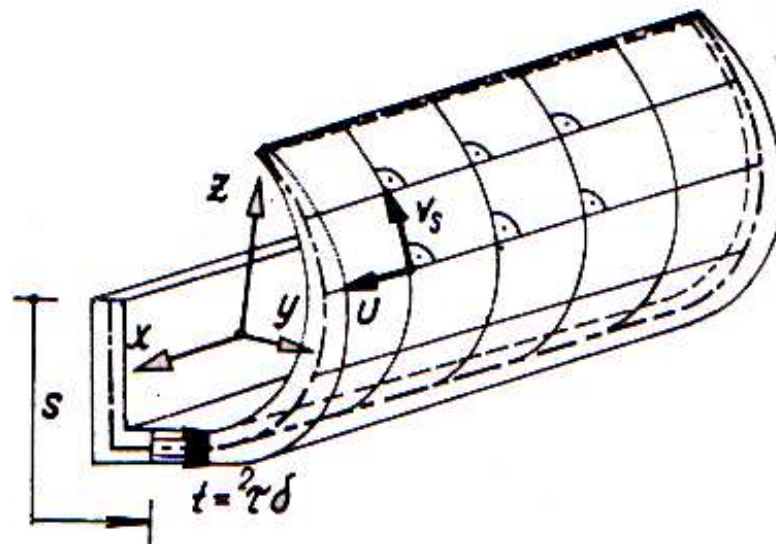
- Střednicová plocha – plocha spojující body půlící tloušťku desky
- Střednice – křivka udávající tvar střednicové plochy v řezu
- Střednicové čáry
 - Povrchové přímky – ve směru prutu (x)
 - Řídící čáry – kolmo na směr prutu (s)



I. Úvod

Předpokládáme, že

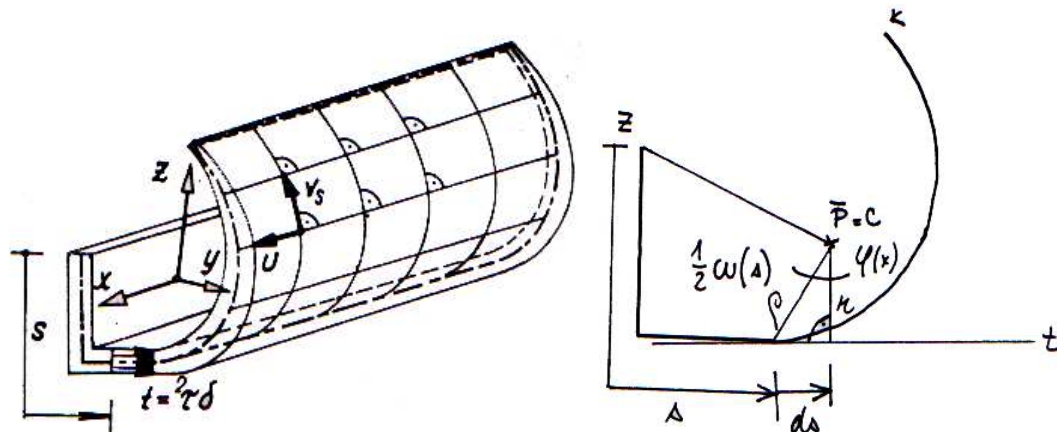
- průřez skořepiny je tuhý \Rightarrow nepřetvořuje se \Rightarrow přetvoření pravých úhlů mezi střednicovými čarami (s a x) je považováno za nulové



II. Deplanace průřezu

- Deplanace - posun ve směru osy prutu
- Volné kroucení – vzniká v případě, že není deplanaci bráněno

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = 2\gamma_{xs} = 0 \Rightarrow du = -\frac{\partial v_s}{\partial x} ds$$



Vs...přetvoření
střednice,
vektor značí změnu
polohy bodu

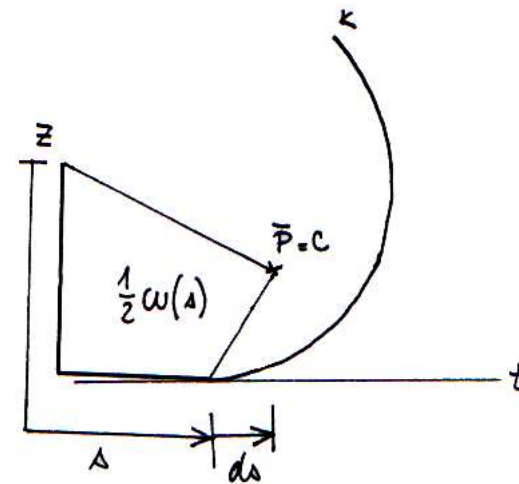
$$v_s(x, s) := \varphi(x)r(s)$$

II. Deplanace průřezu

$$\theta(x) := \frac{d\varphi}{dx}; r(s)ds = d\omega(s)$$

$$(I.) du = - \frac{d\varphi(x)r(s)}{ds} ds = - \theta(x)d\omega(s)$$

θ ... relativní úhel zkroucen
 ω ... výsečová souřadnice



Integrace (I.)

$$u(x, s) = -\theta(x)\omega(s) = -\frac{d\varphi}{dx}\omega(s)$$

III. Normálová napětí

- Normálové napětí – vyvoláno silou působící kolmo na plochu prutu

$$\varepsilon_x := \frac{du}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \omega(s) = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} \omega(s)$$

E...modul pružnosti

$$du := -\theta(x)\omega(s)$$

σ_x ... normálové napětí

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

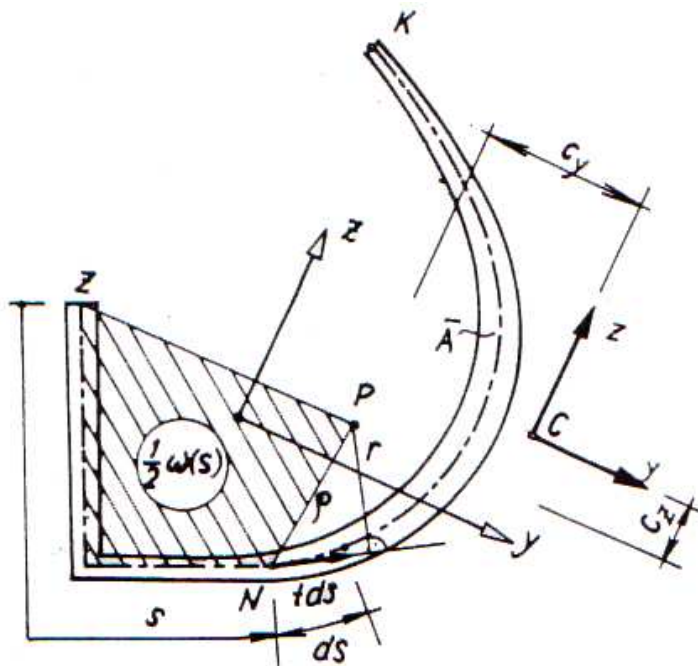
ε_x ... poměrné přetvoření

(II.)=>

$$\sigma_x = -E \frac{d^2\varphi}{dx^2} \omega(s)$$

III. Normálová napětí

- Střed smyku(C) – uvažujeme v bodě C pokud jsou splněny dvě podmínky



- 1 – bodem C budou procházet výslednice vnějších a vnitřních sil, které jsou si rovny
- 2 – momenty vnějších a vnitřních sil ke zvolenému pomocnému pólu P jsou stejné

- ω ...výsečová souřadnice, v bodě kde je rovna 0 => počátek (tenkostěnný průřez může mít nekonečně mnoho těchto počátků)

III. Normálová napětí

Vzájemná poloha C a P je vyjádřena souřadnicemi c_y a c_z

$$Q_z c_y - Q_y c_z = \int_0^{s_k} t(s)r(s)ds = \int_0^{s_k} t(s)d\omega(s)$$

$t(s)$...smykový tok

$$t(z) = t(k) = 0$$

$$Q_z c_y - Q_y c_z = \frac{Q_y}{I_z} \int_0^{s_k} \omega y dA + \frac{Q_z}{I_y} \int_0^{s_k} \omega z dA$$

$$Q_z c_y = \frac{Q_z}{I_y} \iint_A \omega z dA \Rightarrow$$

$$c_y = \frac{I_{\omega y}}{I_y}$$

$$-Q_y c_z = \frac{Q_y}{I_z} \iint_A \omega y dA \Rightarrow$$

$$c_z = -\frac{I_{\omega z}}{I_z}$$

$I_{\omega i}$...výsečový deviační moment setrvačnosti

$$I_{\omega y} := \iint_A \omega z dA = I_y c_y$$

$$I_{\omega z} := \iint_A \omega y dA = -I_z c_z$$

III. Normálová napětí

Statický výsečový moment - záleží na volbě počátku

$$S_{\omega'} = \iint_A \omega' dA$$

$$\omega = \omega'_i - c$$

$$c = -\frac{S_{\omega'}}{A}$$

Požadavky na výsečovou souřadnici ω :

$$S_{\omega} = 0, I_{\omega y} = 0, I_{\omega z} = 0$$

III. Normálová napětí

Požadavky lze splnit v případě, že střed smyku C je totožný s pomocným pólem P (c_y a c_z jsou rovny 0)

$$\sigma_x := -E \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \omega(s)$$

$$N_x := \iint_A \sigma_x dA = -E \frac{d\theta}{dx} \iint_A \omega(s) dA$$

$$M_y := \iint_A \sigma_x z dA = -E \frac{d\theta}{dx} \iint_A \omega(s) z dA$$

$$I_{\omega y} := \iint_A \omega z dA = I_y c_y$$

$$M_z := -\iint_A \sigma_x y dA = E \frac{d\theta}{dx} \iint_A \omega(s) y dA$$

$$I_{\omega z} := \iint_A \omega y dA = -I_z c_z$$

III. Normálová napětí

Bimoment

■ Integrace (II.)

$$B := \iint_A \omega \sigma_x dA = - \iint_A \omega E \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \omega(s) dA \Rightarrow \boxed{B = -EI_\omega \frac{d^2 \varphi}{dx^2}} \quad \text{(III.)}$$

Normálové napětí – v závislosti na bimomentu

$$\text{(I.) } \sigma_x = -E \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \omega \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\sigma_x}{E \omega}$$

$$\text{(II.) } B = -EI_\omega \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{B}{EI_\omega}$$

(I.)=(II.)

$$\boxed{\sigma_x = \frac{B \omega}{I_\omega}}$$

IV. Tečná napětí

${}^2\tau_{xs}$ - druhotné tečné napětí, vzniká pokud je normálové napětí od deplanace po délce prutu proměnlivá

t - smykový tok, důsledek nerovnoměrného normálového napětí

$${}^2\tau_{xs} := \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -E \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \omega$$

$$t(x, s) = {}^2\tau_{xs}(x, s) \delta(s)$$

$$t := \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA = \iint_s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta ds = - \iint_s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta ds$$

IV. Tečná napětí

Statický výsečový moment

$$t(x, s) = \int_0^s E \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \omega \delta ds = E \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \int_0^s \omega \delta ds$$

$$S_{\omega}(s) := \int_0^s dS_{\omega} = \int_0^s \omega \delta ds$$

(V.)=>

$$t(x, s) = ES_{\omega}(s) \frac{d^3 \varphi}{dx^3}$$

IV. Tečná napětí

$$I_{\omega} := \iint_A \omega^2 dA \quad dA := \delta dt \quad \theta(x) := \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Kroutící moment

$$\begin{aligned} M_{\omega} &= \int_0^{s_k} t d\omega = - \int_0^{s_k} \omega dt = \int_0^{s_k} \omega S_{\omega}(s) E \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \\ &= E \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \int_0^{s_k} \omega S_{\omega}(s) = E \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \int_0^{s_k} \omega^2 \delta ds = -EI_{\omega} \frac{d^2 \theta}{dx^2} \end{aligned}$$

(IV.) =>
$$M_{\omega} = -EI_{\omega} \frac{d^2 \theta}{dx^2}$$

IV. Tečná napětí

Kroutící moment - závislost na bimomentu

$$(III.) \quad B = -EI_{\omega} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Rightarrow -\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{B}{EI_{\omega}}$$

$$(IV) \quad M_{\omega} = -EI_{\omega} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \Rightarrow -\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\int M_{\omega}(x)}{EI_{\omega}}$$

$$(III.)=(IV) \quad B = \int M_{\omega}(x) \quad \Rightarrow \quad M_{\omega} = \frac{dB}{dx}$$

IV. Tečná napětí

Smykový tok – závislost na statickém výsečovém momentu

$$(V.) \quad t(s, x) = ES_{\omega}(s) \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \Rightarrow \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = \frac{t(s, x)}{ES_{\omega}(s)}$$

$$(IV.) \quad M_{\omega} = -EI_{\omega} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \Rightarrow \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = -\frac{M_{\omega}}{EI_{\omega}}$$

$$(V.)=(IV.) \quad \frac{t(x, s)}{ES_{\omega}(s)} = -\frac{M_{\omega}}{EI_{\omega}} \Rightarrow \boxed{t(x, s) = -\frac{M_{\omega} S_{\omega}(s)}{I_{\omega}}}$$

V. Přetvoření

Vnější moment přenáší

a) volné kroucení (1M_x) ${}^1\tau_{xs}(x, s)$

b) deplanaci průřezu (${}^2M_x = M_\omega$) ${}^2\tau_{xs}(x, s)$

$$M_x = GI_k \theta - EI_\omega \frac{d^3 \varphi}{dx^3}$$

Pomocný paramtr

$$\lambda^2 := \frac{GI_k}{EI_\omega}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \lambda^2 \theta = \lambda^2 \frac{M_\omega}{EI_k}$$

V. Přetvoření

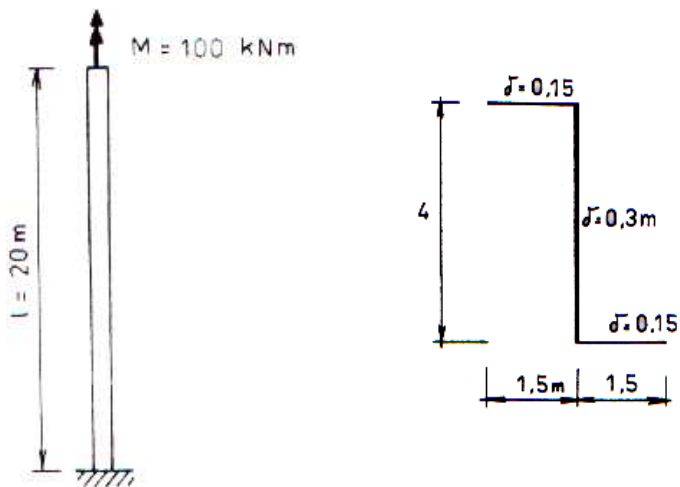
Řešení dif. rovnice

$$\theta(x) = c_1 \sin h\lambda x + c_2 \cosh \lambda x - \frac{\lambda^2}{GI_k} \int_0^x M_x(\xi) F(x - \xi) d\xi$$

Způsob podepření => Integrační konstanty

- Vetknutí $u = 0 \Rightarrow \theta = 0$
- Volný konec $\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = 0$

VI. Příklad



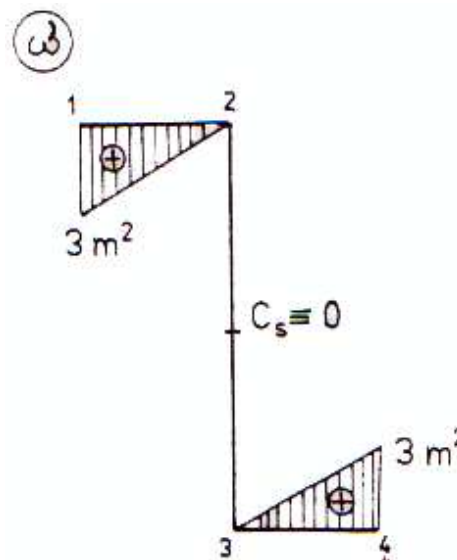
$E=26\text{GPa}$
 $G=10\text{GPa}$

Průřezové charakteristiky

Pomocné výsečové souřadnice

$$\omega'_1 = \omega'_4 = 1,5 * 2 = 3\text{m}^2$$

$$\omega'_2 = \omega'_3 = 0 * 2 = 0\text{m}^2$$



VI. Příklad

Hlavní výsečové souřadnice

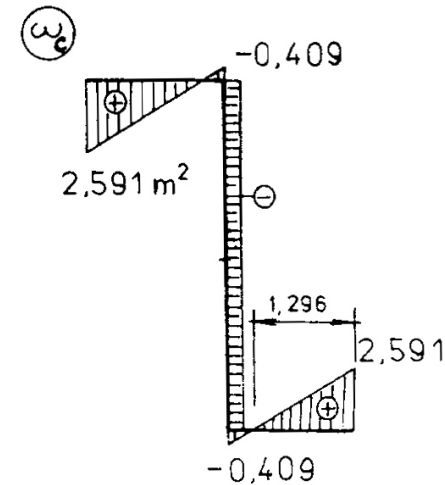
$$S_{\omega'} = \iint_A \omega' dA = \sum \delta_i \frac{\omega'_i l_i}{2} = 0,675 m^2$$

$$c = -\frac{S_{\omega'}}{A} = -0,409 m^2$$

$$\omega_c = \omega'_i - c$$

$$\omega_1 = \omega_4 = 2,591 m^2$$

$$\omega_2 = \omega_3 = -0,409 m^2$$



Výsečový moment setrvačnosti

$$I_{\omega} = \iint_A \omega^2 dA = 1,073 m^6$$

Moment tuhosti

$$I_k = \frac{1}{3} \sum h_i \delta_i^3 = 0,03938 m^4$$

VI. Příklad

Statický moment v jednotlivých průřezech

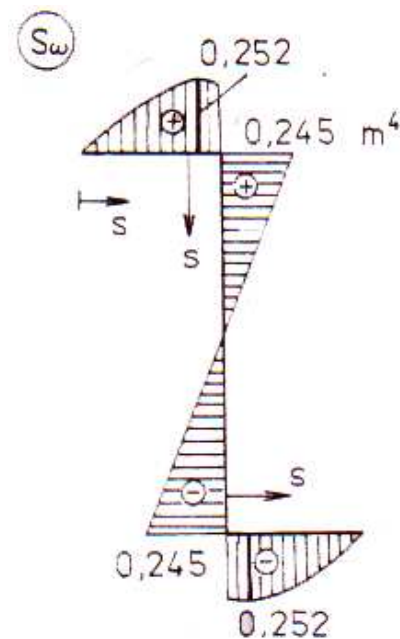
$$S_{\omega i} = \delta_i \frac{\omega_i l_i}{2}$$

$$S_{\omega 1} = -S_{\omega 4} = 0 \text{ m}^4$$

$$S_{\omega 2} = -S_{\omega 3} = 0,245 \text{ m}^4$$

$$s = 1,296 \text{ m}$$

$$S_{\omega a} = -S_{\omega b} = 0,252 \text{ m}^4$$



VI. Příklad

Vnitřní síly

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \lambda^2\theta = \lambda^2 \frac{M_\omega}{EI_k} \quad \lambda^2 := \frac{GI_k}{EI_\omega} \Rightarrow \lambda = 0,1188m^{-1}$$

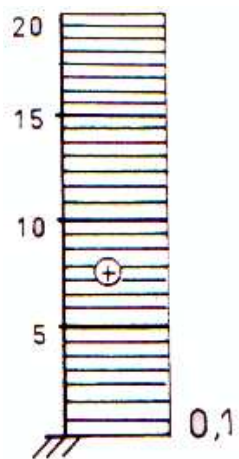
- Vetknutí $u = 0 \Rightarrow \theta(0) = 0 \Rightarrow c_2 = -0,254$
- Volný konec $\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx}(l) = 0 \Rightarrow c_1 = 0,25$

$${}^1M_x(x) = GI_k \theta(x) = GI_k (0,25 \sinh \lambda x - 0,254 \cosh \lambda x) + M$$
$${}^2M_x(x) = -EI_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2} = -EI_\omega \lambda^2 (0,25 \sinh \lambda x - 0,254 \cosh \lambda x)$$
$$B(x) = -EI_\omega \frac{d\theta}{dx} = -EI_\omega \lambda (0,25 \cosh \lambda x - 0,254 \sinh \lambda x)$$

VI. Příklad

Průběhy

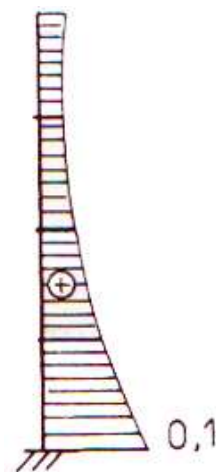
M_x [MNm]



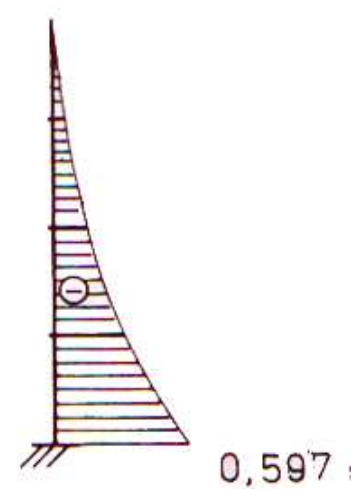
1M_x [MNm]



2M_x [MNm]



B [MNm]



VI. Příklad

Napětí ve vetknutí

Normálové napětí

$$\sigma_{xi} = \frac{B\omega_i}{I_\omega}$$

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x4} = -1,44 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x2} = \sigma_{x3} = 0,23 \text{ MPa}$$

Smykové napětí

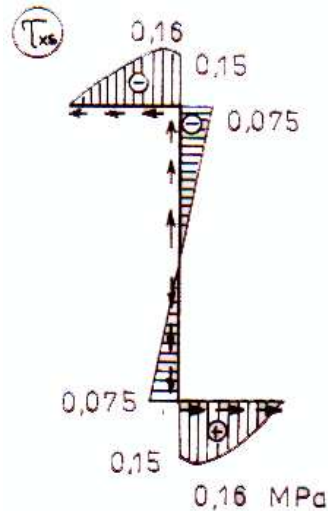
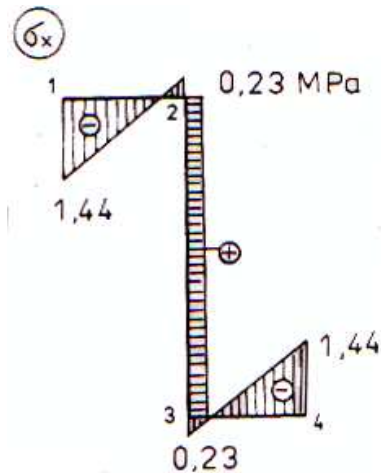
$${}^2\tau_{xs} = -\frac{{}^2M_x S_\omega(s)}{\delta I_\omega}$$

$${}^2\tau_{xs1} = 0$$

$${}^2\tau_{xsa} = -{}^2\tau_{xsb} = -0,156 \text{ MPa}$$

$${}^2\tau_{xs21} = -{}^2\tau_{xs34} = -0,152 \text{ MPa}$$

$${}^2\tau_{xs23} = -{}^2\tau_{xs32} = -0,076 \text{ MPa}$$



VI. Přehled použité literatury

- Šejnoha J., Bittnarová J.: Pružnost, pevnost, plasticita I., ČVUT Praha 1991
 - Bittnarová J., Fajman P., Kalousová M., Šejnoha J.: Pružnost a pevnost 10 – Příklady, ČVUT Praha 1997
 - Vlasov V. Z., Tenkostěnné pružné pruty: Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1962
-

Děkuji za pozornost
