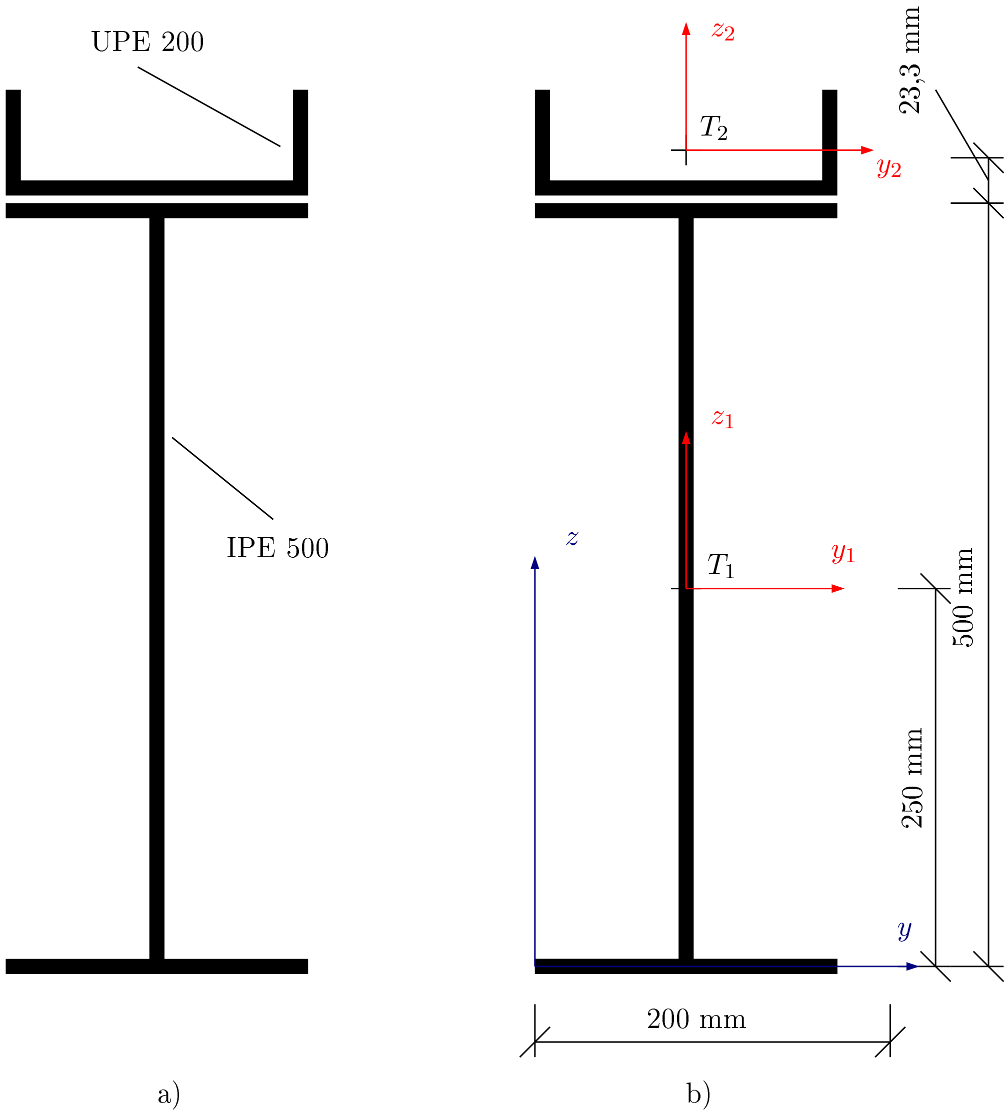
Průřezové charakteristiky - část 2

13. května 2020

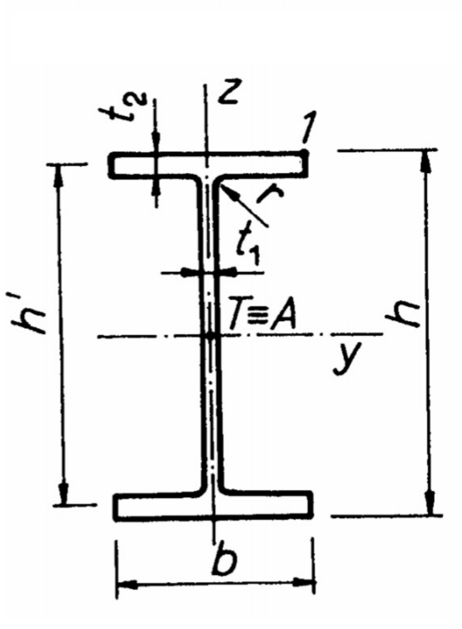
Úkol č.1: Stanovte hlavní centrální momenty setrvačnosti svařence.

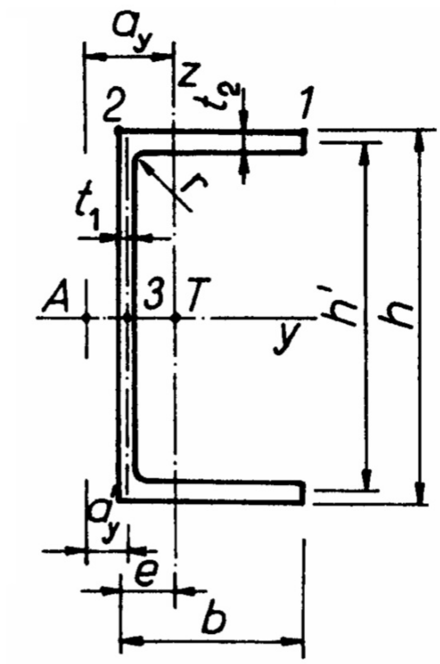


Obrázek 1: a) Zadání, b) Schéma průřezu.

Řešení:

- Začneme okótováním průřezu. Profil IPE budeme značit indexem 1 a profile UPE indexem 2. Z tabulek průřezových charakteristik použijeme pouze pro nás důležité hodnoty. Těmi jsou výška i šířka profilu IPE a vzdálenost těžiště e od okraje průřezu UPE. Pro další postup zavedeme pomocný souřadnicový systém yz.





Obrázek 2: Výňatek z tabulek průřezových charakteristik

- Následně určíme polohu těžiště. Náš průřez je symetrický, čehož můžeme využít při hledání těžiště - to vždy leží na ose symetrie, tedy $y_t = 100$ mm. Pro nalezení z_t použijeme výpočet polohy těžiště pomocí statického momentu k ose y. Určíme souřadnice těžišť obou částí průřezu pomocí tabulek průřezových charakteristik. Z tabulek budeme dále potřebovat plochy jednotlivých profilů A a centrální momenty setrvačnosti k lokálním osám I_y^i a I_z^i (v tabulkách značeny pouze jako I_y a I_z).

	i	y_i [mm]	z_i [mm]	A_i [mm^2]	I_y^i [mm^4]	I_z^i [mm^4]
IPE500	1	100	250	11600	482·10^6	21,4·10^6
UPE200	2	100	523,3	2350	15,4·10^6	1,37·10^6

Tabulka 1: Charakteristiky k lokálním těžišťovým osám a poloha těžiště k pomocným osám y a z.

$$z_t = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{250 \cdot 11600 + 523,3 \cdot 2350}{11600 + 2350} = 296\text{mm} \tag{1}$$

Nyní již známe polohu těžiště, a jelikož je průřez symetrický, jsou těžišťové osy y_c a z_c zároveň hlavními osami(jedna z nich musí být totožná s osou symetrie).

Je potřeba uvědomit si, že **profil UPE je pootočený vůči tabulce průřezových charakteristik!** Zatímco moment setrvačnosti I_y^i je pro profil IPE k vertikální ose, pro profil UPE je k horizontální ose, tzn. $I_y^1 = I_{y_1}^1$, ale $I_y^2 = I_{z_2}^2$

V tuto chvíli již můžeme určit hlavní momenty setrvačnosti:

$$I_{y_c} = I_{y_1}^1 + I_{z_2}^2 + A_1 \cdot (z_1 - z_t)^2 + A_2 \cdot (z_2 - z_t)^2 \tag{2}$$

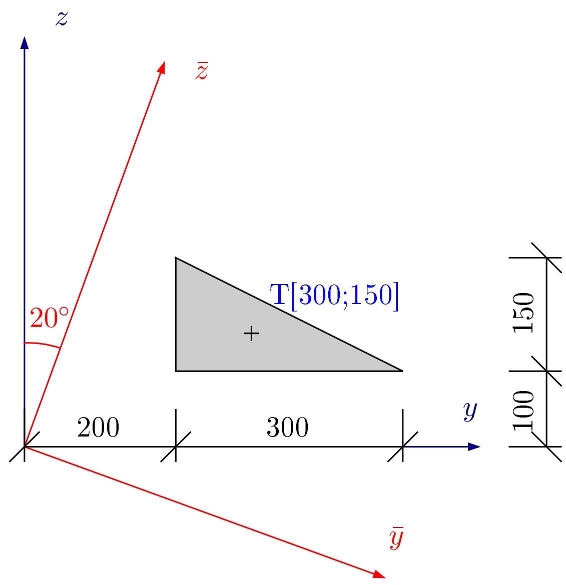
$$I_{y_c} = 482 \cdot 10^6 + 1,37 \cdot 10^6 + 11600 \cdot (250 - 296)^2 + 2350 \cdot (523 - 296)^2 \tag{3}$$

$$I_{y_c} = 629,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = I_{max} \tag{4}$$

$$I_{z_c} = I_{z_1}^1 + I_{y_2}^2 = 21,4 \cdot 10^6 + 15,4 \cdot 10^6 \tag{5}$$

$$I_{z_c} = 36,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = I_{min} \tag{6}$$

Úkol č.2: Spočítejte axiální momenty setrvačnosti a deviační moment trojúhelníku k souřadnicový osám $\bar{y}$ a $\bar{z}$.



Obrázek 3: Schéma úlohy

Řešení:

- Poloha těžiště trojúhelníku v souřadnicovému systému yz: $y_t = 300$ mm, $z_t = 150$ mm. Plocha trojúhelníku $A = 22500$ mm^2. Nejdříve určíme deviační a axiální momenty k souřadnicovému systému yz, včetně jejich Steinerových doplňků:

$$I_y = \frac{1}{36}bh^3 + Az_t^2 = \frac{1}{36} \cdot 300 \cdot 150^3 + 22500 \cdot 150^2 = 534,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{7}$$

$$I_z = \frac{1}{36}b^3h + Ay_t^2 = \frac{1}{36} \cdot 300^3 \cdot 150 + 22500 \cdot 300^2 = 2137,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{8}$$

$$D_{yz} = -\frac{1}{72}b^2h^2 + Ay_tz_t = \frac{1}{36} \cdot 300 \cdot 150^3 + 22500 \cdot 300 \cdot 150 = 984,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

- Nyní můžeme určit momenty setrvačnosti k pootočeným souřadnicovým osám. V rovnicích (11)-(13) je pootočení α kladné podle pravidla pravé ruky - tedy proti směru hodinových ručiček. Z toho plyne, že pootočení $\alpha = -20°$.

$$I_{\bar{y}} = I_y \cos(\alpha)^2 + I_z \sin(\alpha)^2 - D_{yz} \sin(2\alpha) = 1354,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{11}$$

$$I_{\bar{z}} = I_z \cos(\alpha)^2 + I_y \sin(\alpha)^2 + D_{yz} \sin(2\alpha) = 1317,2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{12}$$

$$D_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin(2\alpha) + D_{yz} \cos(2\alpha) = 1269,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{13}$$

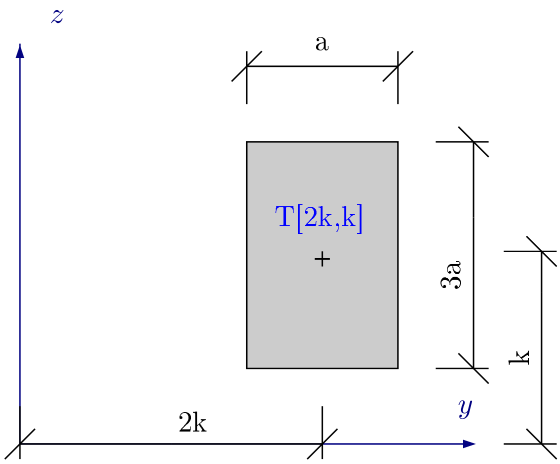
- Výsledky bychom mohli zkontrolovat například posunutím souřadnicových os do těžiště průřezu a jejich otočením o 20°. Momenty setrvačnosti k takovýmto osám následně musí odpovídat "tabulkovým"hodnotám momentů setrvačnosti k těžišťovým osám trojúhelníku. Tento postup je však stejně náročný, jako bylo řešení celé úlohy.

  Ke kontrole pootočení můžeme alespoň použít znalost, že polární moment setrvačnosti (součet axiálních momentů) $I_0 = I_y + I_z$ je nezávislý na pootočení souřadnicových os:

$$
\begin{aligned}
I_y + I_z &= I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}} && (14) \\
534.4 \cdot 10^6 + 2137,5 \cdot 10^6 &= 1354,7 \cdot 10^6 + 1317,2 \cdot 10^6 && (15) \\
2671,9 &= 2671,9 && (16)
\end{aligned}
$$

Kontrola proběhla úspěšně.

Úkol č.3: Vyjádřete parametry zadání a a k v závislosti na zadaných momentech setrvačnosti obrazce I_y a I_z. Úlohu řešte obecně bez čísel.



Obrázek 4: Schéma úlohy

Motivace: Posouváním průřezu vůči souřadnicovým osám yz měníme jeho momenty setrvačnosti i deviační moment k těmto osám. Volbou vhodných rozměrů průřezu a jeho umístěním můžeme získat požadované momenty setrvačnosti a tím i momentovou únosnost. Podobnou úlohou tohoto typu je např. návrh příhradového vazníku, kde musíme volit průřezy horního i dolního pasu a zároveň výšku vazníku.

Řešení:

- V tomto úkolu budeme obecně řešit inverzní úlohu. Abychom mohli nalézt 2 parametry a a k, potřebujeme sestavit 2 nezávislé rovnice, které popisují zadání. (Pokud by šlo sestavit méně než 2 rovnice, úloha by měla nekonečně mnoho řešení, pokud by naopak šlo sestavit více než 2 nezávislé rovnice, problém by neměl řešení.) V tomto případě můžeme použít rovnice pro axiální momenty setrvačnosti obdélníka se Steinerovým doplňkem (ale například rovnice pro polární moment setrvačnosti je již lineární kombinací rovnic pro axiální momenty setrvačnosti). Vyjádříme 2 rovnice pro 2 neznámé a a k:

$$I_y = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 3a^2 \cdot k^2 \tag{17}$$

$$I_z = \frac{a^3 \cdot 3a}{12} + 3a^2 \cdot 4k^2 \tag{18}$$

Soustavu nyní můžeme řešit libovolným způsobem. Např. upravíme soustavu (19) = (18) - 4·(17):

$$I_z - 4I_y = \frac{3a^4}{12} - 4 \cdot \frac{27a^4}{12} = -\frac{35a^4}{4} \tag{19}$$

$$a(I_y, I_z) = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot (4I_y - I_z)}{35}} \tag{20}$$

Při znalosti parametru a můžeme získat parametr k z rovnice (17):

$$k(I_y, I_z) = \sqrt{\frac{I_y - \frac{9a^4}{4}}{3a^2}} \tag{21}$$

Rovnice (20) a (21) popisují geometrii naší úlohy v závislosti na momentech setrvačnosti I_y a I_z. Podle definičního oboru funkce (20) můžeme říci, že úloha je řešitelná pouze pokud $4I_y - I_z \geq 0$.