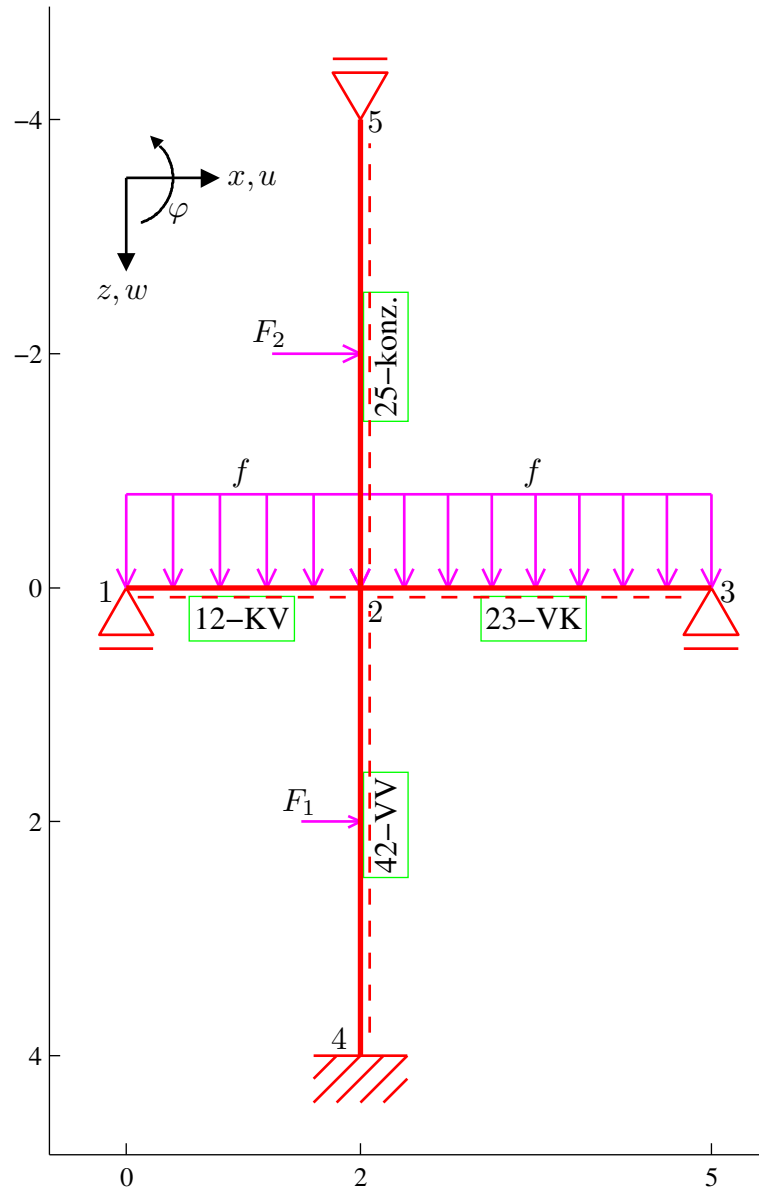


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška). Prut "12" a prut "23" jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 30$ GPa. Prut "42" a prut "25" jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 21$ GPa. Konstrukce je zatížena silou $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 3$ kN a rovnoměrným spojitým zatížením $f = 10$ kN/m. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

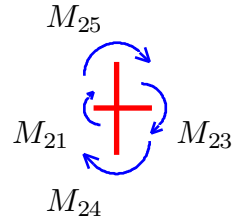
Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následu-

jících identit:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = u_3 \\ w_5 &= w_2 = w_4 = 0 \end{aligned}$$

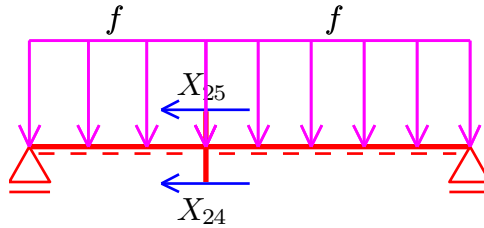
Za základní neznámé tedy zvolíme φ_2 , u_1 .
Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy



$$M_{21} + M_{23} + M_{24} + M_{25} = 0$$

- Patrová podmínka rovnováhy



$$X_{24} + X_{25} = 0 + 0$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-KV (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{12}^l &= -\frac{3 L_{12} f_z}{8} - \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\ &= -\frac{15}{2} - 1.013 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ M_{12} &= 0 + 0 \\ Z_{21}^l &= -\frac{5 L_{12} f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\ &= -\frac{25}{2} + 1.013 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ M_{21} &= -\frac{L_{12}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4} \\ &= -5 + 2.025 \cdot 10^4 \varphi_2 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\ Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\ X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\ Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2 \end{aligned}$$

Prut 23-VK (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{23}^l &= -\frac{5 L_{23} f_z}{8} - \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\ &= -\frac{75}{4} - 4500 \varphi_2 \\ M_{23} &= \frac{L_{23}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4} \\ &= \frac{45}{4} + 1.35 \cdot 10^4 \varphi_2 \\ Z_{32}^l &= -\frac{3 L_{23} f_z}{8} + \frac{3 k_{23} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_2^l - 2 w_3^l}{L_{23}} \right)}{4 L_{23}} \\ &= -\frac{45}{4} + 4500 \varphi_2 \\ M_{32} &= 0 + 0 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\ Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\ X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\ Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3 \end{aligned}$$

Prut 42-VV ($k_{42} = 2E_{42}I_{42}/L_{42} = 4725 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{42}^l &= \frac{b_{42} F_{1z} \left(\frac{a_{42}(a_{42}-b_{42})}{L_{42}^2} - 1 \right)}{L_{42}} - \frac{k_{42} \left(3\varphi_4 + 3\varphi_2 - \frac{6w_4^l - 6w_2^l}{L_{42}} \right)}{L_{42}} \\
&= -1 - 3544\varphi_2 - 1772w_2^l \\
M_{42} &= \frac{a_{42} b_{42}^2 F_{1z}}{L_{42}^2} + k_{42} \left(2\varphi_4 + \varphi_2 - \frac{3w_4^l - 3w_2^l}{L_{42}} \right) \\
&= 1 + 4725\varphi_2 + 3544w_2^l \\
Z_{24}^l &= -\frac{a_{42} F_{1z} \left(\frac{b_{42}(a_{42}-b_{42})}{L_{42}^2} + 1 \right)}{L_{42}} + \frac{k_{42} \left(3\varphi_4 + 3\varphi_2 - \frac{6w_4^l - 6w_2^l}{L_{42}} \right)}{L_{42}} \\
&= -1 + 3544\varphi_2 + 1772w_2^l \\
M_{24} &= -\frac{a_{42}^2 b_{42} F_{1z}}{L_{42}^2} + k_{42} \left(\varphi_4 + 2\varphi_2 - \frac{3w_4^l - 3w_2^l}{L_{42}} \right) \\
&= -1 + 9450\varphi_2 + 3544w_2^l
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{42} &= Z_{42}^l & u_4^l &= -w_4 \\
Z_{42} &= -X_{42}^l & w_4^l &= u_4 \\
X_{24} &= Z_{24}^l & u_2^l &= -w_2 \\
Z_{24} &= -X_{24}^l & w_2^l &= u_2
\end{aligned}$$

Prut 25-konz. (z hlediska ohybu staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{25}^l &= -F_{2z} + 0 \\
&= -3 + 0 \\
M_{25} &= a_{25} F_{2z} + 0 \\
&= 6 + 0 \\
Z_{52}^l &= 0 + 0 \\
M_{52} &= 0 + 0
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{25} &= Z_{25}^l & u_2^l &= -w_2 \\
Z_{25} &= -X_{25}^l & w_2^l &= u_2 \\
X_{52} &= Z_{52}^l & u_5^l &= -w_5 \\
Z_{52} &= -X_{52}^l & w_5^l &= u_5
\end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
4.32 \cdot 10^4 \varphi_2 + 3544 u_1 + 11.25 &= 0 \\
3544 \varphi_2 + 1772 u_1 - 4 &= 0
\end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\varphi_2 = -0.0005331 \text{ rad}$$

$$u_1 = 0.003324 \text{ m}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Pozn.: Vzhledem k tomu, že jsme pro výpočet použili ZDM, nemůžeme normálovou sílu ve sloupu přímo určit. Řešení převedeme na problém staticky neurčitého tahu a tlaku, tj. koncové síly určíme jako $X_{42}^l = X_{52}^l = -(Z_{21}^l + Z_{23}^l) / 2$.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -2.103 \text{ kN} \\ M_{12} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= -17.897 \text{ kN} \\ M_{21} &= -15.794 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{23}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -16.351 \text{ kN} \\ M_{23} &= 4.054 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -13.649 \text{ kN} \\ M_{32} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 42:

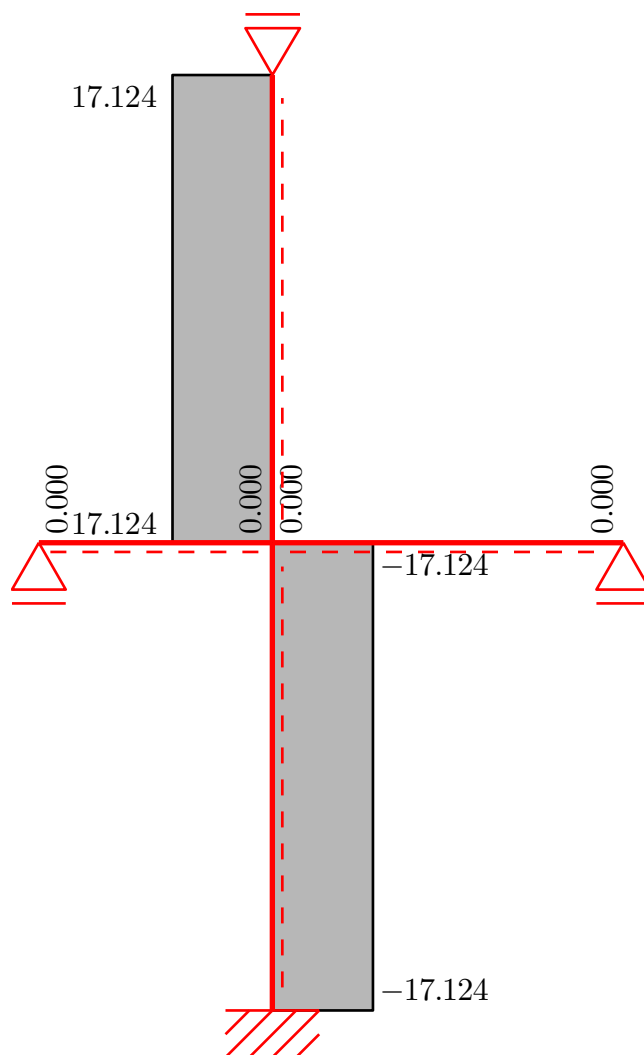
$$\begin{aligned} X_{42}^l &= 17.124 \text{ kN} \\ Z_{42}^l &= -5.000 \text{ kN} \\ M_{42} &= 10.259 \text{ kNm} \\ X_{24}^l &= -17.124 \text{ kN} \\ Z_{24}^l &= 3.000 \text{ kN} \\ M_{24} &= 5.741 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 25:

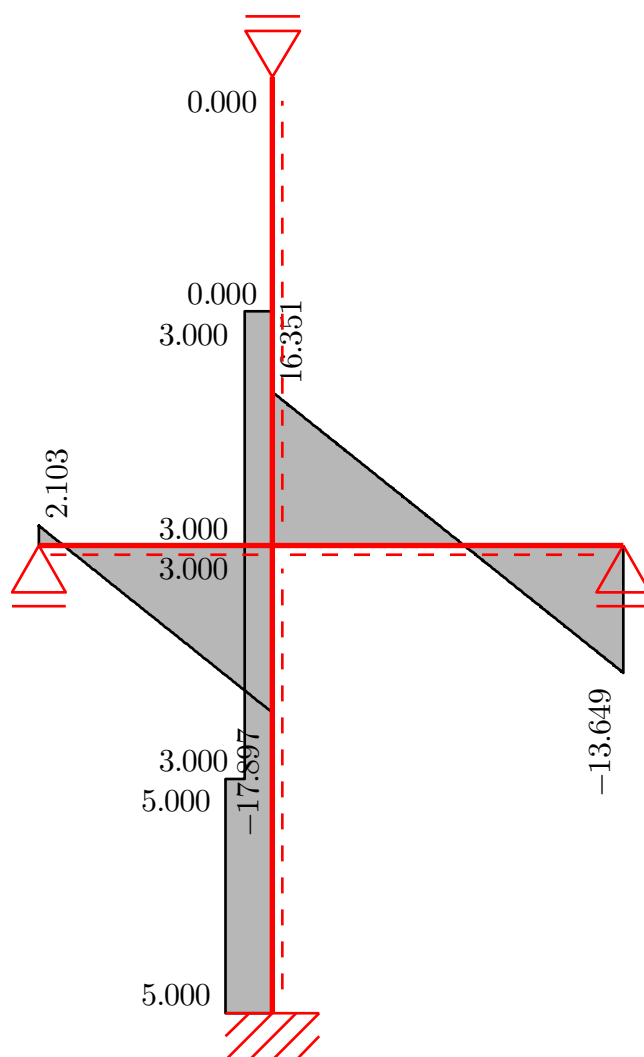
$$\begin{aligned} X_{25}^l &= -17.124 \text{ kN} \\ Z_{25}^l &= -3.000 \text{ kN} \\ M_{25} &= 6.000 \text{ kNm} \\ X_{52}^l &= 17.124 \text{ kN} \\ Z_{52}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ M_{52} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

