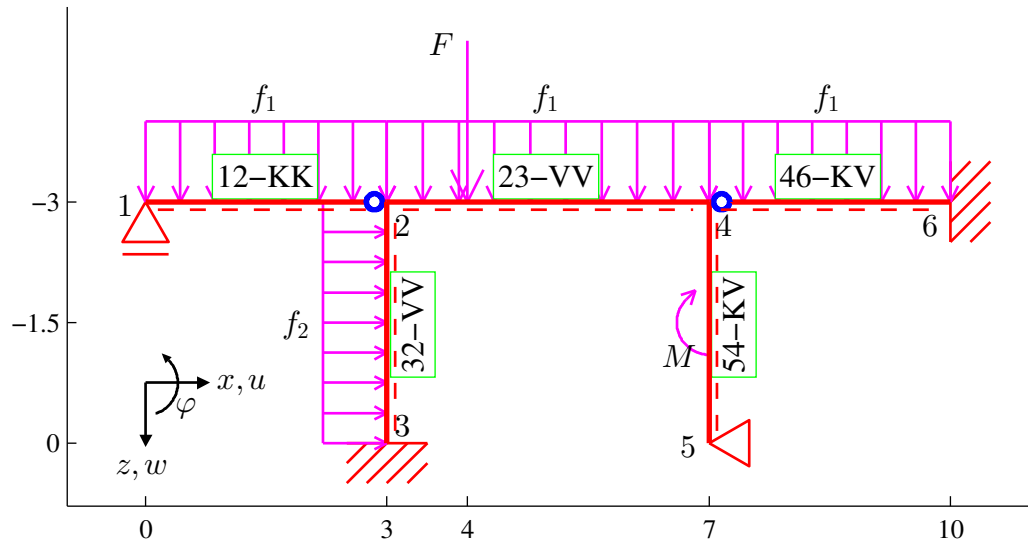


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 15 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 10 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F = 10 \text{ kN}$, momentem $M = 15 \text{ kNm}$, rovnoměrným spojitým zatížením $f_1 = 5 \text{ kN/m}$ a $f_2 = 4 \text{ kN/m}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = u_4 = u_6 = 0 \\ w_2 &= w_3 = 0 \\ w_4 &= w_5 = 0 \end{aligned}$$

Za základní neznámé tedy zvolíme φ_2, φ_4 .
Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentové podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned} M_{23} + M_{24} &= 0 & \begin{matrix} \curvearrowright M_{24} \\ \curvearrowleft M_{23} \end{matrix} \\ M_{42} + M_{45} &= 0 & \begin{matrix} \curvearrowright M_{42} \\ \curvearrowleft M_{45} \end{matrix} \end{aligned}$$

Koncové momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-KK (staticky určitá část konstrukce)

- Koncové momenty:

$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = 0$$

Prut 32-VV ($k_{32} = 2E_{32}I_{32}/L_{32} = 2250 \text{ kNm}$):

- Koncové momenty:

$$\begin{aligned} M_{32} &= \frac{L_{32}^2 f_{2z}}{12} + k_{32} \left(2\varphi_3 + \varphi_2 - \frac{3u_3 - 3u_2}{L_{32}} \right) \\ &= 3 + 2250 \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{23} &= -\frac{L_{32}^2 f_{2z}}{12} + k_{32} \left(\varphi_3 + 2\varphi_2 - \frac{3u_3 - 3u_2}{L_{32}} \right) \\ &= -3 + 4500 \varphi_2 \end{aligned}$$

Prut 23-VV ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 1687 \text{ kNm}$):

- Koncové momenty:

$$\begin{aligned} M_{24} &= \frac{a_{24} b_{24}^2 F_z}{L_{24}^2} + \frac{L_{24}^2 f_{1z}}{12} + k_{24} \left(2\varphi_2 + \varphi_4 - \frac{3w_2 - 3w_4}{L_{24}} \right) \\ &= \frac{45}{8} + \frac{20}{3} + 3375 \varphi_2 + 1688 \varphi_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{42} &= -\frac{a_{24}^2 b_{24} F_z}{L_{24}^2} - \frac{L_{24}^2 f_{1z}}{12} + k_{24} \left(\varphi_2 + 2\varphi_4 - \frac{3w_2 - 3w_4}{L_{24}} \right) \\ &= -\frac{15}{8} - \frac{20}{3} + 1688 \varphi_2 + 3375 \varphi_4 \end{aligned}$$

Prut 54-KV ($k_{54} = 2E_{54}I_{54}/L_{54} = 2250 \text{ kNm}$):

- Koncové momenty:

$$M_{54} = 0 + 0$$

$$\begin{aligned} M_{45} &= \frac{M (L_{54}^2 - 3a_{54}^2)}{2L_{54}^2} + \frac{3k_{54} \left(2\varphi_4 - \frac{2u_5 - 2u_4}{L_{54}} \right)}{4} \\ &= -\frac{15}{8} + 3375 \varphi_4 \end{aligned}$$

Prut 46-KV ($k_{46} = 2E_{46}I_{46}/L_{46} = 2250 \text{ kNm}$):

- Koncové momenty:

$$M_{46} = 0 + 0$$

$$\begin{aligned} M_{64} &= -\frac{L_{46}^2 f_{1z}}{8} + \frac{3k_{46} \left(2\varphi_6 - \frac{2w_4 - 2w_6}{L_{46}} \right)}{4} \\ &= -\frac{45}{8} + 0 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových momentů do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$7875 \varphi_2 + 1688 \varphi_4 + 9.292 = 0$$

$$1688 \varphi_2 + 6750 \varphi_4 - 10.42 = 0$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\varphi_2 = -0.001596 \text{ rad}$$

$$\varphi_4 = 0.001942 \text{ rad}$$

Po dosazení vypočtených pootočení zjistíme koncové momenty na prutech. Koncové příčné síly lze dopočítat pomocí Schwedlerovy věty nebo z podmínek rovnováhy na jednotlivých prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12} &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{12} &= -7.500 \text{ kN} \\ M_{12} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{21} &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{21} &= -7.500 \text{ kN} \\ M_{21} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 32:

$$\begin{aligned} X_{32} &= 26.376 \text{ kN} \\ Z_{32} &= -2.409 \text{ kN} \\ M_{32} &= -0.591 \text{ kNm} \\ X_{23} &= -26.376 \text{ kN} \\ Z_{23} &= -9.591 \text{ kN} \\ M_{23} &= -10.182 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{24} &= 9.591 \text{ kN} \\ Z_{24} &= -18.876 \text{ kN} \\ M_{24} &= 10.182 \text{ kNm} \\ X_{42} &= -9.591 \text{ kN} \\ Z_{42} &= -11.124 \text{ kN} \\ M_{42} &= -4.680 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 54:

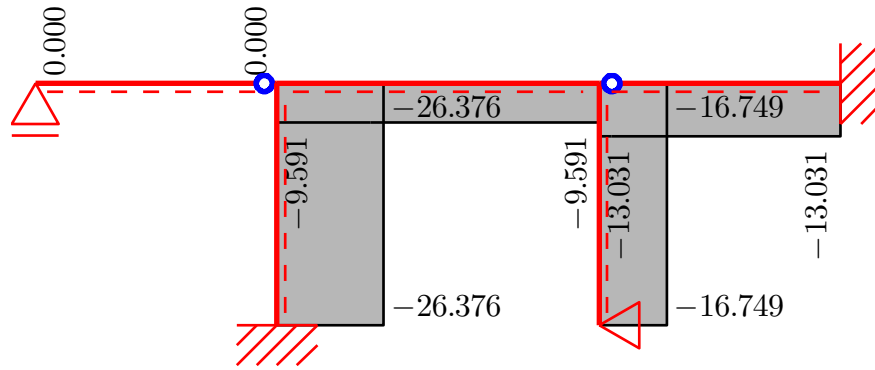
$$\begin{aligned} X_{54} &= 16.749 \text{ kN} \\ Z_{54} &= 3.440 \text{ kN} \\ M_{54} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{45} &= -16.749 \text{ kN} \\ Z_{45} &= -3.440 \text{ kN} \\ M_{45} &= 4.680 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 46:

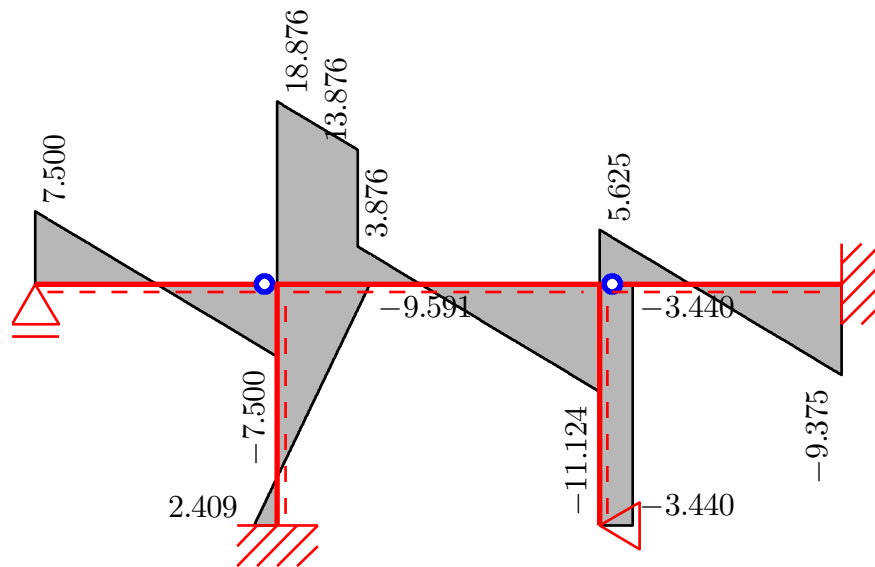
$$\begin{aligned} X_{46} &= 13.031 \text{ kN} \\ Z_{46} &= -5.625 \text{ kN} \\ M_{46} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{64} &= -13.031 \text{ kN} \\ Z_{64} &= -9.375 \text{ kN} \\ M_{64} &= -5.625 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

