

Vlastní kmitání železobetonových nosníků

Ondřej Šupčík





Motivace

Vlastní funkce nosníku $\leq L, E, I, A, \rho \dots$

Pokud znám rozměry a vlastní frekvenci \Rightarrow

\Rightarrow lze zjistit ohybovou tuhost EI a tedy i poškození konstrukce

V této práci se zabývám výpočtem

- 1) vlastních frekvencí : Analyticky, Deformační metodou
- 2) Vlastními tvary: Deformační metodou.



Motivace

Vlastní funkce nosníku $\leq L, E, I, A, \rho \dots$

Pokud znám rozměry a vlastní frekvenci \Rightarrow

\Rightarrow lze zjistit ohybovou tuhost EI a tedy i poškození konstrukce

V této práci se zabývám výpočtem

- 1) vlastních frekvencí : Analyticky, Deformační metodou
- 2) Vlastními tvary: Deformační metodou.

$$\kappa = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

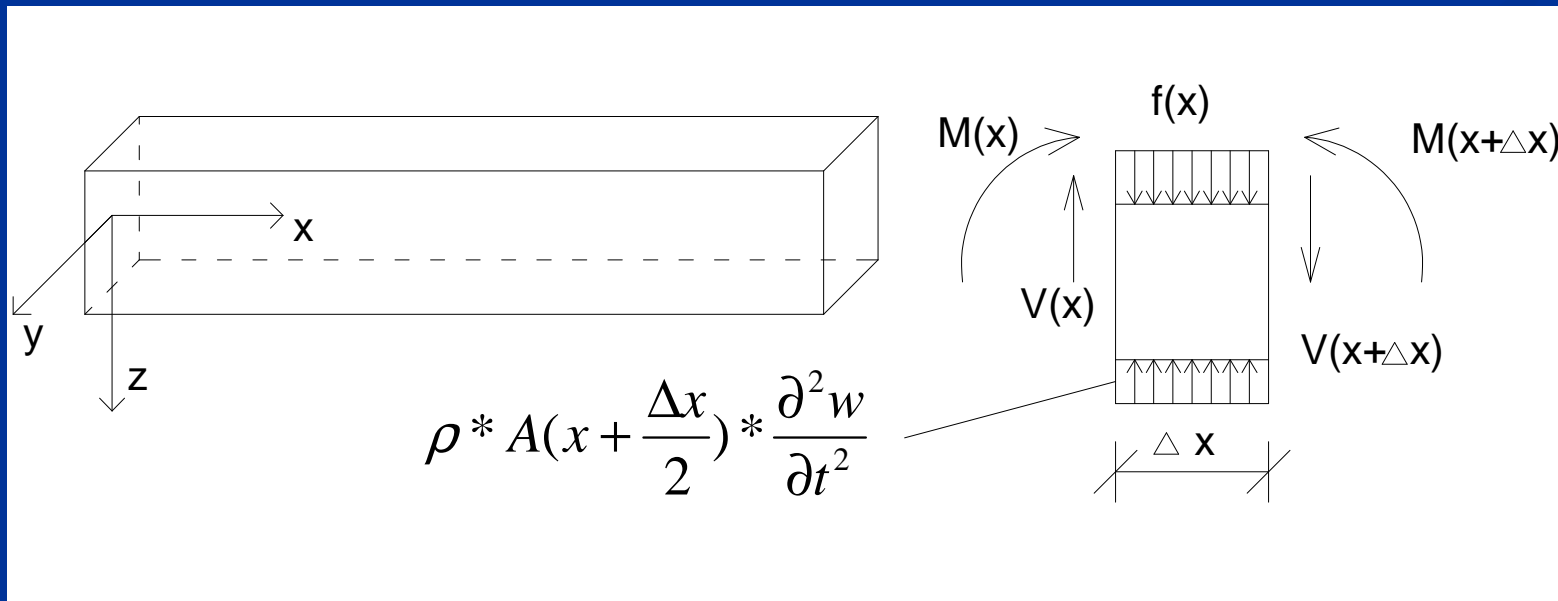


Analytické řešení

Předpoklady – prut reprezentován střednicí

- Bernoulliho- Navierova hypotéza

- malé deformace $\kappa \approx -\frac{d^2 w(x)}{dx^2}$





Podmínky rovnováhy elementu - V

Limitní přechod a sloučení:

$$\frac{-\partial^2 (EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2})}{\partial x^2} + f(x,t) - \mu(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Okrajové podmínky prostě podepřeného nosníku:

$$w''(0) = w''(L) = w(0) = w(L) = 0$$



Pro výpočet vlastních čísel položíme:

$$f(x, t) = 0$$

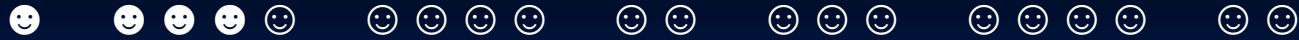
$$w(x, t) = w_0(x) \sin(\omega_0 t)$$

Po úpravě:

$$\sin(\omega_0 t) \left(EI \frac{\partial^4 w_0(x)}{\partial x^4} - \mu \omega_0^2 w_0(x) \right) = 0$$

↓

$$EI \frac{\partial^4 w_0(x)}{\partial x^4} - \mu \omega_0^2 w_0(x) = 0$$



Pro výpočet vlastních čísel položíme:

$$f(x, t) = 0$$

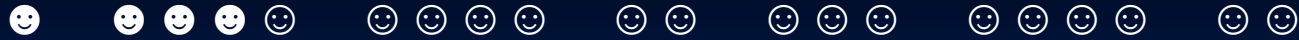
$$w(x, t) = w_0(x) \sin(\omega_0 t)$$

Po úpravě:

$$\sin(\omega_0 t) \left(EI \frac{\partial^4 w_0(x)}{\partial x^4} - \mu \omega_0^2 w_0(x) \right) = 0$$

↓

$$EI \frac{\partial^4 w_0(x)}{\partial x^4} - \mu \omega_0^2 w_0(x) = 0$$



Pro výpočet vlastních čísel položíme:

$$f(x, t) = 0$$

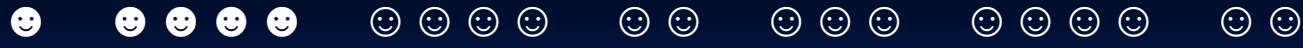
$$w(x, t) = w_0(x) \sin(\omega_0 t)$$

Po úpravě:

$$\sin(\omega_0 t) \left(EI \frac{\partial^4 w_0(x)}{\partial x^4} - \mu \omega_0^2 w_0(x) \right) = 0$$



$$EI \frac{\partial^4 w_0(x)}{\partial x^4} - \mu \omega_0^2 w_0(x) = 0$$



Obecné řešení:

$$w_0(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) + c_3 \sin(\lambda x) + c_4 \cos(\lambda x)$$

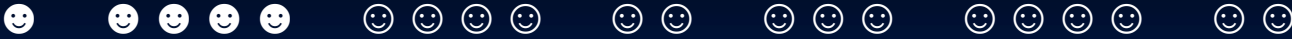
$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega_0^2}{EI}} \quad + \text{okrajové podmínky}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det. matice = 0 aby bylo možné nalézt netriviální řešení

Pak:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi^2}{L^2} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi}{2L^2}$$



Obecné řešení:

$$w_0(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) + c_3 \sin(\lambda x) + c_4 \cos(\lambda x)$$

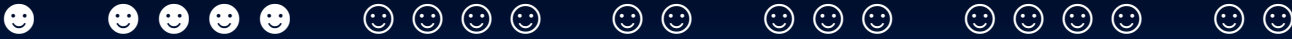
$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega_0^2}{EI}} \quad + \text{okrajové podmínky}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det. matice = 0 aby bylo možné nalézt netriviální řešení

Pak:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi^2}{L^2} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi}{2L^2}$$



Obecné řešení:

$$w_0(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) + c_3 \sin(\lambda x) + c_4 \cos(\lambda x)$$

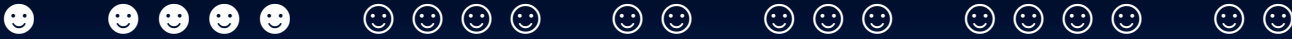
$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega_0^2}{EI}} \quad + \text{okrajové podmínky}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det. matice = 0 aby bylo možné nalézt netriviální řešení

Pak:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi^2}{L^2} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi}{2L^2}$$



Obecné řešení:

$$w_0(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) + c_3 \sin(\lambda x) + c_4 \cos(\lambda x)$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega_0^2}{EI}} \quad + \text{okrajové podmínky}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det. matice = 0 aby bylo možné nalézt netriviální řešení

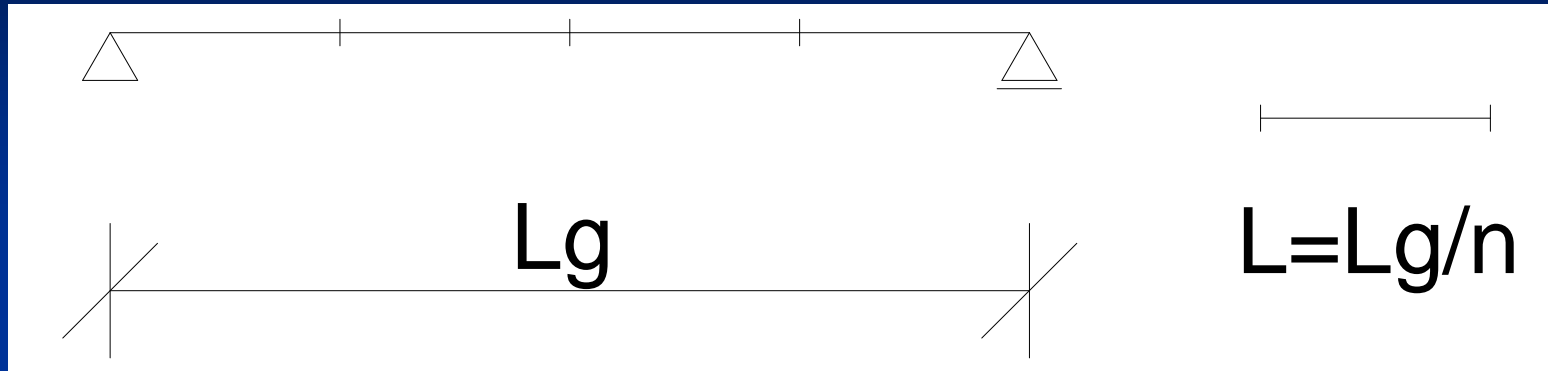
Pak:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi^2}{L^2} = 2\pi f \quad \Rightarrow$$

$$f = \frac{\sqrt{\frac{EI}{\mu}} j^2 \pi}{2L^2}$$

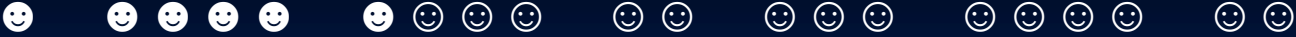


Deformační metoda

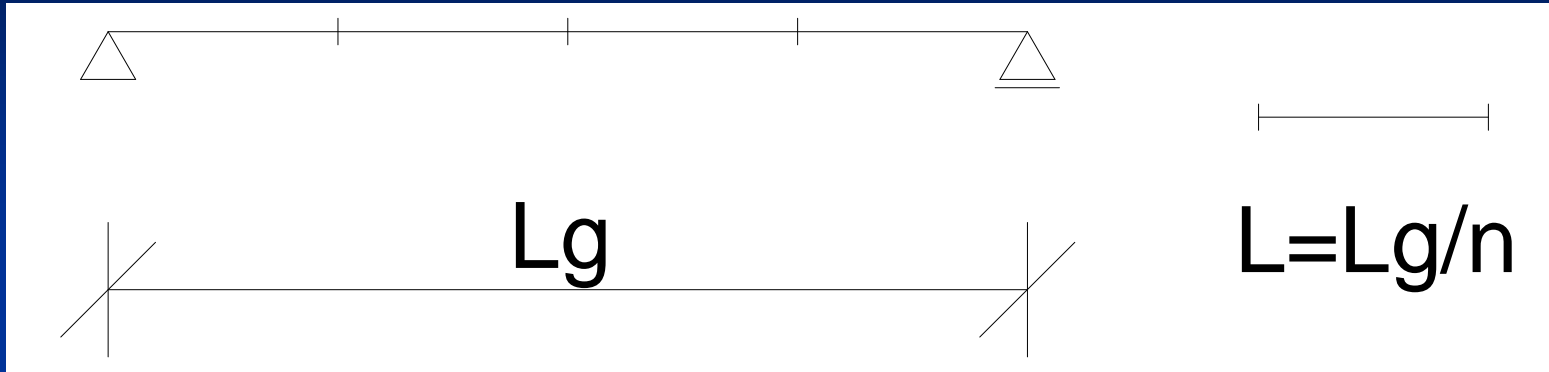


Řešení prvků postupně pomocí dif. rce ohyb. čáry při použití okrajových podmínek na okrajích prvku $\varphi_L, \varphi_P, w_L, w_P$

$$w_0(x) = \varphi_L \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{2x^2}{L} + x \right) + w_L \left(\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) + \\ + \varphi_P \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L} \right) + w_P \left(-\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right)$$

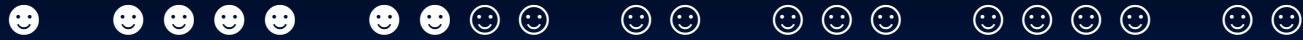


Deformační metoda



Řešení prvků postupně pomocí dif. rce ohyb. čáry při použití okrajových podmínek na okrajích prvku $\varphi_L, \varphi_P, w_L, w_P$

$$w_0(x) = \varphi_L \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{2x^2}{L} + x \right) + w_L \left(\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) + \\ + \varphi_P \left(-\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^2}{L} \right) + w_P \left(-\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right)$$



Vyjádření momentů a posouvajících sil na okrajích:

$$\begin{bmatrix} M_{12}^e \\ Z_{12}^e \\ M_{21}^e \\ Z_{21}^e \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/L & -3 & L & 3 \\ -3 & 6/L & -3 & -6/L \\ L & -3 & 2L & 3 \\ 3 & -6/L & 3 & -6/L \end{bmatrix}}_{\text{Matice tuhosti prvku K}} \begin{bmatrix} \varphi_L \\ w_L \\ \varphi_P \\ w_P \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti prvku K

Celkovou maticí tuhosti K_g získám složením matic tuhostí prvků pomocí vztahů:

$$\varphi_{P(i)} = \varphi_{L(i+1)}$$

$$w_{P(i)} = w_{L(i+1)}$$



Vyjádření momentů a posouvajících sil na okrajích:

$$\begin{bmatrix} M_{12}^e \\ Z_{12}^e \\ M_{21}^e \\ Z_{21}^e \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/L & -3 & L & 3 \\ -3 & 6/L & -3 & -6/L \\ L & -3 & 2L & 3 \\ 3 & -6/L & 3 & -6/L \end{bmatrix}}_{\text{Matice tuhosti prvku K}} \begin{bmatrix} \varphi_L \\ w_L \\ \varphi_P \\ w_P \end{bmatrix}$$

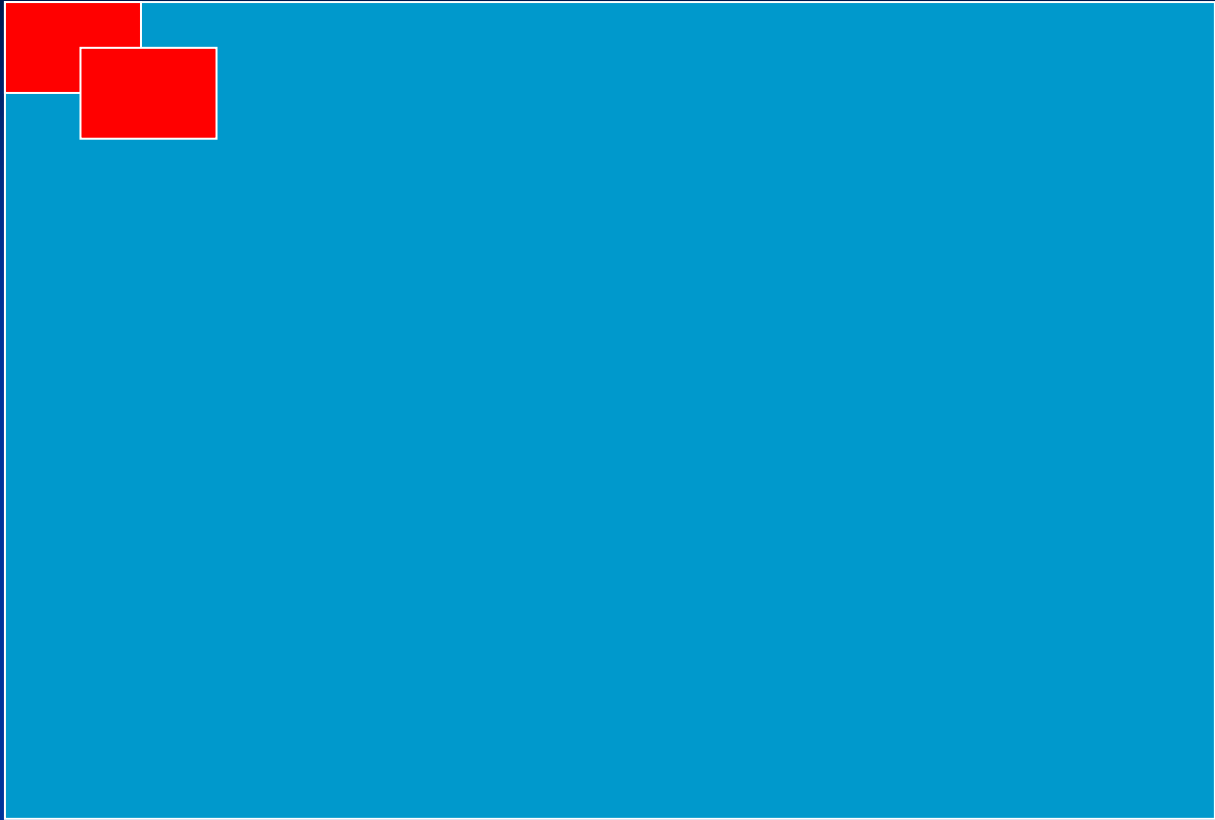
Matice tuhosti prvku K

Celkovou matici tuhosti K_g získám složením matic tuhostí prvků pomocí vztahů:

$$\varphi_{P(i)} = \varphi_{L(i+1)}$$

$$w_{P(i)} = w_{L(i+1)}$$







Zatížení způsobené setrvačnými silami:

$$f_a(x) = -\omega_0^2 \mu w_0(x)$$

Tímto zatížením zatížím dílek, využiji okrajových podmínek: $w_0(0) = w_0(L) = w_0'(0) = w_0'(L) = 0$ a sestavím opět rovnici v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} M_{12}^e \\ Z_{12}^e \\ M_{21}^e \\ Z_{21}^e \end{bmatrix} = \omega_0^2 \begin{bmatrix} \frac{L^3 \mu}{105} & \frac{-11L^2 \mu}{210} & \frac{-L^3 \mu}{140} & \frac{-13L^2 \mu}{420} \\ \frac{-11L^2 \mu}{210} & \frac{13L \mu}{35} & \frac{13L \mu}{420} & \frac{9L \mu}{70} \\ \frac{-L^3 \mu}{140} & \frac{13L \mu}{420} & \frac{L^3 \mu}{105} & \frac{11L^2 \mu}{210} \\ \frac{13L^2 \mu}{420} & \frac{9L \mu}{70} & \frac{11L^2 \mu}{210} & \frac{13L \mu}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_L \\ w_L \\ \varphi_P \\ w_P \end{bmatrix}$$



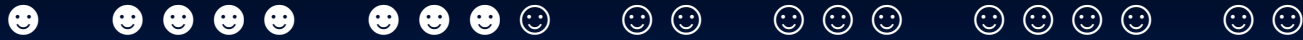
Zatížení způsobené setrvačnými silami:

$$f_a(x) = -\omega_0^2 \mu w_0(x)$$

Tímto zatížením zatížím dílek, využiji okrajových podmínek: $w_0(0) = w_0(L) = w_0'(0) = w_0'(L) = 0$

a sestavím opět rovnici v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} M_{12}^e \\ Z_{12}^e \\ M_{21}^e \\ Z_{21}^e \end{bmatrix} = \omega_0^2 \begin{bmatrix} \frac{L^3 \mu}{105} & \frac{-11L^2 \mu}{210} & \frac{-L^3 \mu}{140} & \frac{-13L^2 \mu}{420} \\ \frac{-11L^2 \mu}{210} & \frac{13L \mu}{35} & \frac{13L \mu}{420} & \frac{9L \mu}{70} \\ \frac{-L^3 \mu}{140} & \frac{13L \mu}{420} & \frac{L^3 \mu}{105} & \frac{11L^2 \mu}{210} \\ \frac{13L^2 \mu}{420} & \frac{9L \mu}{70} & \frac{11L^2 \mu}{210} & \frac{13L \mu}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_L \\ w_L \\ \varphi_P \\ w_P \end{bmatrix}$$



Zatížení způsobené setrvačnými silami:

$$f_a(x) = -\omega_0^2 \mu w_0(x)$$

Tímto zatížením zatížím dílek, využiji okrajových podmínek: $w_0(0) = w_0(L) = w_0'(0) = w_0'(L) = 0$ a sestavím opět rovnici v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} M_{12}^e \\ Z_{12}^e \\ M_{21}^e \\ Z_{21}^e \end{bmatrix} = \omega_0^2 \begin{bmatrix} \frac{L^3 \mu}{105} & \frac{-11L^2 \mu}{210} & \frac{-L^3 \mu}{140} & \frac{-13L^2 \mu}{420} \\ \frac{-11L^2 \mu}{210} & \frac{13L\mu}{35} & \frac{13L\mu}{420} & \frac{9L\mu}{70} \\ \frac{-L^3 \mu}{140} & \frac{13L\mu}{420} & \frac{L^3 \mu}{105} & \frac{11L^2 \mu}{210} \\ \frac{13L^2 \mu}{420} & \frac{9L\mu}{70} & \frac{11L^2 \mu}{210} & \frac{13L\mu}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_L \\ w_L \\ \varphi_P \\ w_P \end{bmatrix}$$



Složením získaných maticových rovnic do jedné hlavní získám maticovou rovnici:

$$Kd - \omega_0^2 M d = 0$$

Vlastní čísla zjistím z rovnice:

$$\det(K - \omega_0^2 M) = 0$$

Výsledné hledané frekvence z vlastních čísel získám vztahem

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$



Složením získaných maticových rovnic do jedné hlavní získám maticovou rovnici:

$$Kd - \omega_0^2 Md = 0$$

Vlastní čísla zjistím z rovnice:

$$\det(K - \omega_0^2 M) = 0$$

Výsledné hledané frekvence z vlastních čísel získám vztahem

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$



Složením získaných maticových rovnic do jedné hlavní získám maticovou rovnici:

$$Kd - \omega_0^2 M d = 0$$

Vlastní čísla zjistím z rovnice:

$$\det(K - \omega_0^2 M) = 0$$

Výsledné hledané frekvence z vlastních čísel získám vztahem

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$



Obě metody jsem otestoval abych získal informace o
přesnosti deformační metody

parametry: $h = 0,3 \text{ m}$

$b = 0,2 \text{ m}$

$L_g = 4 \text{ m}$

$E = 3.00 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$

$I = 2.1924 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$



Tabulka udává první tři vlastní frekvence [Hz] :

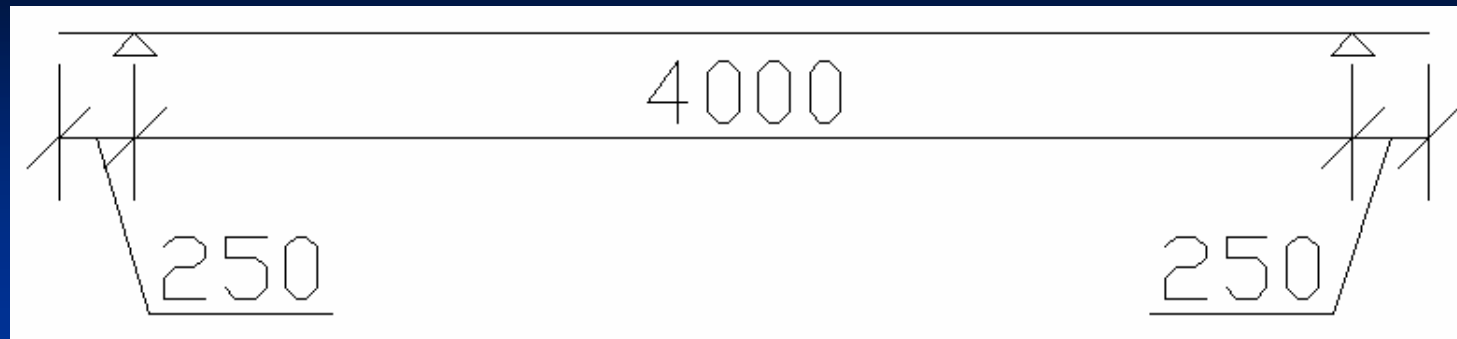
- vypočtené z parametrů trámů pomocí analytické metody
- vypočtené z parametrů trámů pomocí deformační metody

| f_A | $f_{Dn=5}$ | $f_{Dn=15}$ | $f_{Dn=25}$ | $f_{Dn=70}$ |
|----------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 20.8855 | 20.1404 | 20.8150 | 20.8688 | 20.8847 |
| 83.5419 | 84.1606 | 82.7603 | 83.3114 | 83.5294 |
| 187.9692 | 190.1672 | 185.7409 | 187.0317 | 187.9083 |

| f_A | $f_{Dn=5}$ | $f_{Dn=15}$ | $f_{Dn=25}$ | $f_{Dn=70}$ |
|-------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 100 | 96,432 | 99,662 | 99,920 | 99,996 |
| 100 | 100,74 | 99,064 | 99,724 | 99,985 |
| 100 | 101,17 | 98,815 | 99,501 | 99,968 |



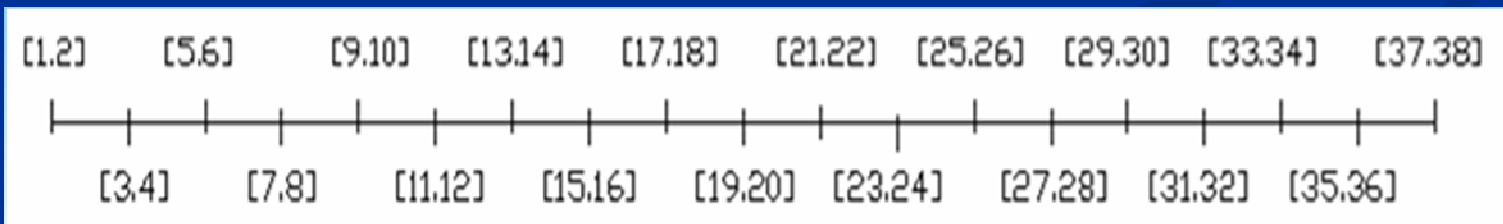
Realita:



Dynamická studie ŽB trámu poškozeného trhlinami - Ing. Tomáš Plachý PhD

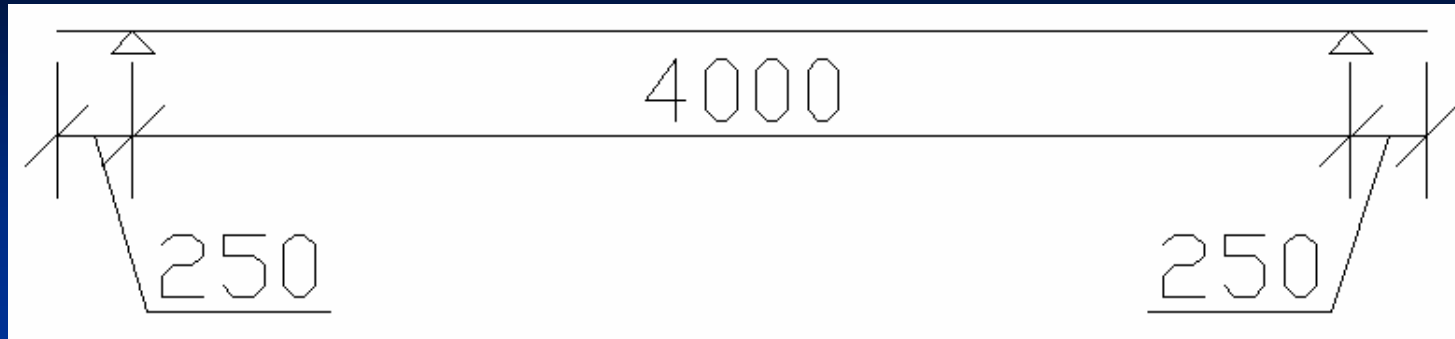
$$h = 0,3 \text{ m}, \quad b = 0,2 \text{ m}, \quad E = 3.00 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad I = 2.1924 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

18 dílků – 19 styčniců





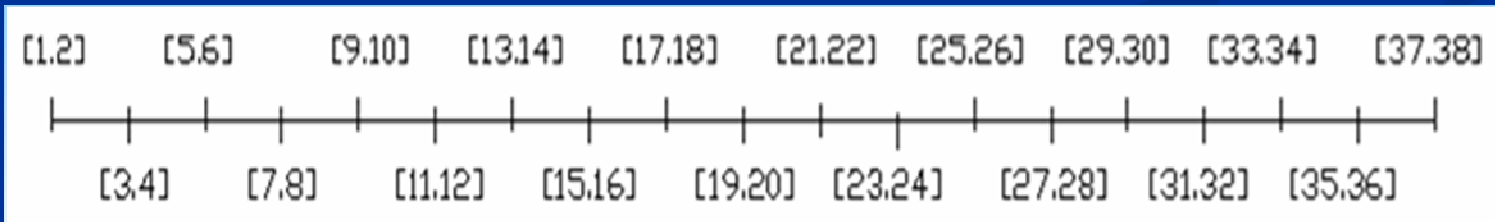
Realita:



Dynamická studie ŽB trámu poškozeného trhlinami - Ing.
Tomáš Plachý PhD

$h = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,2 \text{ m}$, $E = 3.00 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $I = 2.1924 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

18 dílků – 19 styčnicků





Tabulka udává první tři vlastní frekvence [Hz] :

- Reálné železobetonové trámy a jejich průměr
- Vypočtené pomocí deformační metody

| 1. trám | 2. trám | 3. trám | průměr | $f_{Dn=18}$ | $f_{Dn=36}$ | $f_{Dn=72}$ |
|---------|---------|---------|--------|-------------|-------------|-------------|
| 20,98 | 18,77 | 22,44 | 20,73 | 20.8520 | 20.8520 | 20.8520 |
| 87,37 | x | 73,55 | 80,46 | 83.0061 | 83.0048 | 83.0048 |
| 164,07 | 161,21 | 174,06 | 166,45 | 185.2196 | 185.2058 | 185.2049 |

| 1. trám | 2. trám | 3. trám | průměr | $f_{Dn=18}$ | $f_{Dn=36}$ | $f_{Dn=72}$ |
|---------|---------|---------|--------|-------------|-------------|-------------|
| 101,21 | 90,55 | 108,25 | 100 | 100,5885 | 100,5885 | 100,5885 |
| 108,59 | x | 91,41 | 100 | 103,1644 | 103,1628 | 103,1628 |
| 98,57 | 96,85 | 104,57 | 100 | 111,2764 | 111,2681 | 111,2676 |



Tabulka udává první tři vlastní frekvence [Hz] :

- Reálné železobetonové trámy a jejich průměr
- Vypočtené pomocí deformační metody

| 1. trám | 2. trám | 3. trám | průměr | $f_{Dn=18}$ | $f_{Dn=36}$ | $f_{Dn=72}$ |
|---------|---------|---------|--------|-------------|-------------|-------------|
| 20,98 | 18,77 | 22,44 | 20,73 | 20.8520 | 20.8520 | 20.8520 |
| 87,37 | x | 73,55 | 80,46 | 83.0061 | 83.0048 | 83.0048 |
| 164,07 | 161,21 | 174,06 | 166,45 | 185.2196 | 185.2058 | 185.2049 |

| 1. trám | 2. trám | 3. trám | průměr | $f_{Dn=18}$ | $f_{Dn=36}$ | $f_{Dn=72}$ |
|---------|---------|---------|--------|-------------|-------------|-------------|
| 101,21 | 90,55 | 108,25 | 100 | 100,5885 | 100,5885 | 100,5885 |
| 108,59 | x | 91,41 | 100 | 103,1644 | 103,1628 | 103,1628 |
| 98,57 | 96,85 | 104,57 | 100 | 111,2764 | 111,2681 | 111,2676 |



| f_A | $f_{Dn=70}$ |
|----------|-------------|
| 20.8855 | 20.8847 |
| 83.5419 | 83.5294 |
| 187.9692 | 187.9083 |

| Průměr trámů | $f_{Dn=18}$ | $f_{Dn=36}$ | $f_{Dn=72}$ |
|--------------|-------------|-------------|-------------|
| 20,73 | 20.8520 | 20.8520 | 20.8520 |
| 80,46 | 83.0061 | 83.0048 | 83.0048 |
| 166,45 | 185.2196 | 185.2058 | 185.2049 |



Dělení na 72 polí

První tři vlastní tvary

Selekce relevantních pořadnic vlastních tvarů X

Znormování $X^*X=1$

Získání dat trámů X_{ij}

Znormování $X_{ij}^*X_{ij}=1$

Vynesení do grafů



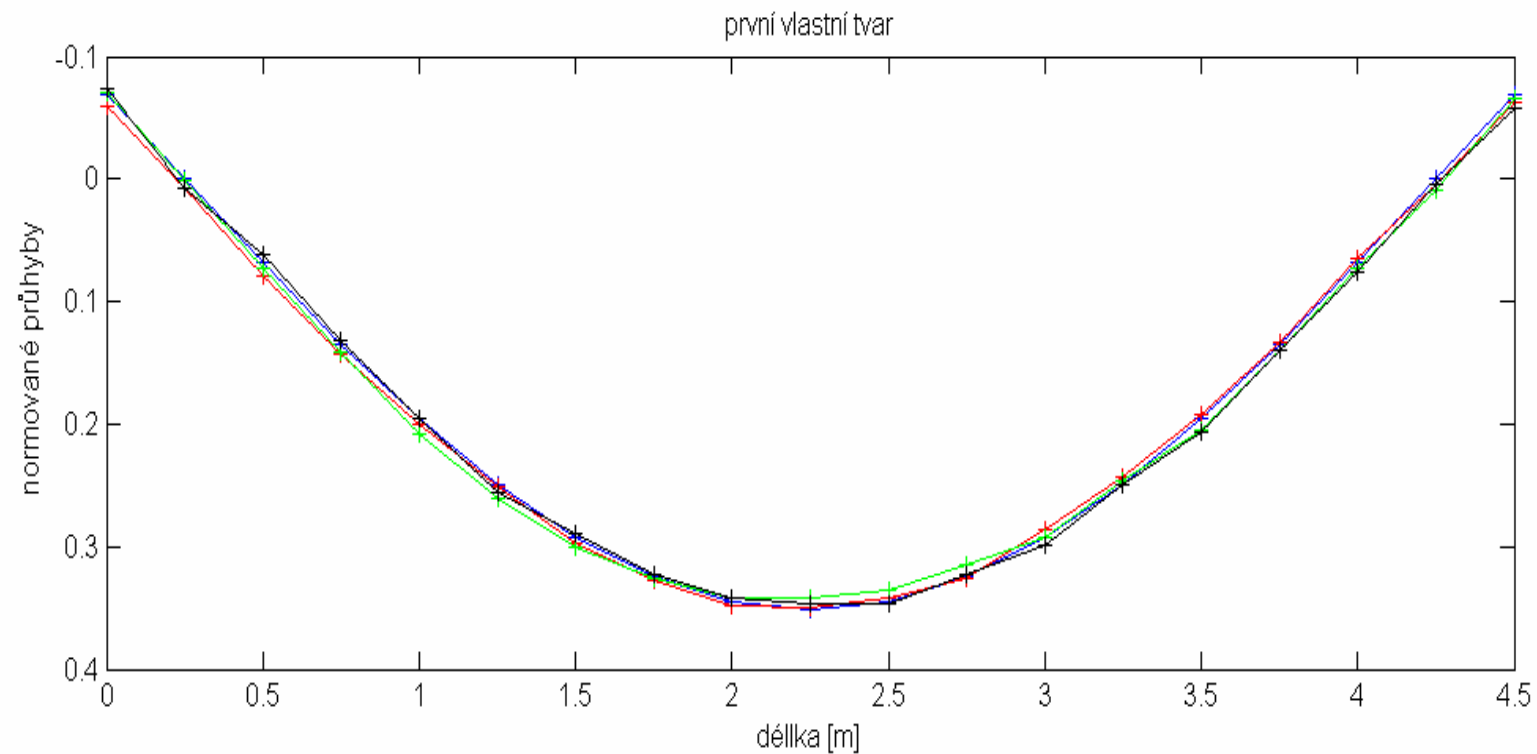
První vlastní tvar

Vypočtené hodnoty – modra

První trám – červená

Druhý trám – zelená

Třetí trám – černá



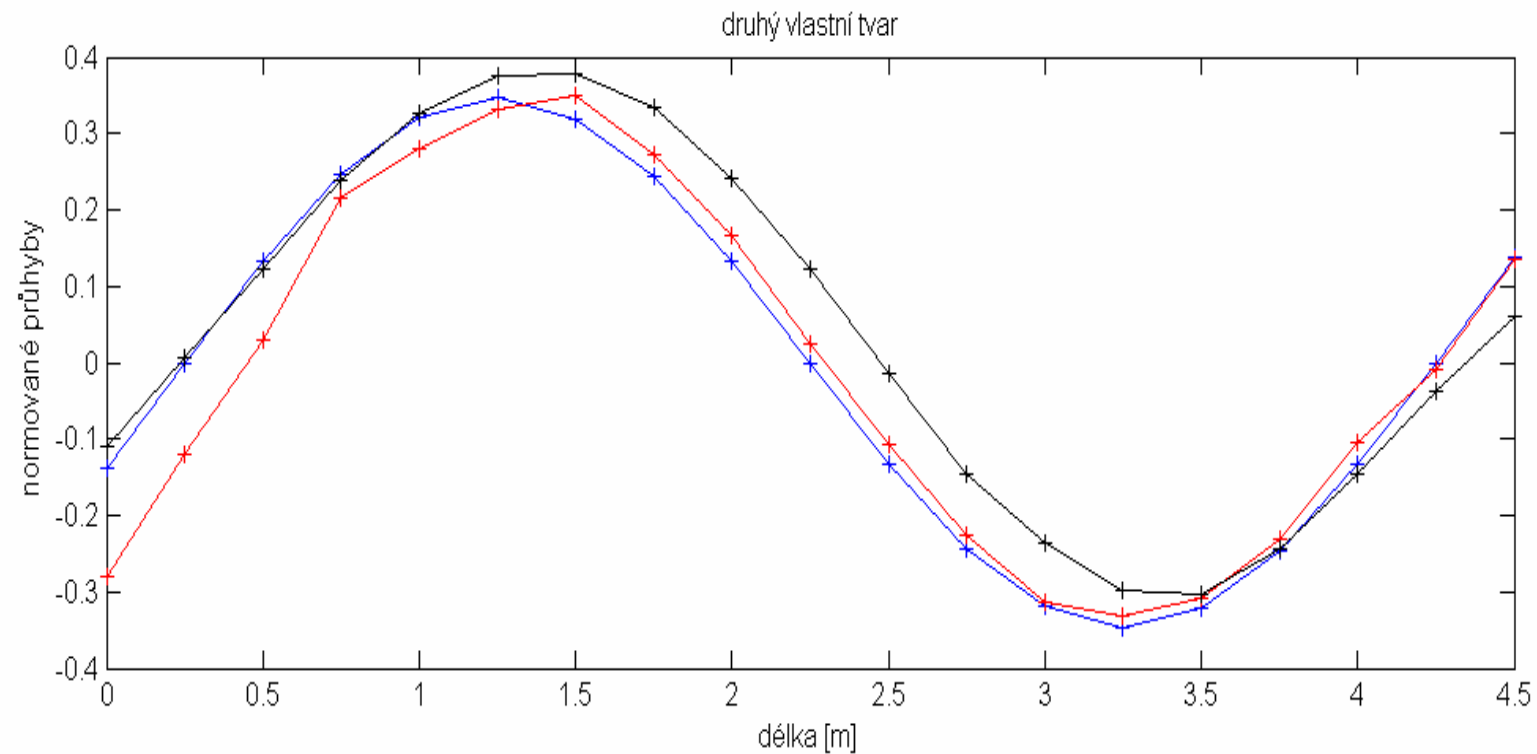


Druhý vlastní tvar

Vypočtené hodnoty – modra

První trám – červená

Třetí trám – černá





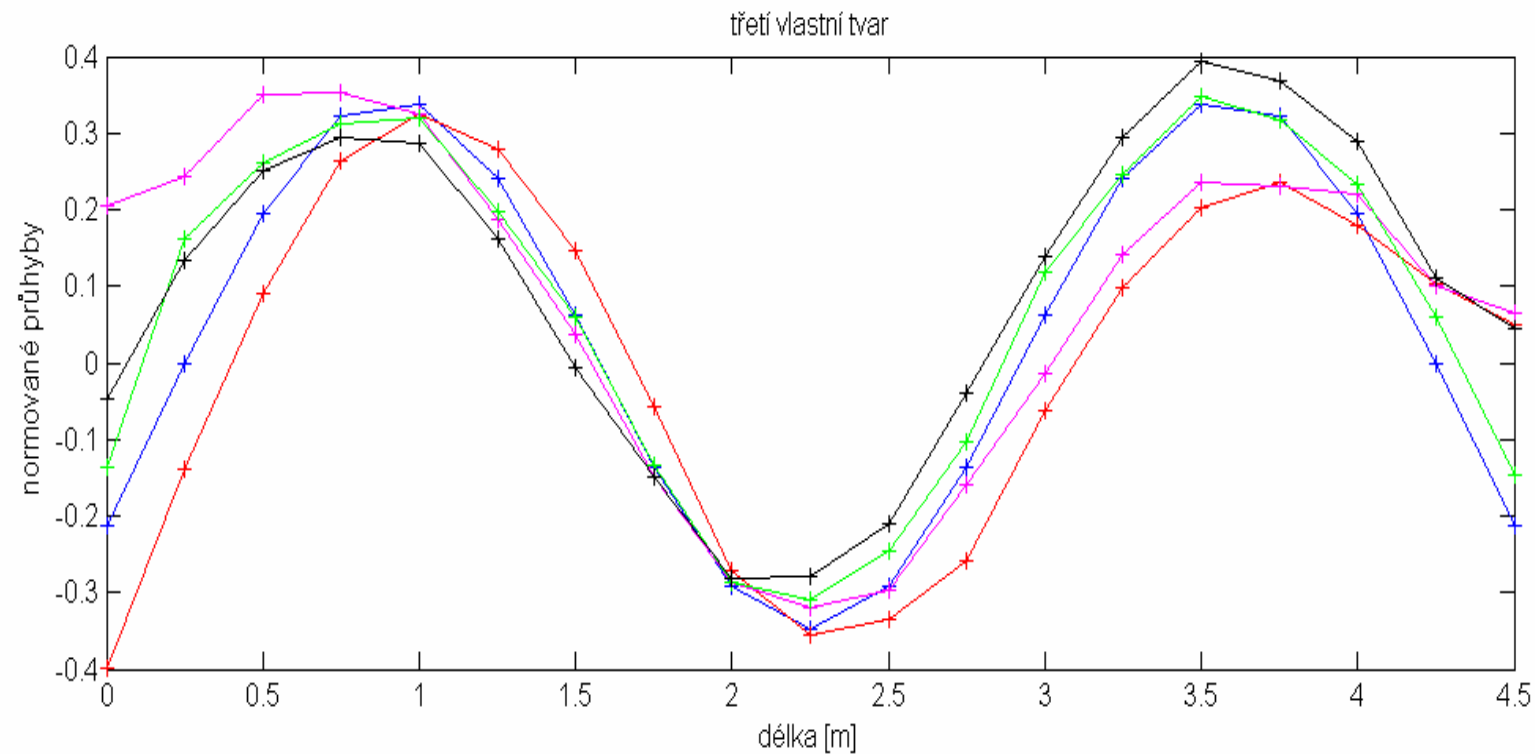
Třetí vlastní tvar

Vypočtené hodnoty – modra

První trám – červená + fialová

Druhý trám – zelená

Třetí trám – černá





Závěr

Numerická metoda má i při relativně hrubém dělení dostatečnou přesnost vzhledem k analytické metodě.

Rozptyl experimentálních hodnot byl u prvních dvou vlastních čísel větší než chyba numerické metody vztaženo k průměru experimentálních hodnot.

Vlastní tvary neodpovídají zcela matematickému tvaru z důvodů nehomogeností v materiálu, nepřesnostech v tvaru a geometrii zatížení a uložení.



Použitá literatura:

Matematika 3 – Doc. RNDr. Ondřej Zindulka, CSc.

Dynamika stavebních konstrukcí – M.Bat'a, V.Plachý, F.Trávníček

Dynamická studie ŽB trámu poškozeného trhlinami -

Ing. Tomáš Plachý PhD.

Poděkování

Ing. Janu Zemanovi, Ph.D. za neúnavnou pomoc, podporu
a vedení při této práci

Ing. Tomáši Plachému, Ph.D. za informace, data z jeho
práce a postupy.