Vplyv geometrie na hodnotu efektívneho Poissonovho súčiniteľa auxetického metamateriálu

-

Semestrálna práca
Stavební mechanika 3
Katedra mechaniky
Fakulta stavební
ČVUT

Nataša Jošková

26. 5. 2023

Poďakovanie

Ďakujem môjmu školiteľovi Martinovi Doškářovi za cenné rady ohľadom semestrálnej práce a všetok čas, ktorý mi venoval.

Obsah

1 Teoretický úvod **1**

2 Štrukúra metamateriálu **2**
2.1 Geometria 2
2.2 Numerický model 3
2.2.1 Lokálna matica tuhosti prutu 3
2.2.2 Globálna matica tuhosti prutu 3
2.2.3 Globálna matica tuhosti štruktúry 4

3 Homogenizácia **5**
3.1 Energetické úvahy 5
3.2 Kinematika prvého radu 6
3.3 Periodické okrajové podmienky 7
3.4 Eliminácia styčníkových premiestnení 9
3.5 Určenie Poissonovho súčiniteľa 10

4 Výsledky **11**
4.1 Poissonov súčiniteľ 11
4.2 Modul pružnosti v smyku 13
4.3 Rozšírenie intervalu uhlu $\boldsymbol{\alpha}$ 13

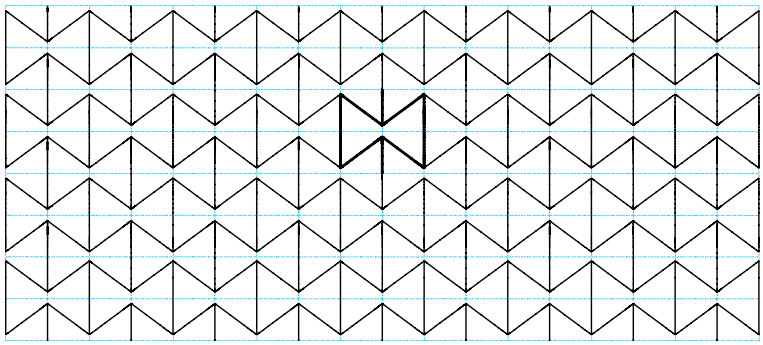
5 Záver **15**

1 Teoretický úvod

Metamateriál je umelo vytvorený materiál, ktorý má mimoriadne vlastnosti, presahujúce vlastnosti prírodných materiálov. Vďaka technologickému pokroku v posledných desaťročiach vieme pomocou matematického modelovania a zdokonalených spôsobov výroby, ako je napríklad 3D a 4D tlač [1], spracovanie prevýjaním substrátu [2] alebo elektrospinning [3], navrhnúť konkrétny metamateriál na základe našich požiadavok, čo nám umožňuje vyhnúť sa zdĺhavému experimentálnemu hľadaniu vhodného materiálu, pričom dané vlastnosti metamateriálov pochádzajú prioritne zo stavby ich mikroštruktúry a nie z chemických či fyzikálnych parametrov materiálu, z ktorého sú vyrobené [4].

V našej práci sme sa venovali auxetickému metamateriálu. Tento typ metamateriálu má zápornú hodnotu Poissonovho súčiniteľa, ktorý je definovaný ako záporne vzatý podiel priečnej a axiálnej deformácie v smere pôsobiacej sily. Inými slovami, po stlačení v priečnom smere stačí aj v smere pozdĺžnom. Vďaka tomu dokáže lepšie distribuovať energiu, účinnejšie pohltiť zvuk a menej sa v ňom šíria únavové trhliny, v porovnaní s bežnými materiálmi.

Auxetické metamateriály tak majú širokú škálu využitia, vyrábajú sa z nich napríklad ochranné a športové odevy [5], bezpečnostné prvky do áut [6] a akustická izolácia [7]. Svoje uplatnenie našli aj v medicíne, napríklad ako stenty [8] či bandáže [9] a v leteckom priemysle, kde sa používajú pri výrobe krídel lietadiel [10]. V súčastnosti prebiehajú ďalšie výskumy aplikácie auxetických metamateriálov, jedným z nich je aj jeho potenciálne využitie ako tepelná izolácia [11].



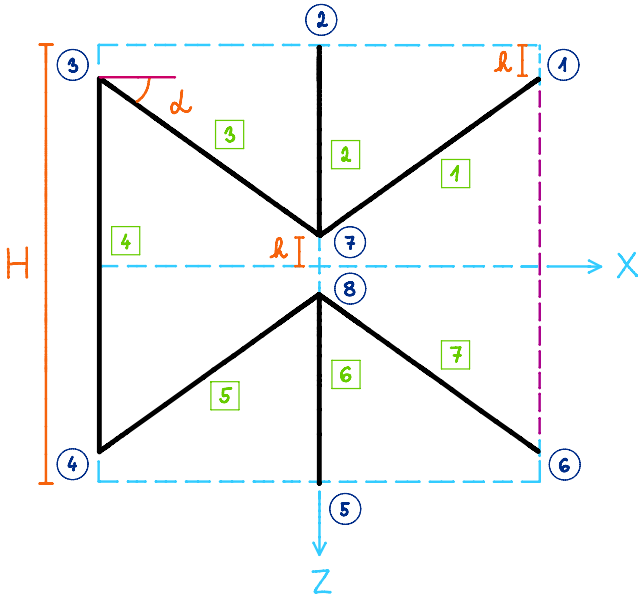
Obr. 1: Vybraná štruktúra auxetického metamateriálu

Cieľom našej práce je určiť vplyv geometrie mikroštruktúry auxetického metamateriálu z Obr. 1 na hodnotu Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} a ν_{zx} v dvoch na seba kolmých smeroch. V sekcii 2 vytvoríme diskrétny prutový model jednej reprezentatívnej bunky a následne použijeme obecnú deformačnú metódu na vytvoreniu matice tuhosti mikroskopickej štruktúry metamateriálu. V sekcii 3 sa z mikroskopickej úrovne presunieme na makroskopickú. Budeme sa zaoberať homogenizáciou metamateriálu a následným vyjadrením Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} a ν_{zx} z homogenizovanej matice tuhosti. V sekcii 4 určíme závislosť efektívneho Poissonovho súčiniteľa od geometrie auxetického metamateriálu.

2 Štrukúra metamateriálu

2.1 Geometria

Na Obr. 1 je znázornená štruktúra vybraného auxetického metamateriálu, ktorý pozostáva z periodicky sa opakujúcej bunky, čo nám umožňuje si zvoliť jednu reprezentatívnu bunku, s ktorou budeme ďalej pracovať a vytvoriť jej diskrétny prutový model. Bunka sa nachádza v súradnicovom systéme $x - z$ so začiatkom v jej strede. Zavedieme si orientáciu kladnej poloosi x doprava a kladnej poloosi z dolu. Reprezentatívna bunka má štvorcový tvar a je tvorená 7 prutmi a 8 styčníkmi. Číslovanie prutov a styčníkov je znázornené na Obr. 2.



Obr. 2: Geometria reprezentatívnej bunky

Vyjadríme si dĺžku jednotlivých prutov v závislosti na šírke bunky H a uhle α, ktorý zviera prut 3 s priamkou rovnobežnou s osou x a prechádzajúcou styčníkom 3. Práve pomocou spomínaného uhlu α budeme meniť geometriu metamateriálu a tým jeho vlastnosti. Preto si všetky nasledujúce vzťahy vyjadríme v závislosti od uhlu α, ktorý z dôvodu zachovania zvolenej štruktúry zobrazenej na Obr. 2 patrí do intervalu $(0°, 45°\rangle$.

2.2 Numerický model

V nasledujúcich častiach budeme používať obecnú deformačnú metódu na určenie vzťahov medzi koncovými silami, posunmi a pootočeniami v jednotlivých styčníkoch geometrického modelu z Obr. 2.

2.2.1 Lokálna matica tuhosti prutu

Matica K_i^l (1) je maticou tuhosti prutu v lokálnom súradnom systéme. Práve z nej budeme vychádzať pri tvorbe lokálnych matíc tuhosti konkrétnych prutov našej štruktúry.

$$\mathsf{K}_i^l = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L_i} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_i^3} & -\frac{6EI}{L_i^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_i^3} & -\frac{6EI}{L_i^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_i^2} & \frac{4EI}{L_i} & 0 & \frac{6EI}{L_i^2} & \frac{2EI}{L_i} \\ -\frac{AE}{L_i} & 0 & 0 & \frac{AE}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_i^3} & \frac{6EI}{L_i^2} & 0 & \frac{12EI}{L_i^3} & \frac{6EI}{L_i^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_i^2} & \frac{2EI}{L_i} & 0 & \frac{6EI}{L_i^2} & \frac{4EI}{L_i} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Lokálne matice tuhosti pre jednotlivé pruty získame dosadením vyjadrených dĺžok prutov, pričom plocha prierezu A, Youngov modul pružnosti E a moment zotrvačnosti I zavedieme pre všetky pruty zhodné. Šírku prierezu budeme uvažovať jednotkovú, výškou prierezu t tak definujeme všetky prierezové charakteristiky, t.j.

$$A = 1 \cdot t \quad \text{a} \quad I = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot t^3 \,. \tag{2}$$

2.2.2 Globálna matica tuhosti prutu

Získané lokálne matice tuhosti teraz potrebujeme transformovať do globálnych matíc tuhosti prutov. Výsledkom bude vyjadrenie koncových posunov a pootočení v globálnom súradnom systéme, čo je oveľa praktickejšie a lepšie sa nám s tým bude ďalej pracovať. Transformačná matica T_i i-teho prutu v závislosti od natočenia prutu z vodorovnej polohy vyjadreného uhlom α má tvar

$$\mathsf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Lokálne matice tuhosti prutov K_i^l transformujeme do globálneho súradnicového systému pomocou vzťahov

$$\mathsf{K}_i^g = \mathsf{T}_i^\mathsf{T} \mathsf{K}_i^l \mathsf{T}_i \,. \tag{4}$$

2.2.3 Globálna matica tuhosti štruktúry

Zjednotili sme orientácie posunov a pootočení matíc tuhosti jednotlivých prutov do globálneho súradného systému, čím sme umožnili ich spojenie do jednej globálnej matica tuhosti štruktúry prutov K. Máme 8 styčníkov, na každom posun u v smere osi x, posun w v smere osi z a pootočenie φ proti pohybu hodinových ručičiek, preto naša matica bude mať veľkosť 24×24. Prvky matice tuhosti K získame sčítaním koeficientov prislúchajúcich k posunom a pootočeniam v danom styčníku, čoho dosiahneme lokalizáciou globálnych matíc tuhosti prutov K_i^g do jedinej matice tuhosti K reprezentujúcej celú štruktúru bunky pomocou lokalizačných matíc L_i,

$$\mathsf{K} = \sum_i \mathsf{L}_i^\mathsf{T} \mathsf{K}_i^g \mathsf{L}_i \,. \tag{5}$$

Pre objasnenie výrazu (5) sa bližšie pozrieme na styčník 7. V tomto prípade nám prispievajú pruty 1, 2 a 3 (viz Obr. 2) do globálnej matice tuhosti K na pozície prislúchajúce posunom a pootočeniam styčníku 7. Vďaka princípu superpozície sa sčítajú príspevky jednotlivých prutov na rovnakej pozícii v matici K. Uvádzame tu ako príklad lokalizačnú maticu L_1, patriacu prutu 1 so začiatočným bodom 7 a koncovým bodom 1, a tým matici K_1^g,

$$\mathsf{L}_1 = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}.$$

3 Homogenizácia

Doteraz sme pracovali s diskrétnym prutovým modelom, ktorý sa dá popísať lineárnym vzťahom

$$\mathsf{F} = \mathsf{K}\mathsf{u}\,, \tag{6}$$

pričom vektor F obsahuje sily a momenty pôsobiace postupne na všetky styčníky, K je matica tuhosti a u je vektor styčníkových posunov obsahujúci u_i, w_i, φ_i, postupne pre jednotlivé styčníky.

V nasledujúcich častiach bude naším cieľom určiť homogenizované vlastnosti auxetického metamateriálu na základe usporiadania jeho mikroštruktúry. Umožní nám to skúmať správanie bunky metamateriálu ako celku, pričom zoberieme do úvahy vlastnosti jednotlivých jej častí. Dostaneme sa tým z diskrétneho heterogénneho modelu metamateriálu na mikroúrovni na homogénny makroskopický model.

3.1 Energetické úvahy

Materiál sa prirodzene snaží dostať do stavu, v ktorom má najmenej energie, pretože je to preňho najvýhodnejšie. Z toho môžeme usúdiť, že pri každej deformácii existuje určitý tvar, do ktorého sa bunka zdeformuje, pretože vyžaduje najmenej energie. Ako motivácia nám poslúži potenciálna energia $\mathcal{E}_p$ lineárnej pružiny, ktorej začiatočný bod je zafixovaný. Jej energia je priamo úmerná tuhosti k a kvadrátu posunu voľného konca x.

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7}$$

Analogicky je možné napísať energiu $\mathcal{E}$ diskrétneho systému prutov, ktorý reprezentuje našu bunku zloženú z prutov a styčníkov, ako

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathsf{u}^\mathsf{T}\mathsf{K}\mathsf{u}\,. \tag{8}$$

Obdobne môžeme pre lineárne pružný materiál na makroskopickej úrovni, o objeme V, ktorý je vystavený uniformnej deformácií E, písať vzťah pre energiu

$$\mathcal{E}_M = V\frac{1}{2}\mathsf{E}^\mathsf{T}\mathsf{D}\mathsf{E}\,, \tag{9}$$

v ktorom D je matica tuhosti hľadaného efektívneho materiálu a vektor E obsahuje jednotlivé makroskopické zložky tenzoru pretvorenia vo vektorovej forme

$$\mathsf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{zz} & \Gamma_{xz} \end{bmatrix}^\mathsf{T}. \tag{10}$$

Dodajme, že uvažujeme dvojrozmernú úlohu a predpoklad rovinnej napjatosti.

3.2 Kinematika prvého radu

V práci budeme uvažovať homogenizáciu prvého radu, v ktorej je pole posunov $\vec{u}(\vec{x})$ možné písať ako

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^E(\vec{x}) + \vec{u}^*(\vec{x}), \tag{11}$$

kde $\vec{u}^E$ označuje makroskopickú a $\vec{u}^*$ fluktuačnú časť. Makroskopická časť poľa posunov odpovedá stavu, kedy by bola celá bunka zložená z homogénneho materiálu vystavená konštantnému makroskopickému tenzoru pretvorenia (vo vektorovej forme) E. Vzťah medzi posunmi a pootočeniami diskrétneho modelu od makroskopickej časti deformácie $\vec{u}^E$, súradnicami daného bodu a vektorom E je vyjadrený ako

$$\begin{bmatrix} u_i^E \\ w_i^E \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & 0 & \frac{1}{2}z_i \\ 0 & z_i & \frac{1}{2}x_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \\ \Gamma_{xz} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Predpokladáme tu teda, že makroskopická časť neovplyvňuje rotačné stupne voľnosti. Pre homogenizáciu prvého radu ďalej platí, že objemový priemer gradientu poľa posunov $\vec{u}(\vec{x})$ musí odpovedať predpísanému pretvoreniu E. Zavedením operátora symetrického gradientu ∇^s definovaného ako

$$\nabla^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{13}$$

dostaneme jeho aplikáciou a priemerovaním cez jednotkovú bunku Ω vzťah

$$\mathsf{E} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}^E(\vec{x}) + \nabla^s \vec{u}^*(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}. \tag{14}$$

Vďaka tomu, že $\vec{u}^E(\vec{x})$ je volené práve tak, aby $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}^E(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = \mathsf{E}$, dostávame obmedzujúci požiadavok na fluktuačnú časť poľa posunov

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}^*(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = \mathsf{0}. \tag{15}$$

Pre diskrétny model môžeme následne napísať pôvodné stupne voľnosti u v závislosti na vektore E a fluktuačných neznámych u^*. Pre zjednodušenie označme

$$\widehat{\mathsf{u}} = \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{u}^* \end{bmatrix}, \tag{16}$$

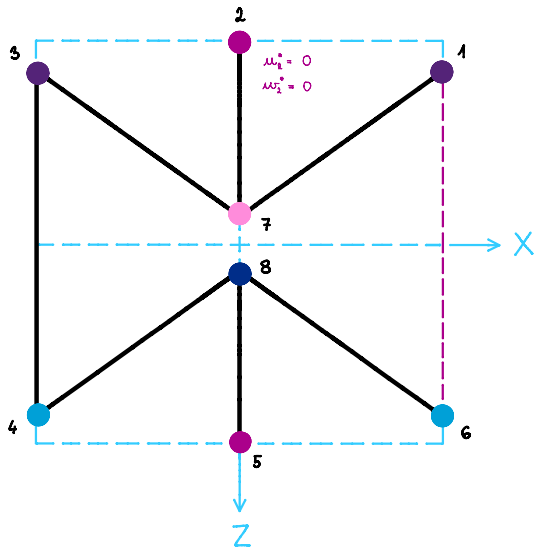
potom môžeme písať

$$\mathsf{u} = \begin{bmatrix} \mathsf{Q}^E & \mathsf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{u}^* \end{bmatrix} = \mathsf{Q}\,\widehat{\mathsf{u}}, \tag{17}$$

kde I je štvorcová matica identity a Q^E je zložená z blokov odpovedajúcich výrazu (12).

3.3 Periodické okrajové podmienky

Nulový priemerný gradient fluktuačnej časti poľa posunov je možné dosiahnuť s uvažovaním periodických okrajových podmienok pre fluktuačné posuny. Umožňuje nám ich zaviesť práve štruktúra skúmaného metamateriálu, v ktorej sa periodicky opakuje jedna reprezentatívna bunka. Tieto podmienky sú zároveň prirodzeným modelovým predpokladom pri materiáli, v ktorom sa jeho geometria periodicky opakuje. Pri deformácií našej bunky sa jej okolité bunky, pre zachovanie štruktúry, budú deformovať rovnako. Pripomeňme, že pôvodný model má 3×8 fluktuačných stupňov voľnosti. Zavedieme si vektor a^*, do ktorého usporiadame 3×5 fluktuačných premiestnení (na 5 styčníkoch štruktúry budú rozdielne premiestnenia). Nahradíme nimi pôvodné posuny a pootočenia bodov homogenizovanej bunky na miestach, kde sa nachádzali styčníky.



Obr. 3: Periodické okrajové podmienky

Na Obr. 3 sú zobrazené rovnakou farbou body, v ktorých budú zhodné posuny a pootočenia. V mieste styčníku 2 predpíšeme nulový posun u_2^* a w_2^*, pričom pootočeniu φ_2^* nebudeme brániť. Týmto krokom dosiahneme, že bunka sa nám nebude v priebehu deformácie samovoľne pohybovať v priestore ako tuhý celok, ale ostane ukotvená. Z dôvodu periodickosti štruktúry metamateriálu budú nulové aj fluktuačné posuny v bode styčníku 5, pretože zdola susedí s reprezentatívnou bunkou rovnaká bunka, ktorej bod styčníku 2 pred homogenizáciou je zhodný s bodom 5 diskrétneho modelu bunky.

Nezávislé stupne voľnosti pre periodické posuny a pootočenia a^* je možné spojiť s premiestneniami styčíknov odpovedajúcich fluktuačnej časti deformácie u^* pomocou matice P. Obdobne, ako v (16) je možné rozšíriť tieto nezávislé stupne voľnosti o stupne voľnosti odpovedajúce makroskopickému pretvoreniu, matica $\widehat{\mathsf{P}}$ prepája makroskopické pomerné deformácie E a fluktuačné premiestnenia u,

napísané vo vektore $\widehat{\mathsf{u}}$ s periodickými okrajovými podmienkami a_i^*.

$$\widehat{\mathsf{u}} = \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{u}^* \end{bmatrix} = \widehat{\mathsf{P}} \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{a}^* \end{bmatrix} \tag{18}$$

Spojením makroskopickej a fluktuačnej zložky deformácie do vektoru

$$\widehat{\mathsf{a}} = \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{a}^* \end{bmatrix} \tag{19}$$

dostaneme vzťah pre posuny a pootočenia jednotlivých bodov bunky metamateriálu

$$\mathsf{u} = \mathsf{Q}\widehat{\mathsf{P}}\,\widehat{\mathsf{a}}\,. \tag{20}$$

3.4 Eliminácia styčníkových premiestnení

Teraz môžeme vyjadriť energiu diskrétneho modelu periodickej bunky z rovnice (8) v závislosti na makroskopickej deformácií E a fluktuačných neznámych a^* dosadením výrazu (20) do (8) ako

$$\mathcal{E}(\mathsf{E},\mathsf{a}^*) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{a}^* \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \widehat{\mathsf{K}}_{EE} & \widehat{\mathsf{K}}_{Ea^*} \\ \widehat{\mathsf{K}}_{a^*E} & \widehat{\mathsf{K}}_{a^*a^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{a}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\,\widehat{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathsf{K}}\,\widehat{\mathsf{a}}\,. \tag{21}$$

V ďalšom kroku si vyjadríme premiestnenia styčníkov a^* vzhľadom na pomerné deformácie bunky E, pretože nás zaujíma správanie homogenizovanej bunky ako celku, nie jej jednotlivých bodov. Budeme uvažovať zafixované makroskopické deformácie E, pričom hľadáme fluktuačné premiestnenia a^* ako minimizér energie $\mathcal{E}(\mathsf{E},\mathsf{a}^*)$ pre dané deformácie E, t.j.

$$\widetilde{\mathsf{a}}(\mathsf{E}) = \underset{\mathsf{a}^*\in\mathbb{R}^{15}}{\operatorname{argmin}}\, \frac{1}{2}\mathsf{E}^{\mathsf{T}}\mathsf{K}_{EE}\mathsf{E} + \frac{1}{2}\mathsf{E}^{\mathsf{T}}\mathsf{K}_{Ea}\mathsf{a}^* + \frac{1}{2}\mathsf{a}^{*\mathsf{T}}\mathsf{K}_{aE}\mathsf{E} + \frac{1}{2}\mathsf{a}^{*\mathsf{T}}\mathsf{K}_{aa}\mathsf{a}^*\,. \tag{22}$$

Matica $\widehat{\mathsf{K}}$ je symetrická a pozitívne definitná, preto funkcia (21) nadobúda globálne minimum v bode jej nulového gradientu

$$\nabla_{\mathsf{a}^*}\mathcal{E}(\mathsf{E},\mathsf{a}^*)\big|_{\mathsf{a}^*=\widetilde{\mathsf{a}}(\mathsf{E})} = \mathsf{K}_{aE}\mathsf{E} + \mathsf{K}_{aa}\widetilde{\mathsf{a}}(\mathsf{E}) = 0\,. \tag{23}$$

Vďaka tomu dostaneme vyjadrenie minimizéru $\widetilde{\mathsf{a}}(\mathsf{E})$

$$\widetilde{\mathsf{a}}(\mathsf{E}) = -\mathsf{K}_{aa}^{-1}\mathsf{K}_{aE}\mathsf{E}. \tag{24}$$

Dosadením $\widetilde{\mathsf{a}}(\mathsf{E})$ do (21) získame energiu závislú iba na makroskopických deformáciách E

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathsf{E}) = \mathcal{E}(\mathsf{E},\widetilde{\mathsf{a}}(\mathsf{E})) = \frac{1}{2}\,\mathsf{E}^{\mathsf{T}}(\widehat{\mathsf{K}}_{EE} - \widehat{\mathsf{K}}_{Ea^*}\widehat{\mathsf{K}}_{a^*a^*}^{-1}\widehat{\mathsf{K}}_{a^*E})\,\mathsf{E}\,. \tag{25}$$

Pre zjednodušenie nazveme Schurov doplnok z predchádzajúcej rovnice (25) efektívnou maticou tuhosti K^{eff}

$$\mathsf{K}^{\text{eff}} = (\widehat{\mathsf{K}}_{EE} - \widehat{\mathsf{K}}_{Ea^*}\widehat{\mathsf{K}}_{a^*a^*}^{-1}\widehat{\mathsf{K}}_{a^*E})\,, \tag{26}$$

čím môžeme vyjadriť energiu diskrétneho prutového modelu bunky ako

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathsf{E}) = \frac{1}{2}\mathsf{E}^{\mathsf{T}}\mathsf{K}^{\text{eff}}\mathsf{E}\,. \tag{27}$$

Porovnaním vyššie uvedeného výrazu (27) a výrazu pre energiu homogénneho materiálu o objeme $V = 1\cdot|\Omega| = 1\cdot H\cdot H$, podrobeného konštantnej deformácií E v rovnici (9) získame výsledný vzťah pre homogenizovanú materiálovú tuhosť auxetického metamateriálu

$$\mathsf{D}^{\text{hom}} = \frac{1}{V}\mathsf{K}^{\text{eff}}\,. \tag{28}$$

3.5 Určenie Poissonovho súčiniteľa

Náš metamateriál je ortotropný, pretože je symetrický v troch vzájomne kolmých smeroch. Vyplýva z toho, že v rovine xz bude mať 2 hodnoty Poissonovho súčiniteľa v závislosti od smeru predpísanej pomernej deformácie. Napätie v metamateriáli budeme značiť Σ, aby sme odlíšili makroskopickú úroveň, na ktorej práve pracujeme od mikroskopickej. Keďže očakávame výsledný lineárny vzťah medzi makroskopickou deformáciou E a makroskopickým napätím $\mathsf{\Sigma}$, platí

$$\mathsf{\Sigma} = \mathsf{D}^{\mathrm{hom}}\mathsf{E}\,. \tag{29}$$

Rozpísaním výrazu (29) po zložkách dostaneme

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{zz} \\ \Sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} & 0 \\ d_{zx} & d_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{zz} \\ \Gamma_{xz} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Zložky d_{xz} a d_{zx} sú rovnaké, pretože celková matica tuhosti musí byť symetrická. Pre stanovenie Poissonovho čísla ν_{ij} prevedieme myšlienkový jednoosý ťahový/tlakový experiment, v ktorom predpíšeme makroskopickú deformáciu v smere i a z podmienky nulového makroskopického napätia v smere j dopočítame nevyhnutnú deformáciu v smere j. Výsledkom tohto myšlienkového experimentu sú dva nasledujúce vzťahy

$$\widetilde{E}_{zz}^{E_{xx}} = -\frac{d_{xz}}{d_{zz}} E_{xx}\,, \tag{31}$$

$$\widetilde{E}_{xx}^{E_{zz}} = -\frac{d_{zx}}{d_{xx}} E_{zz}\,, \tag{32}$$

pomocou ktorých už jednoducho vyjadríme hodnotu Poissonovho súčiniteľa pre obidva smery, keďže sa jedná o záporný pomer dopočítanej a predpísanej veličiny. Výsledné vzťahy pre výpočet Poissonovho súčiniteľa v dvoch na seba kolmých smeroch majú tvar

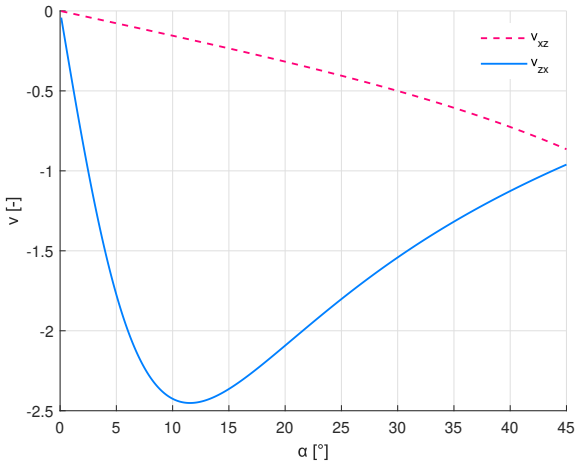
$$\nu_{xz} = -\frac{\widetilde{E}_{zz}^{E_{xx}}}{E_{xx}} = \frac{d_{xz}}{d_{zz}}\,, \tag{33}$$

$$\nu_{zx} = -\frac{\widetilde{E}_{xx}^{E_{zz}}}{E_{zz}} = \frac{d_{zx}}{d_{xx}}\,. \tag{34}$$

4 Výsledky

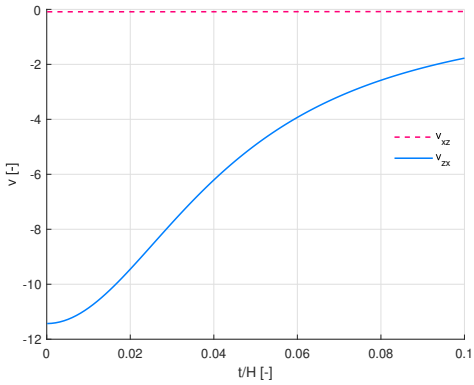
4.1 Poissonov súčiniteľ

Závislosť Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} a ν_{zx} od veľkosti uhlu α je zobrazená na Obr. 4. So zväčšujúcim sa uhlom α rastie absolútna hodnota Poissonovho súčiniteľa ν_{xz}. Poissonov súčinteľ ν_{zx} má extrém o veľkosti $\nu_{xz} = -2.45$ pri uhle $\alpha = 11.57°$. Do tohto bodu jeho absolútna hodnota prudko rastie a následne potom začne klesať.

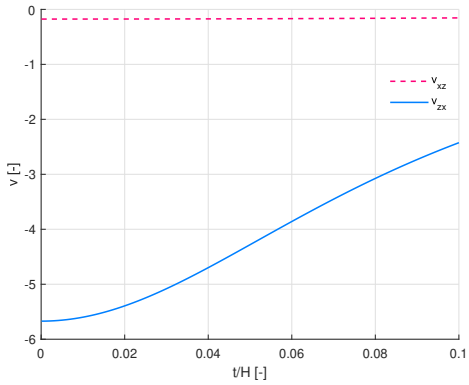


Obr. 4: Poissonov súčiniteľ v závislosti od uhlu α

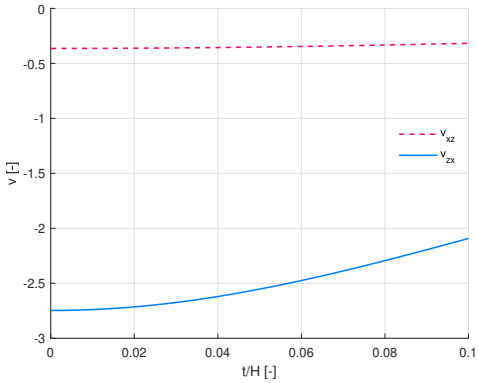
Poissonov súčiniteľ sme v závislosti od uhlu α vyjadrili s vopred stanovenou výškou prierezu jednotlivých prutov $t = 0.1H$. V nasledujúcich grafoch môžete vidieť hodnoty ν_{xz} a ν_{zx} v závislosti na výške prierezu s rozličnou geometriou štruktúry, ktorá je ovládaná pomocou uhlu α. Absolútna hodnota Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} aj ν_{zx} klesá so zväčšujúcou sa výškou prierezu. Je tu nutné poznamenať, že celý model je založený na Bernoulliho-Navierovej hypotéze, ktorá je presná pre relatívne štíhle pruty. Výška prierezu nad $t = 0.1H$ je už nad bežne odporúčanú hranicu platnosti tejto hypotézy nehľadiac na fakt, že prutový model pre väčšie hodnoty už prestáva stačiť .



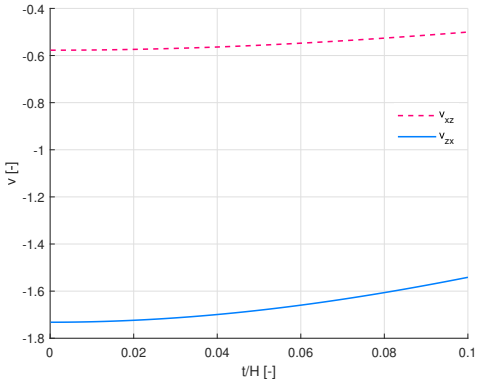
(a) $\alpha = 5°$



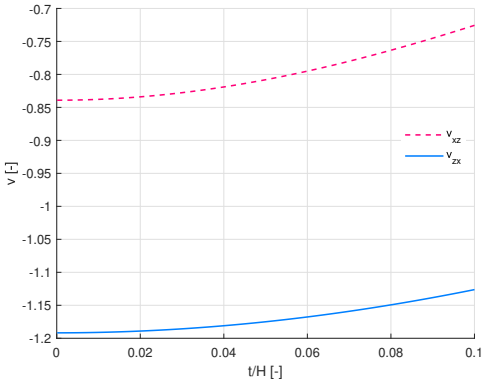
(b) $\alpha = 10°$



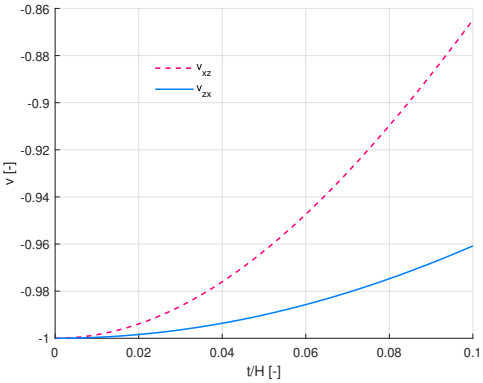
(c) $\alpha = 20°$



(d) $\alpha = 30°$



(e) $\alpha = 40°$

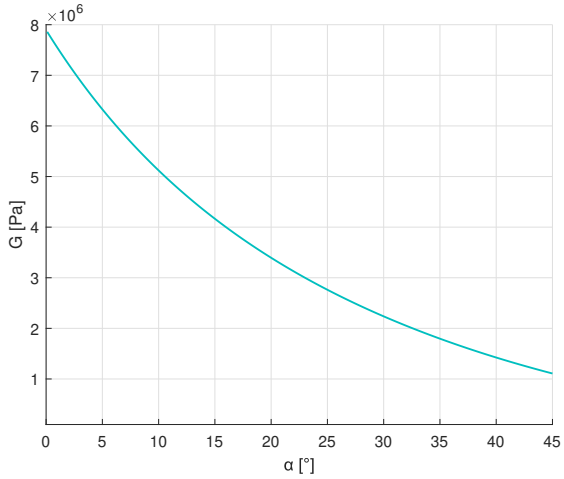


(f) $\alpha = 45°$

Obr. 5: Závislosť Poissonovho súčiniteľa na výške prierezu t pre vybrané uhly α.

4.2 Modul pružnosti v smyku

Z matice (30) vieme okrem Poissonovho súčiniteľa priamo získať aj hodnoty modulu pružnosti v smyku G_{xz}. V Obr. 6 uvádzame výsledky modulu pružnosti v smyku v závislosti od veľkosti uhlu α, pričom sme určili výšku prierezu $t = 0.1H$ a Youngov modul pružnosti $E = 3$ GPa. Z grafu môžeme vidieť, že modul pružnosti v smyku G_{xz} klesá s rastúcim uhlom α.

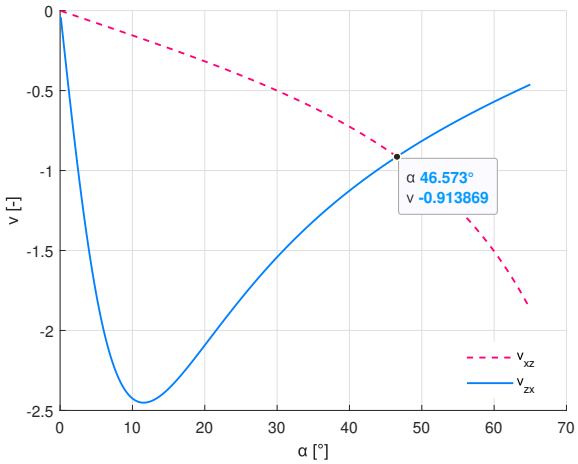


Obr. 6: Modul pružnosti v smyku v závislosti od uhlu α

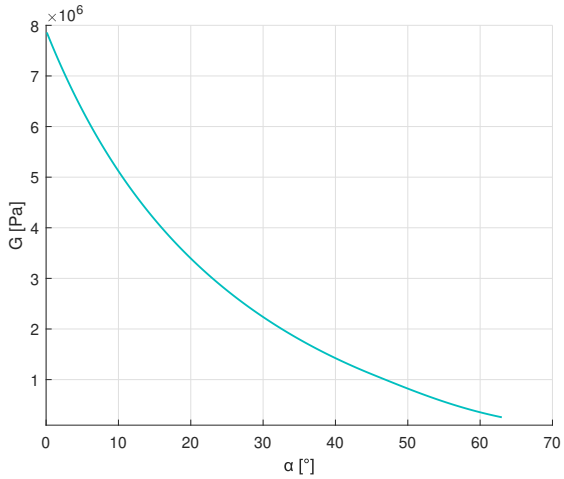
4.3 Rozšírenie intervalu uhlu α

Skúmali sme aj vplyv väčšieho uhlu α na výsledné vlastnosti auxetického metamateriálu. Za predpokladu, že jednotlivé pruty sa nebudú pretínať môžeme pracovať s uhlom α z intervalu $\langle 0°, 63° \rangle$, pričom štruktúra metamateriálu ostane zachovaná.

Zaujímavé je najmä správanie Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} a ν_{zx}, ktoré nadobudnú rovnakú hodnotu $\nu = -0.9139$ pri uhle $\alpha = 46.573°$. Od tohto bodu sa začnú rozchádzať, pričom ν_{zx} rastie spolu so zväčšujúcim sa uhlom a ν_{xz} začne s rastúcim uhlom α prudšie klesať. Hodnoty modulu pružnosti v smyku naďalej klesajú s rastúcim uhlom α.



Obr. 7: Poissonov súčiniteľ v závislosti od uhlu $\alpha \in (0°, 63°\rangle$



Obr. 8: Modul pružnosti v smyku v závislosti od uhlu $\alpha \in (0°, 63°\rangle$

5 Záver

Cieľom práce bolo určiť vplyv geometrie, parametrizovanej pomocou uhlu α, vybranej topológie auxetického metamateriálu na efektívne hodnoty Poissonovho súčiniteľa pre dva na seba kolmé smery.

Pre dosiahnutie tohto cieľa sme na začiatku práce, s využitím obecnej deformačnej metódy, vyjadrili lokálne matice tuhosti pre jednotlivé pruty. Následne sme ich transformovali do globálneho súradnicového systému a prepojili do jednej matice tuhosti K štruktúry bunky. V ďalšom kroku sme zaviedli predpoklady homogenizácie prvého radu a pôvodné stupne voľnosti diskrétneho modelu sme vyjadrili pomocou stupňov príslušných makroskopických pretvorení a fluktuačných stupňov voľnosti. Pre fluktuačné stupne voľnosti sme ďalej zaviedli predpoklady periodicity a u vybraného bodu sme zabránili posunom pre zabránenie posunu bunky ako tuhého celku. Na základe energetických úvah sme zostavili výraz pre energiu diskrétneho systému s uvažovaním vyššie uvedených stupňov voľnosti. Keďže sa fluktuačné stupne voľnosti dajú chápať ako vnútorné premenné diskrétneho modelu metamateriálu, je možné tieto neznáme odkondenzovať pomocou Schurových doplnkov a získať tak, po vydelení efektívnym objemom periodickej bunky, výslednú homogenizovanú tuhosť skúmaného metamateriálu. Ako posledný krok sme z vyjadrenej homogenizovanej matice tuhosti určili efektívne hodnoty Poissonovho súčiniteľa pre dva na seba kolmé smery.

Z výsledných grafov závislosti efektívneho Poissonovho súčiniteľa na zvolenom uhle α vyplýva, že absolútna hodnota Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} rastie so zväčšujúcim sa uhlom α. Poissonov súčiniteľ ν_{xz} v smere kolmom na ν_{xz} má odlišný priebeh. Jeho absolútna hodnota dosahuje maxima pri uhle $\alpha = 11.57°$, odkiaľ začne klesať a približovať sa hodnotám ν_{xz}. Výška prierezov jednotlivých prutov, z ktorých sa štruktúra metamateriálu skladá, výrazne ovplyvňuje veľkosť Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} aj ν_{zx}, pričom jeho absolútna hodnota s rastúcou výškou klesá. Po rozšírení intervalu uhlu na $\alpha \in (0°, 63°\rangle$ sme získali bod, v ktorom sa hodnoty Poissonovho súčiniteľa rovnajú a majú veľkosť $\nu = -0.9139$.

Referencie

[1] X. Zhou, L. Ren, Z. Song et al., "Advances in 3D/4D printing of mechanical metamaterials: From manufacturing to applications," Composites Part B: Engineering, roč. 254, s. 110 585, apr. 2023. DOI: 10.1016/j.compositesb.2023.110585.

[2] J. G. Ok, H. Seok Youn, M. Kyu Kwak et al., "Continuous and scalable fabrication of flexible metamaterial films via roll-to-roll nanoimprint process for broadband plasmonic infrared filters," Applied Physics Letters, roč. 101, č. 22, s. 223 102, nov. 2012. DOI: 10.1063/1.4767995.

[3] T. P. Lei, X. Z. Lu a F. Yang, "Fabrication of various micro/nano structures by modified near-field electrospinning," AIP Advances, roč. 5, č. 4, s. 041 301, apr. 2015. DOI: 10.1063/1.4901879.

[4] E. Barchiesi, M. Spagnuolo a L. Placidi, "Mechanical metamaterials: a state of the art," Mathematics and Mechanics of Solids, roč. 24, č. 1, s. 212–234, jan. 2019. DOI: 10.1177/1081286517735695.

[5] M. Sanami, N. Ravirala, K. Alderson a A. Alderson, "Auxetic Materials for Sports Applications," Procedia Engineering, roč. 72, s. 453–458, 2014. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.06.079.

[6] G. Imbalzano, P. Tran, T. D. Ngo a P. V. Lee, "Three-dimensional modelling of auxetic sandwich panels for localised impact resistance," Journal of Sandwich Structures & Materials, roč. 19, č. 3, s. 291–316, máj 2017. DOI: 10.1177/1099636215618539.

[7] Z. Tao, X. Ren, A. G. Zhao et al., "A novel auxetic acoustic metamaterial plate with tunable bandgap," International Journal of Mechanical Sciences, roč. 226, s. 107 414, júl 2022. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107414.

[8] M. N. Ali, J. J. C. Busfield a I. U. Rehman, "Auxetic oesophageal stents: structure and mechanical properties," Journal of Materials Science: Materials in Medicine, roč. 25, č. 2, s. 527–553, feb. 2014. DOI: 10.1007/s10856-013-5067-2.

[9] J. R. Wright, M. K. Burns, E. James, M. R. Sloan a K. E. Evans, "On the design and characterisation of low-stiffness auxetic yarns and fabrics," Textile Research Journal, roč. 82, č. 7, s. 645–654, máj 2012. DOI: 10.1177/0040517512436824.

[10] A. Airoldi, M. Crespi, G. Quaranti a G. Sala, "Design of a Morphing Airfoil with Composite Chiral Structure," Journal of Aircraft, roč. 49, č. 4, s. 1008–1019, júl 2012. DOI: 10.2514/1.C031486.

[11] J. Wang, G. Dai a J. Huang, "Thermal Metamaterial: Fundamental, Application, and Outlook," iScience, roč. 23, č. 10, s. 101 637, okt. 2020. DOI: 10.1016/j.isci.2020.101637.

[12] M. Doškář a J. Novák, "A jigsaw puzzle framework for homogenization of high porosity foams," Computers & Structures, roč. 166, s. 33–41, apr. 2016. DOI: 10.1016/j.compstruc.2016.01.003.

[13] R. Lakes, "Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio," Science, roč. 235, č. 4792, s. 1038–1040, feb. 1987. DOI: 10.1126/science.235.4792.1038.