

Ztráta stability prostě podepřeného Timošenkova prutu

Evžen Korec

České vysoké učení technické v Praze

12. září 2016

Vedoucí seminární práce:
prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Osnova

- 1 Cíle práce a předpoklady úlohy
- 2 Timošenkova teorie ohybu prutu
- 3 Řídící rovnice a jejich řešení pro prizmatický prut
- 4 Řídící rovnice a jejich řešení pro neprizmatický prut

Cíl práce

Cíl práce

Nalézt velikost axiální síly, která způsobí ztrátu stability ideálního prostě podepřeného Timošenkova prutu obecného průřezu.

Předpoklady řešení úlohy

Předpoklady o prutu

- Prut je staticky určitě podepřen (jako prostý nosník)
- Střednice **nedeformovaného** prutu je úsečka
- Prut je materiálově dokonale homogenní, materiál je z hlediska mechanických vlastností izotropní
- Při působení zatížení se prut deformuje lineárně pružně

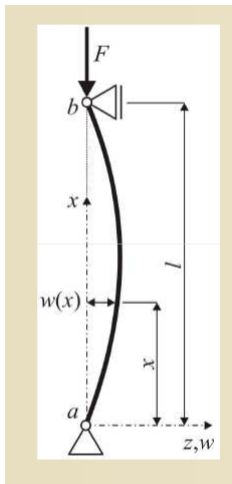
Zatížení působící na prut

- Na prut působí **pouze** vnější axiální síla P

Vztah mezi zatížením a deformací prutu

- Používáme zjednodušený vztah mezi zatížením prutu a jeho deformací - Timošenkovu teorii ohybu prutu

Timošenkova teorie ohybu prutu



Předpoklady řešení úlohy

Způsob analýzy ztráty stability prutu

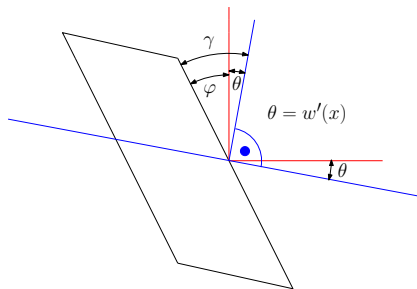
Použijeme teorii 2. řádu.

Timošenkova teorie ohybu prutu

Předpoklady teorie

- Průřezy přímého prutu kolmé na deformovanou střednici, se při deformaci pootočí o určitý úhel - zůstávají rovinné
- Deformované průřezy nemusí být kolmé na deformovanou střednici - zobecnění Eulerovy-Bernoulliovy teorie
- Pootočení deformovaných průřezů od myšlené kolmice na deformovanou střednici je důsledkem působení posouvajících sil Q

Timošenkova teorie ohybu prutu



$$\gamma(x) = \theta(x) + \varphi(x) = \frac{Q}{GA_0}$$

$$A_0 = A/m$$

A - plocha průřezu m - opravný
smykový koeficient

Pro čtvercový průřez platí
 $m \approx 1.2$

Pro kruhový průřez $m \approx 1.11$

Timošenkova teorie ohybu prutu

Geometrické rovnice

$$\gamma(x) = \theta(x) + \varphi(x), \quad (1)$$

$$\theta(x) = w'(x), \quad (2)$$

$$\kappa(x) = \varphi'(x), \quad (3)$$

kde κ je někdy označována jako pseudokřivost střednice.

Timošenkova teorie ohybu prutu

Materiálové rovnice

$$Q(x) = GA_0\gamma(x), \quad (4)$$

$$M(x) = EI\kappa(x), \quad (5)$$

kde E je Youngův modul pružnosti a I je moment setrvačnosti průřezu.

Timošenkova teorie ohybu prutu

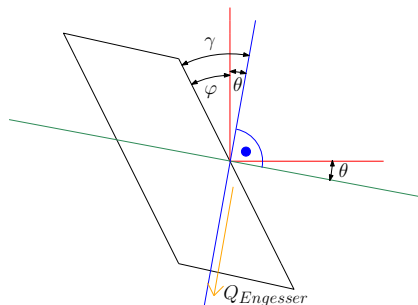
Statická rovnice pro ohybový moment M

$$M(x) = Pw(x). \quad (6)$$

Statické rovnice pro posouvající sílu Q - Engesserova formulace

Engesser 1889,1891

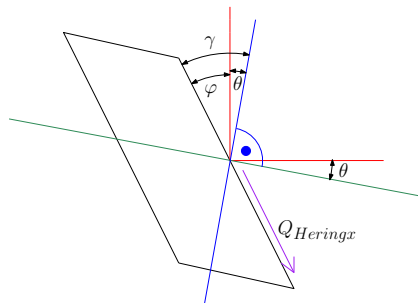
$$Q(x) = P\theta(x) = Pw'(x) = M'(x).$$



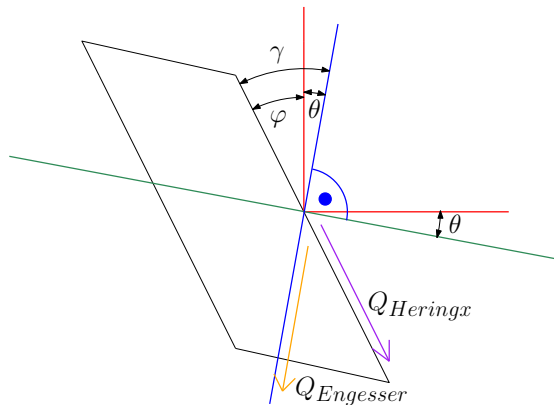
Statické rovnice pro posouvající sílu Q - Haringxova formulace

Haringx 1942 - Ztráta stability spirálových pružin

$$Q(x) = -P\varphi(x).$$



Srovnání Haringxovy a Engesserovy formulace



Okrajové podmínky

$$w(0) = w(L) = 0$$

$$M(x) = Pw(x) = EI\varphi'(x)$$

\Rightarrow

$$Pw(0) = EI\varphi'(0) \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

$$Pw(L) = EI\varphi'(L) \Rightarrow \varphi'(L) = 0$$

Řídící rovnice podle Engesserovy formulace

$$\frac{P}{GA_0} w'(x) = w'(x) - \varphi(x), \quad (7)$$

$$-Pw(x) = EI\varphi'(x). \quad (8)$$

Kritická síla podle Engesserovy formulace

$$w \in C^2\langle 0, L \rangle, w(0) = w(L) = 0, \varphi \in C^1\langle 0, L \rangle, \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$$

$$w'' + \frac{P}{EI\left(1 - \frac{P}{GA_0}\right)} w = 0, \quad (9)$$

$$-w'' - \lambda w = 0, \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{P}{EI\left(1 - \frac{P}{GA_0}\right)}. \quad (11)$$

Kritická síla podle Engesserovy formulace

$$P_{Eng} = \frac{IGEA_0\pi^2}{GA_0L^2 + EI\pi^2}, \quad (12)$$

Kritická síla může v tomto případě být pouze kladná, tedy tlaková.

Řídící rovnice podle Haringxovy formulace

$$-P\varphi(x) = GA_0(x)(\varphi(x) + w'(x)), \quad (13)$$

$$Pw(x) = EI(x)\varphi'(x). \quad (14)$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace

$$w \in C^2\langle 0, L \rangle, w(0) = w(L) = 0, \varphi \in C^1\langle 0, L \rangle, \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$$

$$w'' + \frac{P(P + GA_0)}{IGEA_0} w = 0, \quad (15)$$

$$-w'' - \lambda w = 0, \quad (16)$$

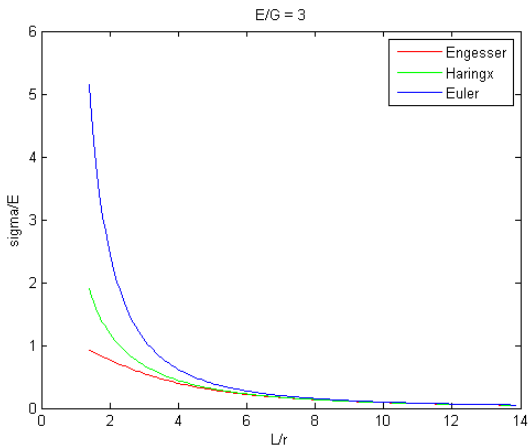
$$\lambda = \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{P(P + GA_0)}{IGEA_0}. \quad (17)$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace

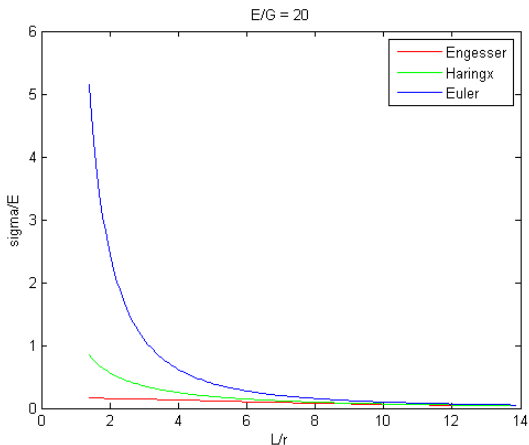
$$P_{Har} = \frac{-GA_0 \pm \sqrt{G^2 A_0^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} IG EA_0}}{2}, \quad (18)$$

Kritická síla je kladná i záporná, tedy tlaková i tahová

Porovnání Eulerovy, Engesserovy a Haringxovy tlakové kritické síly pro $E/G = 3$



Porovnání Eulerovy, Engesserovy a Haringxovy tlakové kritické síly pro $E/G = 20$



Tahová kritická síla

$$P_{Har} = \frac{-GA_0 \pm \sqrt{G^2 A_0^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} IGEA_0}}{2},$$

$$P_{Har} \approx -GA_0.$$

Tahová kritická síla

$$P_{Har} \approx -GA_0$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad 0 < \nu < 0,5 \Rightarrow G = \left(\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}\right) E$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_{Har} \approx -\frac{P_{Har}}{A_0} \approx -\left(\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}\right) E$$

$$\epsilon_{Har} \approx -\left(\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}\right)$$

Tahová kritická síla

James M. Kelly 2003 - Tension Buckling in Multilayer Elastomeric Bearings



Tahová kritická síla

S. Caddemi, I. Calió, F. Cannizzaro 2015 - Tensile and compressive buckling of columns with shear deformation singularities

Sendvičové nosníky a panely



Kritická síla podle Engesserovy formulace

Huang, Zhang, Rong 2015 - Buckling Analysis of of Axially Functionally Graded and Non-Uniform Beams Based on Timoshenko Theory

$$M_4(x)w^{(4)}(x) + M_3(x)w^{(3)}(x) + M_2(x)w''(x) + M_1(x)w'(x) = 0. \quad (19)$$

$$M_1(x) = -P \left[EI''(x) \left(\frac{1}{GA_0} \right)' + 2EI'(x) \left(\frac{1}{GA_0} \right)'' + EI(x) \left(\frac{1}{GA_0} \right)''' \right], \quad (20)$$

Řídící rovnice podle Haringxovy formulace

$$-P\varphi(x) = GA_0(x)(\varphi(x) + w'(x)), \quad (21)$$

$$Pw(x) = EI(x)\varphi'(x). \quad (22)$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace

$$w \in C^1\langle 0, L \rangle, w(0) = w(L) = 0, \varphi \in C^2\langle 0, L \rangle, \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$$

$$- (EI(x)\varphi'(x))' = \left(\frac{P^2}{GA_0(x)} + P \right) \varphi(x). \quad (23)$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace - variační formulace

$$H = \{\varphi; \int_0^L (\varphi')^2 dx < \infty, \varphi'(0) = 0, \varphi'(L) = 0\}$$

$$\int_0^L EI(x)\varphi'(x)v'(x)dx - P^2 \int_0^L \frac{1}{GA_0(x)}\varphi(x)v(x)dx \quad (24)$$

$$-P \int_0^L \varphi(x)v(x)dx = 0 \quad \forall v(x) \in H.$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace - variační formulace

$$P = \frac{-\int_0^L \varphi^2 \pm \sqrt{\left(\int_0^L \varphi^2\right)^2 + 4 \int_0^L \frac{1}{GA_0} \varphi^2 \int_0^L EI(\varphi')^2}}{2 \int_0^L \frac{1}{GA_0} \varphi^2}. \quad (25)$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace - MKP

Úlohu řešíme metodou konečných prvků na H_p , kde $H_p \subset H$ s
bázovými funkcemi $\psi_i(x)$, $x \in \langle 0, L \rangle$ a $i = 1 \dots n$.

Platí tedy

$$\varphi_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i, \quad i = 1 \dots n, \quad (26)$$

kde α_i jsou neznámé reálné koeficienty.

$$\int_0^L EI(x) \varphi_a'(x) \psi_i'(x) dx - P^2 \int_0^L \frac{1}{GA_0(x)} \varphi_a(x) \psi_i(x) dx \quad (27)$$
$$- P \int_0^L \varphi_a(x) \psi_i(x) dx = 0 \quad \forall \psi_i(x).$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace - Kvadratický problém vlastních čísel - linearizace

$$- \mathbf{K} \mathbf{u} + P^2 \mathbf{M} \mathbf{u} + P \mathbf{R} \mathbf{u} = 0. \quad (28)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_1 = P \mathbf{u}$$

\Rightarrow

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_2 - P \mathbf{M} \mathbf{v}_1 - \mathbf{R} \mathbf{v}_1 = 0$$

tedy

$$P \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \Rightarrow \mathbf{K} P \mathbf{v}_2 = \mathbf{K} \mathbf{v}_1$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace - Kvadratický problém vlastních čísel - linearizace

Získáváme tedy soustavu rovnic pro neznámé vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{v} = P \begin{pmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{pmatrix} \mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2)^T.$$

Kritická síla podle Haringxovy formulace - Kvadratický problém vlastních čísel - iterační řešení

Guo, Lin a Wang 1995 - Numerical Solutions for Large Sparse Quadratic Eigenvalue Problems

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = P(\lambda\mathbf{M} + \mathbf{R})\mathbf{u}. \quad (29)$$

1)

$$\lambda = \lambda_0 \Rightarrow P = P_0$$

2)

$$\lambda = P_0 \Rightarrow P = P_1$$

...

n)

$$|\lambda_n - P_n| < \epsilon$$

Závěry

Závěry

Děkuji za pozornost