MODÁLNÍ ANALÝZA PRUTOVÉHO NOSNÍKU

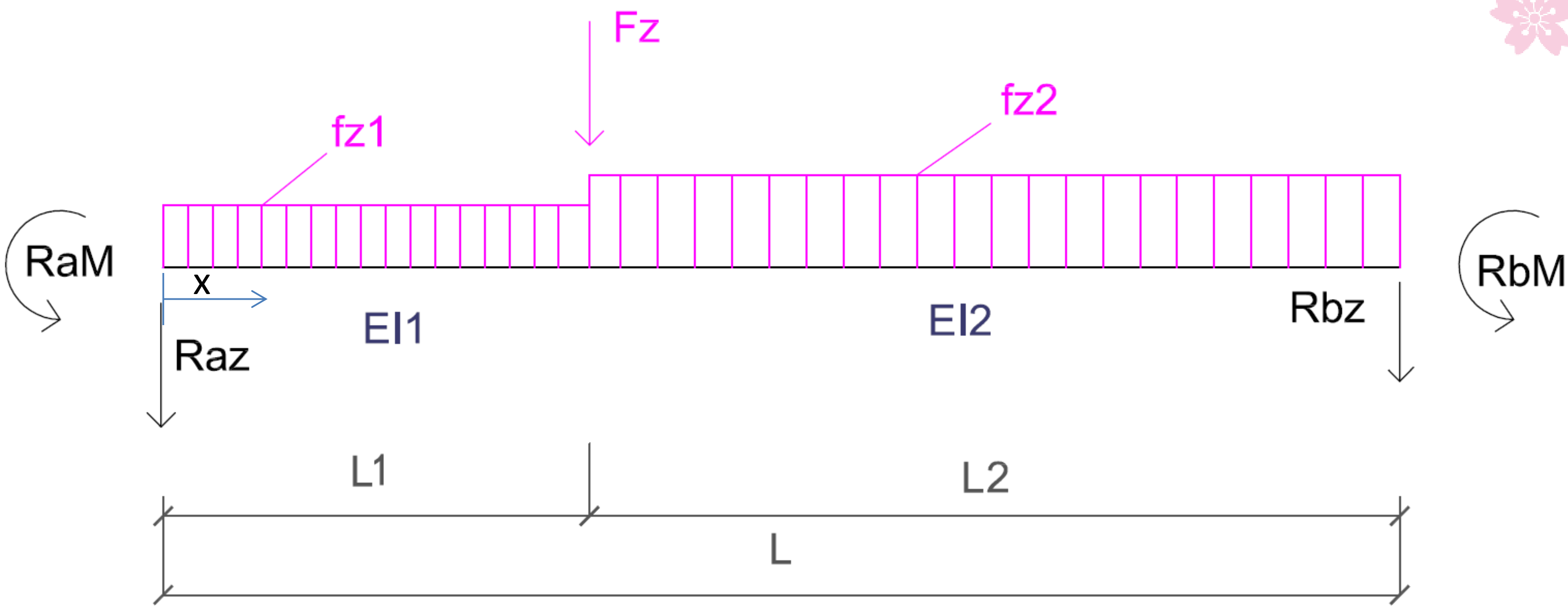
PRUŽNOST PEVNOST (132PRPE) zimní semestr 2013/2014

KAROLÍNA ŠORELOVÁ

1) ODEZVA KONSTRUKCE NA STATICKÉ ZATÍŽENÍ

2) VÝPOČET MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ KONSTRUKCE

STATICKÁ ČÁST



Výpočet My, φ a w

$$\boxed{My = -EI\frac{d^2w}{dx^2}}$$

$$My1 = -Raz^*x - RaM - fz1\frac{x^2}{2}$$

$$My2 = -Raz^*x - RaM - fz1\frac{x^2}{2} + fz1\frac{(x-l1)^2}{2} - Fz(x\text{-}l1) - fz2\frac{(x-l1)^2}{2}$$

*Výpočet potenciální energie

Potenciální energie vnitřních sil $\frac{1}{2}\int_V \sigma_x \varepsilon_x dV$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_y}{EI_y} z$$

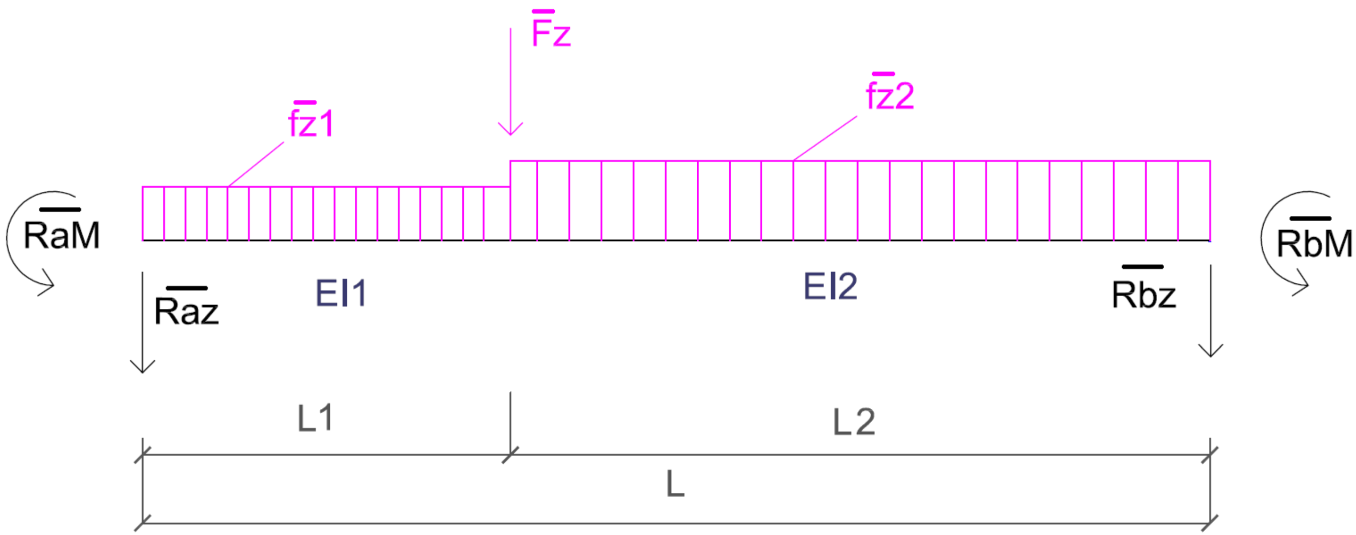
=>

$$\frac{1}{2}\int_L \int_A \frac{M_y}{I_y}\frac{M_y}{EI_y} z^2 dA\, dx = \boxed{\frac{1}{2}\int_L \frac{{M_y}^2}{EI_y} dx}$$

Potenciální energie vnějších sil

$$\frac{1}{2}\left[\int_L f_z w dx + \sum_{i=1}^{n} F_z w_i + \sum_{i=1}^{n} R_i \Delta_i\right]$$

* Virtuální nosník



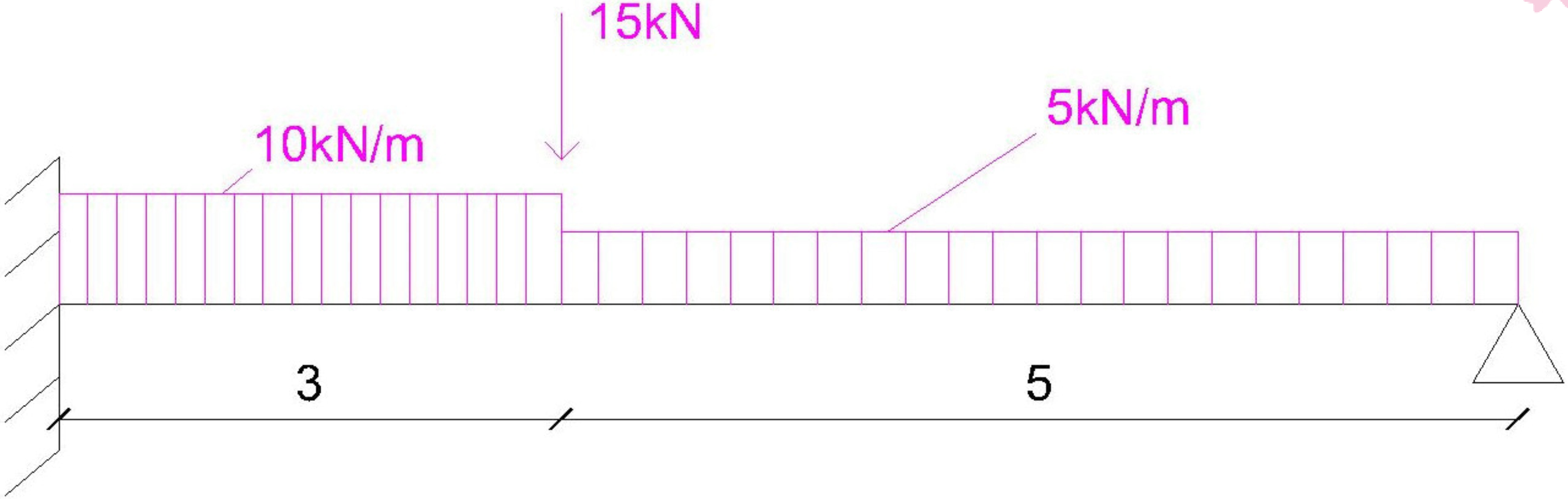
Výpočet virtuální práce:

vnitřních sil $$\frac{1}{2}\int_L \frac{M_y \overline{M_y}}{EI_y}\,dx$$

vnějších sil $$\frac{1}{2}\left[\int_L \overline{f_z}\,w\,dx + \sum_{i=1}^{n} \overline{F_z} w_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{R_i}\,\Delta_i\right]$$

Ukázkový příklad

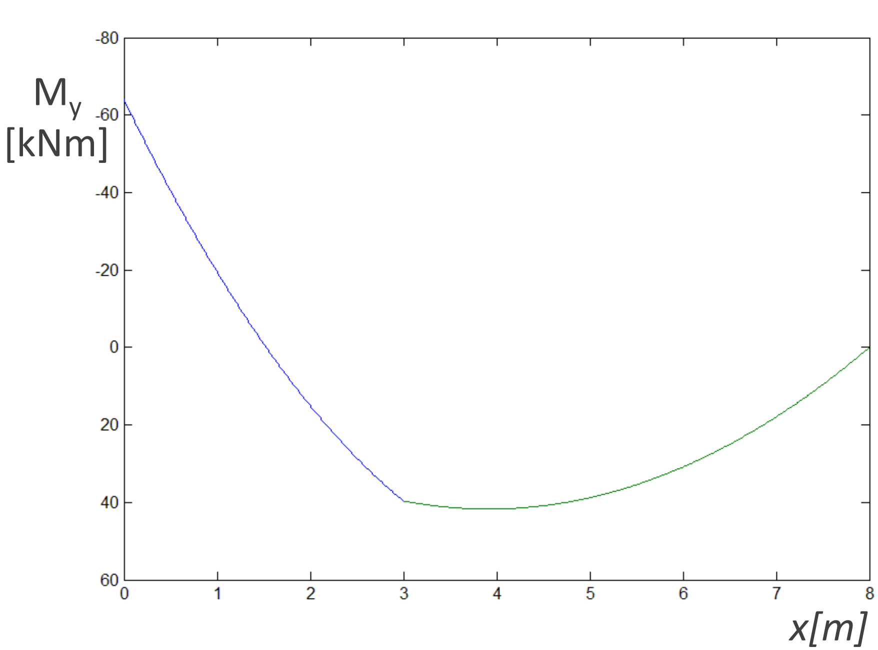
Zadání reálného nosníku:

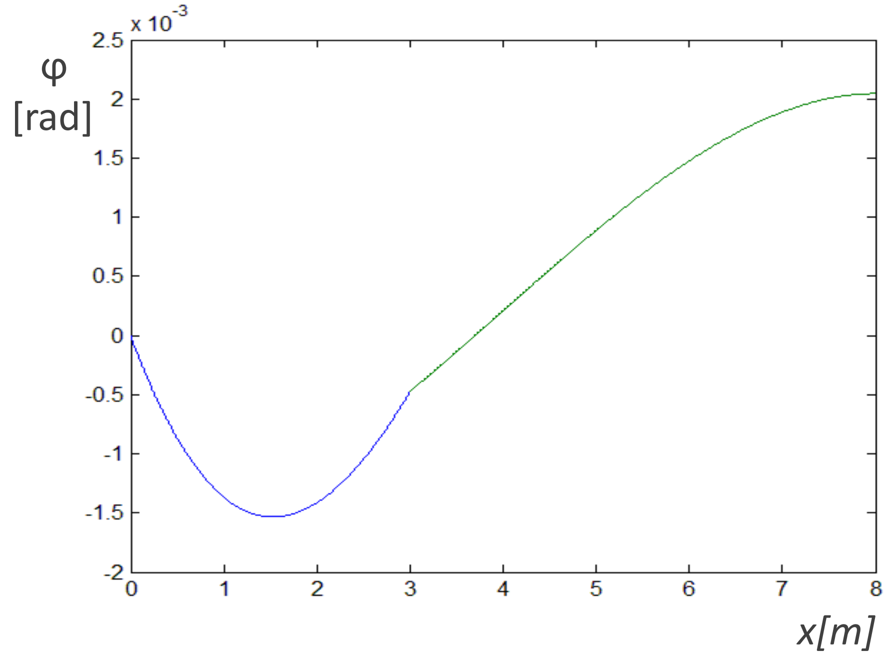


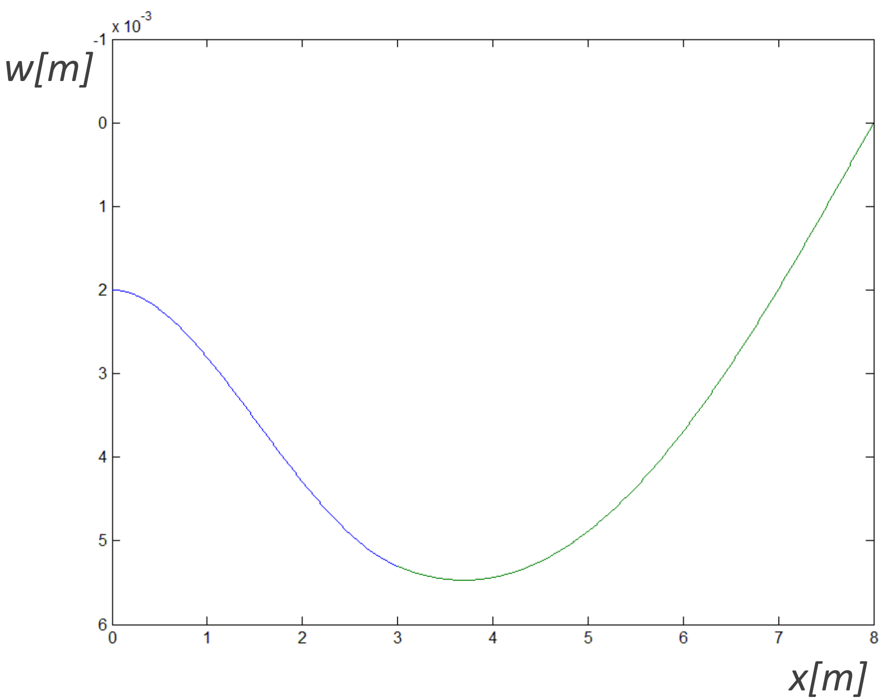
$EI1 = 30e3\ kNm^2$

$EI2 = 60e3\ kNm^2$

$w_0 = 0.002m$







Mmax = 41.7171 kNm

Mmin = -64.1018 kNm

φmax = 0,002 rad

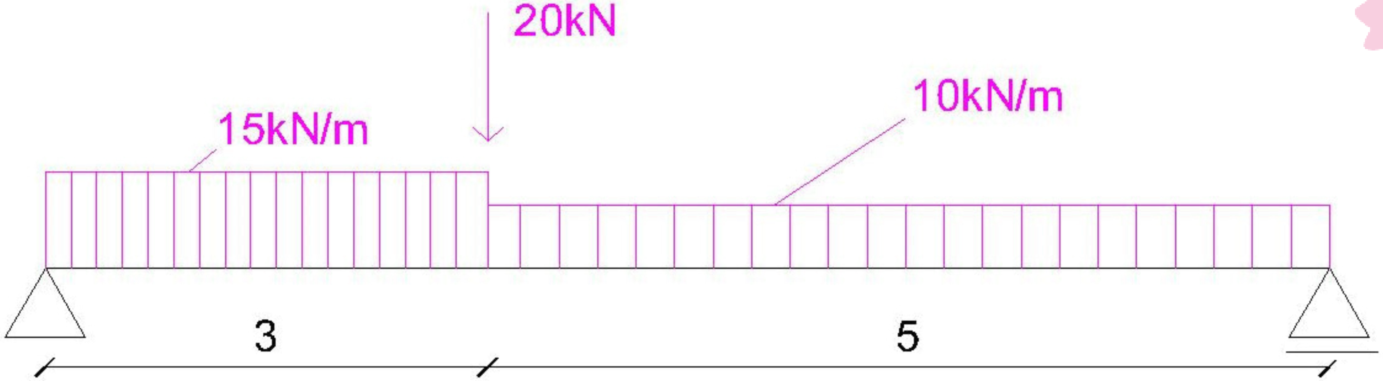
φmin = -0.0015 rad

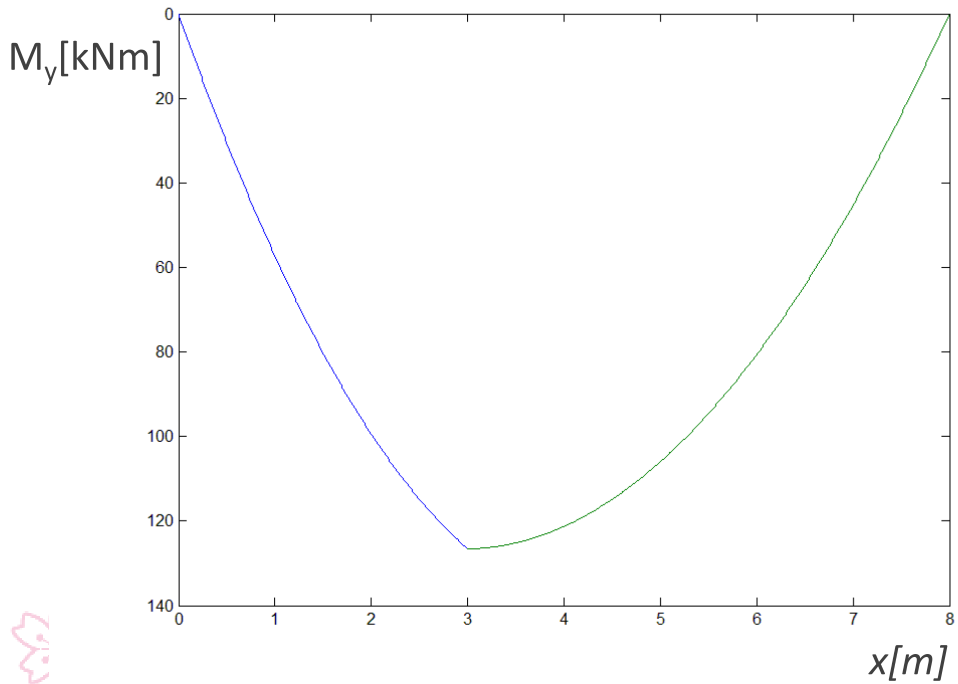
wmax = 0.0055 m

Epu = 0.0909kJ

Epv = 0.0909kJ

Zadání virtuálního nosníku:





Mmax = 126.5625 kNm

Epu = 0.1630kJ

Epv = 0.1630kJ

VÝPOČET VLASTNÍCH ČÍSEL A TVARŮ KONSTRUKCE

a) Spojitá metoda

b) Diskrétní metoda

SPOJITÁ METODA

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \omega^2 m w(x)$$

$$\frac{\omega^2 m}{EI} = \beta^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4w(x)}{dx^4} - \beta^4 w(x) = 0$$

$$w(x) = Ae^{\alpha x} \quad \Rightarrow \quad \alpha^4 - \beta^4 = 0$$

$$\boxed{w(x) = C1\cosh\beta x + C2\sinh\beta x + C3\cos\beta x + C4\sin\beta x}$$

ω – vlastní frekvence

Okrajové podmínky:

$$w(0) = 0 \qquad w(\mathrm{L}) = 0$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = 0 \qquad \frac{dw(L)}{dx} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ cosh\beta L & sinh\beta L & cos\beta L & sin\beta L \\ sinh\beta L & cosh\beta L & -sin\beta L & cos\beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{bmatrix} = 0$$

$1 - \cosh\beta L \cos\beta L = 0 \qquad \Rightarrow \beta_i$

Normování w(x)

$$\int_0^L m w_n^2(x)\,dx = 1$$

Výpočet ω

$$\frac{\omega^2 m}{EI} = \beta^4 \quad => \quad \boxed{\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

DISKRÉTNÍ METODA

Vlastní kmitání: $K^*w(t) + M^*w''(t) = 0$

K – matice tuhosti

M – matice hmotnosti

w – posunutí

$$w(t) = \phi_n(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(K - \omega^2 M)\,\phi_n = 0} \qquad \omega^2 = \lambda$$

ω – vlastní frekvence

ϕ_n *– vlastní tvar*

$$(K - \lambda M)\, \phi_n = 0$$

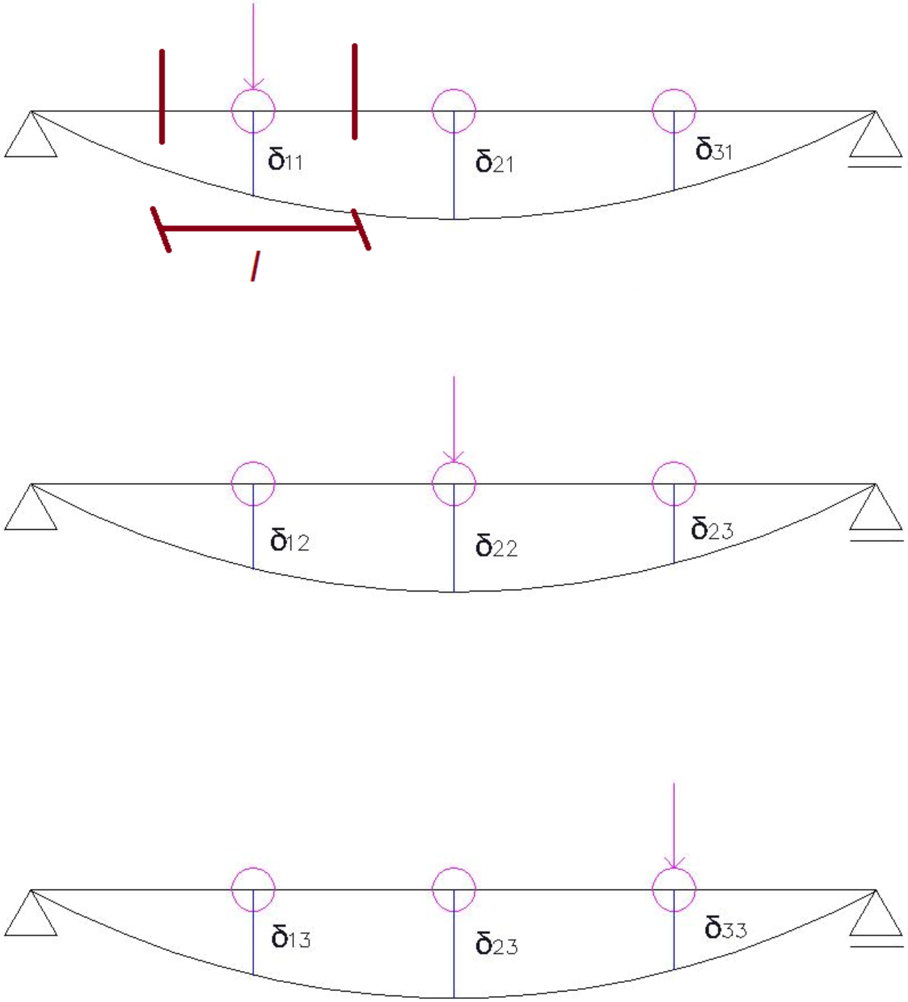
$$\det(K - \lambda M) = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_i$$

δ – matice poddajnosti

$$K^*\delta = I$$

$$\boxed{(I - \lambda\, \delta\, M)\, \phi_n = 0}$$

n = 3



$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

$m_i = l * \eta$

Normování vlastních tvarů

- normování vzhledem k matici hmotnosti $$\phi_n = \frac{\phi_i}{\sqrt{\phi_i^T M \phi_i}}$$

Modální matice

$$\Phi = \left[\begin{pmatrix} \phi_{1(1)} \\ \phi_{2(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1(2)} \\ \phi_{2(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots \right]$$

Spektrální matice

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

KONTROLA

Pro normované tvary platí vztahy:

$$\phi^T K \phi = \Omega^2$$

$$\phi^T M \phi = I$$

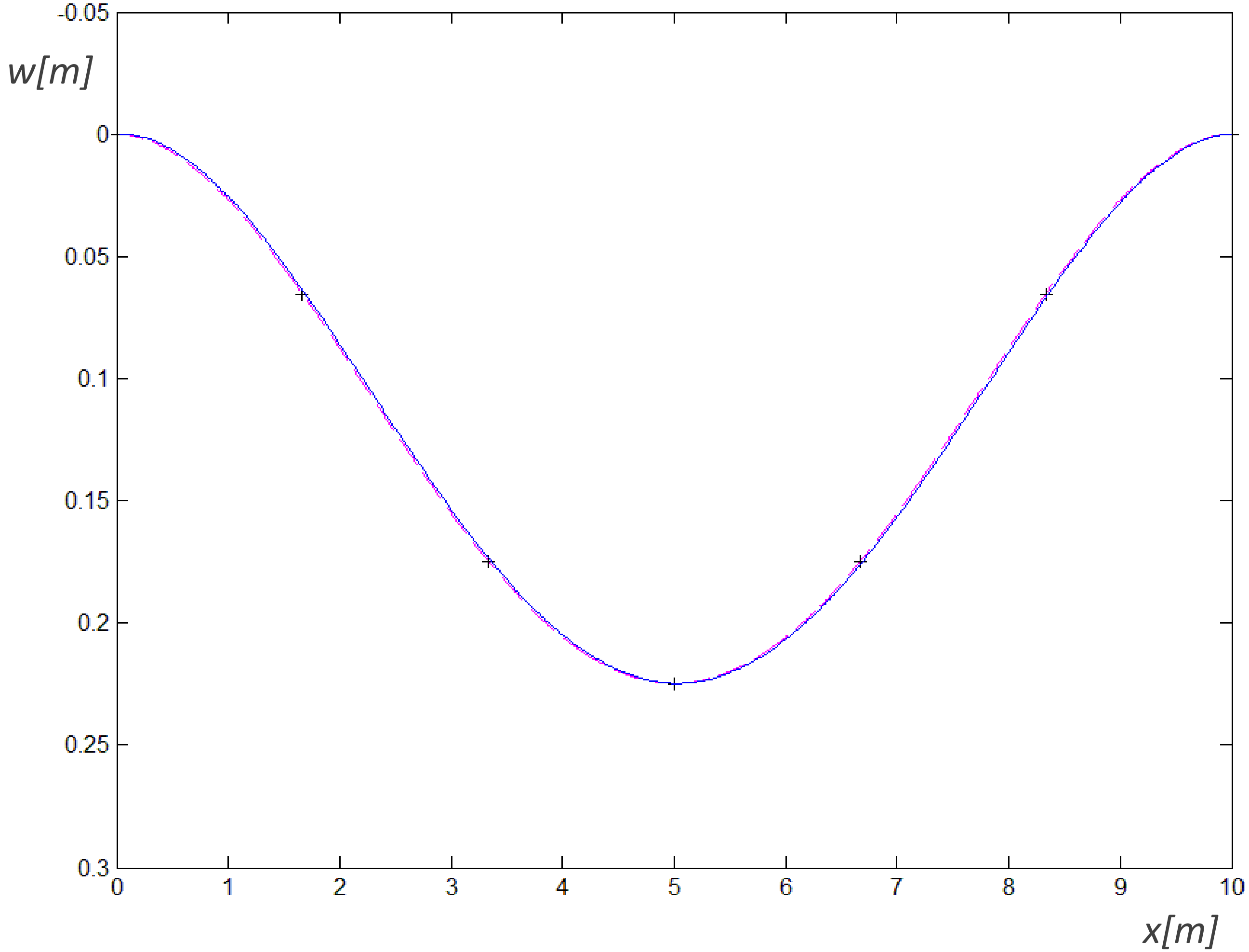
POROVNÁNÍ METOD

Zadání :

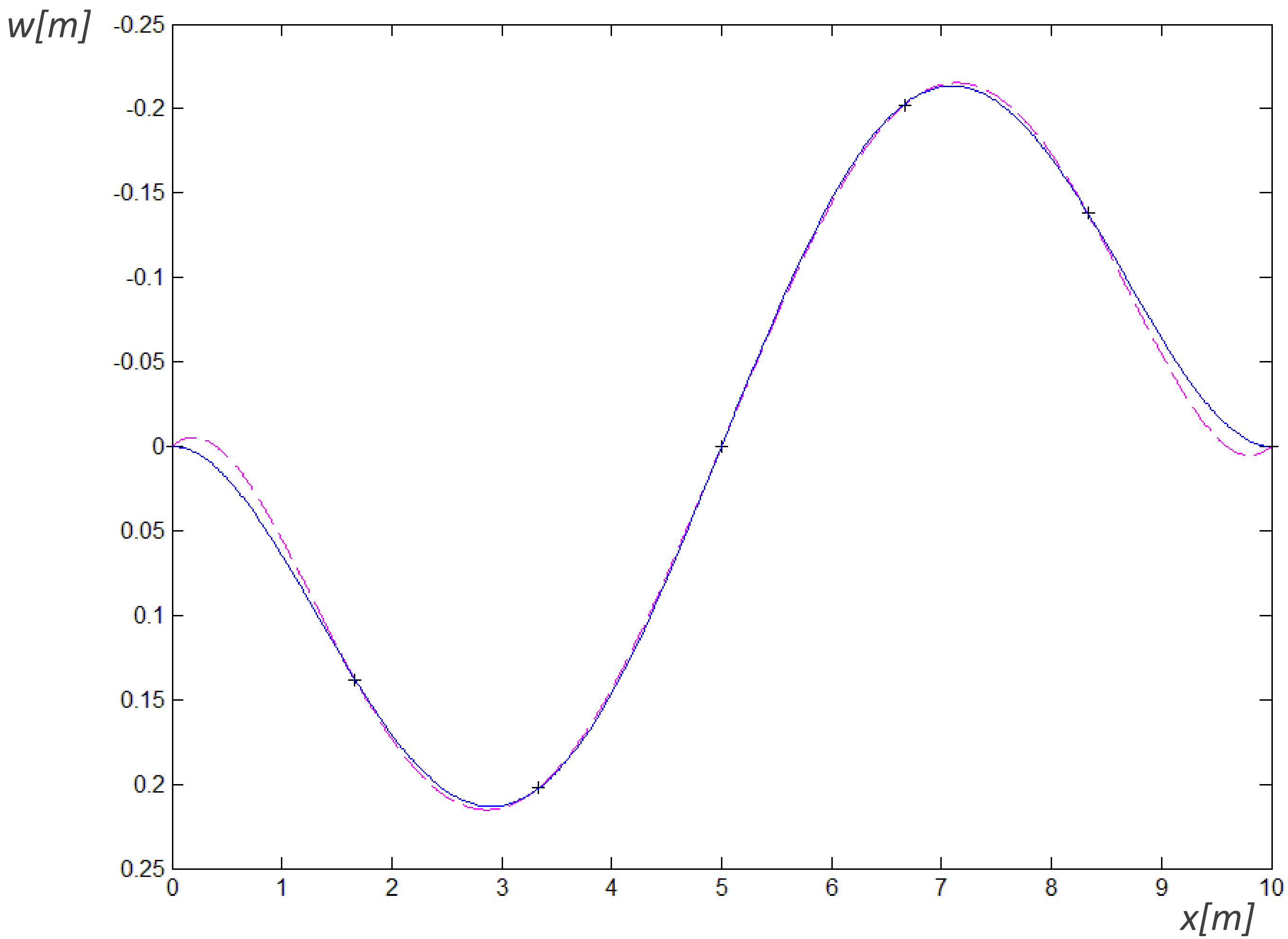
$L = 10m$ $EI = 100e3 kNm^2$ $\eta = 5t/m$

[1/s]	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_s	31.6406	87.2185	170.9832	282.6439	422.2212	589.7133	785.1256
$\omega_{d(5)}$	31.6272	86.8269	166.8960	258.1321	328.6382	-	-
$\omega_{d(7)}$	31.6370	87.1252	170.0922	277.4919	400.4131	517.7699	599.3215

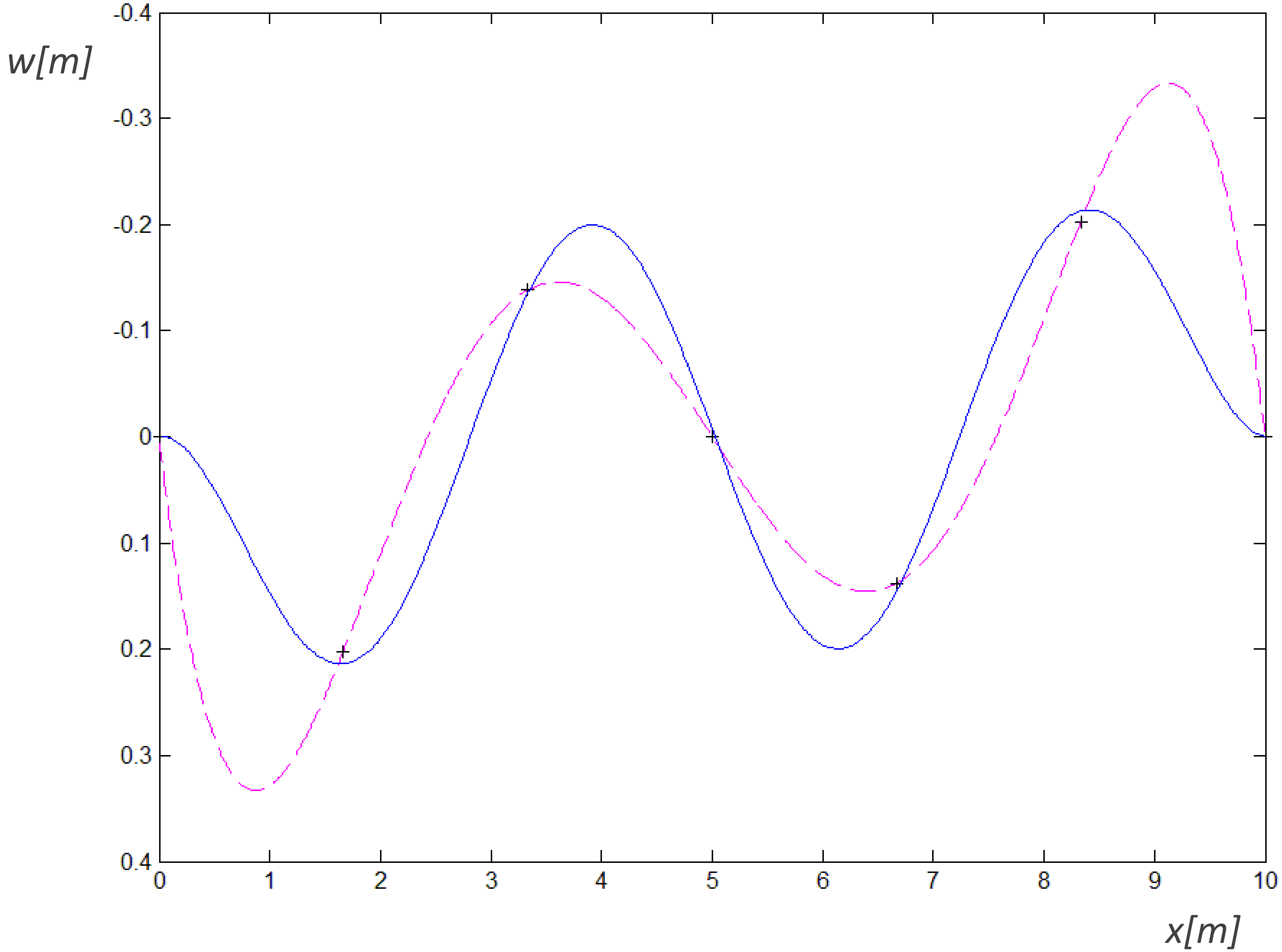
1. vlastní tvar



2. vlastní tvar

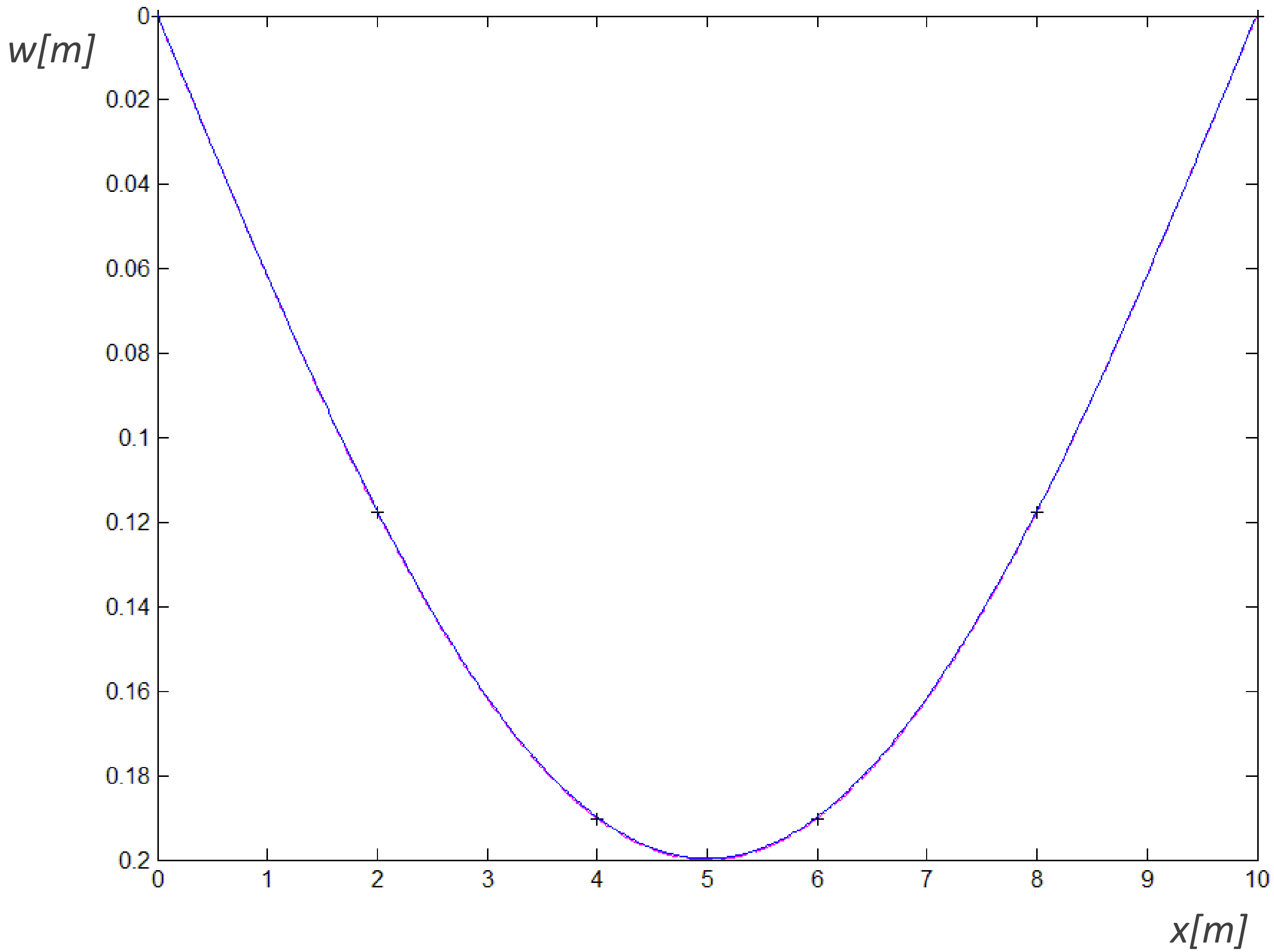


4. vlastní tvar

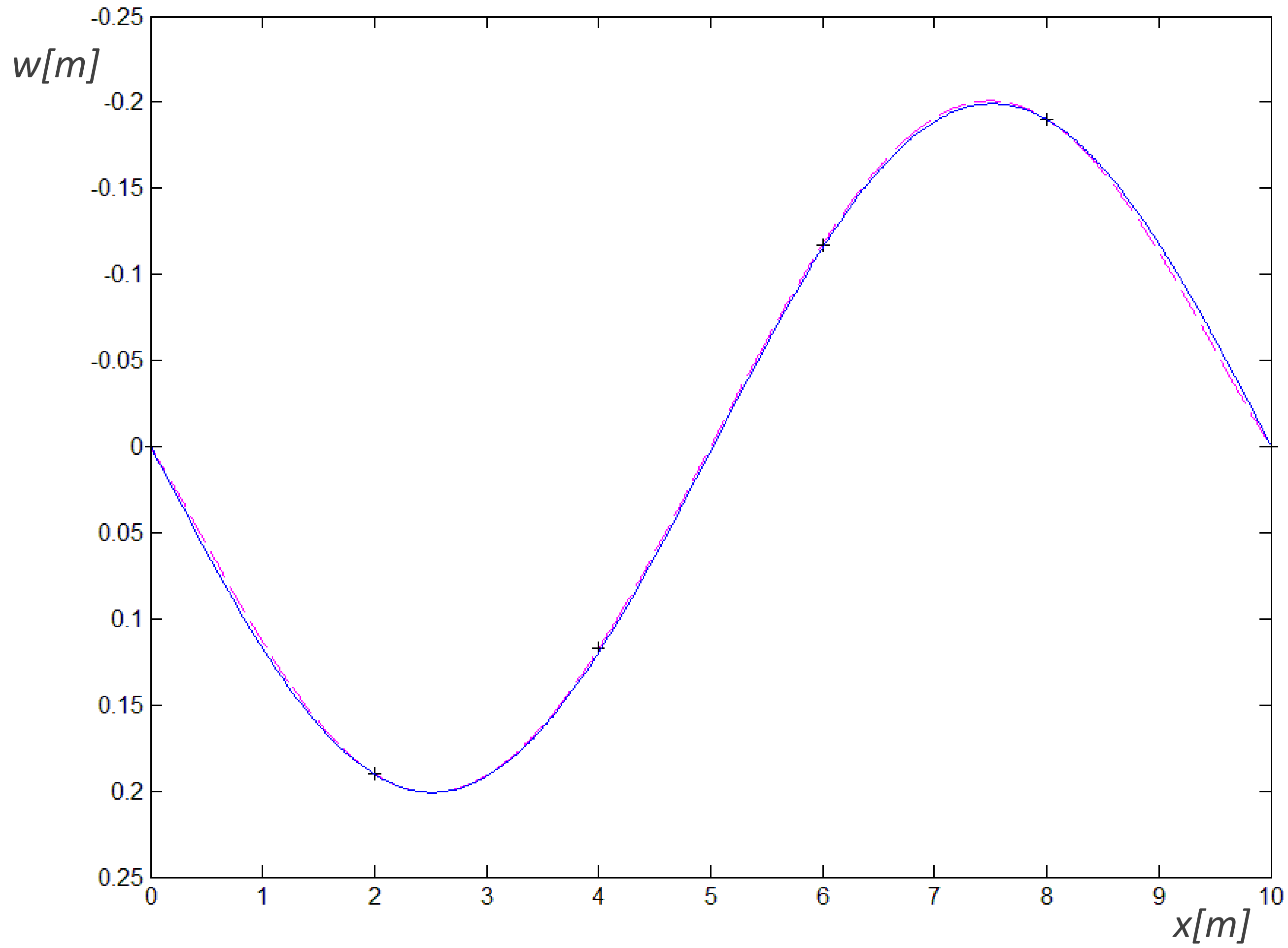


[1/s]	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
ω_s	13.9577	55.8309	125.6195	223.3236	348.9431	502.4793	683.9221
$\omega_{d(4)}$	13.9561	55.6928	123.2881	203.0184	-	-	-
$\omega_{d(7)}$	13.9575	55.8139	125.3893	221.7025	340.8873	470.7225	581.4776

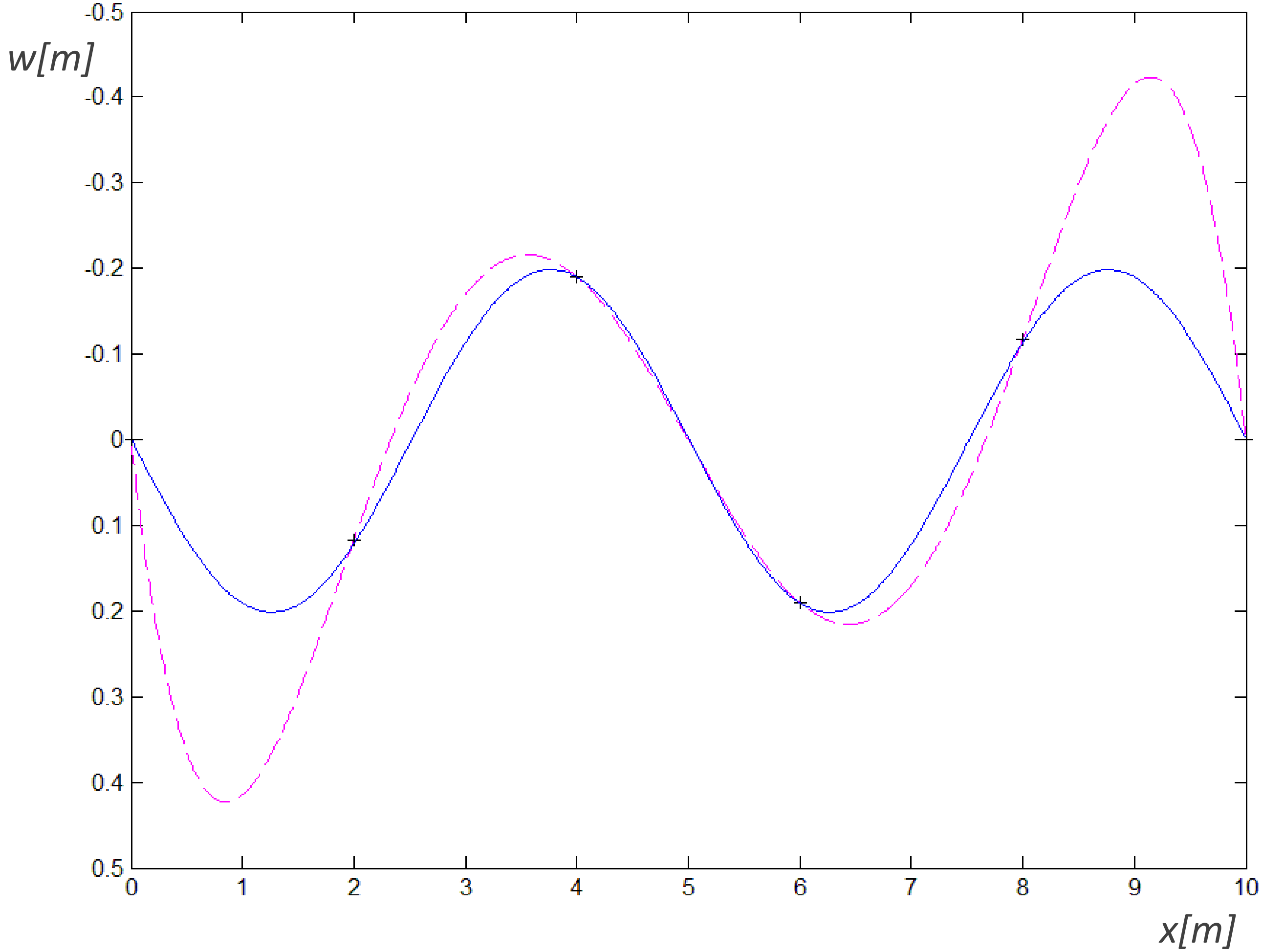
1. vlastní tvar



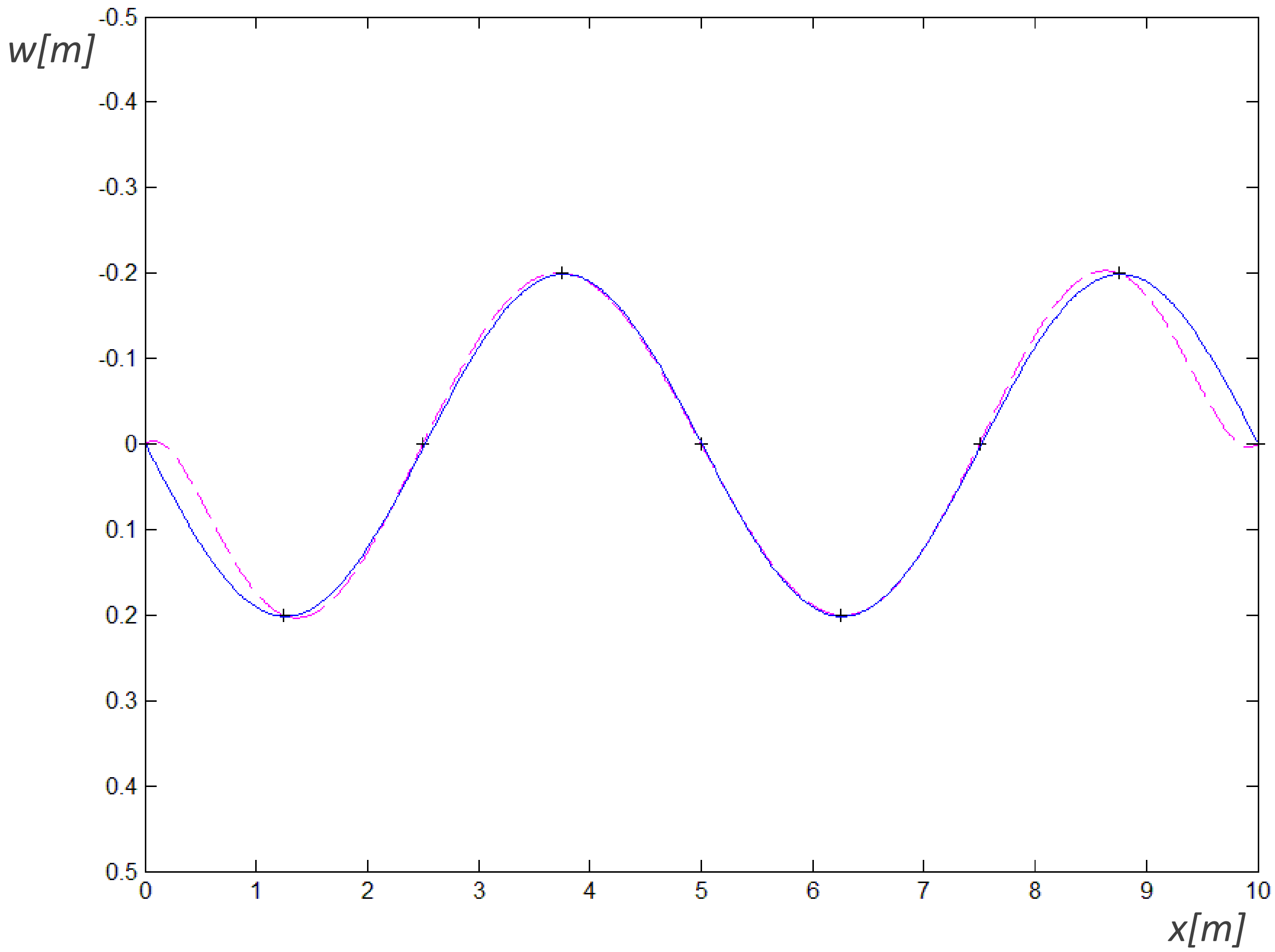
2. vlastní tvar



4. vlastní tvar

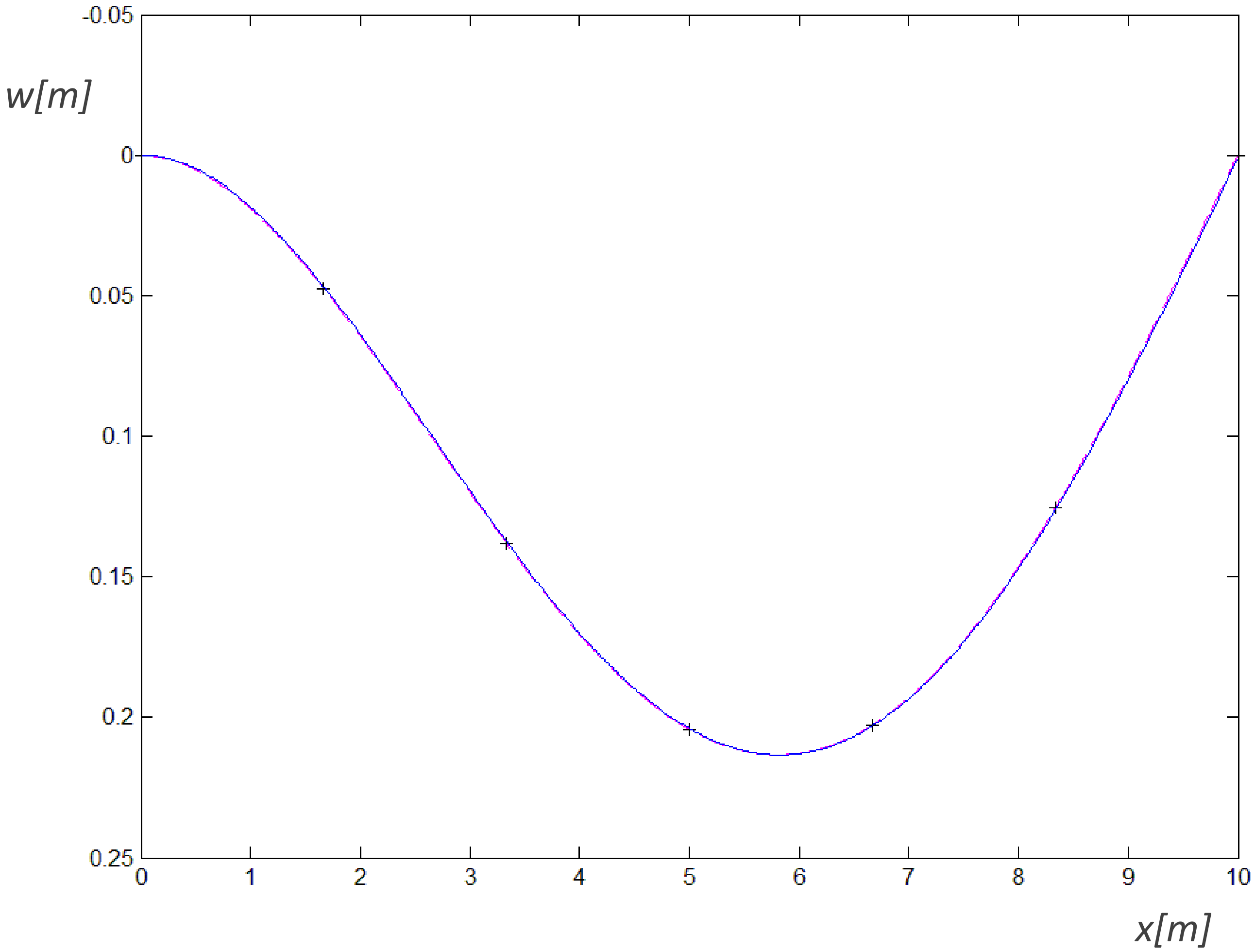


4. vlastní tvar

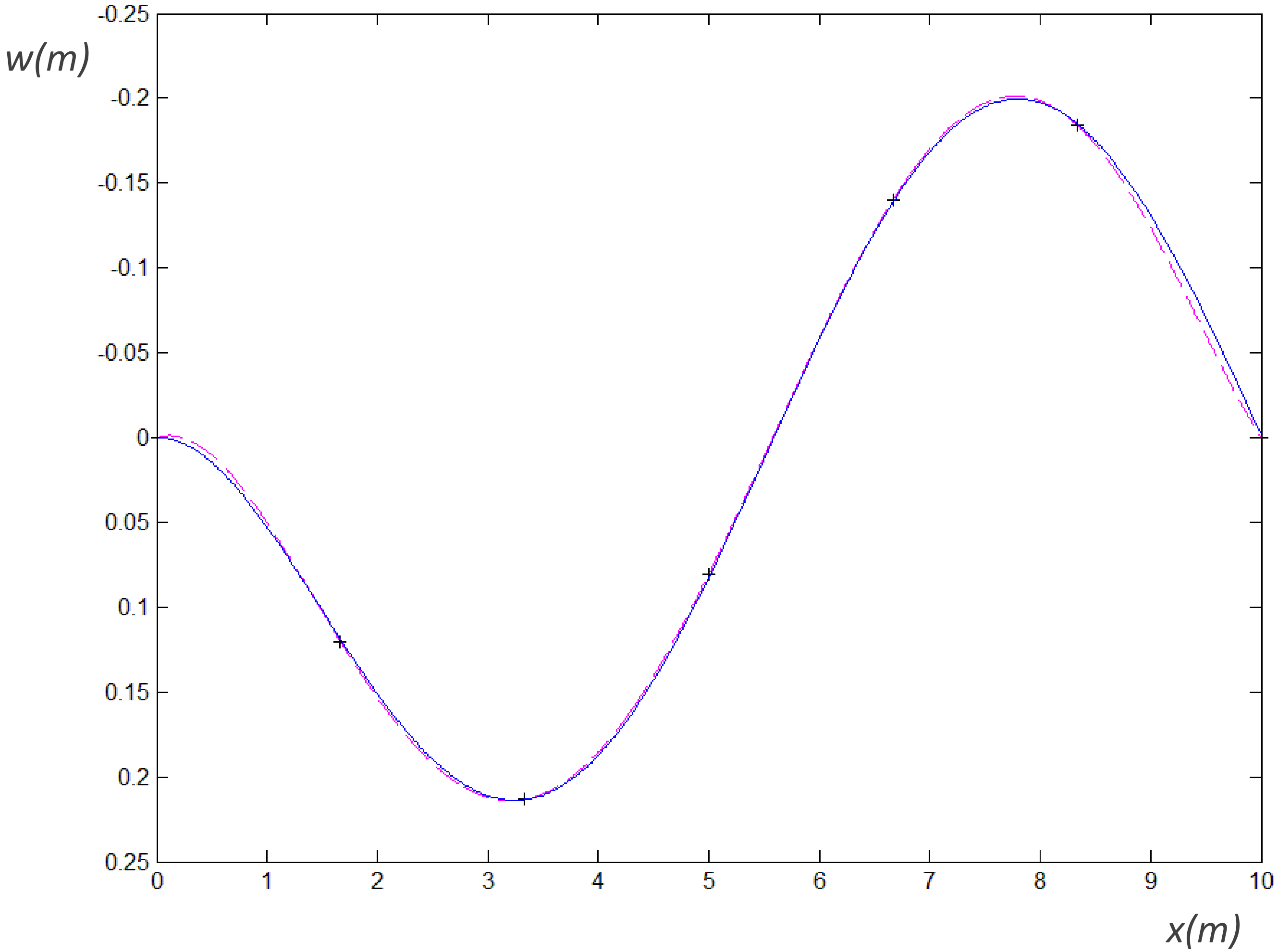


[1/s]	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
ω_s	21.8046	70.6609	147.4285	252.1114	384.7099
$\omega_{d(5)}$	21.8010	70.5002	145.4135	238.0642	320.5622

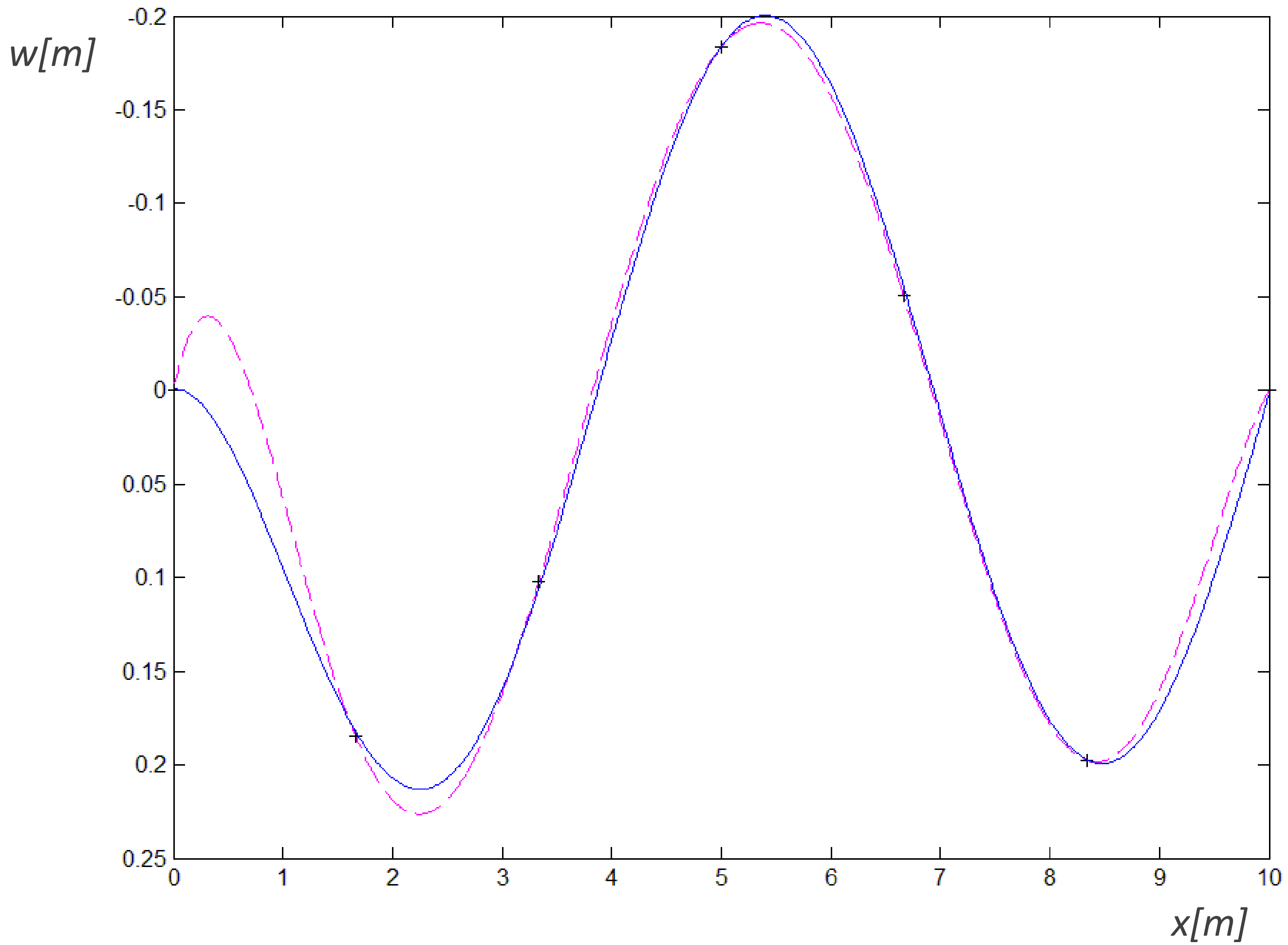
1. vlastní tvar



2. vlastní tvar



3. vlastní tvar



ZÁVĚR

- Diskrétní metoda je pro nízké vlastní tvary (1,2,3) poměrně přesná, ale přesnost řešení klesá pro vyšší vlastní tvary => je nutné zvýšit počet stupňů volnosti

- Spojitá metoda často (pro určité jednoduché případy lze získat i exaktní výsledek) vyžaduje numerické řešení rovnic. Tyto rovnice jsou obecné, tvořené funkcemi goniometrickými (sinus, cosinus) a hyperbolickými (sinus a cosinus hyperbolický). Hledání kořenů těchto rovnic je složité a náročné na výpočetní software.

POUŽITÁ LITERATURA A PROGRAMY

- Přednášky PRPE zimní semestr 2013/2014 - Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.
- Přednášky DSK1 – Prof. Ing. Jiří Máca, CSc.
- Dynamics of Structures - Jagmohan L. Humar

- Matlab R2013

DĚKUJI ZA POZORNOST

KAROLÍNA ŠORELOVÁ