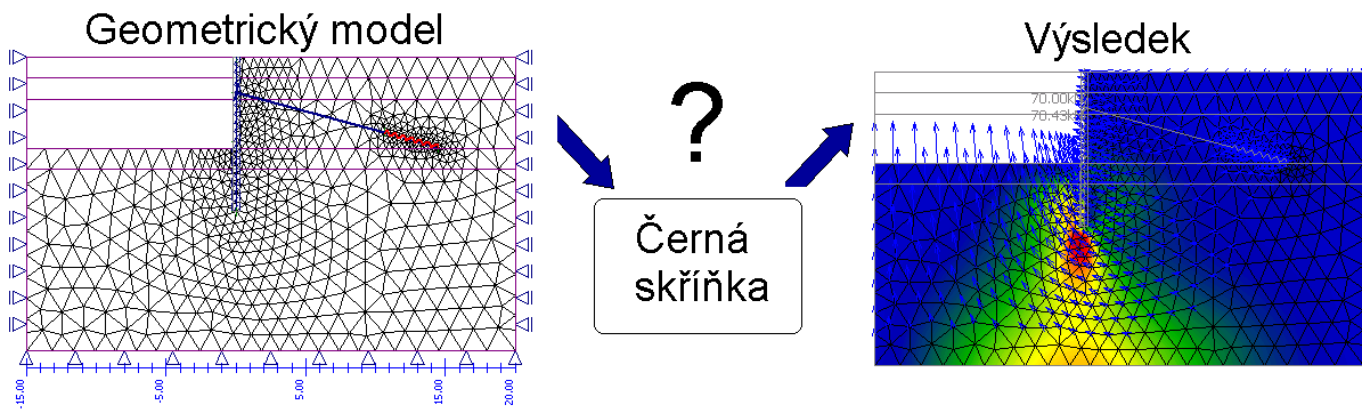


# STAVEBNÍ MECHANIKA 3 - SM 3



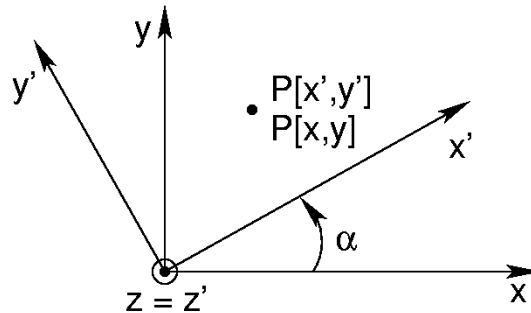
## Základní předměty vyučované na katedře mechaniky a jejich vzájemná vazba

- SM1, SM2 - výpočet reakcí na staticky určitých konstrukcích, výpočet průběhů vnitřních sil na staticky určitých konstrukcích  
*základní předpoklad* - konstrukce nebo její část (části) se chová jako tuhý prvek (nedeformuje se)  
*základní metody řešení* - podmínky rovnováhy, podmínky ekvivalence. Připomeňme, že podmínky rovnováhy bylo možno odvodit užitím *Principu virtuálních posunutí* - obecný princip rovnováhy  
průřezové ( $A, I_y, S_y$ ) a materiálové ( $E, G, \nu$ ) charakteristiky se ve výpočtu neuplatnily
- PRPE - analýza napjatosti a přetvoření (Clebschova metoda) prutů  
*základní předpoklad* - znalost průběhů vnitřních sil a průřezových a materiálových charakteristik  
*základní metody řešení* - podmínky rovnováhy, energetické metody - Ritzova metoda
- SM3 - výpočet přetvoření a vnitřních sil na staticky neurčitých konstrukcích  
*základní předpoklad* - znalost průběhů vnitřních sil na staticky určitých konstrukcích a také průřezových a materiálových charakteristik  
*základní metody řešení* - podmínky rovnováhy, deformační podmínky (např. podmínky spojitosti), Princip virtuálních posunutí, Princip virtuálních sil

## Náplň předmětu SM3

- Přetvoření prutových konstrukcí - výpočet užitím principu virtuálních sil
- Analýza staticky neurčitých konstrukcí - výpočet reakcí, průběhů vnitřních sil a přetvoření
  - Metody řešení
    - \* Silová metoda - Princip virtuálních sil
    - \* Deformační metoda - Princip virtuálních posunutí

## TENSOR NAPĚTÍ A DEFORMACE



Obrázek 1: Volba souřadnicového systému

Pole posunutí, deformace, napětí v materiálovém bodě

$$\{\mathbf{u}\} = \{ u \quad v \quad w \}^T \quad (1)$$

Obecně 9 složek pole napětí lze uspořádat do matice [3x3] - TENSOR NAPĚTÍ

Pokud je těleso namáho pouze povrchoým a objemovým **silovým** zatížením (momentové zatížení není uvažováno), pak z momentových podmínek rovnováhy vyplývá, že tensor napětí je symetrický - věta o vzájemnosti smykových napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

Obecně 9 složek pole deformace lze uspořádat do matice [3x3] - TENSOR DEFORMACE

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pozn. Složky tensoru, podobně jako složky vektoru, závisí na volbě souřadnicového systému.

Transformační vztah pro vektory

Mějme dva souřadnicové systémy  $x, y, z$  a  $x', y', z'$  a materiálový bod P o souřadnicích  $\{x_P\} = \{x_P, y_P, z_P\}^T$ . Vyjádření bodu P v potočených souřadnicích  $x', y', z'$  obdržíme aplikací transformační matice [T] ve tvaru

$$\{x_P\}' = [T] \{x_P\} \quad (4)$$

Obdobně transformujeme vektor (tensor 1. řádu) posunutí

$$\{u\}' = [T] \{u\} \quad (5)$$

Transformační vztah pro tensor - připomeňme transformaci tensoru setrvačnosti

Říkáme, že matice [A] typu [3x3] je tensor 2. řádu, pokud se její složky transformují podle následujícího transformačního vztahu

$$[A]' = [T] [A] [T]^T \quad (6)$$

Pozn. - transformační matice [T] je matice ortogonální, neboť platí  $[T]^{-1} = [T]^T$ .

Vektorová reprezentace tensoru napětí a deformace

Vzhledem k symetrii tensorů napětí a deformace lze tyto veličiny přepsat do vektoru ve tvaru

$$\{\sigma\} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy} \}^T \quad (7)$$

$$\{\varepsilon\} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy} \}^T \quad (8)$$

Pozn. - poznamenejme, že

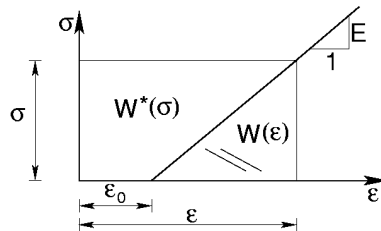
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}.$$

Hustota potenciální energie deformace  $W(\varepsilon)$ , respektive komplementární energie  $W^*(\sigma)$

$$\{\sigma\} = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \{\varepsilon\}} \quad W = \frac{1}{2}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})^T [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (9)$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial W^*(\sigma)}{\partial \{\sigma\}} \quad W^* = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} + \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\} \quad (10)$$

kde matice  $[D]$  (obecně  $[6 \times 6]$ ) je materiálová matice tuhosti. Vzhledem ke vztahu (9) lze ukázat, že matice tuhosti  $[D] = [C]^{-1}$  je symetrická. Matici  $[C]$  nazýváme maticí poddajnosti.



Platí

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (11)$$

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\} + \{\varepsilon_0\} \quad (12)$$

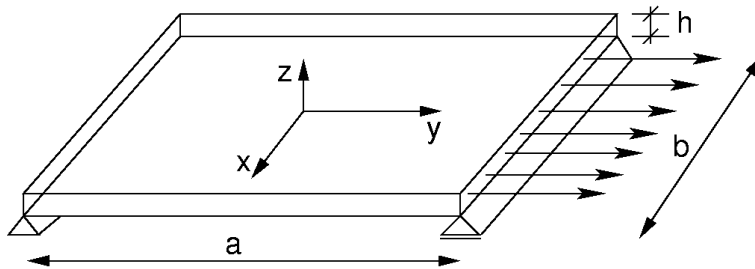
$$\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = W(\varepsilon) + W^*(\sigma) \quad (13)$$

## REDUKCE DIMENZE Z POHLEDU NAPJATOSTI

- Dvourozměrný problém - 2D
  - Problém rovinné napjatosti - stěny, desky
  - Problém rovinné deformace - náspy, tunely, přehrad, stavební jámy
  - Osově souměrný problém - kruhové základy nebo pilotové základy, chladičí věže
- Jednorozměrný problém - 1D - prutové konstrukce

## PROBLÉM ROVINNÉ NAPJATOSTI

Stěnový problém



Základní předpoklad -  $a, b \gg h$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

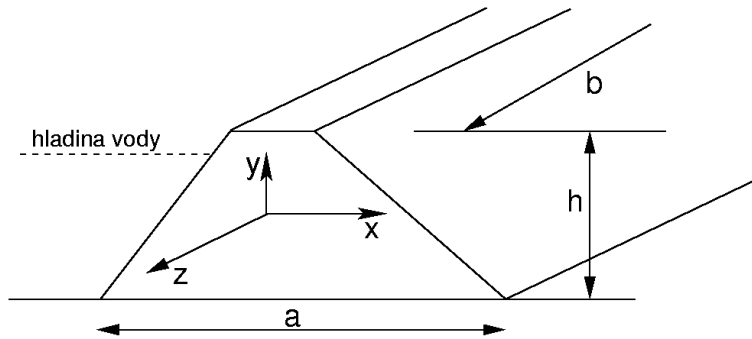
Výsledný tenzor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$



## PROBLÉM ROVINNÉ DEFORMACE

Příklad přehrady, sypané hráze



Základní předpoklad -  $a, h \ll b$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

Výsledný tensor napětí

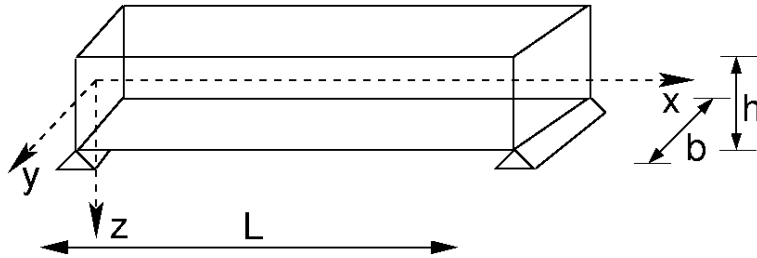
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

Poznámka - z Hookeova zákona plyne, že

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (16)$$

## JEDNOROZMĚRNÝ PROBLÉM

Nosník



Základní předpoklad -  $b, h \ll L$  Výsledný tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

## ZÁKLADNÍ ROVNICE TEORIE PRUŽNOSTI

Operátorová matice  $[\partial]$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Deformační varianta teorie pružnosti

$$\begin{array}{ll} \text{Statické rovnice} & [\partial] \{\sigma\} + \{X\} = \{0\} \\ \text{Fyzikální rovnice} & \{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \\ \text{Geometrické rovnice} & \{\epsilon\} = [\partial]^T \{u\} \end{array}$$

kde  $[D]$  je matice materiálové tuhosti,  $\{X\}$  je vektor objemových sil a  $\{\epsilon_0\}$  je vektor počátečních deformací.

Statické okrajové podmínky

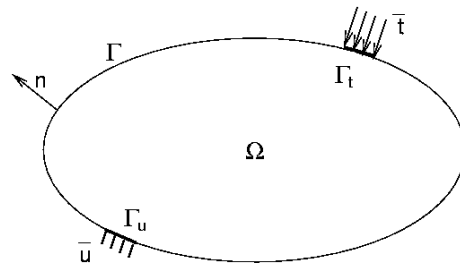
$$\{\bar{p}\} = [n] \{\sigma\} \quad (19)$$

Matice složek jednotkové normály  $[n]$

$$[n] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH PRACÍ

- Principy virtuálních prací
  1. Princip virtuálních posunů
  2. Princip virtuálních sil



Okrajové podmínky

- kinematické okrajové podmínky předepsané na hranici  $\Gamma_u$  :  $\{u\} - \{\bar{u}\} = \{0\}$
- statické okrajové podmínky předepsané na hranici  $\Gamma_p$  :  $\{\bar{p}\} - [n] \{\sigma\} = \{0\}$

## PRINCIP VIRTUÁLNÍCH POSUNŮ - obecný princip rovnováhy

Základní předpoklady: geometrické rovnice a kinematické okrajové podmínky jsou splněny přesně (v každém bodě tělesa), zatímco podmínky rovnováhy (Cauchyho rovnice uvnitř tělesa  $\Omega$  a statické okrajové podmínky na  $\Gamma_p$  jsou splněny v průměru s určitou vahou. Matematicky lze tento předpoklad vyjádřit ve tvaru:

$$\int_{\Omega} \{\delta \mathbf{u}\}^T ([\partial] \{\sigma\} + \{\bar{\mathbf{X}}\}) d\Omega + \int_{\Gamma_p} \{\delta \mathbf{u}\}^T (-[\mathbf{n}] \{\sigma\} + \{\bar{\mathbf{p}}\}) d\Gamma = 0 \quad (21)$$

kde virtuální posuny  $\{\delta \mathbf{u}\}$  musí splňovat geometrické okrajové podmínky na  $\Gamma_u$  a geometrické rovnice uvnitř tělesa  $\Omega$

$$\{\delta \mathbf{u}\} = \{0\} \quad \text{na } \Gamma_u, \quad \{\delta \varepsilon\} = [\partial] \{\delta \mathbf{u}\} \quad \text{uvnitř } \Omega$$

Greenův teorem - integrace per partes:

$$1. \text{ integrace v 1D: } \int_0^L u(x)'v(x) dx = [uv]_0^L - \int_0^L u(x)v(x)' dx$$

$$2. \text{ integrace v 3D: } \int_{\Omega} \underbrace{\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\}^T}_{\{\varepsilon\}^T} [\partial] \{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\} d\Omega = \int_{\Gamma} \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{n}] \{\sigma\} d\Gamma - \int_{\Omega} \{\mathbf{u}\}^T [\partial] \{\sigma\} d\Omega$$

Princip virtuálních posunů

Užitím Greenova teoremu lze rovnici (21) převést na tvar

$$\underbrace{\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega}_{\text{virtualni prace vnitřnich sil}} = \underbrace{\int_{\Omega} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{X}}\} d\Omega + \int_{\Gamma_p} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{p}}\} d\Gamma}_{\text{virtualni prace vnejsich sil}} \quad (22)$$

kde  $\{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\}$

## PRINCIP VIRTUÁLNÍCH SIL - obecný princip spojitosti

Základní předpoklady: podmínky rovnováhy (Cauchyho rovnice uvnitř tělesa)  $\Omega$  a statické okrajové podmínky na  $\Gamma_p$  jsou splněny přesně (v každém bodě tělesa), zatímco geometrické rovnice a kinematické okrajové podmínky jsou splněny v průměru s určitou vahou. Matematicky lze tento předpoklad vyjádřit ve tvaru:

$$\int_{\Omega} \{\delta\sigma\}^T (\{\varepsilon\} - [\partial]^T \{u\}) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \{\delta p\}^T (\{u\} - \{\bar{u}\}) d\Gamma = 0 \quad (23)$$

kde virtuální stavy  $\{\delta\varepsilon\}$  a  $\{\delta p\}$  nesmí narušovat rovnováhu uvnitř tělesa  $\Omega$ . Položíme-li  $\{\delta\bar{X}\} = \{0\}$  uvnitř  $\Omega$  a  $\{\delta p\} = \{0\}$  na  $\Gamma_p$ , pak musí platit

$$[n] \{\delta\sigma\} = \{0\} \quad \text{na } \Gamma_p, \quad [\partial] \{\delta\sigma\} = \{0\} \quad \text{uvnitř } \Omega$$

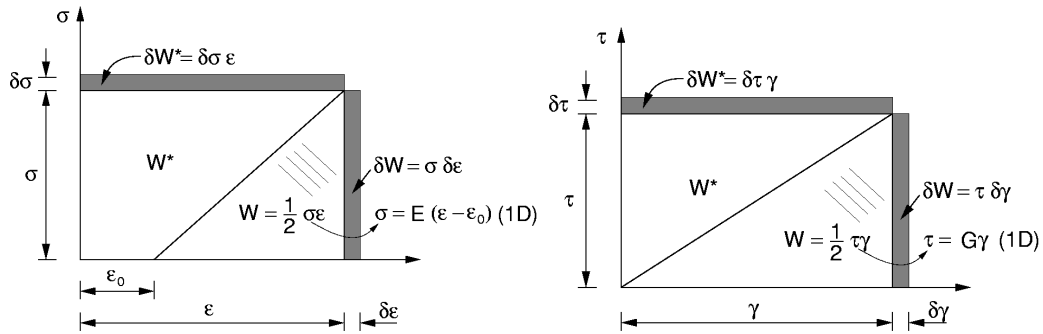
Princip virtuálních sil

Užitím Greenova teoremu lze rovnici (23) převést na tvar

$$\underbrace{\int_{\Omega} \{\delta\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\Omega}_{\text{komplementarní virtuální práce vnitřních sil}} = \underbrace{\int_{\Gamma_u} \underbrace{\{\delta p\}^T}_{[n]\{\sigma\}} \{\bar{u}\} d\Gamma}_{\text{komplementarní virtuální práce vnejsích sil}} \quad (24)$$

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH PRACÍ - NOSNÍKOVÝ PRVEK

Pracovní diagram - 1D



Předpoklad:

1. Volíme hlavní centrální souřadnicovou soustavu s počátkem v těžišti průřezu
2. Rovina zatížení obsahuje rovinu  $xz \rightarrow$  ohyb v rovině  $xz \rightarrow$  nenulové vnitřní síly -  $N, M_y, Q_z$
3. Osa  $y$  je osou symetrie  $\rightarrow \tau_{xy} = 0$ , nebo zanedbáme zkosení v rovině  $xy \rightarrow \gamma_{xy} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 0$

Fyzikální rovnice

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_0) \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_0 \quad (25)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (26)$$

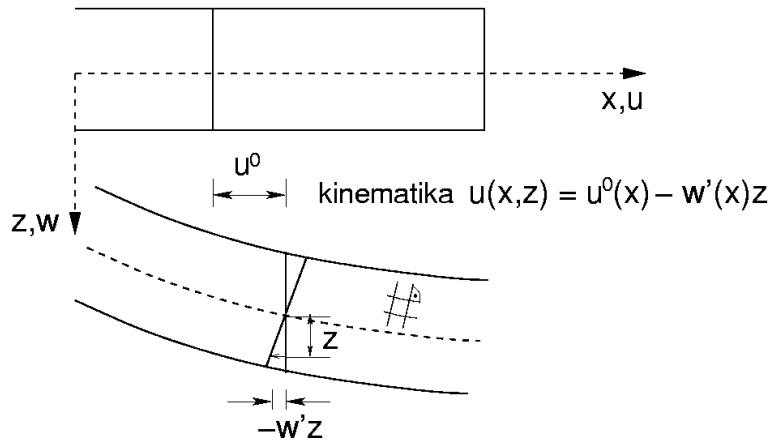
Vztah mezi napětím a vnitřními silami

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z \quad (27)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \bar{S}_y(z)}{I_y b(z)} \quad (28)$$

### Ohýbaný, tažený/tlačený prut bez vlivu smyku (Bernoulli-Navierova hypotéza)

Bernoulli-Navierova hypotéza - průřez rovinný a kolmý na střednici prutu před deformací zůstává rovinný a kolmý na střednici prutu i po deformaci





Vztah mezi vnitřními silami a přetvořením

$$N = EA \frac{du_0}{dx} - N_0 \quad N_0 = E\alpha \int_A T dA \quad (29)$$

$$M_y = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2} - M_0 \quad M_0 = E\alpha \int_A Tz dA \quad (30)$$

kde  $N_0, M_0$  představují vliv teploty

Připomeňme důsledek Bernoulli-Navierovy hypotézy

$$u(x, z) = u_0(x) - \frac{dw(x)}{dx} z \quad w = w(x) \quad (31)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (32)$$

Hustoty energie a virtuální práce [ $J/m^3$ ]

- Hustota potenciální energie deformace -  $W = \frac{1}{2}\sigma(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$
- Hustota komplementární energie -  $W^* = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon + \sigma\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} + \sigma\varepsilon_0$
- Hustota virtuální práce vnitřních sil -  $\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \delta \varepsilon$
- Hustota virtuální komplementární práce vnitřních sil -  $\delta W^* = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma} \delta \sigma = \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \right) \delta \sigma$

Energie a virtuální práce [J]

- Virtuální práce vnitřních sil

$$\delta E_i = \int_{\Omega} \delta W \, d\Omega = \int_{\Omega} E(\varepsilon - \varepsilon_0) \delta \varepsilon \, d\Omega \quad (33)$$

$$\delta E_i^* = \int_{\Omega} \delta W^* \, d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \right) \delta \sigma \, d\Omega \quad (34)$$

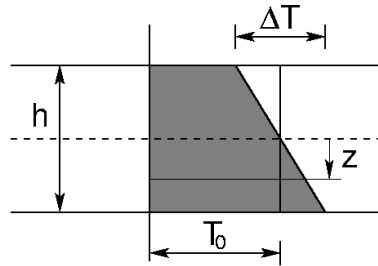
- Energie vnitřních sil

$$E_i = \int_{\Omega} W \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \, d\Omega \quad (35)$$

$$E_i^* = \int_{\Omega} W^* \, d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} + \sigma \varepsilon_0 \right) \, d\Omega \quad (36)$$

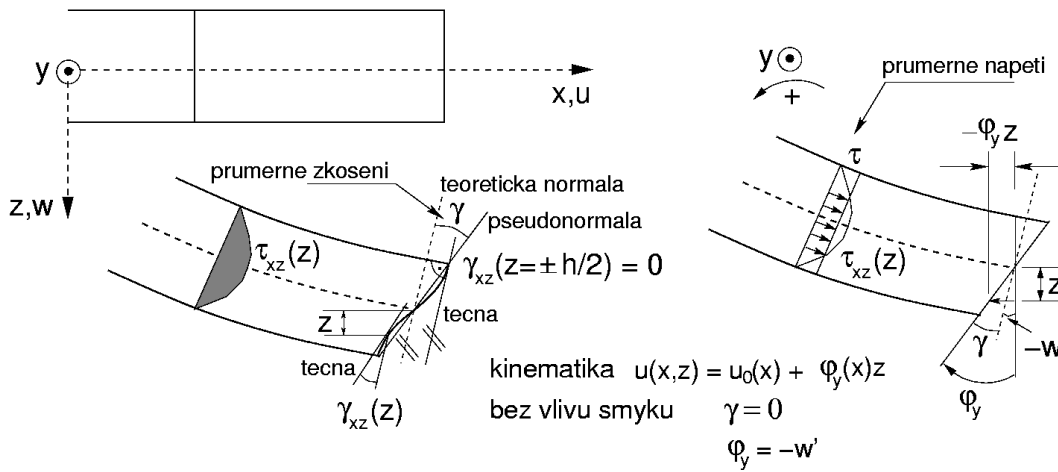
Počáteční deformace - vliv teploty:  $\varepsilon_0 = \alpha T$

Nerovnoměrné ohřátí/ochlazení:  $T = T(z) \rightarrow T(z) = T_0 + \Delta T \frac{z}{h}$



## Ohýbaný, tažený/tlačený prut s vlivem smyku (Mindlinova hypotéza)

Mindlinova hypotéza - průřez rovinný a kolmý na střednici prutu před deformací zůstává rovinný i po deformaci, ne však již kolmý na deformovanou střednici prutu



Fyzikální rovnice pro smyk

$$\gamma = \varphi_y + \frac{dw}{dx} \quad (37)$$

$$\tau = \kappa G \gamma \quad (38)$$

kde součinitel  $\kappa$  plyne z rovnosti prací skutečných napětí a zprůměrovaných napětí. Připomeňme rovnice (26) a (28). Pak platí:

$$\int_A \tau_{xz} \gamma_{xz} \, dA = \frac{Q_z^2}{GI_y^2} \int_A \frac{\bar{S}_y^2(z)}{b^2(z)} \, dA \quad (39)$$

$$\int_A \tau \gamma \, dA = \tau \gamma A = \frac{Q_z^2}{\kappa GA} \quad (40)$$

Poznamenejme, že v rovnici (40) jsme uplatnili vztahy

$$\tau = \frac{Q_z}{A} \quad \gamma = \frac{\tau}{\kappa G} = \frac{Q_z}{\kappa GA} \quad (41)$$

Porovnáním výrazů (39) a (40) nakonec dostaneme

$$\kappa = \frac{I_y^2}{A \int_A \frac{\bar{S}_y^2(z)}{b^2(z)} \, dA} \quad (42)$$

U obdélníkového průřezu je  $\kappa = 5/6$

Hustoty energie a měrné virtuální práce s vlivem smyku [ $J/m^3$ ]

- Hustota práce vnitřních sil

$$W = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \frac{1}{2}\kappa G\gamma^2 \quad (43)$$

$$W^* = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} + \sigma\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\kappa G} \quad (44)$$

- Hustota virtuální práce vnitřních sil

$$\delta W = E(\varepsilon - \varepsilon_0)\delta\varepsilon + \kappa G\gamma\delta\gamma \quad (45)$$

$$\delta W^* = \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0\right)\delta\sigma + \frac{\tau}{\kappa G}\delta\tau \quad (46)$$

Energie a virtuální práce s vlivem smyku [ $J$ ]

- Virtuální práce vnitřních sil

$$\delta E_i = \int_{\Omega} [E(\varepsilon - \varepsilon_0)\delta\varepsilon + \kappa G\gamma\delta\gamma] \, d\Omega \quad (47)$$

$$\delta E_i^* = \int_{\Omega} \left[ \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0\right)\delta\sigma + \frac{\tau}{\kappa G}\delta\tau \right] \, d\Omega \quad (48)$$

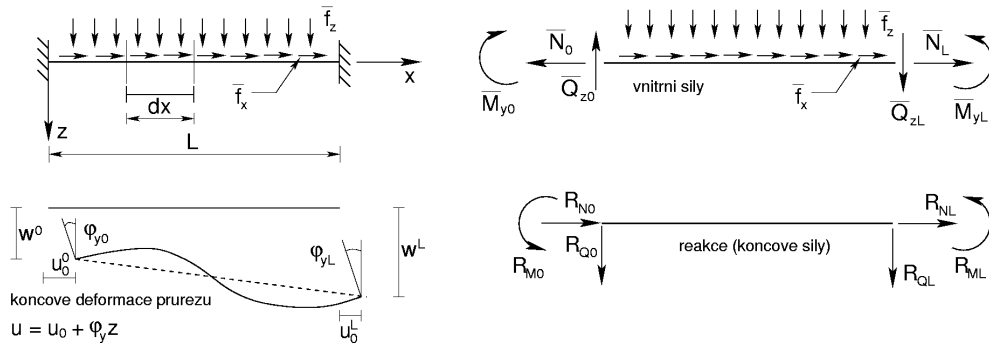
- Energie vnitřních sil

$$E_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [E(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \kappa G\gamma^2] \, d\Omega \quad (49)$$

$$E_i^* = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{\kappa G} \right) + \sigma\varepsilon_0 \right] \, d\Omega \quad (50)$$

## SOUHRN

### Prutový prvek



Diferenciální podmínky rovnováhy na prutu  $m_y = 0$

$$\frac{dN}{dx} = -\bar{f}_x \quad (51)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -\bar{f}_z \quad (52)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad (53)$$

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -\bar{f}_z \quad (54)$$

## SOUHRN - pokračování

Napětí a deformace

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z \quad (55)$$

$$\tau = \frac{Q_z}{A} \quad (56)$$

$$\epsilon = \frac{du_0}{dx} + \frac{d\varphi_y}{dx} z = u'_0 + \varphi'_y z \quad (57)$$

$$\gamma = \varphi_y + \frac{dw}{dx} = \varphi_y + w' \quad (58)$$

$$\epsilon_0 = \alpha T = \alpha \left( T_0 + \Delta T \frac{z}{h} \right) \quad (59)$$

Virtuální napětí a deformace

$$\delta\sigma = \frac{\delta N}{A} + \frac{\delta M_y}{I_y} z \quad (60)$$

$$\delta\tau = \frac{\delta Q_z}{A} \quad (61)$$

$$\delta\epsilon = \delta \frac{du_0}{dx} + \delta \frac{d\varphi_y}{dx} z = \delta u'_0 + \delta \varphi'_y z \quad (62)$$

$$\delta\gamma = \delta\varphi_y + \delta \frac{dw}{dx} = \delta\varphi_y + \delta w' \quad (63)$$

$$\delta\epsilon_0 = 0 \quad (64)$$

## SOUHRN - pokračování

Vnitřní síly - výslednice napětí

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad (65)$$

$$M_y = \int_A \sigma z \, dA \quad (66)$$

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} \, dA \quad (67)$$

Vnitřní síly - fyzikální rovnice

$$N = EA \frac{du_0}{dx} - N_0 \quad (68)$$

$$M_y = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2} - M_0 \quad \text{bez vlivu smyku} \quad (69)$$

$$M_y = EI_y \frac{d\varphi_y}{dx} - M_0 \quad \text{s vlivem smyku} \quad (70)$$

$$Q_z = \kappa GA \underbrace{\left( \varphi_y + \frac{dw}{dx} \right)}_{\gamma} \quad \text{s vlivem smyku} \quad (71)$$



## SOUHRN - pokračování

Přetvoření

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{N + N_0}{EA} \quad (72)$$

$$\varphi_y + \frac{dw}{dx} = \frac{Q_z}{\kappa GA} \quad (73)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y + M_0}{EI_y} \quad \text{bez vlivu smyku} \quad \varphi_y = -\frac{dw}{dx} \quad (74)$$

$$\frac{d\varphi_y}{dx} = \frac{M_y + M_0}{EI_y} \quad \text{s vlivem smyku} \quad (75)$$

Virtuální přetvoření

$$\delta \frac{du_0}{dx} = \frac{\delta N}{EA} \quad (76)$$

$$\delta \left( \varphi_y + \frac{dw}{dx} \right) = \frac{\delta Q_z}{\kappa GA} \quad (77)$$

$$\delta \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\delta M_y}{EI_y} \quad \text{bez vlivu smyku} \quad \delta \varphi_y = -\delta \frac{dw}{dx} \quad (78)$$

$$\delta \frac{d\varphi_y}{dx} = \frac{\delta M_y}{EI_y} \quad \text{s vlivem smyku} \quad (79)$$

$$\delta N_0 = \delta M_0 = 0 \quad \text{virtuální hodnota predepsané veličiny} = 0 \quad (80)$$

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH SIL tažený/tlačený a ohýbaný prut s vlivem smyku

Připomeňme rovnici (24), která říká, že komplementární virtuální práce sil vnitřních je rovna komplementární virtuální práci sil vnějších, tj.

$$\delta E_i^* = \delta E_e^* \quad (81)$$

Postupným dosazením z rovnic (55), (56), (60), (61) a (59) do rovnice (48) dostaneme

$$\delta E_i^* = \int_0^L \left\{ \int_A \left\{ \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} \right) + \alpha \left( T_0 + \Delta T \frac{z}{h} \right) \right] \left[ \frac{\delta N}{A} + \frac{\delta M_y z}{I_y} \right] + \frac{Q_z}{\kappa GA} \frac{\delta Q_z}{A} \right\} dA \right\} dx \quad (82)$$

Po roznásobení jednotlivých členů v rovnici (82) a integraci po průřezu obrdžíme

$$\delta E_i^* = \int_0^L \left\{ \underbrace{\left( \alpha T_0 + \frac{N}{EA} \right)}_{\frac{du_0}{dx} \text{ (72)}} \delta N + \underbrace{\left( \frac{M_y}{EI_y} + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right)}_{\frac{d\varphi_y}{dx} \text{ (75)}} \delta M_y + \underbrace{\frac{Q_z}{\kappa GA}}_{\gamma = \varphi_y + \frac{dw}{dx} \text{ (73)}} \delta Q_z \right\} dx \quad (83)$$

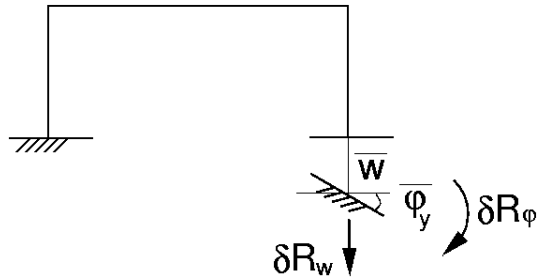
Poznamenejme, že obdobný výsledek bychom dostali variací komplementární energie vnitřních sil, rovnice (50). Pokud by byl průřez namáhán také krouticím momentem  $M_x$ , bylo by nutné rozšířit rovnici (83) o člen

$$\frac{M_x}{GI_k} \delta M_x$$

kde  $I_k$  je moment tuhosti ve volném kroucení

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH SIL - pokračování

Předepsané posuny



Komplementární virtuální práce vnějších sil: práce virtuálních sil (reakcí) na předepsaných posunech

$$\delta E_e^* = \sum_i \delta R_w^i \bar{w}^i + \sum_i \delta R_\phi^i \bar{\phi}_y^i \quad (84)$$

Poznámka: z rovnice (84) je zřejmé, že pokud jsou předepsané posuny rovny nule, tak komplementární virtuální práce vnějších sil je také rovna nule. Spojením rovnic (81), (83) a (84) na závěr dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ \left( \alpha T_0 + \frac{N}{EA} \right) \delta N + \left( \frac{M_y}{EI_y} + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right) \delta M_y + \frac{Q_z}{\kappa GA} \delta Q_z \right\} dx \\ & = \sum_i \delta R_w^i \bar{w}^i + \sum_i \delta R_\phi^i \bar{\phi}_y^i \end{aligned} \quad (85)$$

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH POSUNUTÍ tažený/tlačený a ohýbaný prut s vlivem smyku

Připomeňme rovnici (24), která říká, že virtuální práce sil vnitřních je rovna virtuální práci sil vnějších, tj.

$$\delta E_i = \delta E_e \quad (86)$$

Postupným dosazením z rovnic (57), (58), (59), (57), (58) do rovnice (47) dostaneme

$$\begin{aligned} \delta E_i &= \int_{\Omega} [E(\varepsilon - \varepsilon_0)\delta\varepsilon + \kappa G\gamma\delta\gamma] d\Omega \\ &= \int_L \left\{ \int_A \left[ E(u'_0 + \varphi'_y z)(\delta u'_0 + \delta\varphi'_y z) - E\alpha \left( T_0 + \frac{\Delta T}{h} z \right) (\delta u'_0 + \delta\varphi'_y z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \kappa G(\varphi_y + w')(\delta\varphi_y + \delta w') \right] dA \right\} dx \end{aligned} \quad (87)$$

Integrací rovnice (87) po průřezu a s uvážením, že statický moment k ose  $y$ ,  $S_y$  je nulový (těžišťová osa), dostaneme

$$\begin{aligned} \delta E_i &= \int_0^L \left\{ \underbrace{(EAu'_0 - \overbrace{EA\alpha T_0}^{N_0})}_{N \text{ (68)}} \delta u'_0 + \underbrace{(EI_y \varphi'_y - \overbrace{EI_y \alpha \frac{\Delta T}{h}}^{M_0})}_{M_y \text{ (70)}} \delta \varphi'_y \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\kappa GA(\varphi_y + w')}_{Q_z \text{ (71)}} (\delta\varphi_y + \delta w') \right\} dx \end{aligned} \quad (88)$$

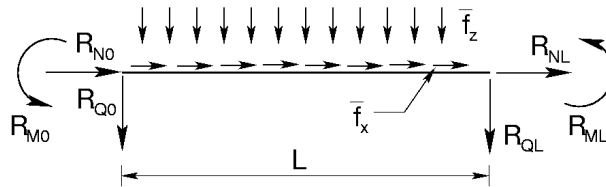
## PRICIP VIRTUÁLNÍCH POSUNUTÍ - pokračování

Poznamenejme, že obdobný výsledek bychom dostali variací energie vnitřních sil, rovnice (49). Pokud by byl průřez namáhán také kroučícím momentem  $M_x$ , bylo by nutné rozšířit rovnici (88) o člen

$$\underbrace{GI_k \theta}_{M_x} \delta \theta$$

kde  $I_k$  je moment tuhosti ve volném kroucení a  $\theta$  je relativní úhel zkroucení.

Prutový prvek



Virtuální práce vnějších sil: práce předepsaného zatížení na virtuálních posunech

$$\begin{aligned} \delta E_e &= \int_L (\bar{f}_x \delta u_0 + \bar{f}_z \delta w) dx \\ &+ R_{N0} \delta u_0^0 + R_{NL} \delta u_0^L + R_{Q0} \delta w^0 + R_{QL} \delta w^L + R_{M0} \delta \varphi_y^0 + R_{ML} \delta \varphi_y^L \quad (89) \end{aligned}$$

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH POSUNUTÍ - pokračování

Pro obecně třídimensionální těleso jsme si ukázali, že princip virtuálních posunutí (rovnice (22)) lze odvodit jako vážený průměr Cauchyho podmínek rovnováhy a statických okrajových podmínek předepsaných na části hranice  $\Gamma_p$  (rovnice (21)). Princip virtuálních posunutí lze tedy nazývat obecným principem rovnováhy. Zde tento postup využijeme pro odvození principu virtuálních posunutí aplikovaného na prutový prvek.

Pro případ prutového prvku využijeme rovnice (51)-(53) společně s rovnicemi (68)-(71) (poznamenejme, že spojitá zatížení  $\bar{f}_x, \bar{f}_z$  zde plní funkci objemových sil) a rovnici (21) přepíšeme do tvaru (vliv teplotních účinků pro jednoduchost neuvažujeme  $\rightarrow N_0 = M_0 = 0$ )

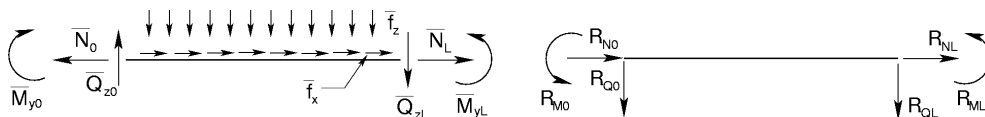
$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^L \{ (EAu_0'' + \bar{f}_x)\delta u_0 \\ & + [\kappa GA(\varphi_y' + w'') + \bar{f}_z]\delta w \\ & + [EI_y\varphi_y'' - \kappa GA(\varphi + w')]\delta\varphi_y \} dx \end{aligned} \quad (90)$$

V dalším kroku budeme postupně jednotlivé členy v rovnici (90) integrovat per partes. Připomeňme

$$\int_0^L u(x)v(x) dx = [uv]_0^L - \int_0^L u(x)v(x)' dx$$

## PRICIP VIRTUÁLNIÍCH POSUNUTÍ - pokračování

Prutový prvek



$$\int_0^L EA u_0'' \delta u_0 \, dx = [EA u_0' \delta u_0]_0^L - \int_0^L EA u_0' \delta u_0' \, dx \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa GA (\varphi_y' + w'') \delta w \, dx &= [\kappa GA (\varphi_y + w') \delta w]_0^L \\ &- \int_0^L \kappa GA (\varphi_y' + w'') \delta w' \, dx \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L [EI_y \varphi_y'' - \kappa GA (\varphi_y + w')] \delta \varphi_y \, dx &= [EI_y \varphi_y' \delta \varphi_y]_0^L - \int_0^L [EI_y \varphi_y' \delta \varphi_y' \\ &+ \kappa GA (\varphi_y + w') \delta \varphi_y] \, dx \end{aligned} \quad (93)$$

S ohledem na obrázek můžeme hraniční členy v rovnicích (91)- (93) vyjádřit ve tvaru

$$\left[ EA u_0' \delta u_0 \right]_0^L = -N_0 \delta u_0^0 + N_L \delta u_0^L = R_{N0} \delta u_0^0 + R_{NL} \delta u_0^L \quad (94)$$

$$\left[ \kappa GA (\varphi_y + w') \delta w \right]_0^L = -Q_0 \delta w^0 + Q_L \delta w^L = R_{Q0} \delta w^0 + R_{QL} \delta w^L \quad (95)$$

$$\left[ EI_y \varphi_y' \delta \varphi_y \right]_0^L = -M_{y0} \delta \varphi_y^0 + M_{yL} \delta \varphi_y^L = R_{M0} \delta \varphi_y^0 + R_{ML} \delta \varphi_y^L \quad (96)$$

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH POSUNUTÍ - pokračování

Spojením rovnic (90)- (96) nakonec dostaneme

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \underbrace{\left\{ EAu_0' \delta u_0' + EI_y \varphi_y' \delta \varphi_y' + \kappa GA(\varphi_y' + w'')(\delta \varphi_y' + \delta w') \right\}}_{\delta E_i \text{ virtualni prace vnitřních sil}} dx \\
 = & \int_L (\bar{f}_x \delta u_0 + \bar{f}_z \delta w) dx + \\
 & \underbrace{R_{N0} \delta u_0^0 + R_{NL} \delta u_0^L + R_{Q0} \delta w^0 + R_{QL} \delta w^L + R_{M0} \delta \varphi_y^0 + R_{ML} \delta \varphi_y^L}_{\delta E_e \text{ virtualni prace vnejsich sil}} \quad (97)
 \end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že princip virtuálních posunutí je skutečně obecným principem rovnováhy



## KOMPLEMENTÁRNÍ VIRTUÁLNÍCH PRÁCE VNITŘNÍCH SIL veličina vystupující v principu virtuálních sil PVs

SOUHRN

Komplementární virtuální práce vnitřních sil vyjádřená ve složkách napětí

$$\delta E_i^* = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \right) \delta \sigma + \frac{\tau}{\kappa G} \delta \tau \right] d\Omega \quad (98)$$

Komplementární virtuální práce vnitřních sil vyjádřená ve složkách vnitřních sil

$$\delta E_i^* = \int_0^L \left\{ \left( \alpha T_0 + \frac{N}{EA} \right) \delta N + \left( \frac{M_y}{EI_y} + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right) \delta M_y + \frac{Q_z}{\kappa GA} \delta Q_z \right\} dx \quad (99)$$

## VIRTUÁLNÍCH PRÁCE VNITŘNÍCH SIL veličina vystupující v principu virtuálních posunutí PVp

### SOUHRN

Virtuální práce vnitřních sil vyjádřená ve složkách deformací vztažených k materiálovému bodu

$$\delta E_i = \int_{\Omega} [E(\varepsilon - \varepsilon_0)\delta\varepsilon + \kappa G\gamma\delta\gamma] d\Omega \quad (100)$$

Virtuální práce vnitřních sil vyjádřená ve složkách deformací vztažených k průřezu prutu

$$\begin{aligned} \delta E_i = \int_0^L \left\{ (EAu'_0 - EA\alpha T_0)\delta u'_0 + (EI_y\varphi'_y - EI_y\alpha\frac{\Delta T}{h})\delta\varphi'_y \right. \\ \left. + \kappa GA(\varphi_y + w')(\delta\varphi_y + \delta w') \right\} dx \quad (101) \end{aligned}$$

## PRICIP VIRTUÁLNÍCH PRACÍ - SUMMARY

Na závěr porovnejme oba výrazy pro virtuální práci vnitřních sil (88) a komplementární virtuální práci vnitřních sil (83)

- Virtuální práce vnitřních sil: práce skutečných sil na virtuálních přetvořeních

$$\delta E_i = \int_0^L \left\{ \underbrace{(EAu'_0 - EA\alpha T_0)}_N \delta u'_0 + \underbrace{(EI_y \varphi'_y - EI_y \alpha \frac{\Delta T}{h})}_{M_y} \delta \varphi'_y + \underbrace{\kappa GA(\varphi_y + w')}_{Q_z} (\delta \varphi_y + \delta w') \right\} dx \quad (102)$$

- Komplementární virtuální práce vnitřních sil: práce virtuálních sil na skutečných přetvořeních

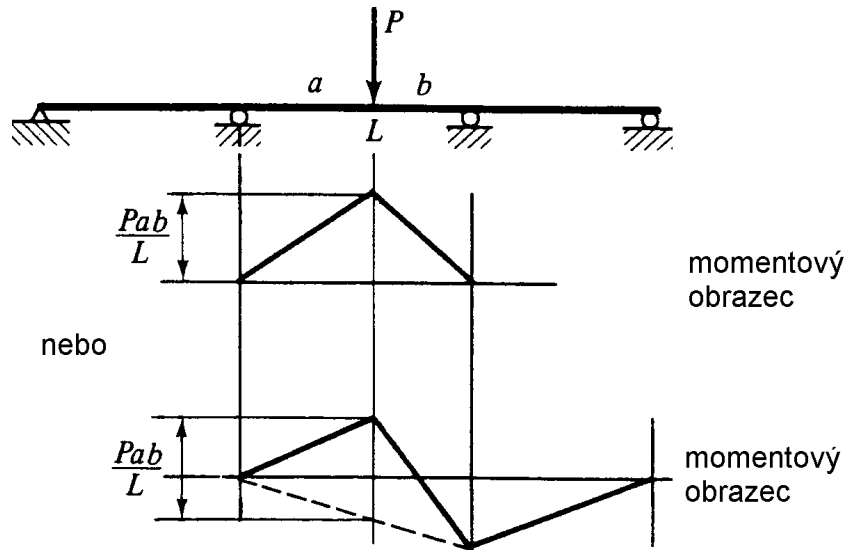
$$\delta E_i^* = \int_0^L \left\{ \underbrace{\left( \alpha T_0 + \frac{N}{EA} \right)}_{u'_0} \delta N + \underbrace{\left( \frac{M_y}{EI_y} + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right)}_{\varphi'_y} \delta M_y + \underbrace{\frac{Q_z}{\kappa GA}}_{\varphi_y + w'} \delta Q_z \right\} dx \quad (103)$$

## Příklady staticky a kinematicky přípustných virtuálních stavů

Příklady staticky přípustných silových virtuálních stavů

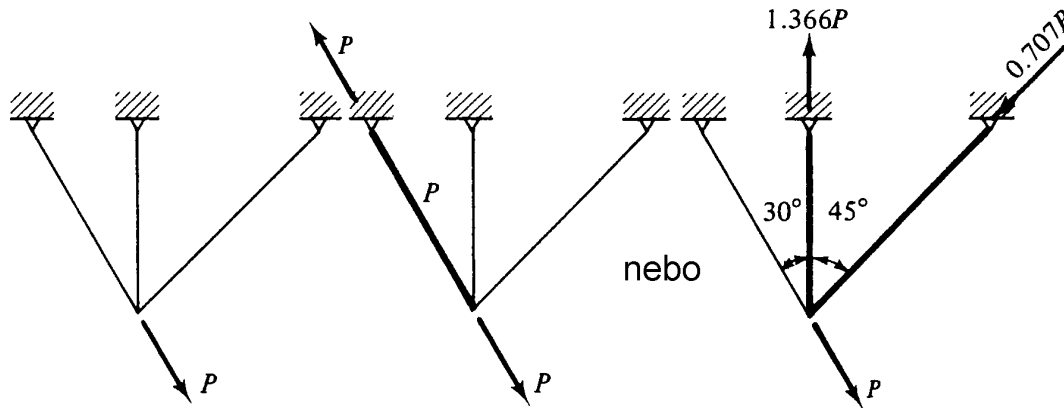
Připomeňme, že staticky přípustné virtuální silové stavy jsou takové, které vyhovují podmínkám rovnováhy

- spojitý nosník - příklad 2x staticky neurčité konstrukce



Oba stavy jsou staticky přípustné, neboť příslušné vnitřní síly jsou v rovnováze s předepsaným silovým zatížením. Uvažované staticky přípustné silové stavy však nemají žádnou vazbu na skutečné přetvoření konstrukce.

- 1x staticky neurčitý příhradový nosník



Předpokládané rozložení vnitřních sil je opět v obou případech staticky přípustné, neboť vyhovuje podmínkám rovnováhy. Přetvoření vázaná na předpokládané silové stavy však nemusí odpovídat skutečnému přetvoření a může vyvolat nespojitosti konstrukce.

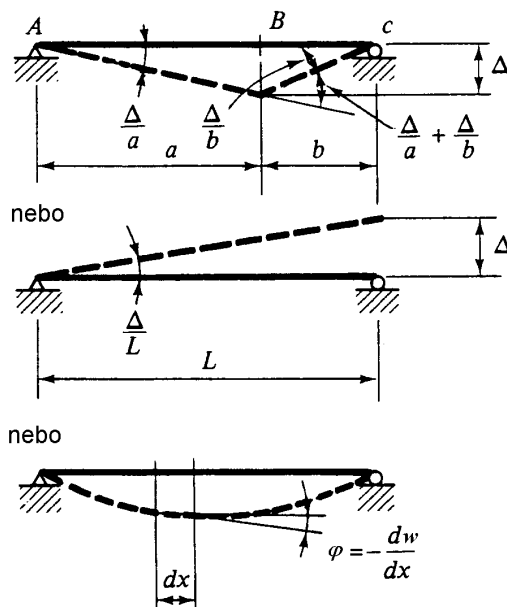
Z těchto dvou příkladů je zřejmé, že v případě staticky neurčitých konstrukcí můžeme definovat nekonečně mnoho takovýchto silových stavů.

## Příklady staticky a kinematically přípustných virtuálních stavů - pokračování

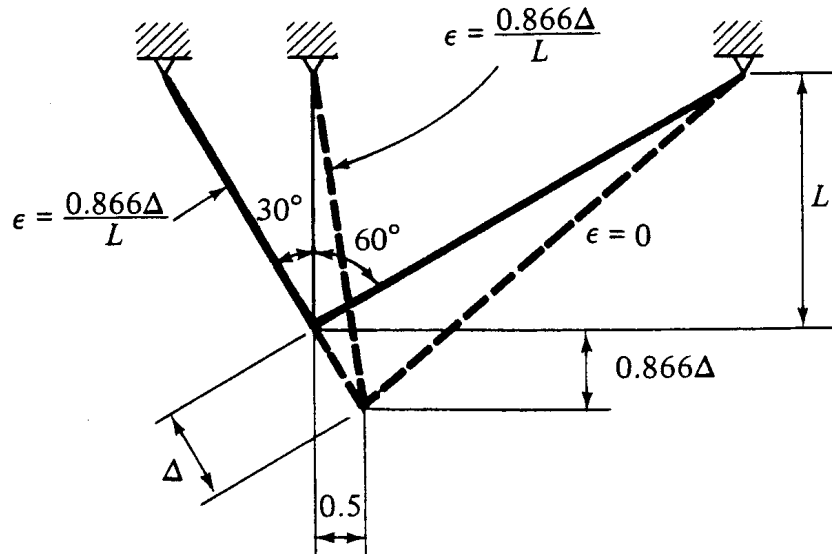
Příklady kinematically přípustných virtuálních stavů přetvoření

Připomeňme, že kinematically přípustná virtuální přetvoření jsou taková, která nenarušují vnitřní vazby v tělese. Kinematically přípustné pole posunutí vyhovuje geometrickým rovnicím.

- Prostý nosník



- 1x staticky neurčitý příhradový nosník

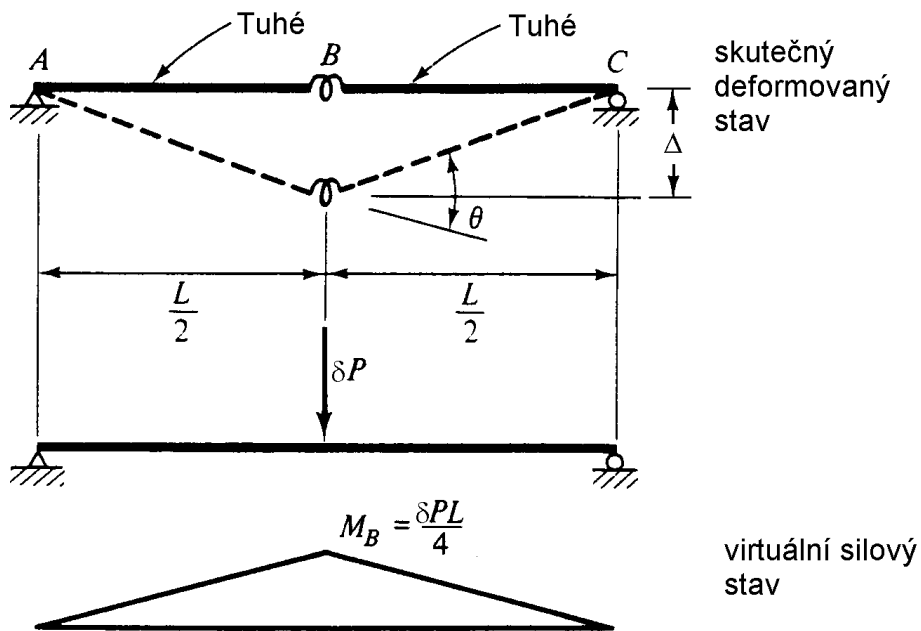


Poznamenejme, že kinemacký přípustný pole posunutí (přetvoření) nemusí mít žádnou vazbu na skutečné rozložení vnitřních sil. Jinými slovy, silový stav odpovídající kinemacký přípustnému stavu přetvoření nemusí být v rovnováze s vnějším zatížením

### Příklad užití principu virtuálních sil pro určení přetvoření staticky určité konstrukce

Připomeňme, že princip virtuálních sil dává do rovnováhy práce virtuálních sil na skutečných přetvořeních. Pro určení geometrických vztahů je tedy nutno uvažovat skutečný stav přetvoření. Virtuální silový stav však může být zvolen celkem libovolně (musí být ovšem rovnovážný), tak aby nám co nejvíce vyhovoval.

Př. 1 Uvažujte idealizovaný nosník. Určete pootočení v bodě  $B$  odpovídající posunu  $\Delta$ .



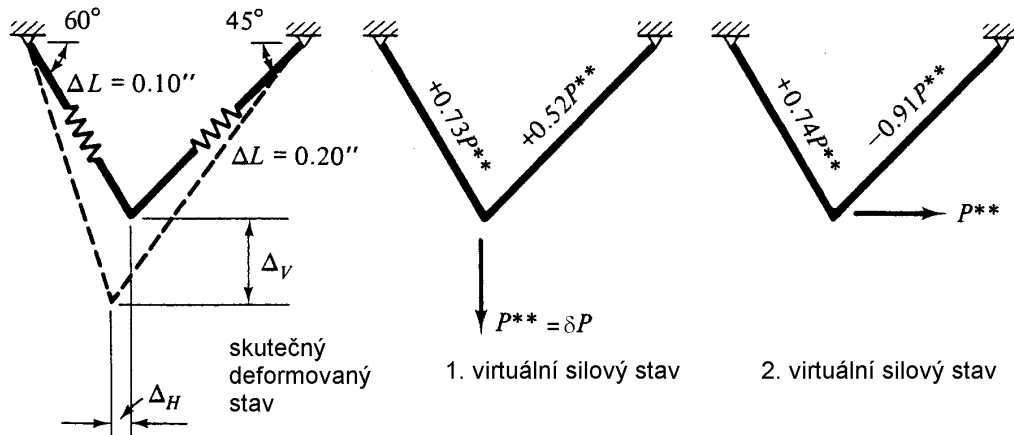


Princip virtuálních sil zapíšeme ve tvaru

$$\delta E_i^* = \delta E_e^*$$

$$\underbrace{\delta M \theta}_{\frac{\delta PL}{4}} = \delta P \Delta \Rightarrow \theta = \frac{4\Delta}{L}$$

Př. 2 Uvažujte idealizovaný příhradový nosník. Určete vodorovnou a svislou složku posunutí bodu  $C$  v důsledku předepsaného protažení jednotlivých prutů.



Princip virtuálních sil zapíšeme ve tvaru

$$\delta E_i^* = \delta E_e^*$$

1.  $0.73\delta P \cdot 0.1 + 0.52\delta P \cdot 0.2 = \delta P \Delta_V \Rightarrow \Delta_V = 0.177 [in]$
2.  $0.74\delta P \cdot 0.1 - 0.91\delta P \cdot 0.2 = \delta P \Delta_H \Rightarrow \Delta_H = -0.108 [in]$

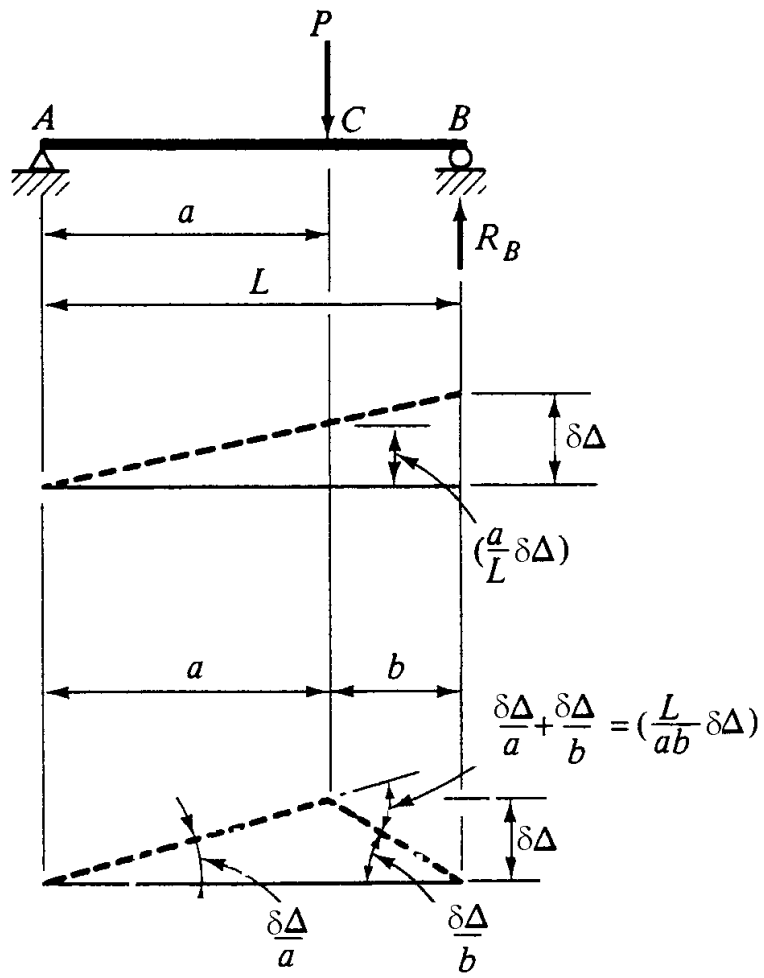
### Příklad užití principu virtuálních posunutí - formulace podmínek rovnováhy kinematická metoda

Připomeňme, že princip virtuálních posunutí dává do rovnováhy práce skutečných sil na virtuálních přetvořeních. Pracujeme tedy se skutečnými silami. Virtuální stav však může být zvolen zcela libovolně (musí být kinematicky přípustný) tak, aby nám co nejvíce vyhovoval.

Př. 3 Kinematickou metodou určete reakci v bodě  $B$  a hodnotu momentu v bodě  $C$ . Virtuální stav budeme definovat tak, aby pouze hledaná veličina (reakce nebo moment) konala práci, čímž eliminujeme všechny ostatní neznámé.

- a) Určení reakce v bodě  $B$   
Princip virtuálních posunutí zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}\delta E_i &= \delta E_e \\ 0 &= -P \frac{a}{L} \delta \Delta + R_B \delta \Delta \\ 0 &= \underbrace{\delta \Delta}_{\text{libovolne kinematicky pripustne:} \neq 0} \underbrace{\left(-P \frac{a}{L} + R_B\right)}_{\text{momentova podminka rovnovahy k bodu } B := 0} \Rightarrow R_B = \frac{a}{L} P\end{aligned}$$



- b) Určení momentu v bodě  $C$   
Princip virtuálních posunutí zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}\delta E_i &= \delta E_e \\ 0 &= \delta E_e \\ 0 &= M_C \frac{L}{ab} \delta \Delta - P \delta \Delta \Rightarrow M_C = \frac{Pab}{L}\end{aligned}$$

Na závěr poznamenejme, že zvolená virtuální přetvoření nemají nic společného se skutečným přetvořením prutu. To lze určit například integrací ohybové čáry.

Připomeňme, že jak virtuální síla ( $\delta P$  v příkladech 1 a 2), tak i virtuální posun ( $\delta \Delta$  v příkladu 3) se vyskytovali u všech členů na obou stranách příslušných rovnic a bylo je možno tudíž vykrátit. Skutečné hodnoty virtuálních veličin nejsou tedy důležité a pro jednoduchost je můžeme volit rovny 1. Tím přecházíme k tzv. jednotkovým stavům.

## PRINCIP VIRTUÁLNÍCH SIL - VÝPOČET PŘETVOŘENÍ NA STATICKY URČITÝCH ROVINNÝCH KONSTRUKCÍCH

Princip virtuálních sil - obecně

$$\begin{aligned} \delta E_i^* &= \delta E_e^* \\ \delta E_e^* &= \sum_i \delta F_x^i \bar{u}^i + \sum_i \delta F_z^i \bar{w}^i + \sum_i \delta M_i \bar{\varphi}_y^i \end{aligned} \quad (104)$$

$$\delta E_i^* = \int_0^L \left\{ \left( \alpha T_0 + \frac{N}{EA} \right) \delta N + \left( \frac{M_y}{EI_y} + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right) \delta M_y + \frac{Q_z}{\kappa GA} \delta Q_z + \frac{M_x}{GI_k} \delta M_x \right\} dx \quad (105)$$

Princip virtuálních sil aplikovaný na konstrukce

V této části se zaměříme na výpočet skutečného posunutí (potočení) daného průřezu konstrukce. Jak již bylo naznačeno v příkladu 2, bude vhodné volit virtuální jednotkovou sílu (moment) v bodě a ve směru uvažovaného posunutí (pootočení). Levá strana rovnice (104) pak nabude tvaru

$$\delta E_e^* = 1 \cdot \Delta$$

kde  $\Delta$  představuje zobecněný posun (např.  $\Delta = u$ , uvažujeme-li posun ve směru osy  $x$ )

Pozn. k následujícím obrázkům: - proměnná  $\phi$  vyjadřuje křivost, neboli změnu natočení deformované normály vztaženou na jednotku délky  $\phi = -w''$  - Bernoulli-Navierova hypotéza  $\phi = \varphi'_y$  - Mindlinova hypotéza.

## PRINCIP VIRTUÁLNÍCH SIL - PŘÍKLADY

Použití principu virtuálních sil si nyní ukážeme na několika příkladech

Př. 4 Uvažujte prostě podepřený nosník zatížený parabolickým spojitým zatížením. Určete pootočení v bodě  $B$  a tvar ohybové čáry. Zanedbejte vliv smyku.

Výpočet reakcí a momentu od skutečného zatížení

- Reakce - podmínky rovnováhy

$$0 = A + B - \int_0^L q_0 \left( \frac{\xi}{L} \right)^2 d\xi = A + B - \frac{q_0 L}{3}$$

$$0 = A \cdot L - \int_0^L q_0 \left( \frac{\xi}{L} \right)^2 (L - \xi) d\xi = A \cdot L - \frac{q_0 L^2}{12}$$

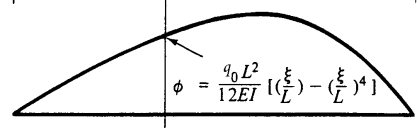
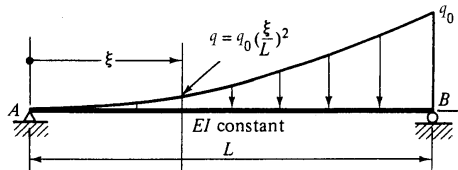
$$A = \frac{q_0 L}{12}$$

$$B = \frac{3}{12} q_0 L$$

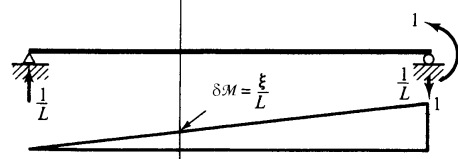
- Moment

$$M_y = \frac{q_0 L}{12} \xi - \underbrace{\int_0^\xi q_0 \left( \frac{s}{L} \right)^2 (\xi - s) ds}_{\frac{q_0}{12 L^2} \xi^4}$$

$$M_y = \frac{q_0 L^2}{12} \left[ \frac{\xi}{L} - \left( \frac{\xi}{L} \right)^4 \right]$$

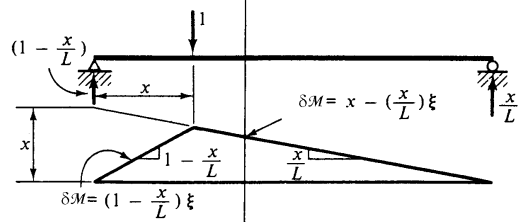


skutečný průběh křivosti



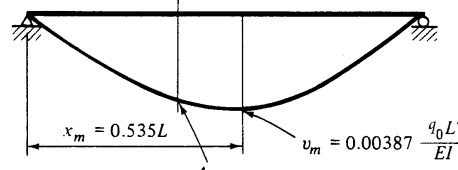
virtuální zatížení - část (a)

virtuální moment - část (a)



virtuální zatížení - část (b)

virtuální moment - část (b)



ohybová čára

$$v = \frac{q_0 L^4}{360 EI} \left[ 4 \left( \frac{x}{L} \right) - 5 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{x}{L} \right)^6 \right]$$

#### Příklad 4 - pokračování

Průběh skutečné křivosti -  $\phi = -w'' = \frac{M_y}{EI_y}$

$$\phi = \frac{q_0 L^2}{12EI_y} \left[ \frac{\xi}{L} - \left( \frac{\xi}{L} \right)^4 \right]$$

- Výpočet pootočení  
Princip virtuálních sil zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \delta E_e^* &= \delta E_i^* \\ 1 \cdot \varphi_{yB} &= \int_0^L \phi \delta M_y dx = \int_0^L \frac{q_0 L^2}{12EI_y} \left[ \frac{\xi}{L} - \left( \frac{\xi}{L} \right)^4 \right] \frac{\xi}{L} d\xi \\ \varphi_{yB} &= \frac{1}{72} \frac{q_0 L^4}{EI_y} \end{aligned}$$

- Určení tvaru ohybové čáry  
Výpočet provedeme určením svislého průhybu v obecném bodě  $x$ . Vyjádření celkové komplementární práce vnitřních sil dostaneme integrací příslušných výrazů v rámci dvou nezávislých intervalů ( $\xi \in (0, x)$  a  $\xi \in (x, L)$ ) a jejich následným



součtem. Princip virtuálních prací pak nabude tvaru

$$\begin{aligned}\delta E_i^* &= \delta E_e^* \\ 1 \cdot w &= \int_0^x \frac{q_0 L^2}{12EI_y} \left[ \frac{\xi}{L} - \left( \frac{\xi}{L} \right)^4 \right] \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] \xi \, d\xi \\ &+ \int_x^L \frac{q_0 L^2}{12EI_y} \left[ \frac{\xi}{L} - \left( \frac{\xi}{L} \right)^4 \right] \left[ x - \frac{x}{L} \xi \right] \, d\xi\end{aligned}$$

Provedením integrace pak dostaneme průhyb v libovolném bodě  $x$

$$w = \frac{q_0 L^4}{360EI_y} \left[ 4 \left( \frac{x}{L} \right) - 5 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{x}{L} \right)^6 \right] \quad (106)$$

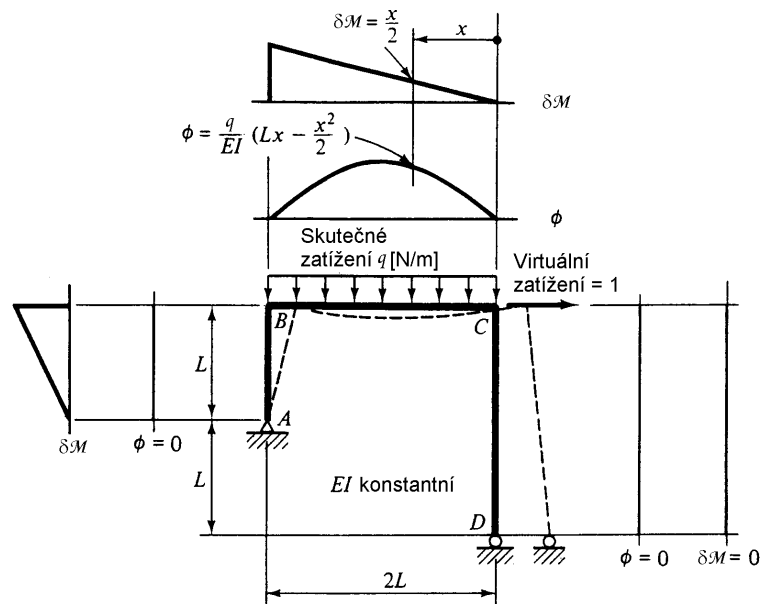
Polohu maximálního průhybu určíme položením derivace (106) podle  $\frac{x}{L}$  rovnu nule

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\left(\frac{x}{L}\right)} &= \frac{q_0 L^4}{360EI_y} \frac{d}{d\left(\frac{x}{L}\right)} \left[ 4 \left( \frac{x}{L} \right) - 5 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{x}{L} \right)^6 \right] = 0 \Rightarrow \frac{x}{L} = 0.535 \\ w_{max} &= 0.00387 \frac{q_0 L^4}{EI_y}\end{aligned}$$

## PRINCIP VIRTUÁLNÍCH SIL - PŘÍKLADY

Př. 5 Uvažujte jednoduchý prostě podepřený rám. Určete vodorovný posun v bodě  $C$ . Zanedbejte vliv smyku. Uvažujte

- a) Rovnoměrné spojitě zatížením prvku  $BC$ .
- b) Rovnoměrný teplotní gradient  $\frac{\Delta T}{h}$  prvku  $BC$ . Tento prvek má výšku  $h$  a koeficient teplotní roztažnosti  $\alpha$ .



## Příklad 5 - pokračování

Řešení

- část (a)

Princip virtuálních sil zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}\delta E_e^* &= \delta E_i^* \\ 1 \cdot u_C &= \int_0^{2L} \phi \delta M_y = \int_0^{2L} \left[ \frac{q}{EI_y} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{x}{2} \right] dx = \frac{qL^4}{3EI_y}\end{aligned}$$

- část (b)

S ohledem na rovnici (105) ( $\phi = \frac{\alpha \Delta T}{h}$ ) zapíšeme princip virtuálních sil ve tvaru

$$\begin{aligned}\delta E_e^* &= \delta E_i^* \\ 1 \cdot u_C &= \int_0^{2L} \phi \delta M_y = \int_0^{2L} \left[ \frac{\alpha \Delta T}{h} \frac{x}{2} \right] dx = \frac{\alpha \Delta T L^2}{h}\end{aligned}$$

Poznamenejme, že tento posun nezávisí na tuhosti konstrukce, závisí pouze na přetvoření daném předepsanou křivostí. To však nebude platit u konstrukcí staticky neurčitých.

## PRINCIP VIRTUÁLNÍCH SIL - PŘÍKLADY

Aplikace na příhradové konstrukce

Připomeňme, že příhradové konstrukce předpokládají přenos zatížení do konstrukce pouze styčnickovými vazbami. Z povahy geometrie jednotlivých konstrukčních prvků (prutů) a styčnickových vazeb lze zanedbat ohybovou tuhost prutů a uvažovat pouze přenos osových (normálových) sil. Komplementární virtuální práce vnitřních sil se pak redukuje na tvar

$$\delta E_i^* = \int_0^L \underbrace{\left( \alpha T_0 + \frac{N}{EA} \right)}_{\varepsilon_0 = u'_0} \delta N \, dx \quad (107)$$

Připomeňme, že  $T_0$  představuje konstantní změnu teploty po průřezu. Za předpokladu, že  $EA = \text{konstanta}$ ,  $N = \text{konstanta}$  a  $\delta N = \text{konstanta}$ , lze integrací rovnice (107) přejít na tvar

$$\delta E_i^* = \underbrace{\left( \overbrace{\alpha T_0 + \frac{N}{EA}}^{\varepsilon} \right)}_{\Delta L} L \delta N = \Delta L \delta N \quad (108)$$

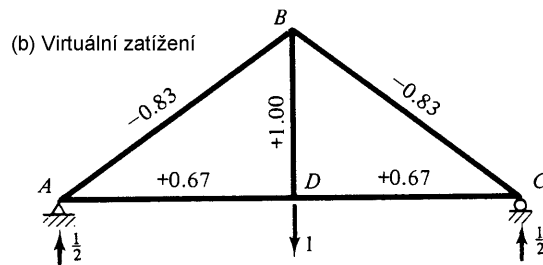
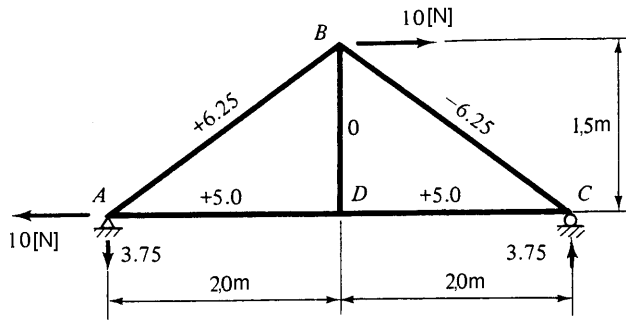
kde  $\Delta L = \varepsilon L$  je skutečné protažení prutu. Rovnice (108) odpovídá komplementární virtuální práci pro jeden prvek (prut) příhradové konstrukce. Celkovou práci obržíme součtem přes všechny prvky, tedy

$$\delta E_i^* = \sum_i \left( \alpha^i T_0^i + \frac{N^i}{E^i A^i} \right) L^i \delta N^i = \sum_i \Delta L^i \delta N^i \quad (109)$$

## PRINCIP VITUÁLNÍCH SIL - PŘÍKLADY

Př. 6 Uvažujte jednoduchou staticky určitou příhradovou konstrukci. Určete svislý posun styčnicku  $D$  v důsledku (tahovou tuhost  $EA$  uvažujeme konstantní)

- Vodorovné síly o velikosti 10N aplikované v bodě  $B$
- Rovnoměrné změny teploty z  $-5^{\circ}C$  do  $20^{\circ}C$  ( $T_0 = 25^{\circ}C$ ) prutů  $AB$  a  $BC$ ,  
 $\alpha = 10e^{-5}K^{-1}$



### Příklad 6 - pokračování

Výpočet je proveden v tabulce

- část (a) - silové zatížení

| prvek | $L$ [m] | $N$ [N] | $\Delta L \cdot EA$ [N· m] | $\delta N$ [N] | $\delta E_i^* \cdot EA$ [N <sup>2</sup> · m] |
|-------|---------|---------|----------------------------|----------------|--|
| AB    | 2.5     | 6.25    | 15.625                     | -0.83          | -12.969                                      |
| BC    | 2.5     | -6.25   | -15.625                    | -0.83          | 12.969                                       |
| AD    | 2.0     | 5       | 10                         | 0.67           | 6.7  |
| DC    | 2.0     | 5       | 10                         | 0.67           | 6.7  |
| BD    | 1.5     | 0       | 0                          | 1              | 0  |
| SUMA  |         |         |                            |                | 13.4   |

$$u_B^a = \frac{13.4}{EA} \text{ [m]}$$

- část (b) - teplotní zatížení

| prvek | $L$ [m] | $\Delta L = \alpha T_0 L$ [m] | $\delta N$ [N] | $\delta E_i^*$ [N· m] |
|-------|---------|-------------------------------|----------------|-----------------------|
| AB    | 2.5     | 0.00625                       | -0.83          | -0.0052               |
| BC    | 2.5     | 0.00625                       | -0.83          | -0.0052               |
| AD    | 2.0     | 0                             | 0.67           | 0                     |
| DC    | 2.0     | 0                             | 0.67           | 0                     |
| BD    | 1.5     | 0                             | 1              | 0                     |
| SUMA  |         |                               |                | -0.014                |

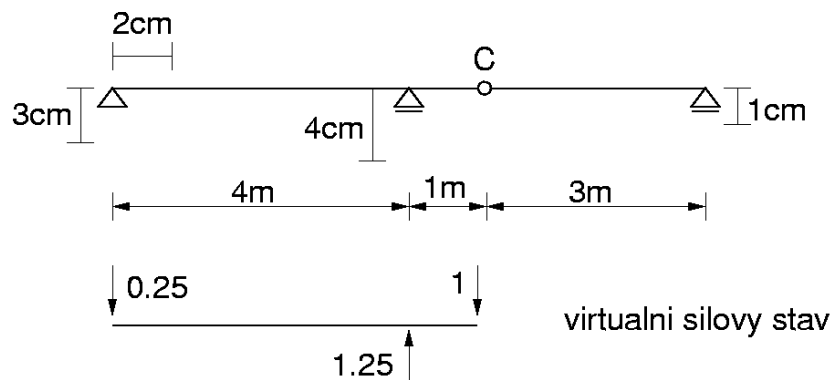
$$u_B^b = -0.014 \text{ [m]}$$

## PRINCIP VIRTUÁLNÍCH SIL - PŘÍKLADY

Vliv předepsaných posunutí - např., popuštění nebo natočení podpor

Př. 7 Uvažujte Gerberův nosník zatížený poklesem jednotlivých podpor. Určete svislý posun bodu  $C$ .

Poznamenejme, že v případě staticky určitých konstrukcí, pokud jsou předepsány pouze kinematické okrajové podmínky (poklesy nebo natočení podpor), se jednotlivé prvky konstrukce přemísťují jako tuhé části. Důsledkem jsou nulová přetvoření prutů (nulové vnitřní síly) a zároveň tedy nulová komplementární virtuální práce vnitřních sil  $\Rightarrow \delta E_i^* = 0$ .



Princip virtuálních sil zapíšeme ve tvaru

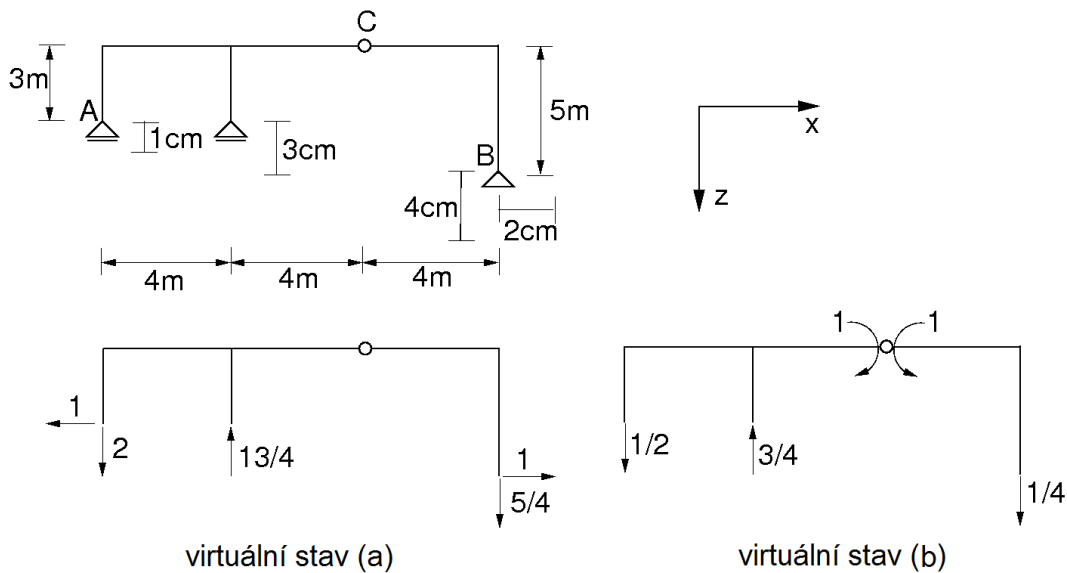
$$\delta E_e^* = \sum_i \delta R^i \Delta^i = 1 \cdot w_C - 4 \cdot 1,25 + 3 \cdot 0,25 = 0 \Rightarrow w_C = 4,25 \text{ [cm]}$$

### Vliv poklesu nebo natočení podpor - pokračování

Př. 8 Uvažujte jednoduchý staticky určitý rám zatížený poklesem jednotlivých podpor. Určete

- (a) vzájemný vodorovný posun bodů  $AB$
- (b) vzájemné natočení prutů v klobu  $C$

Jednotkové virtuální stavy jsou patrné z obrázku. Komplementární virtuální práce vnitřních sil je opět rovna nule  $\Rightarrow \delta E_i^* = 0$ .





### Příklad 8 - pokračování

Řešení

- část (a)

$$\delta E_e^* = \sum_i \delta R^i \Delta^i = 1 \cdot u_{AB} + 2,0 \cdot 0,01 - \frac{13}{4} \cdot 0,03 + \frac{5}{4} \cdot 0,04 = 0 \Rightarrow u_{AB} = 27,5 \text{ [mm]}$$

- část (b)

$$\delta E_e^* = \sum_i \delta R^i \Delta^i = 1 \cdot \varphi_C + \frac{1}{2} \cdot 0,01 - \frac{3}{4} \cdot 0,03 + \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 0 \Rightarrow \varphi_C = 7,5e-3 \text{ [rad]}$$

## Maticová forma výpočtu deformací - Matice poddajnosti prutu

Připomeňme některé vztahy z teorie pružnosti

- Materiálová matice poddajnosti - vyjádřena v materiálovém bodě  
3D

$$\{\varepsilon\} = \underbrace{[C_M]}_{6 \times 6} \{\sigma\} + \{\varepsilon_0\} \quad (110)$$

1D

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \quad (111)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{\kappa G} \quad (112)$$

- Matice poddajnosti průřezu - vyjadřuje vztah mezi přetvořením prutu a vnitřními silami (stále předpokládáme soustavu souřadnic tvořenou hlavními centrální osami setrvačnosti - těžišťové osy)  
s vlivem smyku

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_0 \\ \phi = \varphi'_y \\ \gamma = \varphi_y + w' \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa GA} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} N \\ M_y \\ Q_z \end{array} \right\} \quad (113)$$

bez vlivu smyku

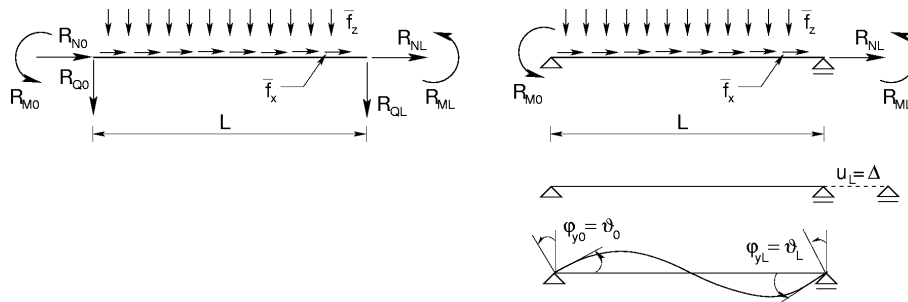
$$\begin{Bmatrix} u_0' \\ \phi = -w'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (114)$$

- Matice poddajnosti prutu - konstrukce

### Matice poddajnosti prostě podepřeného prutu

Uvažujme prostě podepřený nosník zatížený rovnoměrným silovým zatížením a osamělým silovým a momentovým zatížením, jak je naznačeno na obrázku. Zaměříme se na odvození koncových přetvoření nosníku (tzv. ryzíh deformací), které uspořádáme do vektoru ve tvaru

$$\{\Delta\} = \{\Delta, \vartheta_1, \vartheta_2\}^T \quad (115)$$



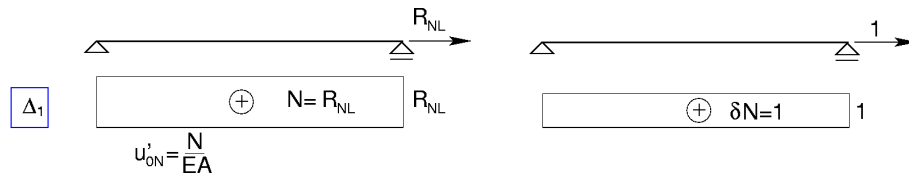
## Matice poddajnosti prostě podepřeného prutu - pokračování

Přestože bychom k odvození prvků vektoru  $\{\Delta\}$  mohli vyjít přímo z rovnic (72) a (74), využijeme Principu virtuálních posunutí, přičemž opět zanedbáme vliv posouvajících sil (výpočet bez vlivu smyku  $\phi = -w''$ )

- Deformace od koncových sil

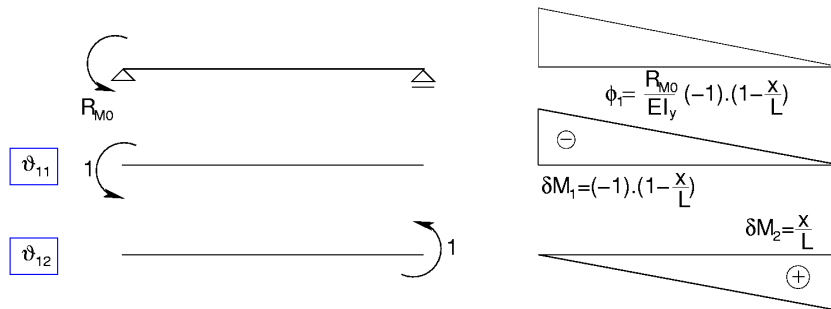
- Výpočet posunu průřezu  $\Delta$  os síly  $R_{NL}$  vzhledem k obrázku dostaneme

$$(\delta P|_L = 1) \cdot \Delta_1 = \int_0^L \frac{R_{NL}}{EA} (\delta N = 1) dx = \frac{R_{NL}L}{EA} \quad (116)$$



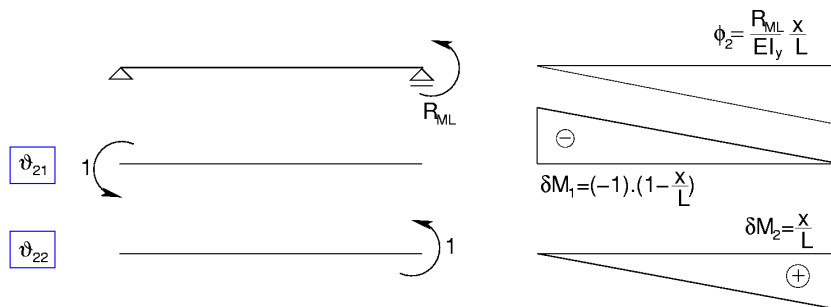
- Výpočet natočení průřezů  $\vartheta_1, \vartheta_2$  od momentu  $R_{M0}$  vzhledem k obrázku dostaneme

$$\begin{aligned} (\delta M_1|_0 = 1) \cdot \vartheta_{11} &= \int_0^L \overbrace{(-1) \cdot \frac{R_{M0}}{EI_y} \left(1 - \frac{x}{L}\right)}^{\phi|_{R_{M0}}} \overbrace{(-1) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)}^{\delta M|\delta M_1} dx = \frac{R_{M0}L}{3EI_y} \\ (\delta M_2|_L = 1) \cdot \vartheta_{12} &= \int_0^L (-1) \cdot \frac{R_{M0}}{EI_y} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = -\frac{R_{M0}L}{6EI_y} \end{aligned} \quad (117)$$



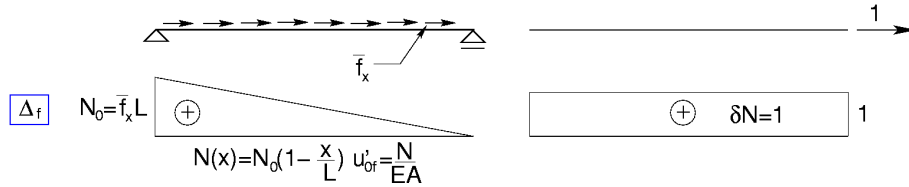
– Výpočet natočení průřezů  $\vartheta_1, \vartheta_2$  od momentu  $R_{ML}$  vzhledem k obrázku dostaneme

$$\begin{aligned}
 (\delta M_1|_0 = 1) \cdot \vartheta_{21} &= \int_0^L \overbrace{\frac{R_{ML}}{EI_y} \frac{x}{L}}^{\phi|_{R_{ML}}} \overbrace{(-1) \cdot (1 - \frac{x}{L})}^{\delta M|\delta M_1} dx = -\frac{R_{ML}L}{6EI_y} \\
 (\delta M_2|_L = 1) \cdot \vartheta_{22} &= \int_0^L \frac{R_{ML}}{EI_y} \frac{x}{L} \frac{x}{L} dx = \frac{R_{ML}L}{3EI_y} \quad (118)
 \end{aligned}$$



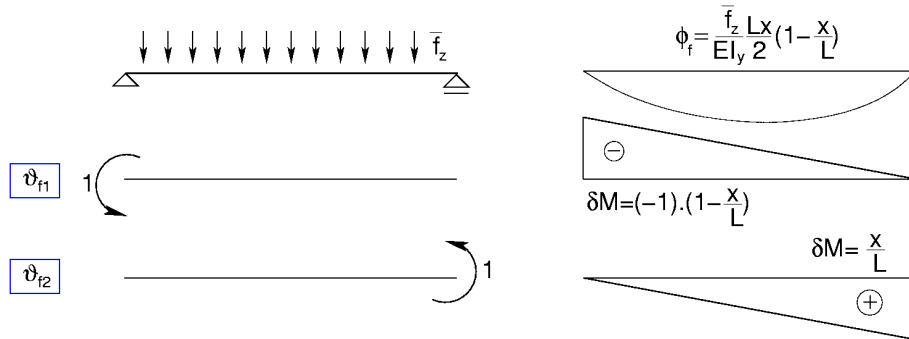
- Deformace od spojitého zatížení

- Výpočet posunu průřezu  $\Delta$  od zatížení  $\bar{f}_x$



$$(\delta P|_L = 1) \cdot \Delta_f = \int_0^L \overbrace{\frac{\bar{f}_x L}{EA} \left(1 - \frac{x}{L}\right)}^{(u'_0 = \Delta')} (\delta N = 1) dx = \frac{\bar{f}_x L^2}{2EA} \quad (119)$$

- Výpočet natočení průřezů  $\vartheta_1, \vartheta_2$  od zatížení  $\bar{f}_z$



$$\begin{aligned}
(\delta M_1|_0 = 1) \cdot \vartheta_{f_1} &= \int_0^L \overbrace{\frac{\bar{f}_z L x}{2EI_y} \left(1 - \frac{x}{L}\right)}^{\phi|_{\bar{f}_z}} \overbrace{(-1) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)}^{\delta M|_{\delta M_1}} dx = -\frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} \\
(\delta M_2|_L = 1) \cdot \vartheta_{f_2} &= \int_0^L \frac{\bar{f}_z L x}{2EI_y} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = \frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} \quad (120)
\end{aligned}$$

- Deformace od teploty

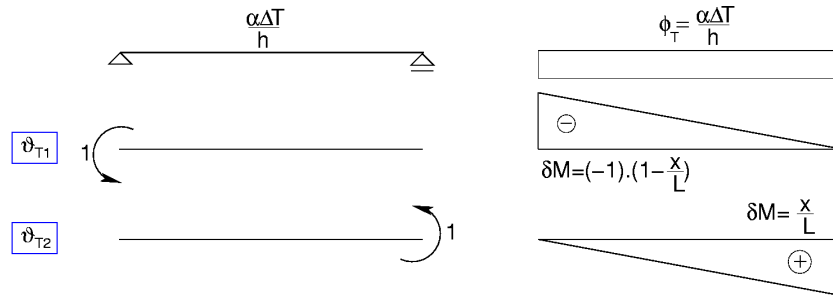
- Výpočet posunu průřezu  $\Delta$  způsobené konstantní změnou teploty  $T_0$

$$(\delta P|_L = 1) \cdot \Delta_T = \int_0^L \overbrace{\alpha T_0}^{(u'_0 = \Delta')} \cdot (\delta N = 1) dx = \alpha L T_0 \quad (121)$$



- Výpočet natočení průřezů  $\vartheta_1, \vartheta_2$  způsobené gradientem teploty  $\frac{\Delta T}{h}$

$$\begin{aligned}
(\delta M_1|_0 = 1) \cdot \vartheta_{T_1} &= \int_0^L \frac{\alpha \Delta T}{h} \overbrace{\left(-1\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)}^{\phi|_{\bar{f}_z}} dx = -\frac{\alpha \Delta T L}{2h} \\
(\delta M_2|_L = 1) \cdot \vartheta_{T_2} &= \int_0^L \frac{\alpha \Delta T}{h} \frac{x}{L} dx = \frac{\alpha \Delta T L}{2h} \quad (122)
\end{aligned}$$



Vzhledem k tomu, že předpokládáme elastické chování nosníku, můžeme uplatnit princip superpozice a výsledná přetvoření vyjádřit jako součet od jednotlivých příčinků (zatěžovacích stavů). V takovém případě dostaneme

$$\Delta(= u_0^L) = \Delta_1 + \Delta_f + \Delta_T \quad (123)$$

$$\vartheta_1(= \varphi_{y0}) = \vartheta_{11} + \vartheta_{12} + \vartheta_{f1} + \vartheta_{T1} \quad (124)$$

$$\vartheta_2(= \varphi_{yL}) = \vartheta_{21} + \vartheta_{22} + \vartheta_{f2} + \vartheta_{T2} \quad (125)$$

Rovnice (123)- (125) lze zapsat v kompaktním tvaru následovně

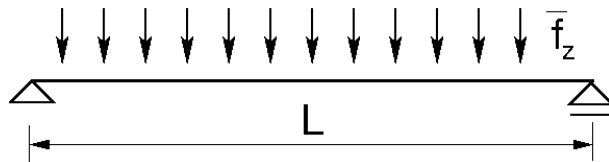
$$\begin{Bmatrix} \Delta \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{3EI_y} & -\frac{L}{6EI_y} \\ 0 & -\frac{L}{6EI_y} & \frac{L}{3EI_y} \end{bmatrix}}_{[C_K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_{N0} \\ R_{M0} \\ R_{ML} \end{Bmatrix}}_{\{R\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\bar{f}_x L^2}{2EA} + \alpha L T_0 \\ -\frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} - \frac{\alpha \Delta T}{h} \\ \frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} + \frac{\alpha \Delta T}{h} \end{Bmatrix}}_{\{\Delta_f\} + \{\Delta_T\}} \quad (126)$$



### Maticе poddajnosti prostě podepřeného prutu - pokračování

Matici  $[C_K]$  nazveme maticí poddajnosti příslušnou prostě podepřenému přímému prutu. Poznamenejme, že jednotlivé prvky matice poddajnosti  $[C_K]$  vyjadřují přetvoření (posun, nebo pootočení) od příslušných jednotkových zatěžovacích stavů, rovnice (116)- (122). Např. prvek  $c_{11}$  vyjadřuje posun v místě  $x = L$  od jednotkové síly aplikované v místě  $x = L$  ve směru osy  $x$ .

Př. 9 - Užitím rovnice (126) určete maximální průhyb prostě podepřeného nosníku zatíženého rovnoměrným zatížením podle obr. Výsledek porovnejte s přístupem založeným na přímé integraci křivosti. Uvažujte Bernoulli-Navierovu hypotézu pro popis kinematiky přemístění průřezu.



Řešení

Připomeňme, že s přihlédnutím k Bernoulli-Navierově hypotéze platí

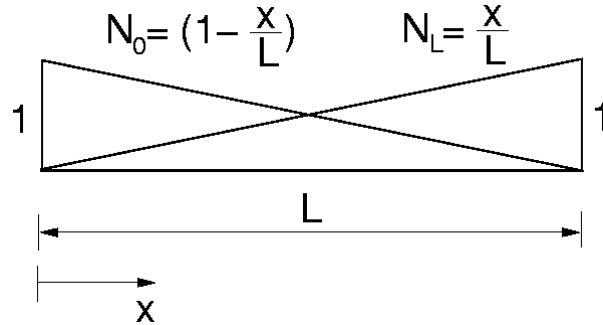
$$\phi = \varphi'_y = -w'' = \frac{M_y}{EI_y} \quad (127)$$

Aproximujme průběh pootočení průřezu  $\varphi_y$  po délce nosníku lineární funkcí. To lze

vyjádřit vztahem

$$\varphi_y = N_0 \varphi_{y0} (= -\frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y}) + N_L \varphi_{yL} (= \frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y}) \quad (128)$$

kde  $N_0$  a  $N_L$  jsou jednotkové bázové funkce znázorněné graficky na obrázku.



Spojením rovnic (127) a (128) dostaneme

$$w(x) = - \int \varphi_y dx + C (= 0, z \text{ podmínky } w(0) = 0) = \frac{\bar{f}_z L^3 x}{24EI_y} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$w_{max}(x = \frac{L}{2}) = \frac{\bar{f}_z L^4}{96EI_y} \quad (129)$$

### Příklad 9 - pokračování

Výpočet nyní provedeme přímou integrací rovnice (127)

$$\begin{aligned}w'' &= -\frac{\bar{f}_z L}{2EI_y} \left( x - \frac{x^2}{L} \right) \\w' &= -\frac{\bar{f}_z L}{2EI_y} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right) + C_1 \\w &= -\frac{\bar{f}_z L}{2EI_y} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12L} \right) + C_1 x + C_2\end{aligned}$$

Integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z podmínek

$$\begin{aligned}w'(L/2) &= 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\bar{f}_z L}{24EI_y} \\w(0) &= 0 \Rightarrow C_2 = 0\end{aligned}$$

Rovnice ohybové čáry tak zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}w &= -\frac{\bar{f}_z L}{2EI_y} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12L} \right) + \frac{\bar{f}_z L x}{24EI_y} \\w_{max}(x = \frac{L}{2}) &= \frac{5 \bar{f}_z L^4}{384 EI_y}\end{aligned}\tag{130}$$

### Příklad 9 - pokračování

Stojí za povšimnutí, že (porovnejte s rovnicemi (120))

$$\begin{aligned} -w'(0) &= \varphi_{y0} = \vartheta_{f1} = -\frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} \\ -w'(L) &= \varphi_{yL} = \vartheta_{f2} = \frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} \end{aligned}$$

Na závěr, porovnáním rovnic (128) a (129), dostaneme

$$w_{max}^{ex} = 1,25 \cdot w_{max}^{app}$$

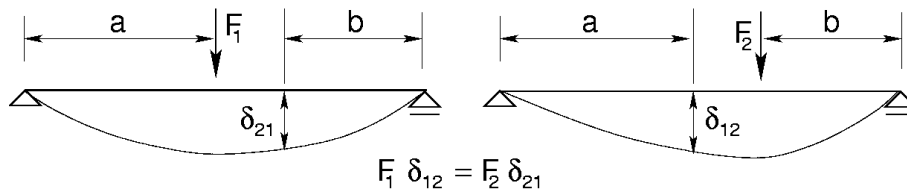
kde  $w_{max}^{ex}$  odpovídá přesnému řešení (s přihlédnutím k předpokladu Bernoulli-Navierovy hypotézy, rovnice (129)), zatímco  $w_{max}^{app}$  odpovídá řešení přibližnému (rovnice (128)).

Poznámka: Přibližné řešení v případě přetvoření reprezentuje vždy tužší chování než řešení přesné. V našem případě je přesné řešení popsáno rovnicí čtvrtého řádu, zatímco přibližné řešení rovnicí druhého řádu, tj. menší počet stupňů volnosti).

## BETTIHO VĚTA

Jedním ze základních principů mechaniky je Bettiho věta:

Práce určité soustavy sil na přetvořeních, která jsou příslušná jiné soustavě sil, je rovna práci druhé soustavy na přetvořeních odpovídajících první soustavě sil. Obě soustavy jsou aplikované na téže konstrukci. Grafické znázornění tohoto teorému je patrné z obrázku.



pokud  $F_1 = F_2 = 1$  pak  $\delta_{12} = \delta_{21}$

Poznámka:

Je zřejmé, že symetrie matice poddajnosti  $[C_K]$  (rovnice (126)) je důsledkem Bettiho věty. Tento teorém využijeme i při studiu konstrukcí staticky neurčitých.

## KONSTRUKCE STATICKY NEURČITÉ - SILOVÁ METODA

Př. 10 - Určete koncové síly ( $R_{NL}, R_{M0}, R_{ML}$ ) za předpokladu nulových přetvoření koncových průřezů  $\{\Delta_u\} = 0$ .

Řešení

Uvažujme rovnici (126) zapsanou ve tvaru

$$\{0\} = [C_K] \{R\} + \{\Delta_f\} + \{\Delta_T\} \quad (131)$$

Řešením rovnice (131) obdržíme

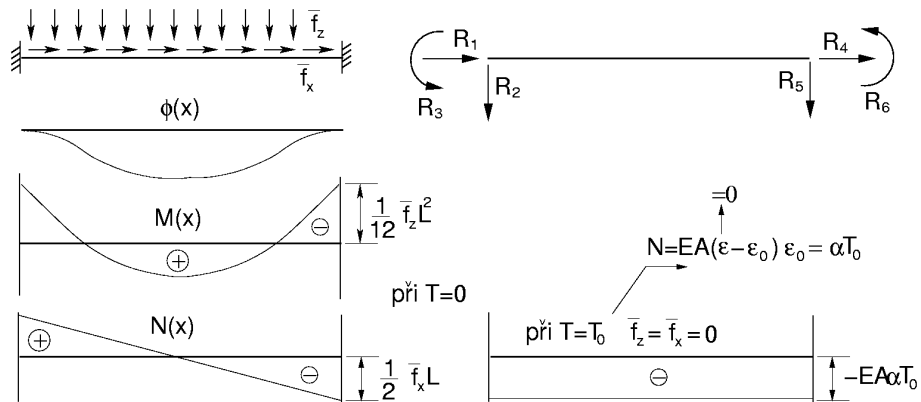
$$\{R\} = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\left( \frac{\bar{f}_x L}{2} + EA\alpha T_0 \right)}^{R_4}, \overbrace{\left( \frac{\bar{f}_z L^2}{12} + \frac{EI_y \alpha \Delta T}{h} \right)}^{R_3}, \overbrace{\left( \frac{\bar{f}_z L^2}{12} + \frac{EI_y \alpha \Delta T}{h} \right)}^{R_6} \\ - \left( \frac{\bar{f}_x L}{2} + EA\alpha T_0 \right), \left( \frac{\bar{f}_z L^2}{12} + \frac{EI_y \alpha \Delta T}{h} \right), - \left( \frac{\bar{f}_z L^2}{12} + \frac{EI_y \alpha \Delta T}{h} \right) \end{array} \right\}_T \quad (132)$$

Tím jsme v podstatě určili reakce na oboustranně vetknutém nosníku znázorněném na obrázku. Zbylé reakce určíme z podmínek rovnováhy

$$1. \quad R_1 + \bar{f}_x \cdot L + R_4 = 0 \Rightarrow R_1 = -R_4 - \bar{f}_x \cdot L \quad (133)$$

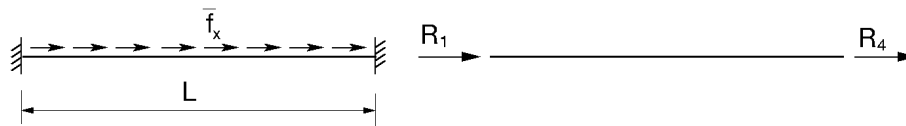
$$2. \quad R_2 + \bar{f}_z \cdot L + R_5 = 0 \Rightarrow R_5 = -R_2 - \bar{f}_z \cdot L \quad (134)$$

$$3. \quad R_3 + R_6 + \bar{f}_z \cdot \frac{L^2}{2} + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = -\frac{R_3 + R_6}{L} - \bar{f}_z \cdot \frac{L}{2} \quad (135)$$



Poznamenejme, že při řešení staticky neurčitých konstrukcí máme k dispozici vždy 3 (2D), resp. 6 (3D), podmínek rovnováhy. V případě  $n \times$  staticky neurčité konstrukce je nutno tyto podmínky doplnit o  $n-3$ , resp.  $n-6$ , podmínek deformačních (spojitosti, konzistence) typu (131).

Pro zajímavost připomeňme řešení problému staticky neurčitého tlaku/tahu, se kterým jsme se seznámili v pružnosti. Uvažujme oboustranně vetknutý nosník zatížený rovnoměrným spojitým zatížením ve směru osy  $x$ , viz obrázek. Úkolem je určit reakce.



Řešení

K dispozici máme jednu podmínku rovnováhy ve tvaru

$$R_1 + R_4 + \bar{f}_x L = 0 \quad (136)$$

Tuto rovnici doplníme o podmínku deformační. Připomeňme

$$u'_0 = \frac{N}{EA} = \frac{1}{EA}(-R_1 - \bar{f}_x x) \quad (137)$$

$$u_0 = \frac{1}{EA}\left(-R_1 x - \frac{\bar{f}_x x^2}{2}\right) + C (= 0 \text{ z podmínky } u(0) = 0) \quad (138)$$

$$u_0(L) = 0 \Rightarrow -R_1 L - \frac{\bar{f}_x L^2}{2} = 0 \Rightarrow R_1 = -\frac{\bar{f}_x L}{2} \quad (139)$$

Dosazením z rovnice (139) do rovnice (136) dostaneme (srovnej s prvním prvkem vektoru  $\{R\}$  v rovnici (132))

$$R_4 = -\frac{\bar{f}_x L}{2}$$

Tímto příkladem jsme položili základ tzv. silové metody



## SILOVÁ METODA - pokračování

Pro vysvětlení podstaty silové metody se vrátíme k Př. 10. Připomeňme, že řešením tohoto příkladu byly 3 reakce na dokonale vetknutém nosníku. Při řešení jsme v podstatě postupovali takto:

1. Konstrukci staticky neurčitou (dokonale vetknutý nosník) jsme nejdříve převedli na konstrukci staticky určitou (nosník prostě podepřený) a účinek uvolněných vazeb jsme nahradili neznámými reakcemi (síla  $R_4$ , momenty  $R_3, R_6$ )
2. V druhém kroku jsme určili hodnoty přetvoření, odpovídající uvolněným vazbám od účinku veškerého zatížení, tedy i od zatím neznámých reakcí  $R_3, R_4, R_6$ , které zde ovšem vystupovaly jako předepsaná zatížení.
3. Následně jsme představili deformační podmínky konzistentní s původními podmínkami podepření.
  - posun  $u_0^L = 0 \Rightarrow$  reakce  $R_4$
  - pootočení  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0 \Rightarrow$  reakce  $R_3, R_6$
4. Závěrem jsme určili zbylé reakce ( $R_1, R_2, R_5$ ) užitím podmínek rovnováhy

Výše popsaný postup shrnuje základní principy silové metody.

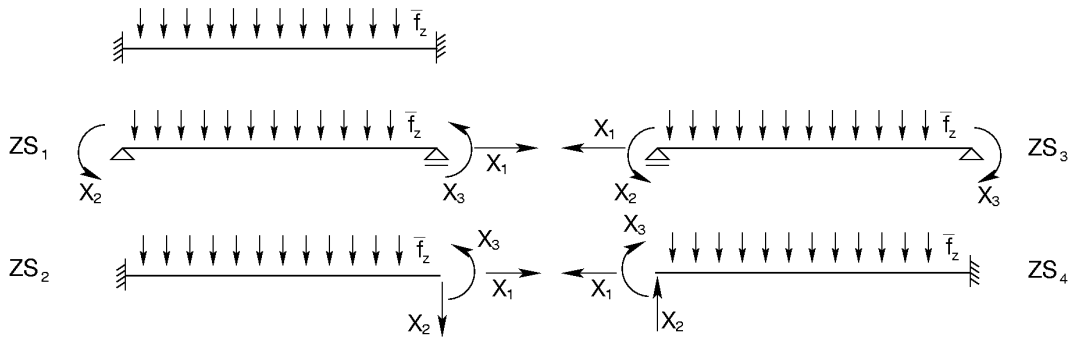
Závěrem poznamenejme, že silová metoda je postavena na principu virtuálních sil (PVs), jehož důsledkem jsou v našem případě podmínky spojitosti a podmínky deformační vyjadřující konzistenci deformací s předepsaným podepřením konstrukce (PVs označujeme

jako obecný princip spojitosti). V literatuře se setkáme i s názvem metoda konzistentních deformací.

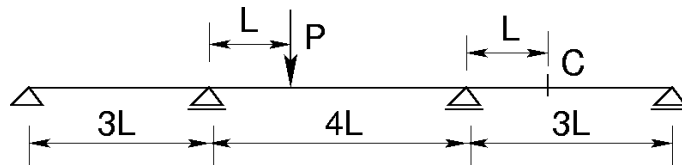
### SILOVÁ METODA - Základní soustava

Konstrukci staticky určitou, která slouží k výpočtu reakcí příslušných odebraným vazbám, nazýváme ZÁKLADNÍ SOUSTAVOU.

Příklady základních soustav dokonale vetknutého nosníku



Př. 11 - Uvažujte  $2 \times$  staticky neurčitý spojitý nosník. Určete hodnotu průhybu v b.  $E$ .

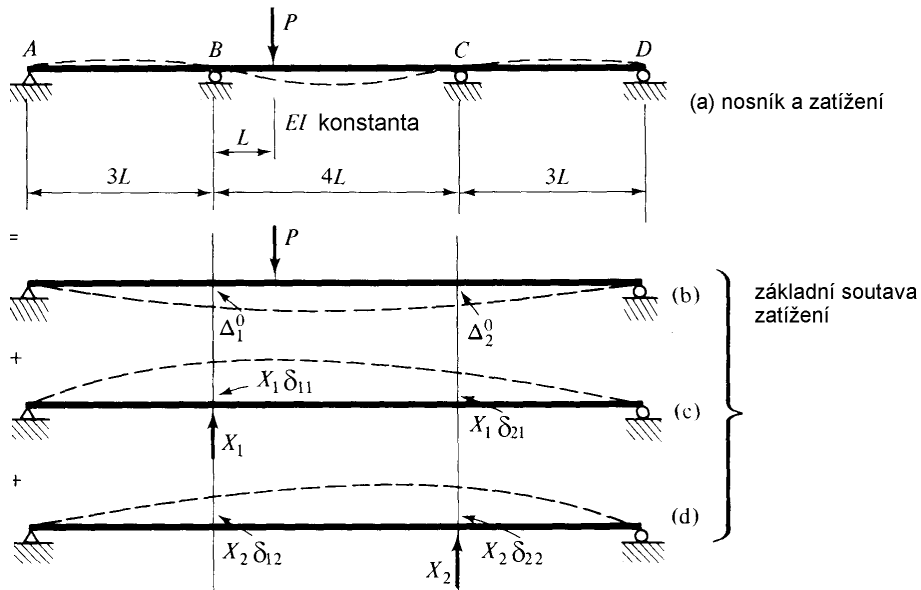


## Příklad 11 - 1. část pokračování

Řešení

Výpočet provedeme ve dvou krocích. V prvním kroce vypočteme průběhy vnitřních sil užitím silové metody a ve druhém kroce pak požadovaný průhyb standardním způsobem užitím PVs.

Výpočet vnitřních sil na  $2 \times$  staticky neurčitým spojitým nosníku

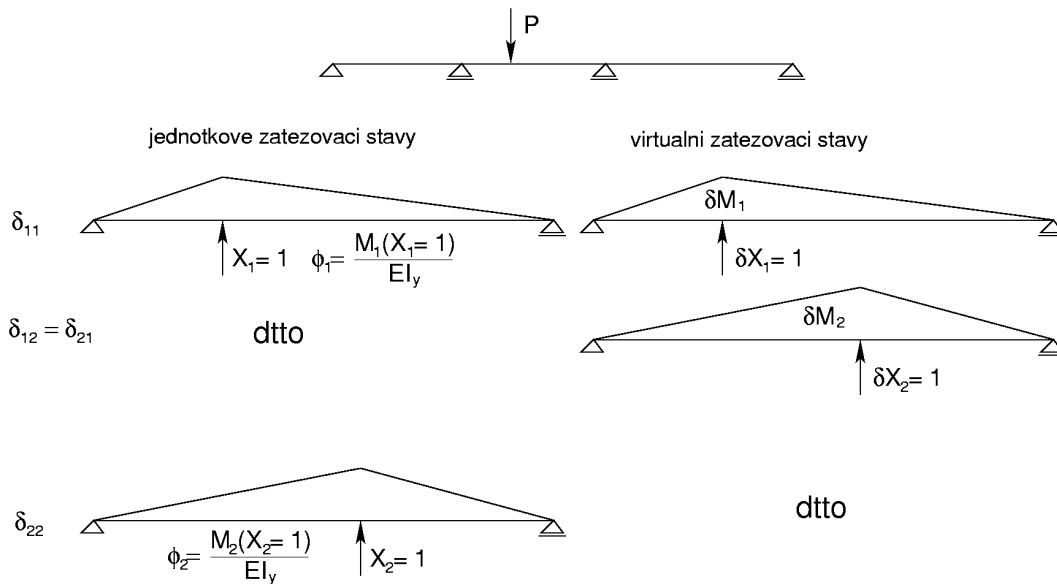


### Příklad 11 - 1. část pokračování

#### Poznámka

Na předchozím obrázku  $\Delta_i^0$  vyjadřuje průhyb od zatížení v místě podpory  $i$ ,  $\delta_{ij}X_j$  pak vyjadřuje průhyb od staticky neurčité reakce  $X_j$  v místě  $i$ . Například  $\delta_{21}X_1$  vyjadřuje průhyb v místě 2 od síly  $X_1$ . Přičemž veličiny  $\delta_{ij}$  odpovídají jednotkovým zatěžovacím stavům. Ve smyslu rovnice (126) se tedy jedná o poddajnosti. Připomeňme, že jednotlivé prvky matice poddajnosti v rovnici (126) byly také odvozeny od jednotkového zatížení.

Jednotkové zatěžovací stavy



### Příklad 11 - 1. část pokračování

Odpovídající poddajnosti  $\delta_{ij}$  určíme užitím PVs ze vztahu

$$\delta_{ij} = \int_0^L \underbrace{\frac{M_j|_{X_j=1}}{EI_y}}_{\phi_j} \delta M_i dx \quad (140)$$

Prvky  $\Delta_i^0$  určíme opět užitím PVs ze vztahu

$$\Delta_i^0 = \int_0^L \underbrace{\frac{M_0|_P}{EI_y}}_{\phi_0} \delta M_i dx \quad (141)$$

Deformační podmínky, konzistentní s podmínkami podepření, zapíšeme ve tvaru

$$\sum_j^2 \delta_{ij} X_j + \Delta_i^0 = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2 \quad (142)$$

Těmto rovnicím se také někdy říká rovnice podmíněčné (vyjadřují deformační podmínku). V našem konkrétním případě lze rovnici (142) zapsat přehledně v maticovém tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} = \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix}}_{[C_K]} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (143)$$

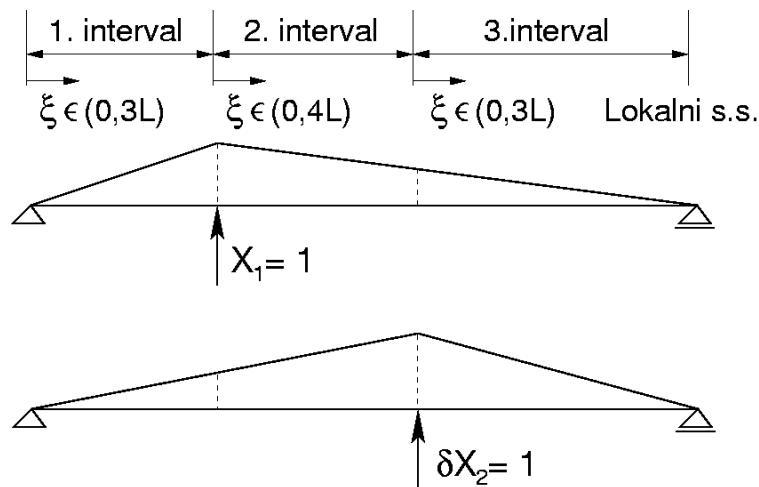
Matice poddajnosti  $[C_K]$  příslušná nyní konstrukci z př. 11 je opět symetrická  $\rightarrow$  důsledek Bettiho věty.

### Příklad 11 - 1. část pokračování

Jak je patrné z obrázku jednotkových zatěžovacích stavů, vyžaduje výpočet mimodiagonálních členů matice  $[C_K]$  (prky  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ) rozdělení integračního oboru  $x \in (0, L)$  na několik intervalů, viz obr.

Rozdělení integračního oboru na několik intervalů pro výpočet  $\delta_{12} = \delta_{21}$

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$



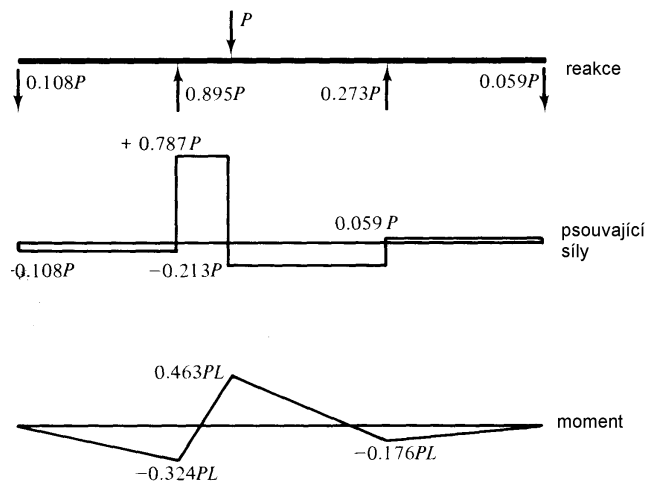
Užitím rovnic (140) a (141) obdržíme

$$\begin{aligned}\Delta_1^0 &= 16.5 \frac{PL^3}{EI_y} & \Delta_1^0 &= 15.0 \frac{PL^3}{EI_y} \\ \delta_{11} &= \delta_{22} = -14.7 \frac{L^3}{EI_y} & \delta_{12} &= \delta_{21} = -12.3 \frac{L^3}{EI_y}\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (142) a řešením pro neznámé  $X_i$  dostaneme

$$X_1 = 0.895P \quad X_2 = 0.273P$$

Zbylé tři neznámé reakce určíme užitím podmínek rovnováhy. Výsledné průběhy vnitřních sil jsou patrné z obrázku.



Poznámka 1:

V příkladu 13 si ukážeme, že podmíněčné rovnice (142) lze odvodit přímo aplikací principu virtuálních sil ve tvaru

$$\delta E_i^* = \delta E_e^* \quad (144)$$

$$\int_{konstrukce} \frac{M}{EI_y} \delta M ds = \sum_i \delta R^i \Delta^i \quad (145)$$

Vzhledem k tomu, že podmíněčné rovnice jsou v podstatě podmínkami spojitosti, jedná se o další důkaz tvrzení, že princip virtuálních sil není nic jiného než obecný princip spojitosti.

Poznámka 2:

Připomeňme, že virtuální práce vnějších sil je v tomto případě (příklad 11) rovna nule. Virtuální reakce od virtuálních zatěžovacích stavů na ZS jsou sice nenulové, jim odpovídající vynucené posuny či natočení podpor však nulové jsou. Případy nenulových virtuálních prací vnějších sil si ukážeme na příkladech 13 a 14.



## Příklad 11 - 2. část

Výpočet průhybu v bodě  $E$

Pozn.: Připomeňme, že virtuální silový stav je libovolný silový stav vyhovující podmínkám rovnováhy, viz příklady staticky přípustných silových stavů na spojitém nosníku. Známe-li tedy průběh skutečných momentů (křivostí) na skutečné konstrukci, lze virtuální silový stav vnitřních sil odpovídající vnějšímu virtuálnímu zatížení určit na libovolné základní (staticky určité) soustavě.

Tento předpoklad si nyní ověříme určením průhybu konstrukce z př. 11 v bodě  $E$ . Skutečný průběh momentů a zvolené základní soustavy jsou patrné z obrázku.

Řešení:

- interval  $(a, b) \dots x \in (0, d = 3L)$  .t

$$\begin{aligned}\phi^1(x) &= \frac{1}{EI_y} M(x) = \frac{1}{EI_y} \cdot (-0,108x)P \\ \delta M_1^1(x) &= 0,2x \cdot \delta P_1 (= 1) = 0,2x \\ \delta M_2^1(x) &= -0,143x \cdot \delta P_2 (= 1) = -0,143x \\ \delta M_3^1(x) &= 0\end{aligned}$$

- interval  $x \in (b, c) \dots x \in (0, d = 1L)$

$$\begin{aligned}\phi^2(x) &= \frac{1}{EI_y} \cdot (-0.324L + 0.787x)P \\ \delta M_1^2(x) &= 0,6L + 0,2x \\ \delta M_2^2(x) &= -0,429L - 0,143x \\ \delta M_3^2(x) &= 0\end{aligned}$$

- interval  $x \in (c, d) \dots x \in (0, d = 3L)$

$$\begin{aligned}\phi^3(x) &= \frac{1}{EI_y} \cdot (0.463L - 0.213x)P \\ \delta M_1^3(x) &= 0,8L + 0,2x \\ \delta M_2^3(x) &= -0,571L - 0,134x \\ \delta M_3^3(x) &= 0\end{aligned}$$

- interval  $x \in (d, e) \dots x \in (0, d = 1L)$

$$\begin{aligned}\phi^4(x) &= \frac{1}{EI_y} \cdot (-0.176L + 0.0587x)P \\ \delta M_1^4(x) &= 1,4L + 0,2x \\ \delta M_2^4(x) &= -L + x \\ \delta M_3^4(x) &= 0,667x\end{aligned}$$

- interval  $x \in (e, f) \dots x \in (0, d = 2L)$

$$\phi^5(x) = \frac{1}{EI_y} \cdot (-0.1173L + 0.0587x)P$$

$$\delta M_1^5(x) = 1,6L - 0,8x$$

$$\delta M_2^5(x) = 0$$

$$\delta M_3^5(x) = 0,667L - 0,333x$$

Výsledný průhyb určíme užitím principu virtuálních sil (opět zanedbáváme vliv smyku) ve tvaru

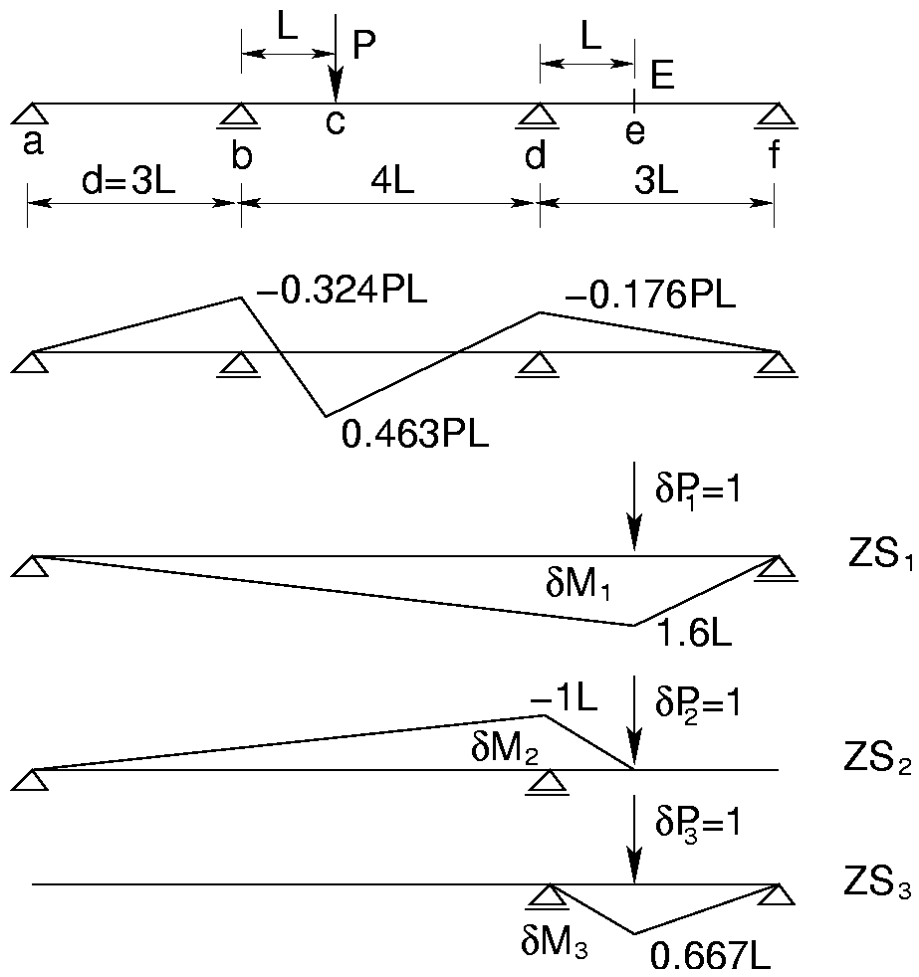
$$\Delta_E^i \delta P (= 1) = \sum_{k=0}^5 \int_0^{d^k} \phi^k(x) \delta M_i^k(x) dx$$

$$\Delta_E = \frac{1}{EI_y} \cdot (-0,00991) PL^3$$

Pozn.:

V důsledku zaokrouhlovacích chyb lze očekávat drobné rozdíly ve výsledcích.

Aplikovaný postup, kdy virtuální silový stav určujeme na základní soustavě, se nazývá REDUKČNÍ VĚTA

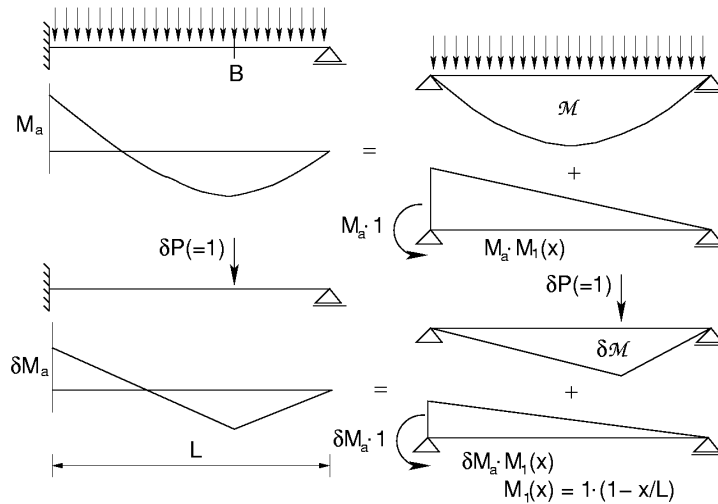


## Výpočet přetvoření staticky neurčitých konstrukcí silovou metodou Redukční věta

Podstata redukční věty je patrná z obrázku. Uvažujme  $1 \times$  staticky neurčitou konstrukci. Předpokládejme, že průběh momentu na této konstrukci je znám. Cílem je určit průhyb v bodě  $B$ . Jak je patrné z obrázku, lze určit průběh jak skutečného momentu, tak i momentu od virtuálního zatížení na původní konstrukci součtem dvou zatěžovacích stavů aplikovaných na základní soustavu (v našem případě prostý nosník), tedy

$$M(x) = M_a M_1(x) + \mathcal{M} = M_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \mathcal{M} \quad (146)$$

$$\delta M(x) = \delta M_a M_1(x) + \delta \mathcal{M} = \delta M_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \delta \mathcal{M} \quad (147)$$



### Redukční věta - pokračování

Pro výpočet přetvoření použijeme opět princip virtuálních sil ve tvaru

$$\begin{aligned} \delta P(= 1)\Delta_B &= \int_L \frac{M}{EI_y} \delta M \, dx = \int_L \frac{M}{EI_y} (\delta M_a M_1(x) + \delta \mathcal{M}) \, dx \\ &= \int_L \frac{M}{EI_y} \delta \mathcal{M} \, dx + \delta M_a \underbrace{\int_L \frac{M}{EI_y} M_1 \, dx}_0 \end{aligned} \quad (148)$$

$$\int_L \frac{M}{EI_y} M_1 \, dx = \int_L \underbrace{\frac{\mathcal{M} + M_a M_1}{EI_y}}_{\phi} M_1 \, dx = \Delta_1^0 + M_a \delta_{11} = 0 \quad (149)$$

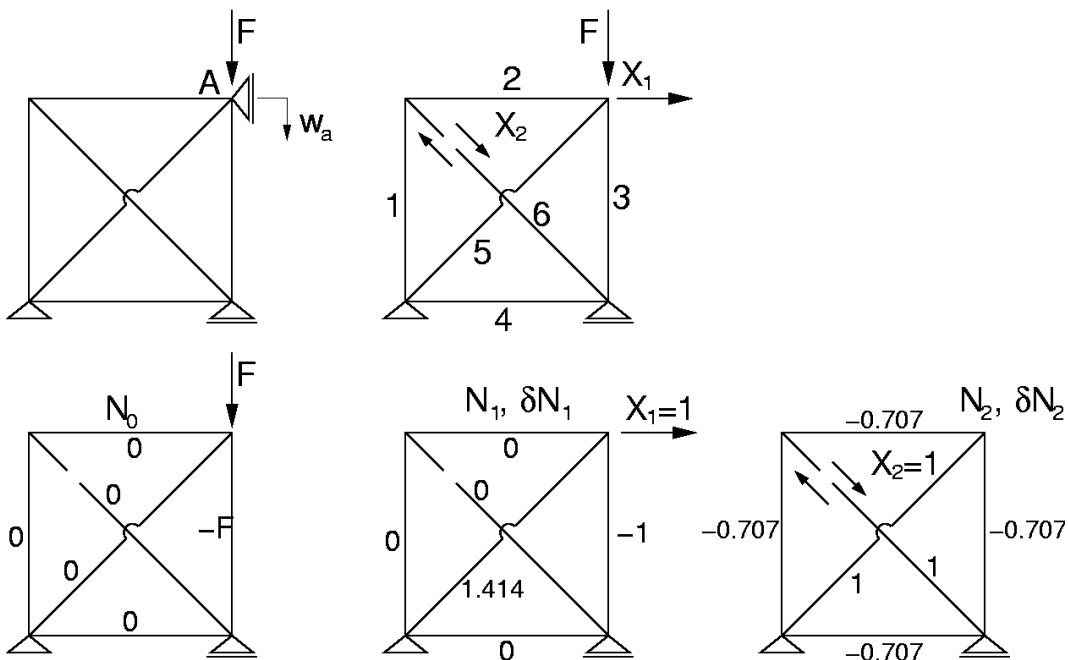
Připomeňme, že (149) je podmíněčná rovnice vyjadřující podmínku nulového pootočení v bodě A. V případě  $n \times$  staticky neurčité konstrukce bychom obdrželi  $n$  takovýchto identit. V našem případě je patrné z rovnice (148), že

$$\Delta_B = \int_L \frac{M}{EI_y} \delta \mathcal{M} \, dx \quad (150)$$

kde  $M$  je moment na skutečné (staticky neurčité) konstrukci a  $\mathcal{M}$  je moment od jednotkového virtuálního zatěžovacího stavu na základní soustavě. Tento závěr je platný pro obecnou konstrukci s libovolným stupněm statické neurčitosti.

### Příklad 12 - Řešení staticky neurčitých příhradových konstrukcí

Př. 12 - Určete vnitřní síly  $2 \times$  staticky neurčité příhradové konstrukce. Uvažujte tuhost  $EA = konst$  shodnou pro všechny pruty. Poznamenejme, že konstrukce je  $1 \times$  externě a  $1 \times$  interně staticky neurčitá. Přípustná ZS je patrná z obrázku.



## Příklad 12 - 1. pokračování

Řešení

Připomeňme, že koeficienty matice poddajnosti konstrukce  $\delta_{ij}$  v příkladu 11 jsme určili jako průhyby v místě  $i$  od jednotkové síly aplikované v místě  $j$ . Průhyb odpovídající staticky neurčité reakci  $X_j$  působící v místě  $j$  pak měl hodnotu  $\delta_{ij}X_j$ . Položení výsledného průhybu (získaného superpozicí jednotlivých zatěžovacích stavů) v místech odebraných podpor nule (deformační podmínka konzistentní s podepřením konstrukce) pak vedlo na soustavu tzv. podmíněčných rovnic pro neznámé reakce  $X_j$ .

Stejný postup lze aplikovat i na konstrukce příhradové. Jako příklad uvažujme výpočet koeficientů matice poddajnosti  $\delta_{ij}$  a hodnoty posunů  $\Delta_i^0$ , připomeňme rovnice (140) a (109)



$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^6 \frac{L^i}{EA} N^i|_{X_1=1} \delta N^i|_{\delta P_1=1} = 3,82 \frac{L}{EA} \quad (151)$$

$$\delta_{12} = \sum_{i=1}^6 \frac{L^i}{EA} N^i|_{X_2=1} \delta N^i|_{\delta P_1=1} = 2,71 \frac{L}{EA} \quad (152)$$

$$\delta_{21} = \sum_{i=1}^6 \frac{L^i}{EA} N^i|_{X_1=1} \delta N^i|_{\delta P_2=1} = 2,71 \frac{L}{EA} \quad (153)$$

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^6 \frac{L^i}{EA} N^i|_{X_2=1} \delta N^i|_{\delta P_2=1} = 4,82 \frac{L}{EA} \quad (154)$$

$$\Delta_1^0 = \delta_{1p} \cdot F = \sum_{i=1}^6 \frac{L^i}{EA} N^i|_{F=1} \delta N^i|_{\delta P_1=1} \cdot F = 1,0 \cdot F \frac{L}{EA} \quad (155)$$

$$\Delta_2^0 = \delta_{2p} \cdot F = \sum_{i=1}^6 \frac{L^i}{EA} N^i|_{F=1} \delta N^i|_{\delta P_2=1} \cdot F = 0,71 \cdot F \frac{L}{EA} \quad (156)$$

kde výraz  $\frac{L^i}{EA}$  vyjadřuje poddajnost  $i$ -tého prutu. Podmínečné rovnice pak zapíšeme ve tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3,82 & 2,71 \\ 2,71 & 4,82 \end{bmatrix}}_{[C_k]} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1,0 \cdot F \\ 0,71 \cdot F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (157)$$

Rozšíříme-li matici  $[X]$  o vektor  $\{F\}$ , můžeme společně s meznými veličinami  $X_1, X_2$  určit svislý posun styčnicku  $w_a$  v místě působení síly  $F$ . V takovém případě dostaneme

$$\begin{bmatrix} 3,82 & 2,71 & 1,0 \\ 2,71 & 4,82 & 0,71 \\ 1,0 & 0,71 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_a \frac{EA}{L} \end{Bmatrix} \quad (158)$$

Řešením rovnice (158) dostaneme

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ w_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,262 \cdot F \\ 0 \\ 0,738 \frac{FL}{EA} \end{Bmatrix} \quad (159)$$

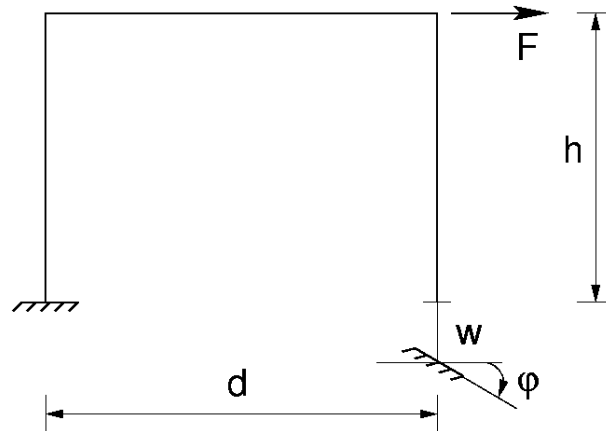
Procvičení

Ukažte, že stejného průhybu bychom dosáhli i postupem shodným s příkladem 11 (výpočet vnitřních sil od skutečného zatížení na staticky neurčitě konstrukci  $N^i$  a od virtuálního zatížení na ZS  $\delta N^i$ )

$$w_a = \sum_{i=1}^6 \frac{L^i}{EA} N^i|_F \delta N^i|_{\delta P_A=1} \quad (160)$$

### Příklad 13 - Analýza rámové konstrukce s účinkem poklesu a natočení podpor

Př. 13 - Určete reakce na dané konstrukci. Tuhost  $EI_y = konst$  uvažujte shodnou pro celou konstrukci.



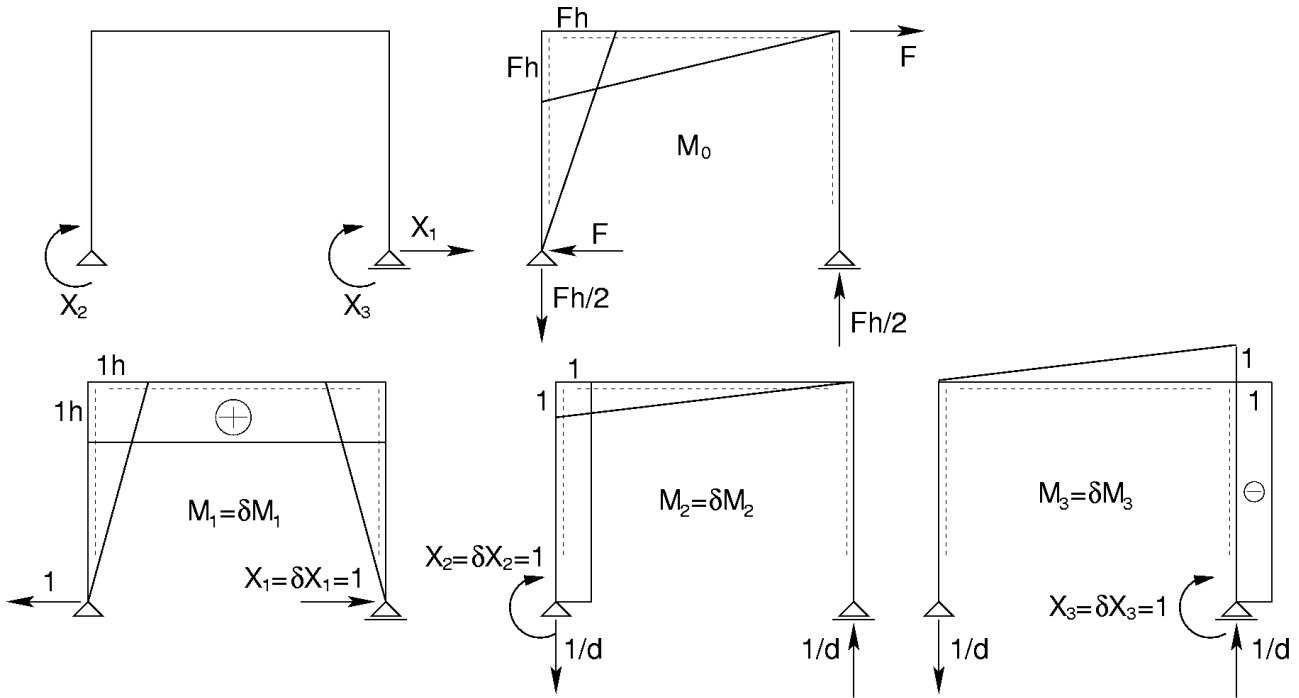
Řešení

Vydeme z principu virtuálních sil, který zapíšeme ve tvaru

$$\sum_{i=1}^N \int_{L^i} \frac{M^i}{EI_y} \delta M^i dx = \delta R_w \bar{w} + \delta R_\varphi \bar{\varphi} \quad (161)$$

kde  $N$  je počet intervalů,  $M$  vyjadřuje moment na ZS a  $\delta M, \delta R_w, \delta R_\varphi$  vyjadřují odpovídající veličiny příslušné virtuálním zatěžovacím stavům aplikovaným na ZS. K výpočtu těchto veličin využijeme základní soustavu patrnou z následujícího obrázku.

### Příklad 13 - pokračování



### Příklad 13 - pokračování

Připomeňme, že momenty  $M_i, \delta M_i$  patrné z obrázku odpovídají jednotkovým zatěžovacím stavům. Superpozicí jednotlivých účinků dostaneme

$$\begin{aligned}M &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 \\ \delta M &= \delta M_1 \delta X_1 + \delta M_2 \delta X_2 + \delta M_3 \delta X_3 \\ \delta R_w &= 0 \cdot \delta X_1 - \frac{1}{d} \cdot \delta X_2 - \frac{1}{d} \cdot \delta X_3 \\ \delta R_\varphi &= 0 \cdot \delta X_1 + 0 \cdot \delta X_2 + 1 \cdot \delta X_3\end{aligned}$$

Dosažením těchto rovnic do rovnice (161) dostaneme

$$\begin{aligned}& \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} (M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3)^i \cdot (\delta M_1 \delta X_1 + \delta M_2 \delta X_2 + \delta M_3 \delta X_3)^i dx \\ &= -\frac{1}{d} (\delta X_2 + \delta X_3) \bar{w} + 1 \cdot \delta X_3 \cdot \bar{\varphi}\end{aligned}\tag{162}$$

%

Roznásobením a následným sloučením členů příslušným jednotlivým virtuálním zatěžovacím stavům  $\delta X_i$  dostaneme

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} (M_0 M_1 + M_1 M_1 X_1 + M_2 M_1 X_2 + M_3 M_1 X_3)^i dx \cdot \delta X_1 + \\
& \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} (M_0 M_2 + M_1 M_2 X_1 + M_2 M_2 X_2 + M_3 M_2 X_3)^i dx \cdot \delta X_2 + \\
& \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} (M_0 M_3 + M_1 M_3 X_1 + M_2 M_3 X_2 + M_3 M_3 X_3)^i dx \cdot \delta X_3 = \\
& 0 \cdot \delta X_1 + \left(-\frac{1}{d}\bar{w}\right) \delta X_2 + \left(-\frac{1}{d}\bar{w} + \bar{\varphi}\right) \delta X_3 \quad (163)
\end{aligned}$$

Porovnáním výrazů příslušným jednotlivým virtuálním zatěžovacím stavům  $\delta X_i$  dostaneme soustavu podmíněných rovnic ve tvaru

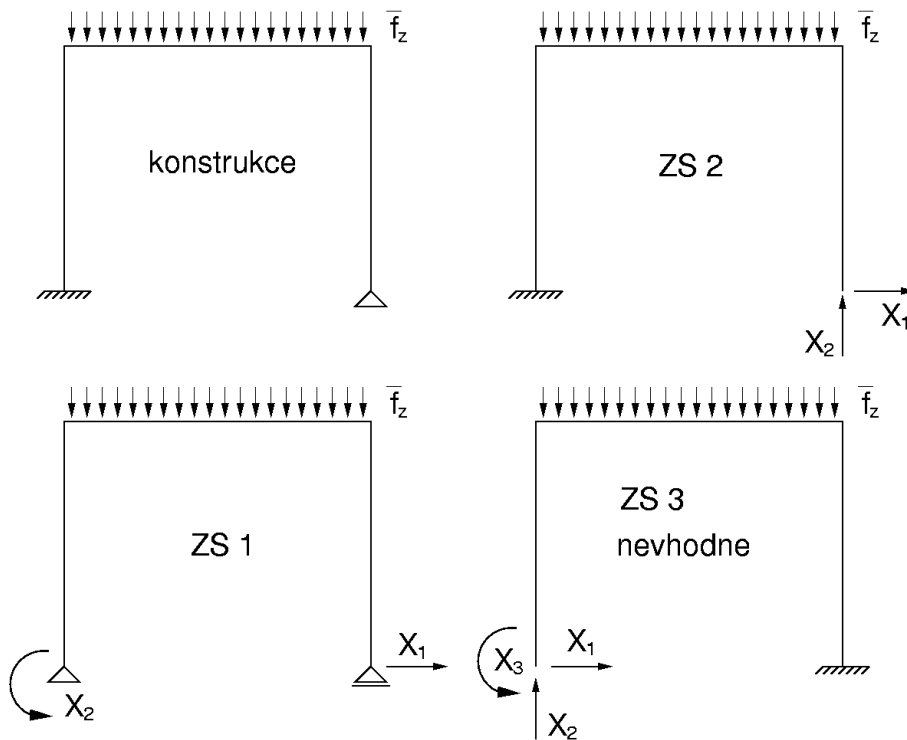
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}}_{[C_K]} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} M_0^i M_1^i dx \\ \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} M_0^i M_2^i dx \\ \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} M_0^i M_3^i dx \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{d}\bar{w} \\ -\frac{1}{d}\bar{w} + \bar{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (164)$$

Řešením soustavy rovnic (164) obdržíme hodnoty pro neznámé reakce  $X_i$ . Zbývající reakce plynou z podmínek rovnováhy. Připomeňme, že poddajnosti  $\delta_{ij}$  jsou dány vztahem

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} M_j M_i dx \quad (165)$$

## SILOVÁ METODA - Poznámka k volbě základní soustavy

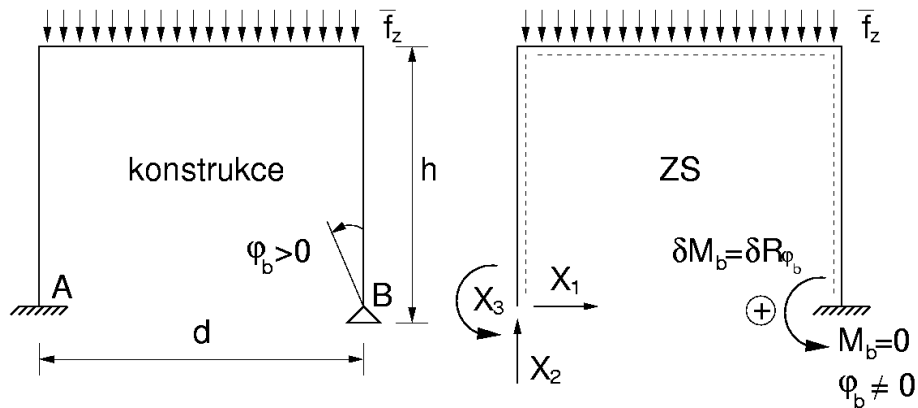
Obecně bychom se měli držet zásady, že nižší vazbu nebudeme nahrazovat vazbou vyšší. Jak je patrné z obrázku,  $ZS_3$  se této zásadě vymyká. V následujícím příkladu si ukážeme, jak v takovém případě postupovat.





### Příklad 14 - vliv volby ZS

Př. 14 - Určete reakce na dané konstrukci. Uvažujte zadanou ZS,  $EI_y = konst.$



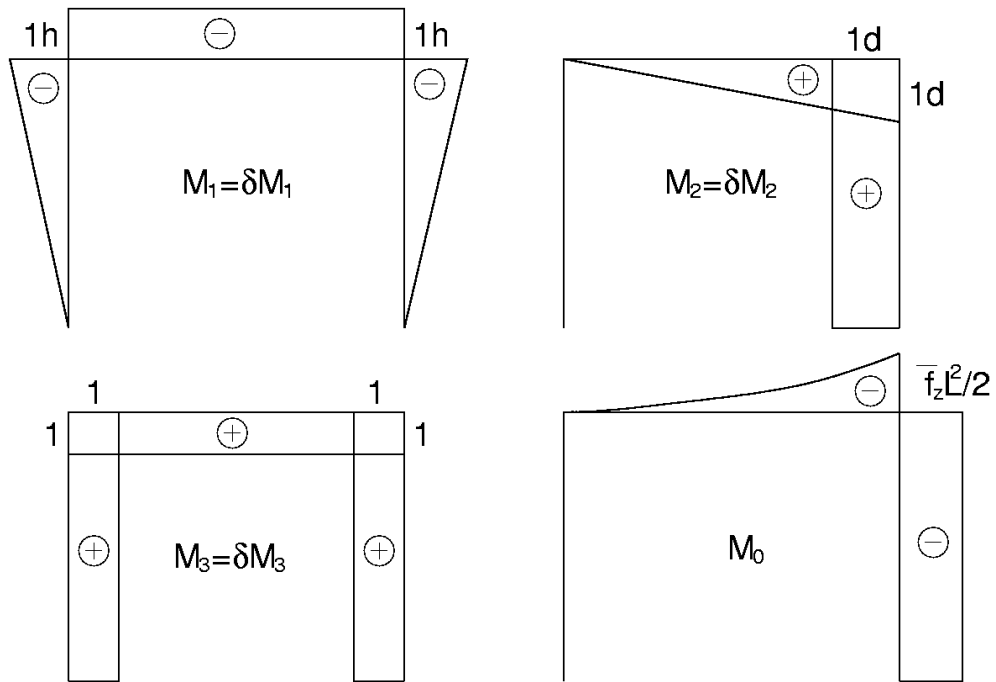
Jak je patrné z obrázku, je konstrukce  $2 \times$  staticky neurčitá. S uvažovanou ZS však zavádíme 3 neznámé reakce  $X_1, X_2, X_3$ . Ty jsou ovšem svázány podmínkou rovnováhy - nulový moment v bodě B

$$-\frac{\bar{f}_z L^2}{2} + 0 \cdot X_1 + d \cdot X_2 - 1 \cdot X_3 = 0 \quad (166)$$

Doplňující deformační podmínky (podmínečné rovnice) opět určíme aplikací principu virtuálních sil. Je třeba si uvědomit, že virtuální reakce  $\delta R_{\varphi_b}$  koná práci na neznámém nenulovém pootočení  $\varphi_b$ . Budeme-li formálně považovat toto pootočení za předepsané, bude další postup výpočtu shodný s postupem z příkladu 13.

### Příklad 14 - pokračování

Průběhy momentů příslušné jednotlivým zatěžovacím stavům jsou patrné z obrázku. Značení je shodné se značením použitým v příkladu 13.



### Příklad 14 - pokračování

V souladu se zvolenou ZS povede výpočet na tři podmíněčné rovnice pro čtyři neznámé  $X_1, X_2, X_3, \varphi_b$ . Čtvrtou rovnicí pak bude podmínka rovnováhy (166).

Princip virtuálních sil

$$\delta E_i^* = \delta E_e^* \quad (167)$$

$$\frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} M^i \delta M^i dx = \varphi_b \cdot \delta R_{\varphi_b} \quad (168)$$

Princip superpozice

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 \quad (169)$$

$$\delta M = \delta M_1 \delta X_1 + \delta M_2 \delta X_2 + \delta M_3 \delta X_3 \quad (170)$$

$$\delta R_{\varphi_b} = 0 \cdot \delta X_1 + d \cdot \delta X_2 + 1 \cdot \delta X_3 \quad (171)$$

Dosazením těchto rovnic do rovnice (168) dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} (M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3)^i \cdot (\delta M_1 \delta X_1 + \delta M_2 \delta X_2 + \delta M_3 \delta X_3)^i dx \\ &= \varphi_b \cdot (0 \cdot \delta X_1 + d \cdot \delta X_2 + 1 \cdot \delta X_3) \end{aligned} \quad (172)$$

Postup shodný s postupem z příkladu 13 vede na soustavu podmíněčných rovnic. Společně s podmínkou rovnováhy (166) dostaneme

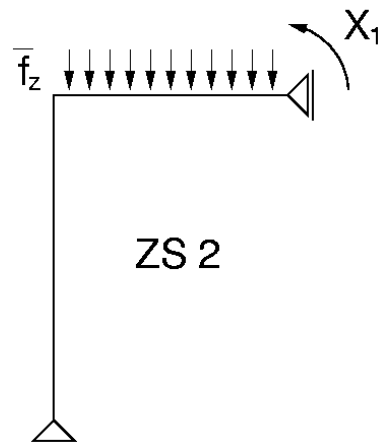
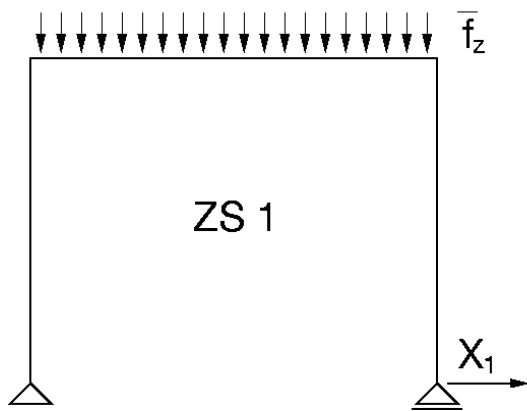
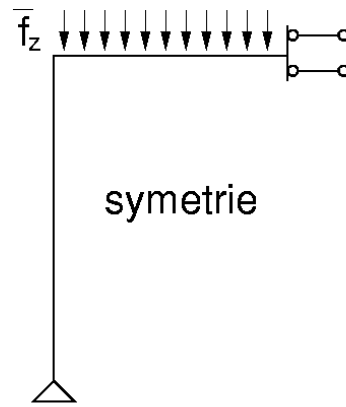
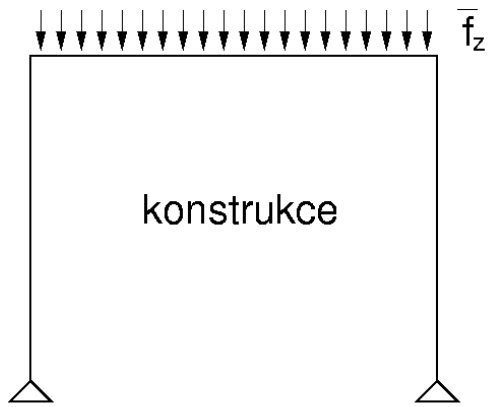
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & 0 \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & 0 \\ 0 & d & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \\ \Delta_3^0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -d \cdot \varphi_b \\ -1 \cdot \varphi_b \\ -\frac{\bar{f}_z L^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (173)$$

Řešením soustavy rovnic (173) obdržíme hodnoty pro neznámé reakce  $X_i$  a neznámou hodnotu pootočení  $\varphi_b$ . Zbývající reakce plynou z podmínek rovnováhy. Připomeňme, že poddajnosti  $\delta_{ij}$  a deformace  $\Delta_i^0$  jsou dány vztahy

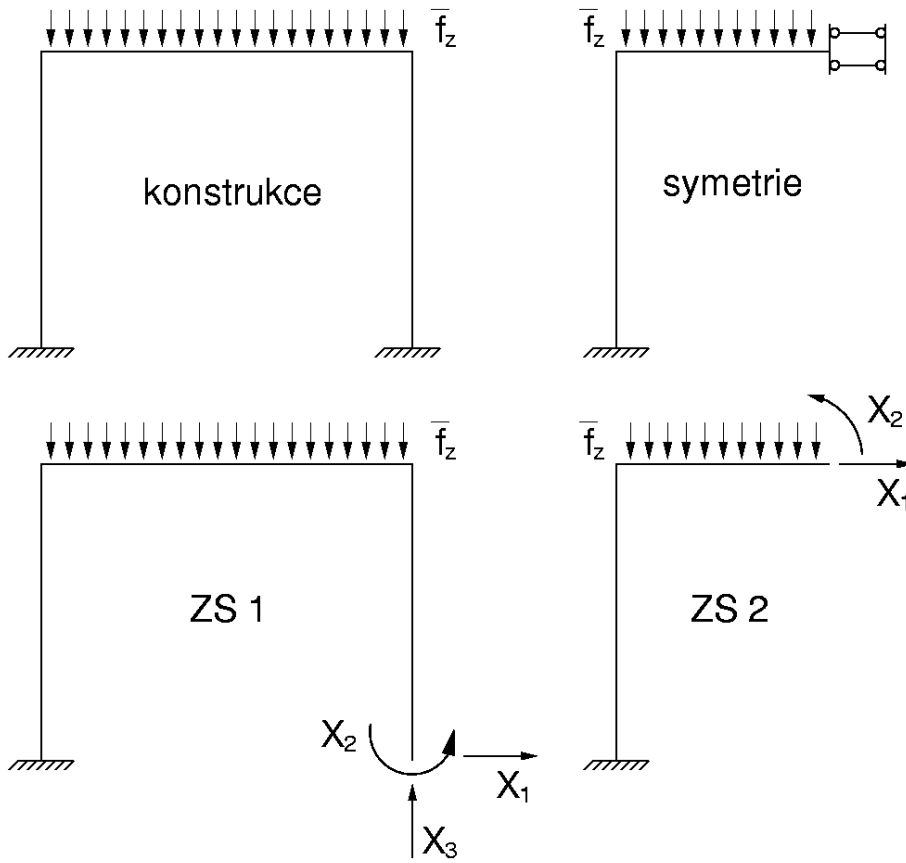
$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} M_j M_i dx$$

$$\Delta_i^0 = \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^N \int_{L^i} M_0 M_i dx$$

# SILOVÁ METODA - VLIV SYMETRIE



# SILOVÁ METODA - VLIV SYMETRIE



## **Princip virtuálních posunů - DEFORMAČNÍ METODA výpočtu staticky neurčitých konstrukcí**

Pro lepší pochopení přechodu od silové metody k metodě deformační připomeňme rovnice (103) a (102).

### **Silová metoda**

Vychází z principu virtuálních sil. Základním předpokladem metody je splnění podmínek rovnováhy. Skutečná přetvoření vyjadřujeme v závislosti na hodnotách vnitřních sil, které jsou v rovnováze s vnějším zatížením (staticky přípustné). Užití silové metody pak vede na soustavu algebraických lineárních rovnic (deformačních podmínek konzistentních s podmínkami podepření skutečné konstrukce) pro neznámé staticky neurčité reakce definované na tzv. základní soustavě. V silové metodě (aplikované na prutové konstrukce) tyto reakce vystupují jako primární neznámé. Počet neznámých tedy určuje stupeň statické neurčitosti (počet rovnic, které je nutno vyřešit).

### **Deformační metoda**

Vychází z principu virtuálních posunů. Základním předpokladem této metody je splnění deformačních podmínek. Skutečné hodnoty vnitřních sil vyjadřujeme pomocí neznámých uzlových (styčnickových) deformací, posunů a pootočení styčnicků. Tyto deformace vystupují v deformační metodě jako primární neznámé. Počet neznámých tak určuje stupeň tzv. kinematické neurčitosti (počet rovnic, které je nutno vyřešit). Lze tedy očekávat, že užití deformační metody povede na soustavu algebraických lineárních rovnic pro neznámé uzlové deformace.

### **Poznámka**

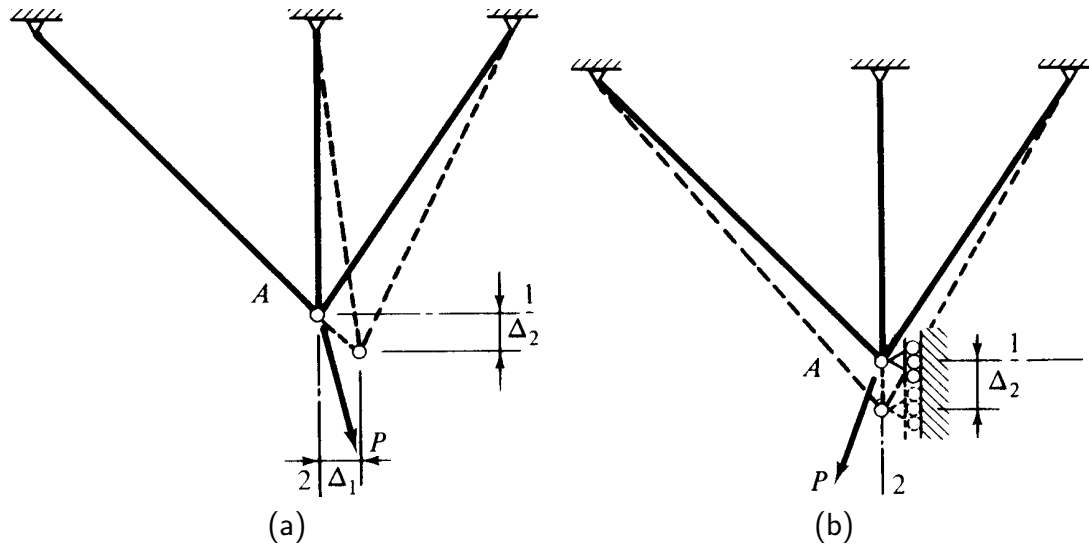
Výpočetní náročnost jednotlivých metod pro danou úlohu lze tedy posoudit z pohledu

statické, respektive kinematické neurčitosti.



## DEFORMAČNÍ METODA - pokračování

Statická vs. kinematická neurčitost

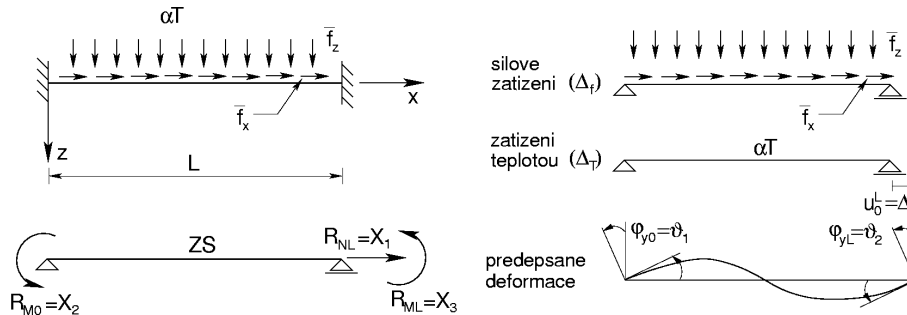


- (a) 1× staticky 2× kinematicky
- (b) 2× staticky 1× kinematicky

## DEFORMAČNÍ METODA - pokračování

Přechod od silové k deformační metodě ukážeme na příkladu oboustranně vetknutého prutu.

Př. 15 - Určete reakce oboustranně vetknutého nosníku zatíženého podle obrázku. Užijte princip virtuálních sil. Základní soustavu uvažujte podle obrázku. Vliv smyku zanedbejte.



Řešení:

Princip virtuálních sil zapíšeme ve tvaru

$$\int_L \left( \frac{M}{EI_y} \delta M + \frac{N}{EA} \delta N \right) dx = \delta R_{NL} \Delta + \delta R_{M0} \vartheta_1 + \delta R_{ML} \vartheta_2 \quad (174)$$

### Příklad 14 - pokračování

Splnění rovnice (174) vede na rovnici (126). Pro názornost připomeňme její tvar

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}}_{\{\Delta_u\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{3EI_y} & -\frac{L}{6EI_y} \\ 0 & -\frac{L}{6EI_y} & \frac{L}{3EI_y} \end{bmatrix}}_{[C_K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_{N0} \\ R_{M0} \\ R_{ML} \end{Bmatrix}}_{\{\hat{R}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\bar{f}_x L^2}{2EA} + \alpha L T_0 \\ -\frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} - \frac{\alpha \Delta T}{h} \\ \frac{\bar{f}_z L^3}{24EI_y} + \frac{\alpha \Delta T}{h} \end{Bmatrix}}_{\{\Delta_f\} + \{\Delta_T\}} \quad (175)$$

Připomeňme, že rovnice (175) představuje soustavu tří podmíněčných rovnic pro vektor reakcí  $\{\hat{R}\}$ . Řešením této soustavy dostaneme

$$\{\hat{R}\} = [\hat{K}] \{\Delta_u\} - \{\hat{R}_p\} \quad (176)$$

kde matici  $[\hat{K}]$  nazýváme (zúženou) maticí tuhosti prvku a vektor  $\{\hat{R}_p\}$  nazýváme (zúženým) vektorem zobecněného zatížení.

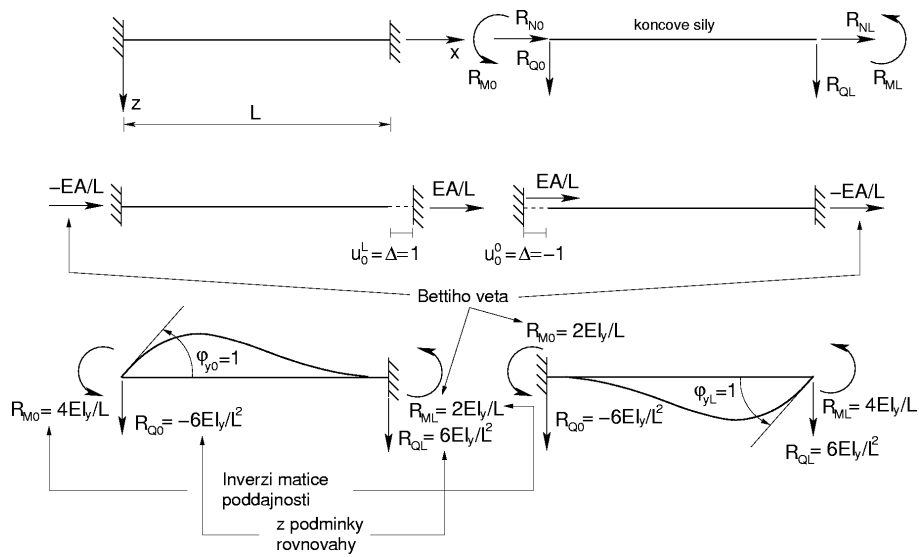
Zúžený vektor zobecněného zatížení  $\{\hat{R}_p\} = -\{\hat{R}\}|_{\{\Delta_u\}=\{0\}}$  (rovnice (132))

$$\{\hat{R}_p\} = [\hat{K}] (\Delta_f + \Delta_T) \quad (177)$$

Zúžená matice tuhosti prvku

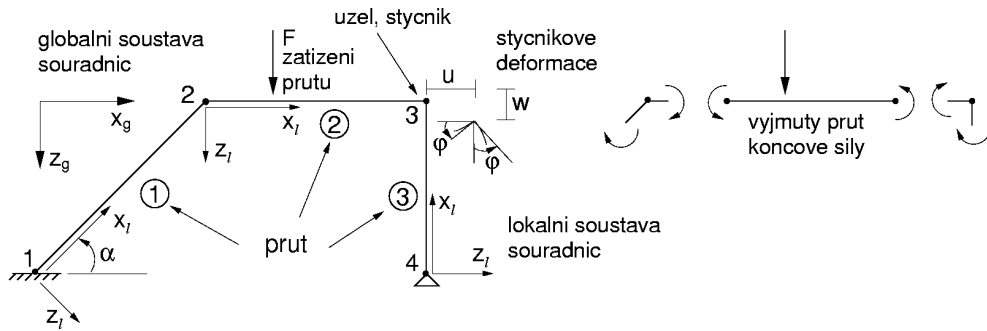
$$[\hat{K}] = [C_K]^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{2EI_y}{L} \\ 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}}_{[\hat{K}]} \quad (178)$$

Význam jednotlivých prvků matice tuhosti  $[\hat{K}]$  je patrný z obrázku.

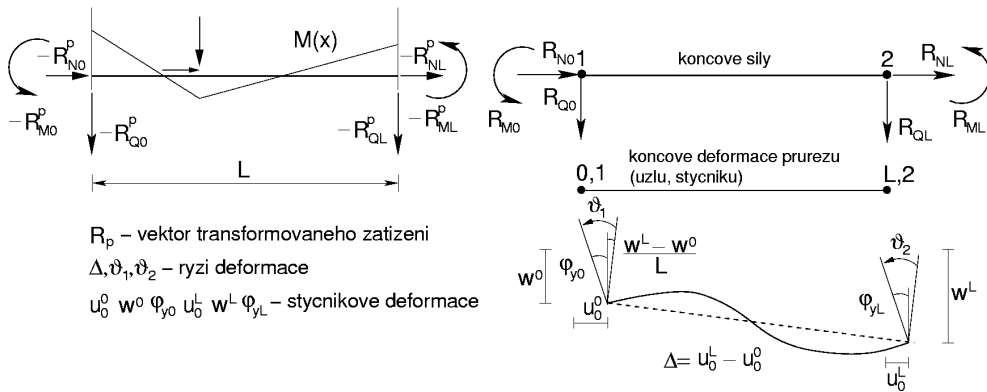


# DEFORMAČNÍ METODA - MATICE TUHOSTI PRVKU 2D

## Základní pojmy



## Prvek vyjmutý z konstrukce



## MATICE TUHOSTI PRVKU 2D - pokračování

Koncové síly

Síly, kterými působí styčnick na prvek

Vektor transformovaného zatížení

Záporně vzaté reakce na dokonale vetknutém nosníku

Prvek vyjmutý z konstrukce

Vztah mezi zatížením a styčnickovými deformacemi pro prvek, který vyjmeme z konstrukce, zapíšeme ve tvaru

$$[K] \{r\} = \{R\} + \{R_p\} \quad (179)$$

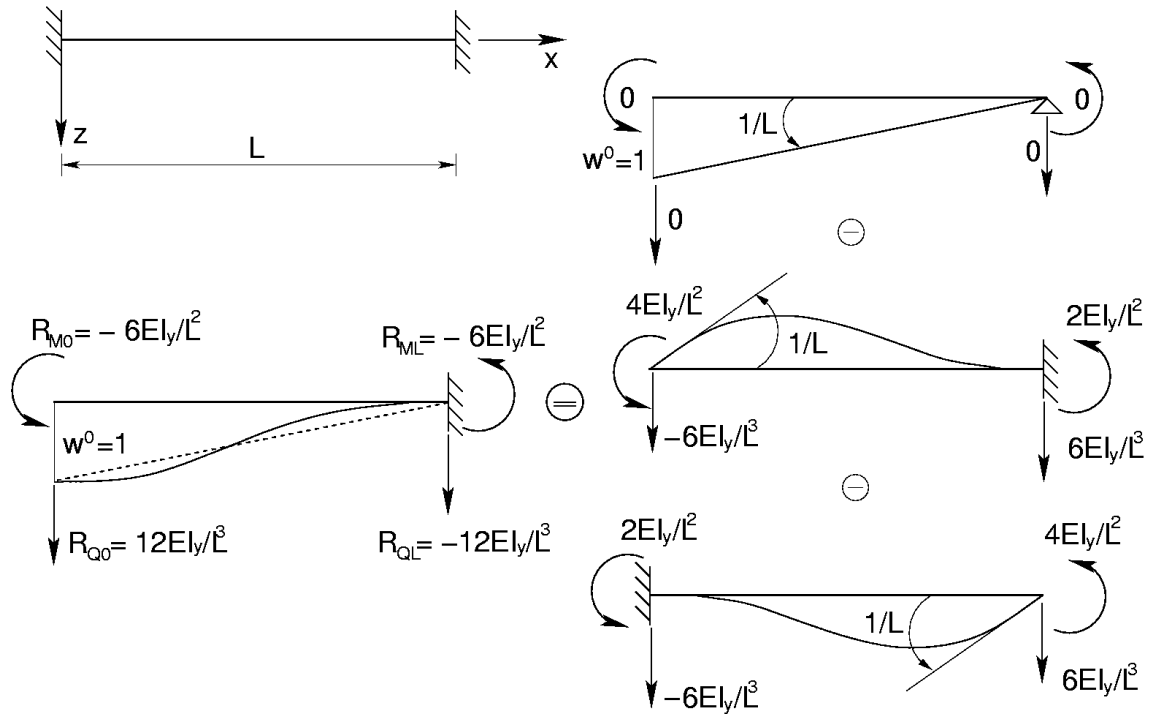
Připomeňme obdobné vyjádření vztahu mezi ryzími deformacemi a zatížením (rovnice (176)) na prostém nosníku. V případě prutu vyjmutého z konstrukce, lze hodnoty deformací koncových průřezů prutu (styčnickové deformace) sestavit do vektoru

$$\begin{aligned} \{r\} &= \{u_0^0, w^0, \varphi_{y0}, u_0^L, w^L, \varphi_{yL}\} \\ \{r\} &= \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\} \end{aligned}$$

Matice tuhosti vyjmutého prutu

Pro sestavení matice tuhosti prutu  $[K]$  (rozměr  $(6 \times 6)$  ve 2D) zbývá vyjádřit vztah mezi svislými poklesy podpor  $w^0, w^L$  a koncovými silami na dokonale vetknutém nosníku. Výsledek je patrný z následujícího obrázku

## MATICE TUHOSTI PRVKU 2D - pokračování



Vyjádření koncových sil v závislosti na předepsaných koncových deformacích styčníků na dokonale vetknutém prutu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}}_{\{r\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 = R_{N0} \\ R_2 = R_{Q0} \\ R_3 = R_{M0} \\ R_4 = R_{NL} \\ R_5 = R_{QL} \\ R_6 = R_{ML} \end{Bmatrix}}_{\{R\}} \quad (180)$$

V případě, že na prvek působí vnější zatížení, doplníme rovnici (180) o vektor transformovaného zatížení. Hodnoty koncových sil pak vyjádříme ve tvaru

$$\{R\} = -\{R_p\} + [K] \{r\} \quad (181)$$

kde vektor  $-\{R_p\}$  vyjadřuje hodnoty koncových sil od zatížení na dokonale vetknutém nosníku. Známe-li hodnoty koncových sil (vektor  $\{R\}$ ) můžeme bez problémů vyjádřit průběhy vnitřních sil v jakémkoli průřezu vyjmutého prutu užitím podmínek rovnováhy (ekvivalence).



## MATICE TUHOSTI PRVKU 2D - pokračování

Matici tuhosti prutu  $[K]$  lze vyjádřit přímo rozšířením zúžené matice tuhosti  $[\hat{K}]$  pomocí tzv. statické, respektive, geometrické matice.

Geometrická matice  $[S]$

Vyjadřuje vztah mezi ryzími deformacemi  $\{\Delta_u\}$  a vektorem deformací koncových styčniců vyjmutého prutu  $\{r\}$

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}}_{[S]} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right\} \quad (182)$$

Statická matice  $[S]^T$

Vyjadřuje ekvivalenci mezi vektory  $\{R\}$  a  $\{\hat{R}\}$

$$\left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} R_{NL} \\ R_{M0} \\ R_{ML} \end{array} \right\} \quad (183)$$

## MATICE TUHOSTI PRVKU 2D - pokračování

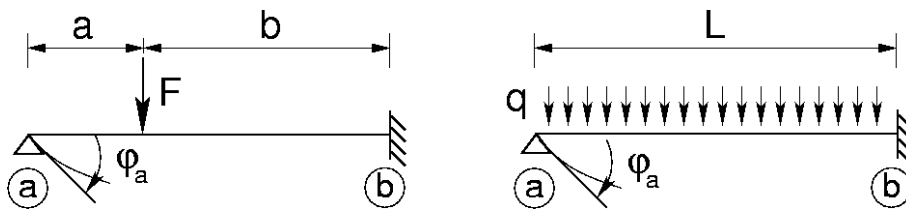
S užitím (176), za předpokladu  $\{\hat{R}_p\} = \{0\}$ , lze matici tuhosti  $[K]$  vyjádřit vztahem

$$[K] = [S]^T [\hat{K}] [S] \quad (184)$$

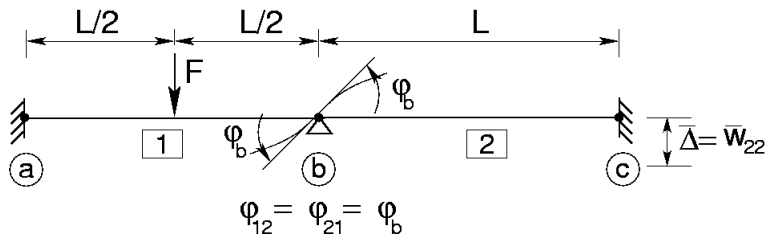
Krohnův teorém

Geometrická a statická matice jsou vzájemně transponované.

Př. 16 a 17 - určete pootočení ve styčníku (a) pro uvažované konstrukce



Př. 18 - určete pootočení ve styčníku (b) pro uvažovanou konstrukci

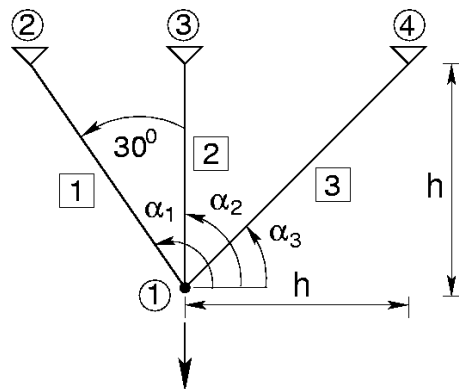


## Vyjádření matice tuhosti prutu v globální souřadnicové soustavě transformace souřadnic

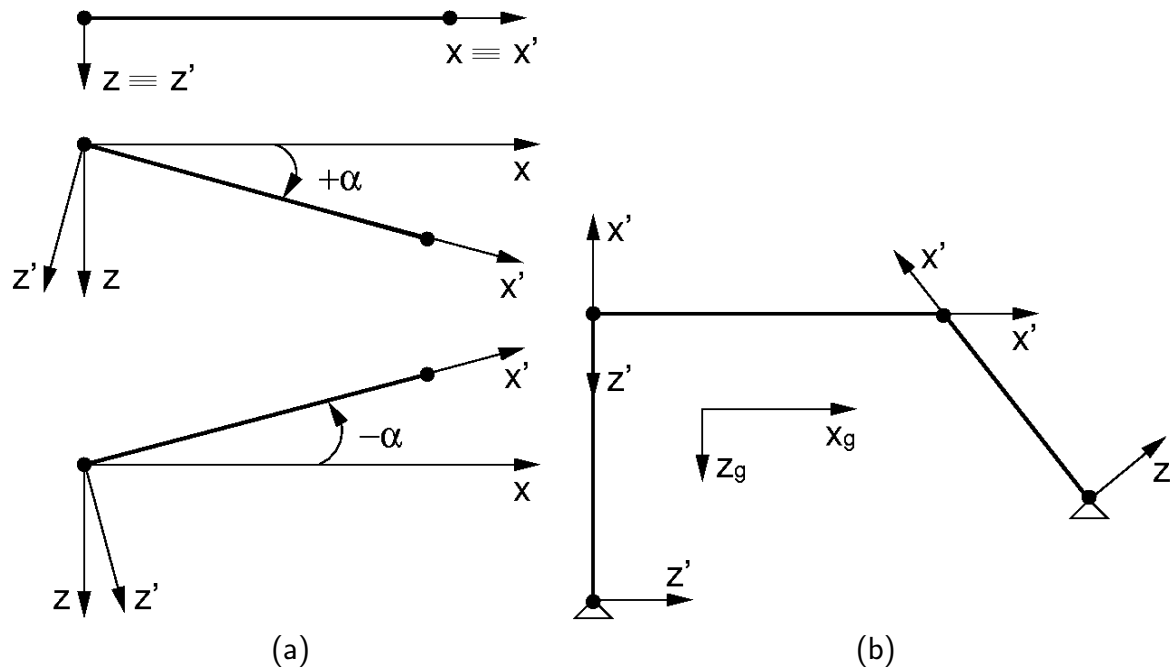
Připomeňme, že matici tuhosti  $[K]$  vystupující v rovnici (180) jsme odvodili pro přímý prut za předpokladu, že osa  $x$  představuje osu prutu. V takovém případě hovoříme o tzv. lokální souřadnicové soustavě. V následujícím textu budeme tuto soustavu v souladu s rovnicemi (4) a (5) označovat  $x', z'$  nebo  $x_l, z_l$ .

Jak je patrné z následujícího obrázku jsou pruty v konstrukci vzájemně natočeny. Abychom mohli pracovat s jednotlivými pruty v konstrukci jednotně, je nutno svázat uzlové deformace jednotlivých prutů s určitou globální souřadnicovou soustavou  $x, z$  nebo  $x_g, z_g$ . K přechodu od jedné souřadnicové soustavy ke druhé využijeme známých transformačních vztahů pro vektory, rovnice (4) a (5).

Př. 19 - určete vnitřní síly na dané příhradové konstrukci



## Lokální vs. globální soustava souřadnic



- (a) samostatný prut v lokální sořadnicové soustavě
- (b) prut v rámci konstrukce

### Matice tuhosti prutu v globální souřadnicové soustavě - pokračování

Transformace uzlových (styčnickových) deformací

S využitím rovnice (5) lze vektor uzlových deformací v lokální souřadnicové soustavě vyjádřit pomocí složek vektoru uzlových deformací v globální souřadnicové soustavě vztahem

$$\begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \varphi' \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\bar{\mathbf{T}}]} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (185)$$

Transformace vektoru koncových sil

$$\begin{Bmatrix} R'_N \\ R'_Q \\ R'_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_N \\ R_Q \\ R_M \end{Bmatrix} \quad (186)$$

Transformace vektoru uzlových deformací prvku

Uvažujme vektor uzlových deformací prvku v globální souřadnicové soustavě  $\{r\}$

$$\{r\} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T$$

Transformační vztahy pak zapíšeme ve tvaru

$$\{r'\} = [\bar{\mathbf{T}}] \{r\} \quad (187)$$

$$\{r\} = [\bar{\mathbf{T}}]^T \{r'\} \quad (188)$$

## Maticе tuhosti prutu v globální souřadnicové soustavě - pokračování

Transformační matice  $[T]$

$$[T] = \begin{bmatrix} [\tilde{T}] & [0] \\ [0] & [\tilde{T}] \end{bmatrix} \quad (189)$$

Poznámka:

Transformační matice  $[T]$  je ortogonální, neboť platí  $[T]^T = [T]^{-1}$ .

Transformační vztah pro matici tuhosti prvku  $[K]$

Při odvození transformačního vztahu pro matici tuhosti prvku využijeme skutečnosti, že energie vnitřních sil prvku je skalární veličina nezávislá na volbě souřadnicového systému.

Platí

$$E_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \{r\}^T \{R\} = \{r\}^T [K] \{r\} \quad (190)$$

$$E_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma'^T \varepsilon' dV = \frac{1}{2} \{r'\}^T \{R'\} = \{r'\}^T [K'] \{r'\} \quad (191)$$

Uplatněním rovnosti rovnic (190) a (191) společně s transformačními vztahy (187) a (188) dostaneme (připomeňme  $\{r'\}^T = \{r\}^T [T]^T$ )

$$\{r\}^T [K] \{r\} = \{r\}^T [T]^T [K'] [T] \{r\} \quad (192)$$

$$[K] = [T]^T [K'] [T] \quad (193)$$

## Matice tuhosti prutu v globální souřadnicové soustavě - příklady

Matice tuhosti taženého/tlačeného prvku v *lokální* souřadnicové soustavě

$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (194)$$

Matice tuhosti taženého/tlačeného prvku v *globální* souřadnicové soustavě

$$[K] = [T]^T [K'] [T] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (195)$$

kde

$$c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha$$

## Matice tuhosti prutu v globální souřadnicové soustavě - příklady

Matice tuhosti taženého/tlačeného a ohýbaného prvku v *globální* souřadnicové soustavě

$$[K] = \quad (196)$$

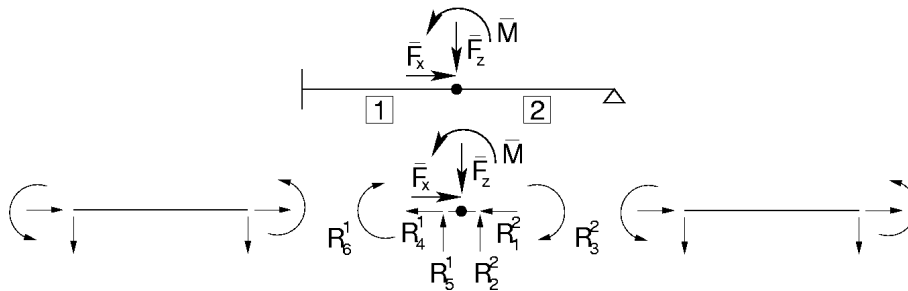
$$\begin{bmatrix} \frac{EAc^2}{L} + \frac{12EI_y s^2}{L^3} & cs\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_y}{L^3}\right) & \frac{6EI_y s}{L^2} & -\frac{EAc^2}{L} - \frac{12EI_y s^2}{L^3} & cs\left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI_y}{L^3}\right) & \frac{6EI_y s}{L^2} \\ cs\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_y}{L^3}\right) & \frac{EAs^2}{L} + \frac{12EI_y c^2}{L^3} & -\frac{6EI_y c}{L^2} & cs\left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI_y}{L^3}\right) & -\frac{EAs^2}{L} - \frac{12EI_y c^2}{L^3} & -\frac{6EI_y c}{L^2} \\ \frac{6EI_y s}{L^2} & -\frac{6EI_y c}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & -\frac{6EI_y s}{L^2} & \frac{6EI_y c}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{EAc^2}{L} - \frac{12EI_y s^2}{L^3} & cs\left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI_y}{L^3}\right) & -\frac{6EI_y s}{L^2} & \frac{EAc^2}{L} + \frac{12EI_y s^2}{L^3} & cs\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_y}{L^3}\right) & -\frac{6EI_y s}{L^2} \\ cs\left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI_y}{L^3}\right) & -\frac{EAs^2}{L} - \frac{12EI_y c^2}{L^3} & \frac{6EI_y c}{L^2} & cs\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_y}{L^3}\right) & \frac{EAs^2}{L} + \frac{12EI_y c^2}{L^3} & \frac{6EI_y c}{L^2} \\ \frac{6EI_y s}{L^2} & -\frac{6EI_y c}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & -\frac{6EI_y s}{L^2} & \frac{6EI_y c}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}$$



## Styčnickové nebo uzlové zatížení

Pod pojmem styčnickové (uzlové) zatížení rozumíme síly nebo momenty aplikované přímo v uzlu prvku. Připomeňme, že dosud jsme uvažovali pouze zatížení působící v rámci daného prvku. Toto zatížení pak bylo vyjádřeno vektorem transformovaného zatížení  $\{R_p\}$  (zatížení transformované z prvku do uzlů prvku - odtud také název transformované zatížení).

Pro názornost uvažujme následující obrázek.

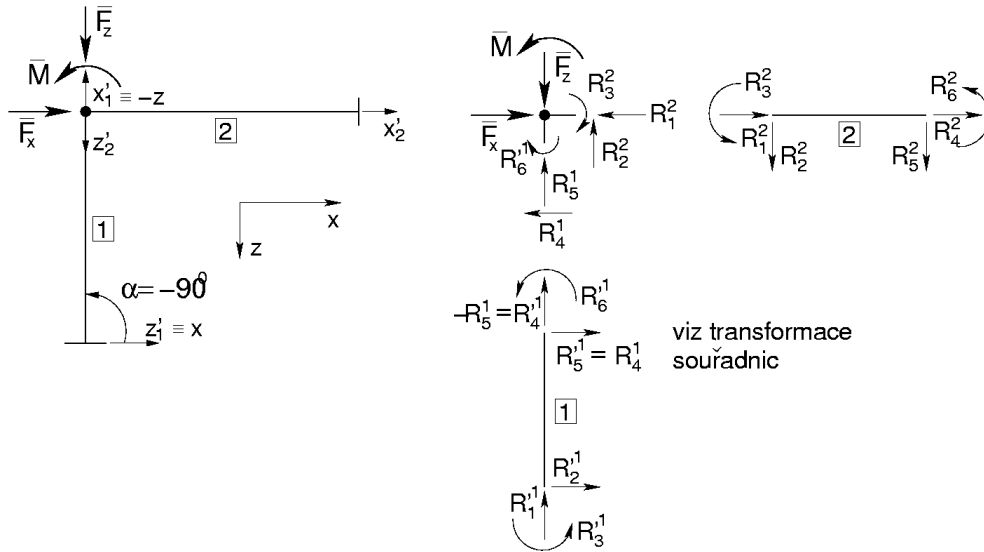


- obr. (a) - 1 prvek, uzlové zatížení,  $1 \times$  kinematically neurčitá konstrukce  $\{r_g\} = \{\varphi_1\}^T \rightarrow$  určíme z podmínky nulového momentu ve styčnicku 1
- obr. (b) - 2 prvky, styčnickové zatížení,  $4 \times$  kinematically neurčitá konstrukce  $\{r_g\} = \{\varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T$   
neznámou  $\varphi_1$  vyjádříme z podmínky nulového momentu ve styčnicku 1  
neznámé  $u_2, w_2, \varphi_2$  určíme z podmínek ekvivalence ve styčnicku 2

Podmínky ekvivalence ve styčniku 2

$$\begin{aligned}\sum R_{ix} &= R_4^1 + R_1^2 = \bar{F}_x \\ \sum R_{iz} &= R_5^1 + R_2^2 = \bar{F}_z \\ \sum R_{iM} &= R_6^1 + R_3^2 = \bar{M}\end{aligned}$$

Jako další příklad uvažujme jednoduchou rámovou konstrukci.



Transformace vektoru uzlových sil na prutu 1 ve styčnicku 2 -  $\alpha = -90^\circ$

$$\begin{Bmatrix} R_4^1 \\ R_5^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (R_4^1)' \\ (R_5^1)' \end{Bmatrix}$$

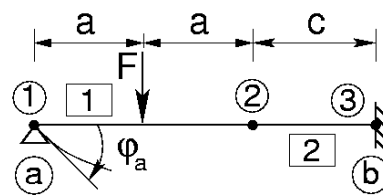
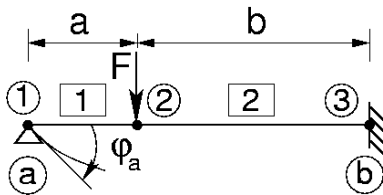
Podmínky ekvivalence ve styčnicku 2

$$\sum R_{ix} = R_4^1 + R_1^2 = \bar{F}_x$$

$$\sum R_{iz} = R_5^1 + R_2^2 = \bar{F}_z$$

$$\sum R_{iM} = R_6^1 + R_3^2 = \bar{M}$$

Př. 20 a 21 - určete pootočení ve styčnicku (a) pro uvažované konstrukce

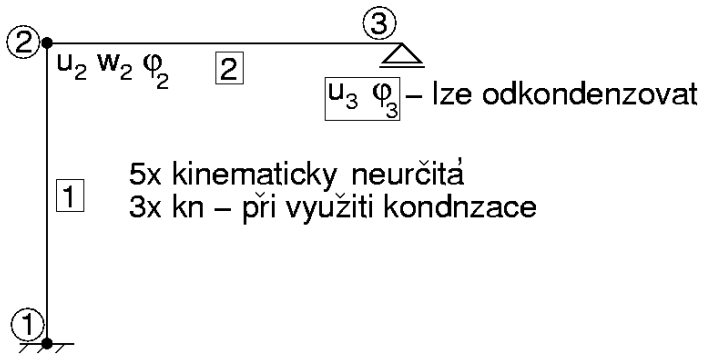
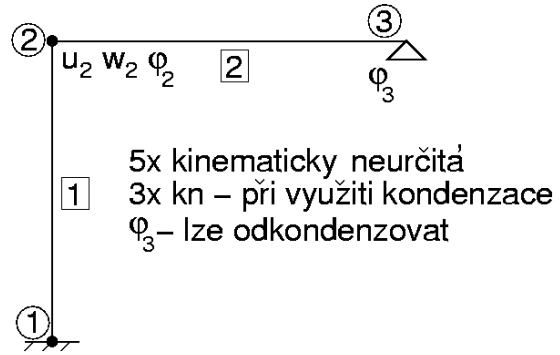
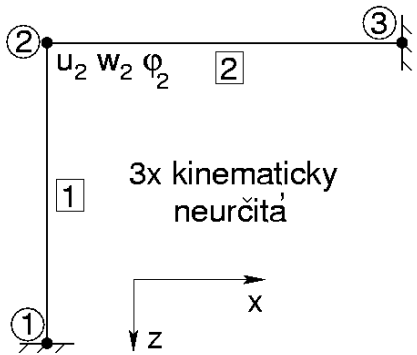


## Statická kondenzace

## Zjednodušená deformační metoda

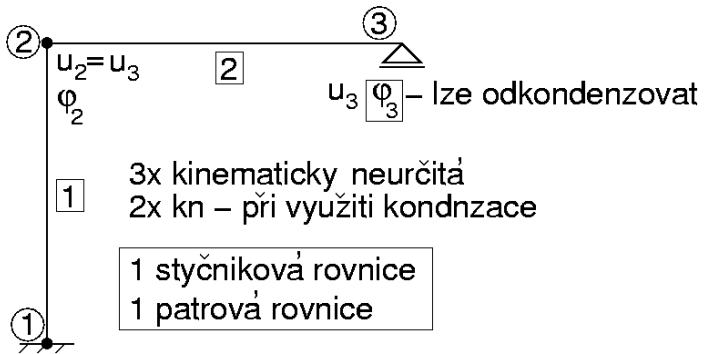
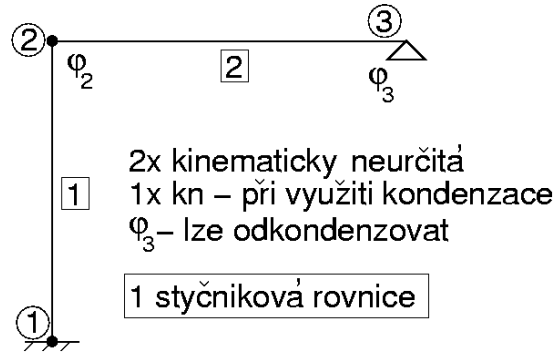
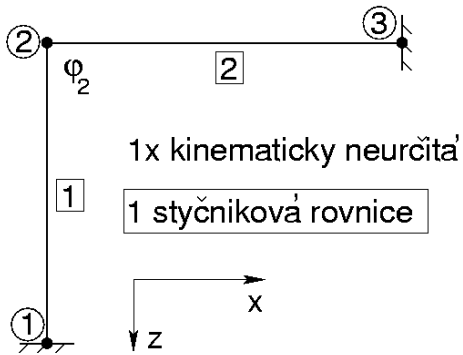
## Deformační metoda (DM) vs. zjednodušená deformační metoda (ZDM)

DM - uvažujeme STLAČENÍ prutu



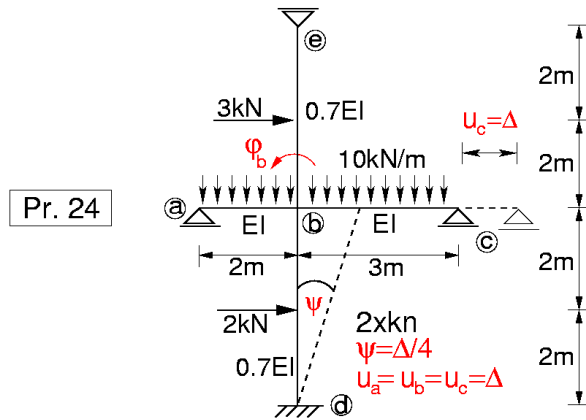
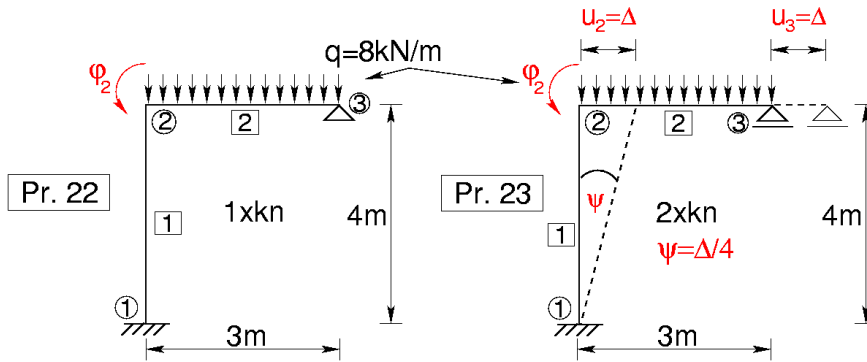
## Deformační metoda (DM) vs. zjednodušená deformační metoda (ZDM)

ZDM - předpokládáme, že prut je NESTLAČITELNÝ



### Příklady užití zjednodušené deformační metody (ZDM)

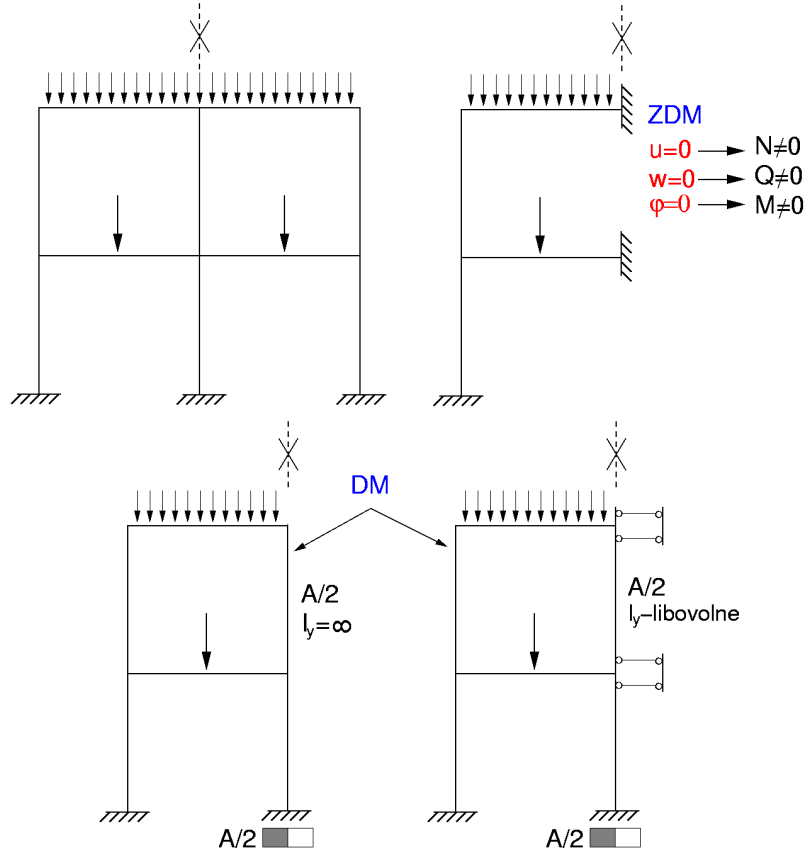
Př. 22, 23, 24 - určete vnitřní síly na daných konstrukcích, řešte užitím zjednodušené deformační metody.





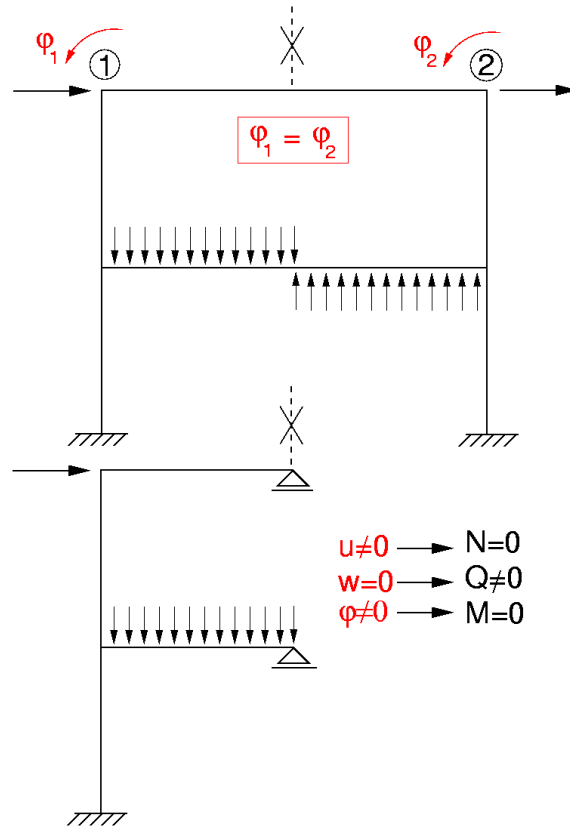
# Řešení konstrukcí s využitím symetrie nebo antisymetrie

## SYMETRIE



# Řešení konstrukcí s využitím symetrie nebo antisymetrie

## ANTISYMETRIE



$$\begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{12E_2 I_{y2}}{L_2^3} & 0 & \frac{-6E_2 I_{y2}}{L_2^2} \\ 0 & \frac{12E_1 I_{y1}}{L_1^3} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{-6E_1 I_{y1}}{L_1^2} \\ \frac{-6E_2 I_{y2}}{L_2^2} & \frac{-6E_1 I_{y1}}{L_2^2} & \frac{4E_1 I_{y1}}{L_1} + \frac{4E_2 I_{y2}}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_z + R_2^{p(2)} \\ \bar{M} + R_3^{p(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc}
\frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{12 E_2 I_{y2}}{L_2^3} & 0 & \frac{6 E_2 I_{y2}}{L_2^2} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12 E_1 I_{y1}}{L_1^3} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{-6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} & 0 & -\frac{12 E_1 I_{y1}}{L_1^3} & -\frac{6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} \\
\frac{6 E_2 I_{y2}}{L_2^2} & \frac{-6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} & \frac{4 E_1 I_{y1}}{L_1} + \frac{4 E_2 I_{y2}}{L_2} & 0 & \frac{6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} & \frac{2 E_1 I_{y1}}{L_1} \\
-\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{12 E_3 I_{y3}}{L_3^3} & 0 & \frac{6 E_3 I_{y3}}{L_2^3} \\
0 & \frac{-12 E_1 I_{y1}}{L_1^3} & \frac{6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} & 0 & \frac{12 E_1 I_{y1}}{L_1^3} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} \\
0 & \frac{-6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} & \frac{2 E_1 I_{y1}}{L_1} & \frac{6 E_3 I_{y3}}{L_3^2} & \frac{6 E_1 I_{y1}}{L_1^2} & \frac{4 E_1 I_{y1}}{L_1} \frac{4 E_3 I_{y3}}{L_3}
\end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ R_2^{p(2)} \\ -\bar{M} + R_3^{p(2)} \\ 0 \\ R_5^{p(4)} \\ R_6^{p(4)} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 \\ R_4^1 \\ R_5^1 \\ R_6^1 \end{array} \right\} \quad \{ \mathbf{u}(1), \mathbf{w}(1), \varphi(1), \mathbf{u}(2), \mathbf{w}(2), \varphi(2) \}$$