

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Katedra mechaniky



Diplomová práce

**Jednoduchý sdružený model pro tepelně technické
posouzení stavební konstrukce**

Bc. Michal Ženíšek

Vedoucí práce: Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

Studijní program: Stavební inženýrství - magisterský

Obor: Konstrukce pozemních staveb

Poděkování

Na prvním místě chci poděkovat mému vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Janu Zemanovi, Ph.D. Jeho obětavý a laskavý přístup byl pro mě po celou dobu naší spolupráce velkým povzbuzením a bez jeho cenných rad a pomoci by nemohla tato práce vůbec vzniknout. Velmi děkuji.

Dále bych rád poděkoval i lidem, s kterými jsem konzultoval ostatní odborné otázky. Byli to doc. Ing. František Kulhánek, CSc. a doc. Dr. Ing. Zbyněk Svoboda, kteří mě posunuli blíže k pochopení problémů tepelné techniky. Mé srdečné díky patří i doc. RNDr. Aleši Nekvindovi, CSc. za pomoc v oblasti matematiky.

Rovněž děkuji i mé rodině, která mě podporovala po celou dobu mého studia nejen finančně. Děkuji Vám všem.

Nakonec děkuji i mému Bohu. Za fyzickou i psychickou ochranu, mnohou pomoc ve zkouškách i za možnost studovat na vysoké škole.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, pouze pod odborným vedením doc. Ing. Jana Zemana, Ph.D. a použil jsem podklady uvedené v příloženém seznamu literatury.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 8. 2. 2012

.....

Obsah

Abstrakt	11
1 Úvod	12
2 Popis problému	14
2.1 Vedení tepla a difúze vodních par	14
2.2 Přístupy k řešení	14
2.3 Způsob řešení	15
3 Formulace vztahů	16
3.1 Vedení tepla	16
3.2 Difúze vodních par	18
3.3 Úprava součinitele tepelné vodivosti	20
4 Numerické řešení	24
4.1 Metoda konečných prvků	24
4.1.1 Pohled do historie	24
4.1.2 Formulace slabého řešení	24
4.1.3 Diskretizace a volba báze funkcí	26
4.1.4 Sestavení soustavy rovnic	28
4.2 Newtonova metoda	32
4.2.1 Princip metody	32
4.2.2 Nelineární řešení rovnice vedení tepla	34
5 Praktický příklad	36
5.1 Zadání příkladu	36
5.2 Ověření správnosti modelu	37
5.3 Srovnání výsledků	39
5.4 Přínos modelu	40
6 Závěr	42

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá vedením tepla a difúzí vodních par ve stavebních konstrukcích. Hlavním cílem je vytvořit jednoduchý sdružený model, který by při tepelně technickém posouzení zohledňoval vliv vlhkosti materiálu. Toho se snažíme dosáhnout zejména přesnějším určením součinitele tepelné vodivosti, jenž má hlavní podíl na výsledky tepelného výpočtu.

Řešení modelu jsme provedli numericky použitím metody konečných prvků a Newtonovy metody a správnost výsledků ověřili porovnáním s výpočtem podle normy ČSN 73 0540. Jako výpočtové prostředí jsme použili program MATLAB, ve kterém jsme kromě modelu samotného vytvořili i jednoduché grafické prostředí pro zadávání dat.

Abstract

This theses deals with heat conduction and water-vapour diffusion in building constructions. The main objective is to create a simple coupled model to reflect the impact of humidity on material in the thermal assessment. This is mainly achieved by accurate determination of thermal conductivity coefficient, which has a major role in the results thermal calculations.

This model was solved numerically with using finite element method and Newton's method. Correctness of the results was verified against the reference calculations according to ČSN 73 0540 code. All simulations were performed in MATLAB, utilizing a simple Graphical User Interface developed during the thesis.

Kapitola 1

Úvod

Návrh tepelně izolačního systému (TIS) budovy je dnes již nedílnou součástí každého nového stavebního projektu. Obvodové konstrukce mají chránit vnitřní prostředí před exteriérem, v našich klimatických podmínkách zaručit zejména vhodnou teplotu pro uvažovaný provoz. Trendem posledních let je především snaha o snižování energetické náročnosti nových i stávajících staveb. O tom svědčí i neustále rostoucí obliba nízkoenergetických domů nebo časté zateplování a výměna obvodových plášťů stávajících objektů s cílem snížit tepelné ztráty objektu.

Správnému návrhu tepelné obálky budovy bychom ale měli věnovat pozornost i z jiných důvodů než jen kvůli snížení nároků na vytápění. Velké problémy s sebou může přinést i vlhkost uvnitř obvodového pláště. Zdroji této vlhkosti může být hned několik: zatékání srážkové či povrchové vody do konstrukce v důsledku nefunkčnosti dělících konstrukcí, zabudovaná vlhkost při technologických procesech, vztlínající (kapilární) vlhkost od země nebo v neposlední řadě kondenzující vlhkost z difúze vodních par, které se budeme věnovat hlouběji.

Mluvíme-li o difúzi vodní páry ve stavebnictví, máme na mysli většinou transport molekul vodní páry ve vzduchu nebo ve vzduchem vyplněných pórech a kanálcích stavebních materiálů. Typickým příkladem může být difúze vodní páry mezi interiérem a exteriérem¹. Samotná difúze vodní páry v konstrukci ničemu nevádí. Problém ale nastává, když prostupující vodní pára v chladných místech konstrukce kondenzuje. K tomu dochází nejčastěji v zimním období, kdy díky nízkým teplotám v exteriéru je vyšší relativní vlhkost vzduchu.

Zejména u tepelně izolačních stavebních materiálů je vysrážená vlhkost na překážku, neboť zvyšuje jejich tepelnou vodivost a vede ke vzniku tepelných mostů. Tím dochází nejenom k tepelným ztrátám, ale také ke tvorbě plísní, které vznikají vždy na studených plochách v kontaktu s interiérovým vzduchem, což je právě případ těchto tepelných mostů.

U ostatních materiálů nemá sice kondenzace vodní páry tak dramatický vliv na tepelnou vodivost, způsobuje ale problémy jiného charakteru. Zvláště nepříjemné je ohrožení statiky v důsledku hniloby u dřevěných částí staveb, koroze u kovových a porušení mrazem u ostatních (zdivo, beton). Například obvodová stěna, která není dostatečně tepelně izolována, může promrzat až do poloviny své tloušťky. Vzhledem k tomu, že vlhkost po zmrznutí nabývá na objemu, je pochopitelné, že zde poté dochází k naru-

¹V letních měsících proniká vlhkost skrz obvodovou stěnu z exteriéru do interiéru, v zimních měsících obráceně.

šování vnitřní struktury materiálů a pozvolné degradaci nosné části konstrukce.

Podcenění projektové přípravy stavby v oblasti tepelné techniky vede k těmto a dalším poruchám, které se často projeví krátce po uvedení stavby do provozu. Vhodným protiopatřením bývá zpravidla kvalitní návrh, který v první řadě vylučuje možnost kondenzace uvnitř stavební konstrukce anebo dovoluje odpaření vlhkosti v průběhu roku.

Těžištěm této práce je zahrnutí vlivu vlhkosti do výpočtu stacionárního vedení tepla. Současně platná tepelně technická norma ČSN 73 0540 řeší hromadění kondenzátu v konstrukci a stanovuje jeho maximální možné limity. Ve výpočtu vedení tepla ale nebere na zřetel možnou změnu tepelné vodivosti vlivem difúze a kondenzace vodní páry, a právě tento vliv nás bude zajímat. Postupně popíšeme jednoduchý fyzikální model, který při výpočtu vedení tepla uvažuje závislost nejenom na druhu materiálu, ale i na jeho vlhkosti. Tu získáme krom jiného na základě znalosti sorpční izotermy, která vyjadřuje závislost mezi obsahem vlhkosti v materiálu a relativní vlhkostí. Pro její sestavení využijeme parametrů z databáze programu DELPHIN [7].

Kapitola 2

Popis problému

2.1 Vedení tepla a difúze vodních par

Vedení tepla a difúze vodních par jsou transportní procesy, které jsou si fyzikálně velmi podobné. K transportu tepla vedením dochází ve všech látkových skupenstvích za předpokladu, že existuje rozdílná teplota mezi dvěma místy (teplotní gradient), které nejsou mezi sebou tepelně izolovány. My se budeme v této práci zabývat pouze vedením tepla pevnými tělesy. Teplotní gradient a typ materiálu, ve kterém vedení probíhá, jsou dva nejdůležitější parametry rozhodující o rychlosti výměny tepelné energie. Za tímto účelem se v tepelné technice definuje tzv. *součinitel tepelné vodivosti* λ [3, s. 29], který vyjadřuje schopnost homogenního materiálu vést teplo. Materiály špatně vedoucí teplo mají nízkou hodnotou tohoto součinitele¹ a nazýváme je tepelné izolanty. Opakem jsou tepelné vodiče.

Podobně definujeme i gradient parciálních tlaků vodních par, který je hnací silou difúze. I zde je rychlost transportu určena tímto gradientem a druhem materiálu či konstrukce, jenž obě místa s různým parciálním tlakem odděluje. Vznikne-li mezi dvěma prostředím, které jsou od sebe odděleny stěnou s volnými póry či kanálky, rozdíl parciálních tlaků, začnou molekuly vody difundovat skrz tuto stěnu a vyrovnávat tím rozdíl mezi oběma prostředím.

2.2 Přístupy k řešení

Naším úkolem bude vytvořit sdružený model vedení tepla a difúze vodních par, jenž by oba popsané fyzikální jevy dával do souvislosti. Úlohu jsme vyzkoušeli řešit jak lineárně, tak nelineárně.

Lineární řešení úlohy spočívá v postupných opravách funkce teploty. Celý postup je možno rozdělit do třech po sobě jdoucích kroků:

1. výpočet vedení tepla (normový výpočet)
2. výpočet difúze vodních par
3. výpočet vedení tepla závislý na vlhkosti materiálu

¹V rozsahu přibližně 0,03-0,08 W/(mK).

V prvním kroku provedeme prostý výpočet vedení tepla bez uvažování vlivu vlhkosti materiálu. Tento výpočet je identický výpočtu podle normy ČSN 73 0540 Tepelná ochrana budov. Výsledkem je graf teploty na zjišťované oblasti, který nám poslouží jako počáteční odhad k dalšímu řešení a také pro srovnání s konečnými výsledky našeho modelu. Ve druhém kroku pak stanovíme difúzi vodních par, tzn. jakým způsobem se mění parciální tlak uvnitř konstrukce. Výsledkem je graf parciálního tlaku. Na základě znalosti průběhu teploty a parciálního tlaku vodních par v konstrukci jsme schopni ve třetím kroku stanovit hmotnostní vlhkost obsaženou ve vzduchových pórech materiálu. Následně odvodíme přírůstek součinitele tepelné vodivosti λ , který využijeme k opětovnému výpočtu vedení tepla. Dostaneme graf teploty, který zohledňuje obsaženou vlhkost v konkrétním místě konstrukce změnou součinitele tepelné vodivosti λ . Získáme tím nový průběh teplot a můžeme tak znovu určit hmotnostní vlhkost v konstrukci a celý třetí krok opakovat. Ten opakujeme tak dlouho, dokud se nebudou výsledky dvou po sobě jdoucích teplot shodovat s požadovanou přesností.

Tento poměrně jednoduchý způsob řešení se ale později ukázal být jako nevhodný. Při testování různých okrajových podmínek docházelo k zacyklení výsledků teplot a konvergence úlohy se zastavila. Pro jiné okrajové podmínky se naopak řešení nalézt podařilo. Proto jsme se rozhodli zvolit druhou možnost řešení, a sice úlohu řešit nelineárně. K tomu jsme využili Newtonovy metody, která nakonec konvergovala pro všechny testované případy.

2.3 Způsob řešení

Analytický způsob řešení této úlohy pro jeho velkou složitost vynecháme a přistoupíme rovnou k numerickému řešení. Použijeme metodu konečných prvků a již zmíněnou Newtonovu metodu. Řešit úlohu numericky znamená často řešit velké soustavy rovnic. Je to proto, že velkou část problémů v matematice linearizujeme a převádíme tak na operace dobře proveditelné počítačem (sčítání, odčítání, násobení, dělení). V některých případech, kdy je například vyžadováno zvláště přesného řešení, může jít počet rovnic v soustavě až do řádu statisíců. Vyřešení takto velkých soustav je náročné na výpočetní čas a vyžaduje kvalitního softwarového i hardwarového vybavení. Pro naše účely budeme používat program MATLAB, který má vhodné uživatelské prostředí a je optimalizován pro práci s maticemi.

Kapitola 3

Formulace vztahů

V této kapitole odvodíme základní rovnice pro výpočet vedení tepla a difúzi vodních par platné pro homogenní materiál. Zmíněný model předpokládá transportní děje skrz svislou konstrukci, tedy pouze v jediném směru. Pro výpočet samotný uvažujeme v rozsahu celé této práce vnitřní oblast $\Omega = (0, L)$ s hranicí $\Gamma = \{0, L\}$.

3.1 Vedení tepla

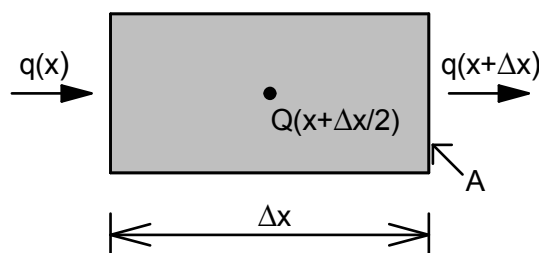
Množství tepla, které projde plochou za určitý čas, označujeme jako *hustotu tepelného toku* [3, s. 28]. Dle zadání řešíme pouze vedení tepla v ustáleném stavu, tedy nezávislé na čase

$$q(x) = \frac{Q(x)}{A(x)},$$

kde q [W/m²] je hustota tepelného toku,
 Q [W] tepelný tok,
 A [m²] plocha průřezu.

Z rovnováhy q na elementárním dílku získáme první vztah pro odvození rovnice vedení tepla. Uvnitř oblasti $x \in \Omega$ platí

$$\underbrace{q(x)A}_{\text{vtok}} + \underbrace{Q(x + \Delta x/2)\Delta x A}_{\text{zdroj}} = \underbrace{q(x + \Delta x)A}_{\text{výtok}}. \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Bilance energie na elementárním dílku

Vydělením (3.1) objemem $\Delta x A$

$$\frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{\Delta x} - Q(x + \Delta x/2) = 0$$

a limitním přechodem pro $\Delta x \rightarrow 0$ získáváme bilanční rovnici

$$\frac{dq(x)}{dx} - Q(x) = 0, \quad (3.2)$$

která popisuje rovnováhu tepelné energie na dané oblasti. Druhým vztahem, který k odvození použijeme, je *Fourierův zákon* [12, s. 88]. Na oblasti $x \in \Omega$ je

$$q(x) = -\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx}, \quad (3.3)$$

kde q [W/m^2] je hustota tepelného toku,
 λ [$W/(mK)$] součinitel tepelné vodivosti,
 T [$^{\circ}C$] teplota.

Dosazením Fourierova zákona za $q(x)$ do rovnice (3.2) a následnou úpravou získáme rovnici vedení tepla

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) + Q(x) = 0. \quad (3.4)$$

Jedná se o diferenciální rovnici druhého řádu, ke které náleží na každé straně jedna okrajová podmínka. Zadat je můžeme třemi způsoby:

a) Dirichletova podmínka - předepsaná teplota $\bar{T}(x)$

$$T(x) = \bar{T}(x), \quad x \in \Gamma_T,$$

b) Neumannova podmínka - předepsaná hustota tepelného toku $\bar{q}(x)$

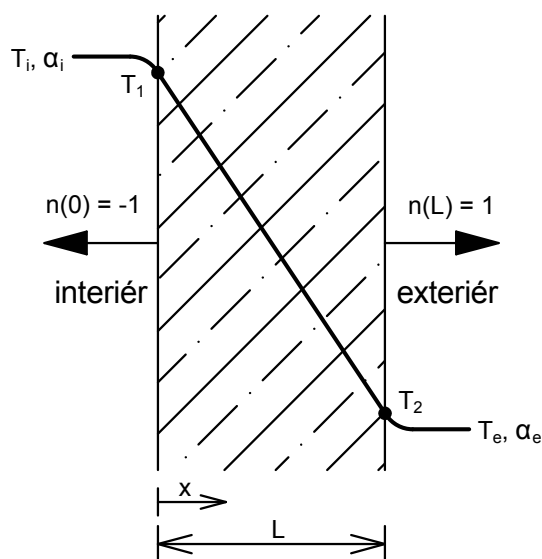
$$q(x)n(x) = \bar{q}(x), \quad x \in \Gamma_{qp},$$

c) Newtonova smíšená podmínka - předepsaná hustota tepelného toku $\bar{q}(x)$

$$q(x)n(x) = \bar{\alpha}(x) \left(T(x) - \bar{T}_0(x) \right), \quad x \in \Gamma_{qc},$$

kde $\bar{\alpha}$ [$W/(m^2K)$] je součinitel přestupu tepla,
 \bar{T}_0 [$^{\circ}C$] teplota okolního prostředí.

Tepelný tok jde vždy směrem z teplejšího místa k místu chladnějšímu. U Neumannovy a Newtonovy okrajové podmínky je tento směr určen normálou $n(x)$, jak ukazuje následující obrázek.



Obrázek 3.2: Vyznačení směru normály

3.2 Difúze vodních par

Matematicky je tento jev analogický předchozímu vedení tepla. Definujme *hustotu difúzního toku* [3, s. 39].

$$g(x) = \frac{G(x)}{A(x)},$$

kde g [$kg/(m^2s)$] je hustota difúzního toku vodních par,
 G [kg/s] difúzní tok,
 A [m^2] plocha průřezu.

Platí zde podobná bilanční rovnice, popisující přenos vodních par na oblasti $x \in \Omega$. Nepředpokládáme už ale vnitřní zdroj vodní páry v konstrukci, a proto jen

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0. \quad (3.5)$$

Na dalším vztahu nazývaném *Fickův zákon* [12, s. 77-78]

$$g(x) = -\delta(x) \frac{dp(x)}{dx}, \quad (3.6)$$

kde g [$kg/(m^2s)$] je hustota difúzního toku,
 δ [s] součinitel difúze vodní páry,
 p [Pa] parciální tlak vodní páry,

můžeme vidět podobnost difúze s vedením tepla. Tak jako součinitel tepelné vodivosti λ udává schopnost materiálu vést teplo, udává součinitel difúze δ schopnost propouštět vodní páru. Dosazením (3.6) do (3.5) obdržíme rovnici difúze vodních par

$$\frac{d}{dx} \left(\delta(x) \frac{dp(x)}{dx} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Okrajové podmínky k rovnici difúze (3.7) jsou prakticky stejné jako v případě vedení tepla:

- a) Dirichletova podmínka - předepsaný parciální tlak $\bar{p}(x)$

$$p(x) = \bar{p}(x), \quad x \in \Gamma_p,$$

- b) Neumannova podmínka - předepsaná hustota difúzního toku $\bar{g}(x)$

$$g(x)n(x) = \bar{g}(x), \quad x \in \Gamma_g,$$

- c) Newtonova smíšená podmínka - předepsaná hustota difúzního toku $\bar{g}(x)$

$$g(x)n(x) = \bar{\beta}(x)(p(x) - \bar{p}_0(x)), \quad x \in \Gamma_{gc},$$

kde $\bar{\beta}$ [s/m] je součinitel přestupu vodní páry,
 \bar{p}_0 [Pa] parciální tlak okolního prostředí.

Parciální tlak okolního prostředí \bar{p}_0 , nutný pro Newtonovu smíšenou podmínku, zjistíme dopočtem ze znalosti teploty a relativní vlhkosti vzduchu. Ta je definována jako poměr parciálního tlaku vodních par k parciálnímu tlaku nasycených vodních par

$$\varphi(p, T) = \frac{p}{p_{sat}(T)}, \quad (3.8)$$

kde φ [-] je relativní vlhkost vzduchu¹,
 p [Pa] parciální tlak vodních par,
 p_{sat} [Pa] parciální tlak nasycených vodních par, definovaný v (3.9).

Relativní vlhkost se může pohybovat od hranice suchého vzduchu ($\varphi = 0$) až do hranice mokrého vzduchu ($\varphi = 1$), kdy je koncentrace vodních par ve vzduchu maximální². Jakékoliv další vypaření vody vede k okamžité kondenzaci stejného množství. Teplota, při níž je vzduch takto maximálně nasycen vodními parami, se nazývá rosný bod. Závislost parciálního tlaku nasycených vodních par na teplotě rosného bodu ukazuje obrázek 3.3. Ze vztahu (3.8) nyní vyjádříme \bar{p}_0

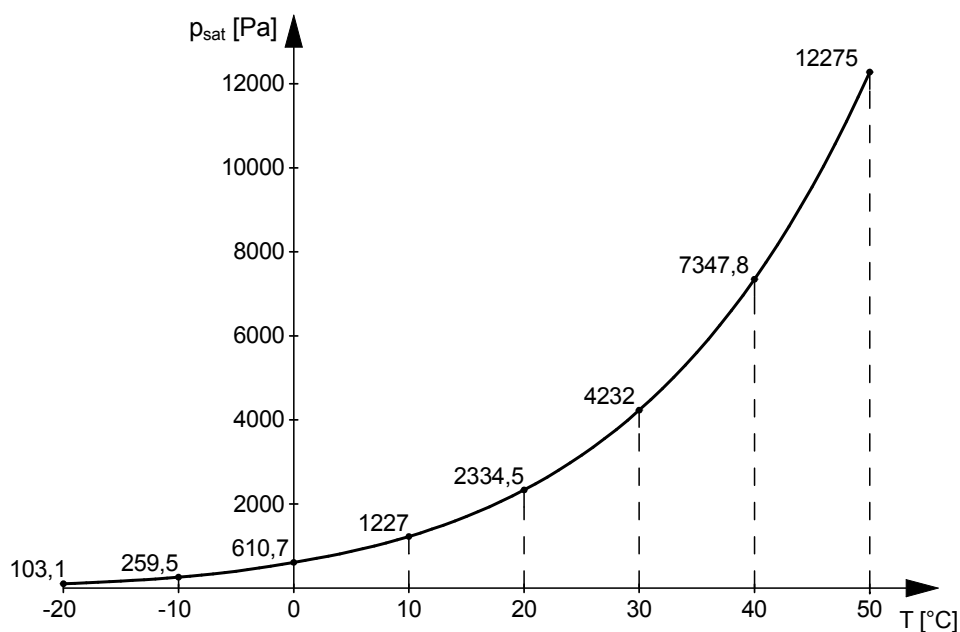
$$\bar{p}_0 = p_{sat}(T_0)\bar{\varphi}_0,$$

kde $\bar{\varphi}_0$ je relativní vlhkost okolního prostředí. Zbylé p_{sat} dopočteme pro teploty v rozmezí od -20 do 50°C z empirických vzorců [11, s. 46]

$$\begin{aligned} \log p_{sat}(T) &= \frac{760,54 + 12,56T}{273 + T}, & T \in \langle -20, 0 \rangle, \\ \log p_{sat}(T) &= \frac{657,46 + 10,24T}{236 + T}, & T \in \langle 0, 50 \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹V praxi se častěji relativní vlhkost udává v procentech, což budeme dělat i my.

²V interiéru by relativní vlhkost vzduchu při 20°C měla být zhruba mezi 45–60 %. V exteriéru je podle teploty ročního období v našem klimatickém pásmu nejběžněji v rozmezí 60–100 %.



Obrázek 3.3: Graf parciálního tlaku nasycených vodních par

3.3 Úprava součinitele tepelné vodivosti

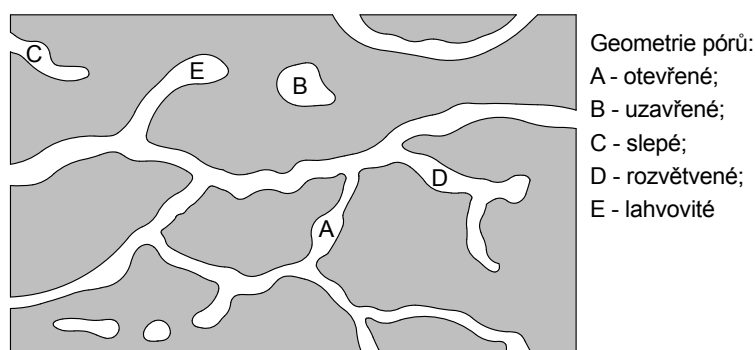
Jak už bylo uvedeno dříve, je součinitel tepelné vodivosti λ jedním ze dvou hlavních parametrů udávající rychlost vedení tepla. Jeho správné určení má proto zásadní podíl na výsledcích celého výpočtu. V následující tabulce jsou pro srovnání uvedeny návrhové hodnoty tohoto součinitele vybraných stavebních materiálů [4, s. 31-38]

materiál	ρ [kg/m^3]	λ [$W/(m.K)$]
vzduch ($20^\circ C$)	1,2	0,026
minerální vlna MW	50-150	0,037-0,043
pěnový polystyren EPS	10-60	0,037-0,051
dřevovláknité desky	230	0,046
dřevotřískové desky	800	0,18
voda ($20^\circ C$)	998	0,60
sklo	2600	0,76
omítka vápenná	1600	0,88
omítka váp. cem.	2000	0,99
beton hutný	2100-2300	1,23-1,36
železobeton	2300-2500	1,43-1,74
ocel uhlíková	7850	50
měď	8800	372

Tabulka 3.1: Součinitel tepelné vodivosti vybraných materiálů

Jak můžeme vidět z tabulky 3.1, mají vysokou tepelnou vodivost zejména kovy, nižší pak kapaliny a nejhůře vedou teplo plyny. Až dosud jsme předpokládali, že je součinitel λ určen pouze typem daného materiálu. To ale není úplně pravda, protože pro žádný materiál nemá stálou hodnotu [12, s. 88-92]. Závisí například na struktuře látky, pórovitosti, teplotě, tlaku, vlhkosti, stlačení, atd. Ze všech těchto typů závislosti má ve stavebnictví nejvýraznější dopad na tepelnou vodivost právě vliv vlhkosti.

Přestože má voda z celkového hlediska tepelnou vodivost relativně malou, vůči tepelným izolacím je součinitel λ o řád větší. Protože je většina stavebních materiálů porézních³, dojde při nasáknutí těchto pórů ke zvýšení tepelné vodivosti. V otevřených vzduchových pórech, přes které dříve probíhala difúze, je nyní přítomna voda, mající 23-krát větší tepelnou vodivost než vzduch.



Obrázek 3.4: Řez porézním materiálem [12, s. 68]

Zvláště u tepelných izolací je tato skutečnost nepříjemná, protože může dojít ke tvorbě tepelných mostů a dalším poruchám. Naší snahou je tento vliv vlhkosti zahrnout do výpočtu. Proto budeme součinitel λ nově určovat podle vztahu [10, s. 27],

$$\lambda(x, p, T) = \lambda_0(x) \left(1 + b(x) \frac{w(x, p, T)}{\rho_s(x)} \right), \quad (3.10)$$

kde	λ	$[W/(mK)]$	je	součinitel tepelné vodivosti vlhkého materiálu,
	λ_0	$[W/(mK)]$		součinitel tepelné vodivosti suchého materiálu ⁴ ,
	b	$[-]$		teplotně vlhkostní doplněk,
	w	$[kg/m^3]$		hmotnostní vlhkost materiálu,
	ρ_s	$[kg/m^3]$		objemová hmotnost suchého materiálu.

K určení hmotnostní vlhkosti w v materiálu použijeme graf sorpční izotermy udávající závislost mezi obsahem vlhkosti v materiálu a relativní vlhkostí. Její průběh závisí především na typu daného materiálu a na několika dalších parametrech, o kterých se zmiňuje například [9, s. 1-5]. Rozdílný průběh sorpční izotermy bude také podle toho, zda se jedná o adsorpci (vlhčení) či desorpci (sušení) nebo třeba při jaké teplotě se děj odehrává. V tomto modelu však všechny tyto vlivy pro jednoduchost zanedbáme a uvažujeme závislost sorpční izotermy pouze na druhu materiálu.

³Výjimkou jsou plasty, kovy, sklo a materiály s uzavřenými póry.

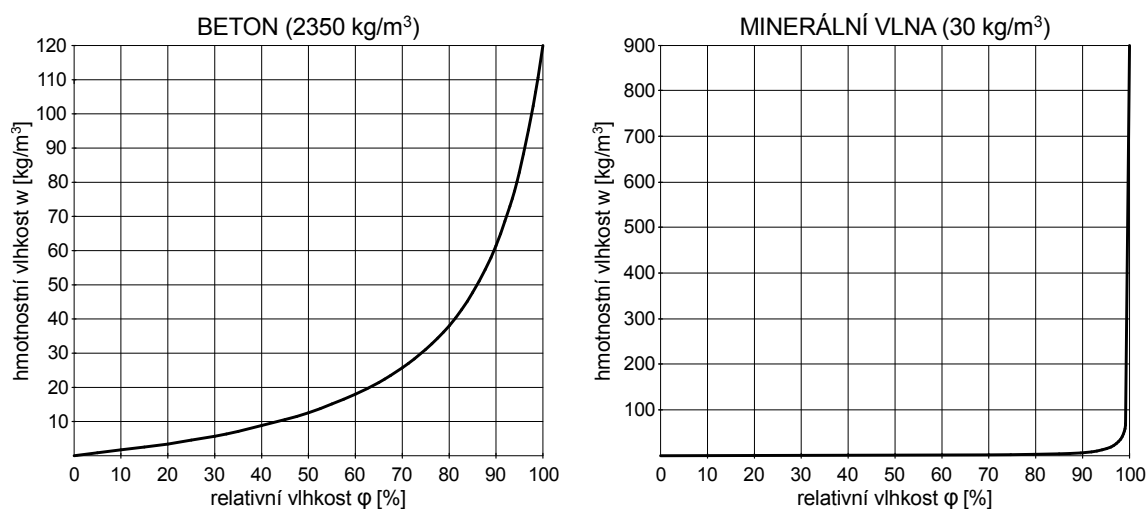
⁴Myslí se přirozeně suchého materiálu, tzn. vysušeného při běžné teplotě a tlaku.

Sorpční izotermu budeme aproximovat dvouparametrickou funkcí, kterou přebíráme opět z [10, s. 13].

$$w(x, p, T) = w_f(x) \frac{(a(x) - 1)\varphi(p, T)}{a(x) - \varphi(p, T)} \quad (3.11)$$

kde w [kg/m^3] je hmotnostní vlhkost materiálu,
 w_f [kg/m^3] hmotnostní vlhkost materiálu při plném nasycení,
 a [-] aproximační faktor ($a > 1$),
 φ [kg/m^3] relativní vlhkost vzduchu.

Potřebné parametry w_f , a a teplotně vlhkostní doplněk b ze vztahu (3.10) byly změřeny pro běžné stavební materiály a jsou převzaty z databáze [7]. Pro ilustraci uvádíme grafy sorpčních izoterm betonů a minerální vlny dle této aproximace.



Obrázek 3.5: Ukázka aproximace sorpční izotermy

Relativní vlhkost vzduchu φ dopočítáme podle již dříve uvedeného vztahu (3.8). Následuje dosazení aproximace sorpční izotermy (3.11) do vztahu (3.10), tj.

$$\lambda(x, p, T) = \lambda_0(x) \left(1 + \frac{b(x)w_f(x)}{\rho_s(x)} \frac{(a(x) - 1)\varphi(p, T)}{a(x) - \varphi(p, T)} \right). \quad (3.12)$$

Původní součinitel tepelné vodivosti $\lambda(x)$ v rovnici (3.4) nyní nahradíme nově upraveným součinitelem $\lambda(x, p, T)$

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x, p(x), T(x)) \frac{dT(x)}{dx} \right) + Q(x) = 0 \quad (3.13)$$

a dostáváme rovnici, která již oproti (3.4) uvažuje s vlivem vlhkosti.

Zpřesněním výpočtu vedení tepla o vliv vlhkosti ale celou situaci značně komplikuje. Předně potřebujeme znát nové materiálové charakteristiky, které musejí být změřeny, a také se celá věc stává složitější z pohledu matematiky. Budeme se muset

totiž vypořádat s vysokou nelinearitou součinitele tepelné vodivosti. Ten je totiž nyní závislý nejenom na druhu materiálu, ale také na teplotě a parciálním tlaku difundujících vodních par. Navíc je i rozdíl mezi tím, zda je teplota vzduchu větší nebo menší než nula – viz empirické vzorce (3.9).

Konečný tvar součinitele tepelné vodivosti je tak spojením všech uvedených vztahů a krátké úpravě

$$\lambda(x, p, T) = \lambda_0(x) \left(1 + \frac{b(x)w_f(x)}{\rho_s(x)} \frac{a(x)p - p}{a(x)10^{\frac{760,54+12,56T}{273+T}} - p} \right) \quad (3.14)$$

pro teploty vzduchu od -20 do 0 °C a

$$\lambda(x, p, T) = \lambda_0(x) \left(1 + \frac{b(x)w_f(x)}{\rho_s(x)} \frac{a(x)p - p}{a(x)10^{\frac{657,46+10,24T}{236+T}} - p} \right) \quad (3.15)$$

pro teploty od 0 do 50 °C.

Kapitola 4

Numerické řešení

Diferenciální rovnice odvozené v předchozí kapitole budeme chtít nyní řešit. Jak už bylo řečeno, použijeme k tomu metodu konečných prvků a Newtonovu metodu.

4.1 Metoda konečných prvků

4.1.1 Pohled do historie

Metoda konečných prvků (MKP) se používá pro řešení nejrůznějších inženýrských problémů. Mezi numerickými metodami si v dnešní době drží zcela dominantní postavení, a to především díky jejímu širokému spektru použití. Mezi její největší přednosti patří, že umožňuje simulaci jevů a dějů, které by byly v praxi velmi nákladné nebo jen stěží uskutečnitelné. Velká část fyzikálních procesů je totiž popsána systémem parciálních diferenciálních rovnic, pro které je analytické řešení klasickými metodami u obecných oblastí velmi obtížné nebo prakticky zcela nemožné najít.

Historický vznik této metody [2] se odehrál ve 40. letech 20. století. Za její průkopníky lze označit Alexandra Hrennikoffa (1941) a Richarda Couranta (1942). Svoje práce napsali nezávisle na sobě a i jejich přístupy se do značné míry odlišovaly. Společným bodem prací obou těchto vědců však bylo rozdělení určité spojité oblasti na konečný počet podoblastí a právě tato myšlenka je jedním ze základních kamenů metody konečných prvků.

Bouřlivý rozvoj MKP, který byl zároveň pevně spjat s rozvojem počítačů, započal pak v 50. letech. K prvním použitím MKP patřily konstrukční úlohy v letectví a úlohy statiky. Položením matematického základu, které se odehrálo v roce 1973 díky práci amerických matematiků George Fixe a Gilberta Stranga, se metoda konečných prvků rozšířila i do dalších inženýrských oborů. Dnes je metoda základem mnohých výpočetních softwarů a její vývoj neustále pokračuje.

4.1.2 Formulace slabého řešení

Řešení úlohy pomocí MKP se může realizovat dvěma odlišnými přístupy, které však vedou ke stejným výsledkům [14]. Prvním z nich jsou variační principy založené na zjištění, že procesy v přírodě se běžně odehrávají minimalizovaně – využitím minimálního množství energie. Druhým je metoda vážených reziduí, kde se využívá slabé formulace

diferenciální rovnice. Zatímco variační principy pracují s minimalizací určitého funkcionálu (obvykle energetického), metoda vážených reziduí se snaží o minimalizování vážené chyby v oblasti. Ať už podle prvního nebo druhého přístupu, jedná se pokaždé o převedení původní diferenciální rovnice na soustavu lineárních algebraických rovnic.

V této práci jsme pro řešení zvolili metodu vážených reziduí, jejíž speciální formou je Galerkinova metoda. Hlavní princip spočívá v nahrazení původní tzv. silné formulace její integrální formou neboli slabým řešením a v následné diskretizaci. Násťin této metody provedeme na původní (lineární) rovnici vedení tepla

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) + Q(x) = 0. \quad (4.1)$$

Nalezením funkce $T(x)$, která by splňovala tuto rovnici v každém bodě oblasti Ω , bychom obdrželi silné řešení. Oproti tomu u slabého řešení tuto podmínku nepožadujeme. Rovnici (4.1) nyní přenásobme libovolnou váhovou funkcí $\delta T(x)$ a integrujme na celé oblasti Ω

$$\int_{\Omega} \delta T(x) \left(\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) + Q(x) \right) dx = 0. \quad (4.2)$$

Jestliže je tento integrál roven nule pro všechny váhové funkce $\delta T(x)$, u kterých předpokládáme na oblasti Ω spojitost a existenci první derivace integrovatelné v kvadrátu, nazýváme $T(x)$ slabým řešením rovnice (4.1).

Výhodou slabého řešení je, že lze poměrně snadno najít numericky. Rovnici (4.2) dále rozdělíme na součet dvou integrálů

$$\int_{\Omega} \delta T(x) \frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} \delta T(x) Q(x) dx = 0$$

a první člen poté upravíme podle Greenovy věty

$$\int_{\Gamma} \delta T(x) \lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} n(x) ds - \int_{\Omega} \frac{d\delta T(x)}{dx} \lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} dx + \int_{\Omega} \delta T(x) Q(x) dx = 0.$$

Vzniklý integrál na hranici Γ rozdělíme na součet tří integrálů podle třech okrajových podmínek

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \delta T(x) \underbrace{\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} n(x)}_{-\bar{q}(x)} ds &= \int_{\Gamma_T} \underbrace{\delta T(x) \lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} n(x)}_{\text{Dirichletova}} ds - \int_{\Gamma_{qp}} \underbrace{\delta T(x) q(x)}_{\text{Neumannova}} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_{qc}} \underbrace{\delta T(x) \bar{\alpha}(x) (T(x) - \bar{T}_0(x))}_{\text{Newtonova}} ds. \end{aligned}$$

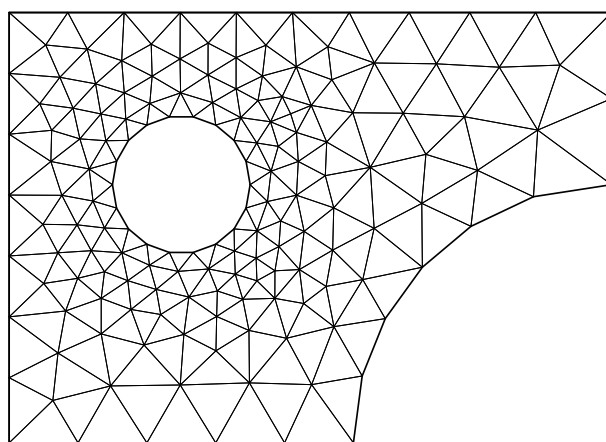
Váhová funkce $\delta T(x)$ je uvažována na hranici Γ_T nulová, a proto i celý tento integrál je roven nule. Zbývle dvě okrajové podmínky dosadíme zpět a dostaneme výslednou integrální rovnici

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d\delta T(x)}{dx} \lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} dx + \int_{\Gamma_{qc}} \delta T(x) \bar{\alpha}(x) T(x) ds = \\ \int_{\Gamma_{qp}} \delta T(x) \bar{q}(x) ds - \int_{\Gamma_{qc}} \delta T(x) \bar{\alpha}(x) \bar{T}_0(x) ds + \int_{\Omega} \delta T(x) Q(x) dx, \quad (4.3) \end{aligned}$$

kterou jsme nyní připraveni dále diskretizovat.

4.1.3 Diskretizace a volba báзовých funkcí

Jak už samotný název prozrazuje, je základem metody konečných prvků prvek konečných rozměrů (na rozdíl od infinitesimálního pohledu). Řešenou oblast je potřeba rozdělit na konečný počet podoblastí – prvků. Tato fáze přechodu od spojité oblasti k jednotlivým podoblastem se nazývá diskretizace a je důležitým krokem při řešení úlohy pomocí MKP. Řešená oblast se beze zbytku rozsítuje na jednotlivé prvky, přičemž hustota sítě nemusí být rovnoměrná, ale může se měnit podle oblasti zájmu. Rohy těchto prvků (případně i jiné význačné body) jsou uzlovými body, v nichž se určují neznámé hodnoty funkce. Rozdělení oblasti, zejména pak volba hustoty sítě a typ konečných prvků, zásadním způsobem ovlivňují přesnost výsledků a potřebný čas pro výpočet.



Obrázek 4.1: Ukázka diskretizace dvourozměrné oblasti

Kvalitní diskretizace je v případě dvou a třírozměrných oblastí nelehký úkol, který se jen málokdy dělá mechanicky. Většina výpočetních softwarů má proto v sobě vestavěn automatický či poloautomatický generátor (preprocesor), který diskretizaci sám provede. V naší situaci, kdy řešená oblast je pouze jednorozměrná, je tento úkol velmi usnadněn. Nemusíme totiž zjišťovat vhodnou polohu uzlových bodů v prostoru, ale provedeme pouze rovnoměrné dělení intervalu.

Hledané funkce $T(x)$ a $\delta T(x)$ budeme nyní pro účely numerického řešení vhodně aproximovat. Libovolnou funkci v MKP vyjadřujeme lineární kombinací známých báзовých funkcí přenásobených neznámými koeficienty v uzlových bodech, tedy

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)c_i,$$

kde $\Phi(x)$ je aproximační funkce,
 $\phi_i(x)$ známé báзовé funkce,
 c_i neznámé koeficienty v uzlových bodech.

Vypočtením neznámých koeficientů c_i určíme vlastně hodnoty hledané funkce v uzlových bodech sítě. Ostatní body oblasti, které nejsou uzlovými body sítě, odhadneme na základě aproximační funkce $\Phi(x)$.

Bázové funkce $\phi_i(x)$ rozhodují v podstatě o tvaru aproximační funkce $\Phi(x)$. Tvoří jakousi základnu (bázi) pro aproximaci hledané funkce. Jejich výběrem určujeme zároveň přesnost výsledného řešení. Mnohdy se však ukazuje jako výhodnější zvolit jednoduchý systém bázových funkcí (lineární, kvadratické) a provést naopak podrobnější dělení oblasti. Implementace složitějších bázových funkcí, jako například Lagrangeových polynomů, bývá pracná a vynaložené úsilí se nemusí vždy vyplatit.

Obecně je pro konvergenci MKP důležité, aby zvolený systém bázových funkcí splňoval podmínky:

- dostatečné hladkosti – hledaná funkce musí být aproximována bázovými funkcemi, které mají spojitě derivace o jeden řád nižší než ve slabém řešení,
- spojitosti – aproximační funkce musí být spojitá jak uvnitř prvku, tak i na jeho hranici,
- úplnosti – bázové funkce musí být schopné popsat hledanou funkci (konstantní i lineární průběh)

V této úloze volíme pro jednoduchost bázové funkce s lineární aproximací na prvku, které budeme značit $N_1(x)$, $N_2(x)$. Jejich funkční předpis je

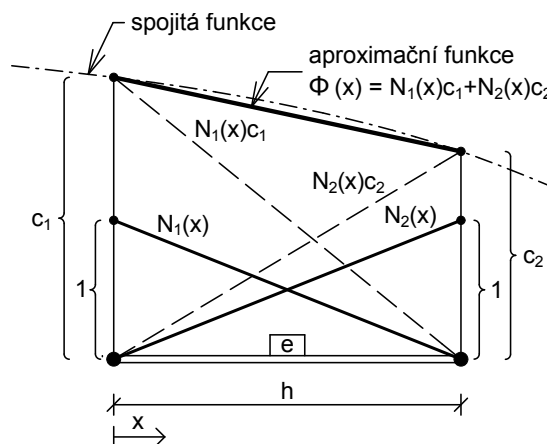
$$N_1(x) = 1 - \frac{1}{h}x,$$

$$N_2(x) = \frac{1}{h}x,$$

kde h je délka prvku. Aproximační funkce $\Phi(x)$ je potom

$$\Phi(x) = N_1(x)c_1 + N_2(x)c_2.$$

Obrázek 4.2 ukazuje princip diskretizace libovolné spojité funkce na e -tém prvku. V uzlových bodech jsou hodnoty aproximační a spojité funkce navzájem blízké¹, v mezilehlých bodech je přesné řešení nahrazeno aproximační funkcí $\Phi(x)$ s určitou chybou, kterou se snažíme minimalizovat.



Obrázek 4.2: Lineární bázové funkce

¹Ani v uzlových bodech se nejedná o přesné, ale pouze přibližné řešení.

Podle uvedeného principu nyní můžeme diskretizovat spojité funkce $T(x)$, $\delta T(x)$ vyskytující se ve slabém řešení (4.3). Pro větší přehlednost budeme dále používat maticového zápisu

$$T(x) \approx \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x)\mathbf{T}, \quad (4.4)$$

$$\delta T(x) \approx \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta T_1 \\ \delta T_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x)\delta\mathbf{T}. \quad (4.5)$$

Ve slabém řešení se objevují i derivace funkcí $T(x)$, $\delta T(x)$, které diskretizujeme obdobným způsobem

$$\frac{T(x)}{dx} \approx \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{T}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\delta T(x)}{dx} \approx \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta T_1 \\ \delta T_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\delta\mathbf{T}, \quad (4.7)$$

kde B_1, B_2 jsou derivace bázových funkcí $N_1(x), N_2(x)$. V další kapitole použijeme těchto aproximací k sestavení soustavy rovnic a výpočtu neznámých teplot v uzlových bodech sítě.

4.1.4 Sestavení soustavy rovnic

Ve slabém řešení (4.3) nyní nahradíme spojité funkce $T(x)$, $\delta T(x)$ a jejich derivace aproximacemi (4.4) až (4.7). Pro e -tý prvek oblasti Ω platí tato rovnice

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}\delta\mathbf{T}\lambda(x)\mathbf{B}\mathbf{T}dx + \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}(x)\delta\mathbf{T}\bar{\alpha}(x)\mathbf{N}(x)\mathbf{T}ds = \\ \int_{\Gamma_{qp}^e} \mathbf{N}(x)\delta\mathbf{T}\bar{q}(x)ds - \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}(x)\delta\mathbf{T}\bar{\alpha}(x)\bar{T}_0ds + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}(x)\delta\mathbf{T}Q(x)dx,$$

kteřou ještě krátce upravíme. Vytkneme neznámé uzlové teploty \mathbf{T} a váhy $\delta\mathbf{T}$ ven z integrálu

$$\delta\mathbf{T}^T \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T\lambda(x)\mathbf{B}dx \mathbf{T} + \delta\mathbf{T}^T \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}(x)^T\bar{\alpha}(x)\mathbf{N}(x)ds \mathbf{T} = \\ \delta\mathbf{T}^T \int_{\Gamma_{qp}^e} \mathbf{N}(x)^T\bar{q}(x)ds - \delta\mathbf{T}^T \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}(x)^T\bar{\alpha}(x)\bar{T}_0ds + \delta\mathbf{T}^T \int_{\Omega^e} \mathbf{N}(x)^TQ(x)dx$$

a vykrácením $\delta\mathbf{T}$ získáme její výslednou podobu

$$\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T\lambda(x)\mathbf{B}dx + \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}(x)^T\bar{\alpha}(x)\mathbf{N}(x)ds \right) \mathbf{T} = \\ \int_{\Gamma_{qp}^e} \mathbf{N}(x)^T\bar{q}(x)ds - \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}(x)^T\bar{\alpha}(x)\bar{T}_0ds + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}(x)^TQ(x)dx. \quad (4.8)$$

V rovnici (4.8) jsou jedinými neznámými uzlové teploty T_1, T_2 ve vektoru \mathbf{T} . Sečtením všech prvků e na dané oblasti

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \lambda^e(x) \mathbf{B}^e dx + \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}^e(x)^T \bar{\alpha}^e(x) \mathbf{N}^e(x) ds \right) \mathbf{T}^e = \\ \sum_{e=1}^n \left(\int_{\Gamma_{qp}^e} \mathbf{N}^e(x)^T \bar{q}^e(x) ds - \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}^e(x)^T \bar{\alpha}^e(x) \bar{T}_0^e ds + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^e(x)^T Q^e(x) dx \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

získáme soustavu rovnic, ze které vypočteme vektor uzlových teplot \mathbf{T} . Ve zkráceném zápisu je

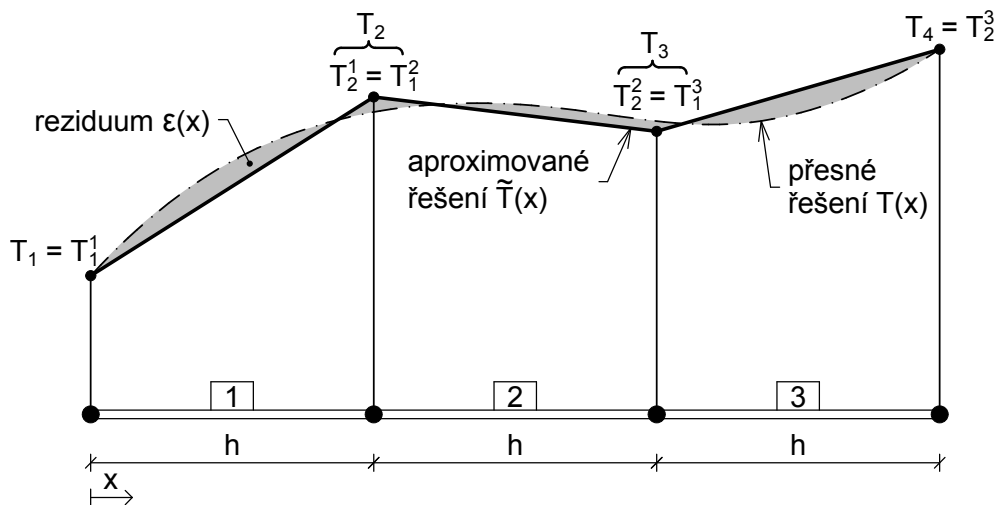
$$\sum_{e=1}^n \underbrace{(\mathbf{K}_{\Omega}^e + \mathbf{K}_{\Gamma_c}^e)}_{\mathbf{K}_g} \mathbf{T} = \sum_{e=1}^n \underbrace{(\mathbf{f}_{\Gamma_p}^e - \mathbf{f}_{\Gamma_c}^e + \mathbf{f}_{\Omega}^e)}_{\mathbf{f}_g},$$

přičemž matici na levé straně soustavy \mathbf{K}_g nazýváme globální matice vodivosti a pravou stranu \mathbf{f}_g globální vektor zatížení. Podobně nazýváme členy v rozsahu jednoho prvku lokální maticí vodivosti \mathbf{K}^e a lokálním vektorem zatížení \mathbf{f}_g . Jejich lokalizací (umístěním do globálních objektů) obdržíme soustavu rovnic pro celou oblast sítě.

Pro lepší představu ukážeme lokalizaci a celkový postup při sestavení soustavy rovnic na jednoduchém příkladu. Začneme tím, že oblast Ω rozdělíme na tři prvky o stejné délce h . Třem prvkům odpovídají čtyři uzlové body, které zapíšeme do vektoru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

Vypočtené uzlové teploty T_1, T_2, T_3, T_4 určují přibližný průběh funkce teploty $\tilde{T}(x)$, jak ukazují další obrázky.



Obrázek 4.3: Grafické znázornění numerického řešení

Protože je dělení oblasti na 3 prvky dosti hrubé, je reziduální oblast větší [8]. Reziduem $\epsilon(x)$, neboli chybovou funkcí, nazveme zbytek, který zůstane po dosazení aproximované funkce $\tilde{T}(x)$ do silného řešení, a sice

$$\epsilon(x) = \frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \right) + Q(x).$$

Jemnějším dělením oblasti na více prvků bychom samozřejmě získali přesnější aproximaci $\tilde{T}(x)$. Ať už ale danou oblast diskretizujeme na menší či větší počet prvků, musí vždy platit váhové residuum

$$\int_{\Omega} \epsilon(x) \delta T(x) dx = 0$$

pro libovolnou váhovou funkci $\delta T(x)$.

Na obrázku 4.3 je také patrný rozdíl mezi lokálními a globálními teplotami. Lokální teploty oddělujeme od globálních horním indexem značícím číslo prvku. Například globální teplota T_2 tak odpovídá lokálním teplotám T_2^1 a T_1^2 . Stejně budeme postupovat i s ostatní použitými globálními parametry λ^e a Q^e . Naopak básové funkce $N_1(x)$, $N_2(x)$ a jejich derivace B_1 , B_2 rozlišovat nemusíme, protože jsou díky jednotné délce h na každém prvku shodné.

Nyní tedy přistupme k výpočtu jednotlivých členů soustavy. Lokální matice vodivosti \mathbf{K}_{Ω}^e bude pro každý prvek tohoto ukázkového příkladu stejná. Součinitel tepelné vodivosti uvažujeme jako funkci polohy a použitím lineárních básové funkce postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\Omega}^e &= \int_0^h \mathbf{B}^T \lambda(x) \mathbf{B} dx \mathbf{T}^e = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \int_0^h \mathbf{N}(x) \lambda^e dx \mathbf{T}^e = \\ &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \int_0^h \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \lambda_1^e \\ \lambda_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} B_1 B_1 & B_1 B_2 \\ B_2 B_1 & B_2 B_2 \end{bmatrix} \int_0^h \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{h} & \frac{x}{h} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \lambda_1^e \\ \lambda_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{2} & \frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^e \\ \lambda_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix} = \frac{\lambda_1^e + \lambda_2^e}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pro snazší orientaci označíme $k^e = \frac{\lambda_1^e + \lambda_2^e}{2h}$ a máme

$$\mathbf{K}_{\Omega}^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix}.$$

Globální matice vodivosti \mathbf{K}_{Ω} je dána součtem třech lokálních matic vodivosti

$$\mathbf{K}_{\Omega} = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 & k^2 + k^3 & -k^3 \\ 0 & 0 & -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Matice vodivosti \mathbf{K}_Ω charakterizuje tepelnou vodivost celé konstrukce. Sama o sobě je symetrická, pásová a singulární. Zavedením okrajových podmínek dojde k regularizaci soustavy.

Druhá matice $\mathbf{K}_{\Gamma_{qc}}$ symbolizuje přestup tepla na hranici v Newtonových okrajových podmínkách a kterou přičteme k matici vodivosti \mathbf{K}_Ω . Její odvození je snadné, neboť součinitel přestupu tepla α je určený pouze na hranici Γ . Výpočtem hraničních integrálů obdržíme

$$\mathbf{K}_{\Gamma_{qc}} = \begin{bmatrix} \alpha(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Levou stranu soustavy máme tímto hotovou a podobně získáme i pravou stranu. Zbylé okrajové podmínky $\mathbf{f}_{\Gamma_{qp}}$, $\mathbf{f}_{\Gamma_{qc}}$ jsou opět definovány pouze na hranici Γ . Proto

$$\mathbf{f}_{\Gamma_{qp}} + \mathbf{f}_{\Gamma_{qc}} = \begin{bmatrix} q(0) \\ 0 \\ 0 \\ q(L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(0)T_0(0) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha(L)T_0(L) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Poslední člen soustavy \mathbf{f}_Ω charakterizuje vnitřní zdroj tepla. Odvození je podobné jako u lokální matice vodivosti

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\Omega^e &= \int_0^h \mathbf{N}(x)^T \mathbf{Q}(x) dx = \int_0^h \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dx \mathbf{Q}^e = \\ &= \int_0^h \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix} = \\ &= \int_0^h \begin{bmatrix} N_1(x)N_1(x) & N_1(x)N_2(x) \\ N_2(x)N_1(x) & N_2(x)N_2(x) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix} = \\ &= \int_0^h \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{h})^2 & (1 - \frac{x}{h})\frac{x}{h} \\ \frac{x}{h}(1 - \frac{x}{h}) & (\frac{x}{h})^2 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lokalizací do globální matice získáváme

$$\mathbf{f}_\Omega = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

V tomto případě se ale jedná o součin matice a vektoru vnitřního zdroje tepla \mathbf{Q} , který je znám. Po vzájemném vynásobení

$$\frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2Q_1 + Q_2 \\ Q_1 + 4Q_2 + Q_3 \\ Q_2 + 4Q_3 + Q_4 \\ Q_3 + 2Q_4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

dostaneme sloupcový vektor, který přičteme k pravé straně soustavy.

Výsledná soustava rovnic pro výpočet vedení tepla na oblasti Ω s hranicí Γ je při diskretizaci na 3 prvky následující:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} k^1 + \alpha(0) & -k^1 & 0 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 & k^2 + k^3 & -k^3 \\ 0 & 0 & -k^3 & k^3 + \alpha(L) \end{bmatrix}}^{\mathbf{K}_\Omega + \mathbf{K}_{\Gamma_{qc}}} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} q(0) + \alpha(0)T_0(0) + \frac{h}{6}(2Q_1 + Q_2) \\ \frac{h}{6}(Q_1 + 4Q_2 + Q_3) \\ \frac{h}{6}(Q_2 + 4Q_3 + Q_4) \\ q(L) + \alpha(L)T_0(L) + \frac{h}{6}(Q_3 + 2Q_4) \end{bmatrix}}^{\mathbf{f}_{\Gamma_{qp}} + \mathbf{f}_{\Gamma_{qc}} + \mathbf{f}_\Omega}.$$

Jejím vyřešením dostaneme vektor teplot \mathbf{T} v uzlových bodech. Stejným způsobem by se odvodila i soustava rovnic o více prvcích.

Nastíněný postup řešení pomocí MKP by byl stejný i pro jiné jednorozměrné případy. Kromě rovnice vedení tepla budeme stejně řešit i rovnici difúze vodní páry.

4.2 Newtonova metoda

Ve druhé kapitole jsme uvedli, že jsme úlohu nejprve řešili lineárně. Postupovali jsme po krocích metodou postupných oprav, ale řešení bylo možné najít jen pro omezenou skupinu okrajových podmínek. Druhou možností bylo úlohu řešit nelineárně, což jsme nakonec také udělali. Použili jsme k tomu Newtonovu metodu, jejíž princip a použití na této úloze předvedeme.

4.2.1 Princip metody

Základní myšlenka této velmi oblíbené a často užívané metody [6, s. 80-83] je velmi jednoduchá. Vysvětlíme ji nejprve na případu jedné rovnice a poté provedeme rozšíření na soustavy.

Uvažujme nelineární rovnici

$$f(x) = 0, \quad (4.14)$$

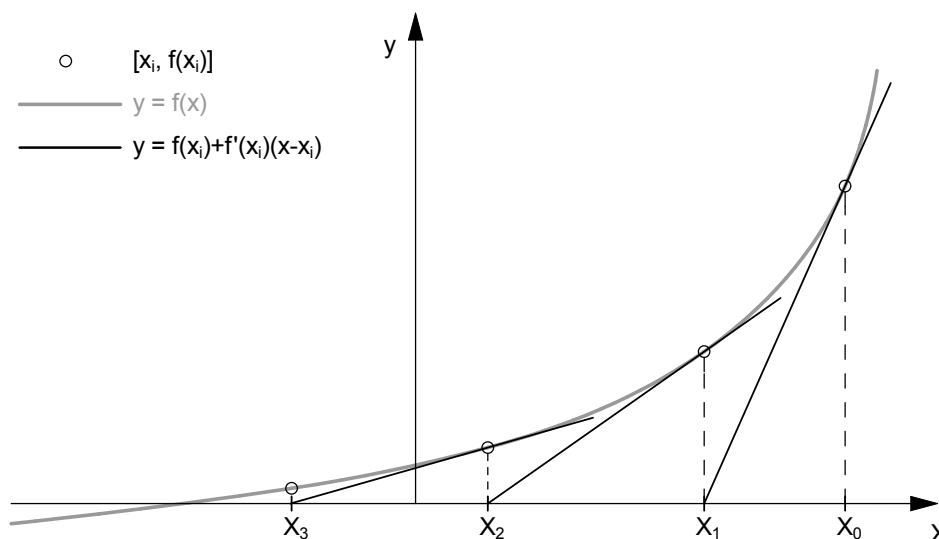
kde $x \in \mathbb{R}$ nazýváme kořenem (4.14). Newtonova metoda je iterační metodou, která předpokládá znalost počáteční aproximace x_i . Funkce f se v okolí bodu $[x_i, f(x_i)]$ nahradí tečnou ke křivce $y = f(x)$

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

a jako další aproximace se vezme průsečík této tečny s osou x . Zmíněný postup vede ke vzorci

$$x_{k+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad (4.15)$$

kde x_{k+1} je lepší aproximace kořene x . Takto iterujeme až do získání požadované přesnosti.



Obrázek 4.4: Newtonova metoda

Volba první aproximace x_i je důležitá především proto, že rozhoduje o konvergenci celé metody. Někdy se proto pro její přesnější určení používají některé přibližné metody (metoda bisekce, regula falsi,...). Pokud se nám ji podaří nalézt nebo ji známe, konverguje pak Newtonova metoda ke kořenu x kvadraticky.

Newtonova metoda pro soustavu nelineárních rovnic [6, s. 90-93], je pouhým zobecněním jednorozměrného případu (4.15). Problém zde ale nastává s počáteční aproximací, neboť v současné době není známa žádná uspokojivá univerzální metoda, která by dokázala spolehlivě určit dobrou počáteční aproximaci řešení. Pomoci nám může znalost konkrétního problému, ale často nezbyvá nic jiného než ji odhadnout. Dodejme, že problém řešení soustav nelineárních rovnic je v numerické matematice jedním z nejobtížnějších.

Uvažujme soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

kde sloupcový vektor \mathbf{x} nazýváme řešením soustavy (4.16). Iterační předpis je zde

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{J}(\mathbf{x}_i)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \quad (4.17)$$

kde $\mathbf{J}(x)$ je takzvaná Jacobiova matice

$$\mathbf{J}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podaří-li se nám najít vhodnou počáteční aproximaci, je řád konvergence metody opět dvě.

4.2.2 Nelineární řešení rovnice vedení tepla

Pro zadané okrajové podmínky chceme získat řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x, p(x), T(x)) \frac{dT(x)}{dx} \right) + Q(x) = 0, \quad (4.18)$$

kde $\lambda(x, p, T)$ je dáno vztahy (3.14), (3.15). Pro usnadnění práce využijeme MATLAB-BEM předdefinovanou funkci `fsolve`, která umí nelineární úlohy řešit [1]. Jednou z možných syntaxí je

$$\text{fsolve}(\text{fun}, \mathbf{x0}, \text{options}),$$

přitom `fun` je námi řešená funkce, `x0` počáteční aproximace a `options` slouží k nastavení způsobu řešení. V našem případě, kdy jsme spojitý problém (4.18) převedli pomocí MKP na soustavu rovnic, je funkce

$$\text{fun} = \mathbf{K}_g \mathbf{T} - \mathbf{f}_g \quad (4.19)$$

a počáteční aproximace `x0` vektor teplot, na kterém závisí následná konvergence metody. Můžeme ho získat například prostým vyřešením původní (lineární) rovnice tepla nezávislé na vlhkosti nebo provedením několika kroků lineárního řešení (než se konvergence zastaví). Pomocí `options` nastavujeme volby jako třeba maximální počet iterací, přesnost metody nebo také použitý algoritmus řešení – viz dokumentace [1]. Sestavení Jacobiové matice provede MATLAB numericky bez nutného zásahu uživatele a je-li dobře zvolená počáteční aproximace, úloha po několika krocích zkonverguje.

Čemu se ale nevyhneme, je výpočet integrálu

$$\int_{\Omega^e} \lambda(x, p, T) dx$$

potřebného pro sestavení lokální matice vodivosti. Analytické řešení je pro příliš velkou složitost (3.14), (3.15) nemožné a nezbývá proto nic jiného než numerická integrace. Použili jsme Gaussovu integraci o pěti integračních bodech a také obdélníkového pravidla s možností libovolného dělení intervalu. Pro většinu zadání úloha bezpečně konverguje s použitím Gaussovy integrace, ale v některých případech vedlo k cíli daleko efektivněji užití obdélníkového pravidla s jednobodovou integrací.

Největší problémy nastávaly zvláště u tepelné izolace, jejíž sorpční izoterma má pro $\varphi > 0,99$ velmi strmou derivaci a byla příčinou nestability. Konvergence úlohy se pak výrazně zpomalila² nebo dokonce zastavila. Řešením bylo použít už zmíněnou jednobodovou integraci, která však s sebou nesla větší chybu, anebo sorpční izotermu v problémovém úseku vyhladit. Použili jsme náhradní aproximaci sorpční izotermu

$$w = w_f \left(1 - \alpha e^{\beta(\varphi_{max} - \varphi)} \right), \quad (4.20)$$

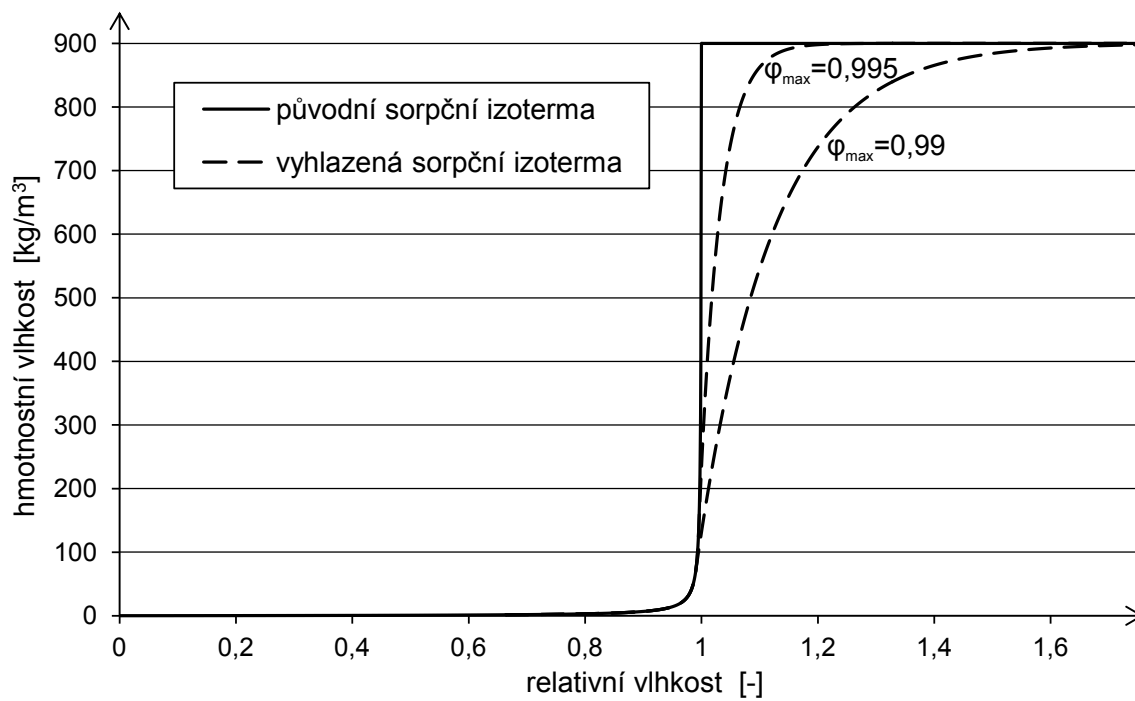
s koeficienty α , β , které jsou

$$\alpha = \frac{a(\varphi_{max} - 1)}{\varphi_{max} - a},$$

$$\beta = \frac{a - 1}{(\varphi_{max} - a)(\varphi_{max} - 1)}.$$

²Bylo zapotřebí i více než 1000 iterací.

Parametr φ_{max} určuje počátek vyhlazení. Hlavním požadavkem při sestavení náhradní aproximace (4.20) bylo, aby pro relativní vlhkost $\varphi > \varphi_{max}$ se sorpční izoterma rychle přibližovala k maximální hodnotě nasycení w_f . Příklady dvou takových vyhlazení sorpční izotermy pro minerální vlnu jsou vidět na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Vyhlazená sorpční izoterma minerální vlny

Kapitola 5

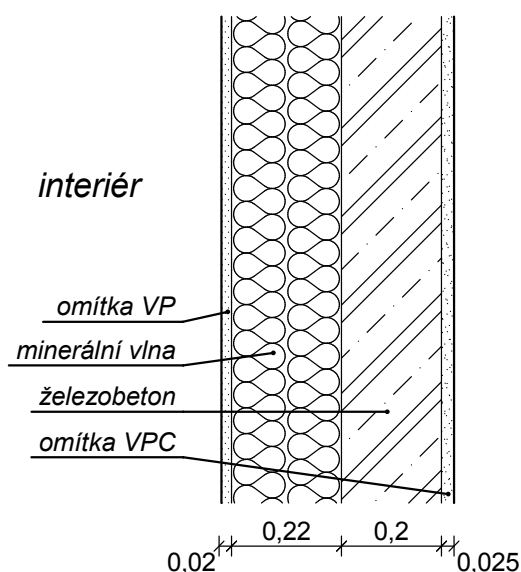
Praktický příklad

5.1 Zadání příkladu

Použití modelu budeme ilustrovat na jednoduchém příkladu, který jsme pro účely diplomové práce vypočetli. Uvažujme vícevrstvou konstrukci, která odděluje interiér od exteriéru. Skladba jednotlivých vrstev s parametry pro výpočet je uvedena v tabulce 5.1 ve směru tepelného toku (z interiéru do exteriéru). Záměrně jsme přitom posunuli tepelnou izolaci proti konstrukčním zásadám blíže k interiéru, aby došlo ke vzniku kondenzační zóny, díky které budou výsledky výpočtu zajímavější.

Vrstva skladby	Tloušťka vrstvy	Součinitel tepelné vodivosti	Objemová hmotnost	Faktor difúzního odporu	Teplotně vlhkostní doplněk	Hmot. vody při plném nasycení	Aprox. mačnicí faktor
	d [m]	λ [W/(mK)]	ρ_s [kg/m ³]	μ [-]	b [-]	w_f [kg/m ³]	a [-]
Omítka VP	0,02	0,87	1700	6	4,29	300	1,01239
Miner. vlna	0,22	0,04	30	3	0,45	900	1,00084
Železobeton	0,2	2,1	2350	23	0,65	120	1,13103
Omítka VPC	0,025	1,05	1800	19	3,42	250	1,02472

Tabulka 5.1: Pořadí vrstev ve směru tepelného toku



Okrajové podmínky k této úloze předepisujeme Newtonovy, tj. teplotu a relativní vlhkost vzduchu okolního prostředí a též součinitel přestupu tepla. Tyto parametry byly převzaty z normy [4] a to jak hodnoty návrhové pro základní tepelně-technické posouzení konstrukce, tak i průměrné měsíční hodnoty pro celkovou roční bilanci. Níže vypsané údaje jsou platné pro území Prahy. Návrhové hodnoty prostředí jsou:

INTERIÉR:

teplota vzduchu $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
relativní vlhkost $\varphi = 50 \text{ } \%$
souč. přest. tepla $\alpha = 4 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$

EXTERIÉR:

teplota vzduchu $T_0 = -13 \text{ }^\circ\text{C}$
relativní vlhkost $\varphi = 84 \text{ } \%$
souč. přest. tepla $\alpha = 25 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$

a průměrné měsíční hodnoty v exteriéru¹ se v průběhu modelového roku vyvíjí následujícím způsobem:

Měsíc	Teplota T_0	Rel. vlh. φ	Měsíc	Teplota T_0	Rel. vlh. φ
1. leden	-2,4 °C	81,2 %	7. červenec	17,5 °C	70,4 %
2. únor	-0,9 °C	80,8 %	8. srpen	17,0 °C	70,9 %
3. březen	3,0 °C	79,5 %	9. září	13,3 °C	74,1 %
4. duben	7,7 °C	77,5 %	10. říjen	8,3 °C	77,1 %
5. květen	12,7 °C	74,5 %	11. listopad	2,9 °C	79,5 %
6. červen	15,9 °C	72,0 %	12. prosinec	-0,6 °C	80,7 %

5.2 Ověření správnosti modelu

Výsledky modelu ověříme srovnáním s jiným tepelně-technickým programem. Zvolili jsme program TEPLO 2011 [13], který umožňuje základní tepelně-technické posouzení skladby stavební konstrukce podle současně platných norem. K dispozici nám byly grafy teplot, parciálních tlaků a množství akumulované kondenzace.

Teplotně vlhkostní doplněk b [-] je ve vztahu (3.10) jakýmsi řídicím členem. Jeho velikost ovlivňuje, jak velká změna součinitele tepelné vodivosti bude. Položením $b = 0$ tak snadno odstraníme vliv vlhkosti z výpočtu vedení tepla a počítáme vlastně normový výpočet, což nyní potřebujeme ke srovnání výsledků. Tímto krokem jsme po vypočtení zadané konstrukce v MATLABU získali stejné průběhy teplot, parciálních tlaků i množství akumulované kondenzace, jako udává program TEPLO 2011.

Dále jsme také stanovili a porovnali mezi normovým a modelovým výpočtem známý součinitel prostupu tepla U . Ten definuje norma [5, s. 9], jako převrácenou hodnotu celkového tepelného odporu konstrukce R_T , a sice

$$U = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{si} + R + R_{se}} \quad (5.1)$$

kde U [W/(m²K)] je součinitel prostupu tepla,
 R [m²K/W] tepelný odpor konstrukce,
 R_{si}, R_{se} [m²K/W] odpor při přestupu tepla² v interiéru, exteriéru.

¹V interiéru předpokládáme během roku stále hodnoty rovné návrhovým.

²Je převrácenou hodnotou součinitele přestupu tepla α_i, α_e .

Tepelný odpor vrstvy konstrukce R [3, s. 32], je dán podílem

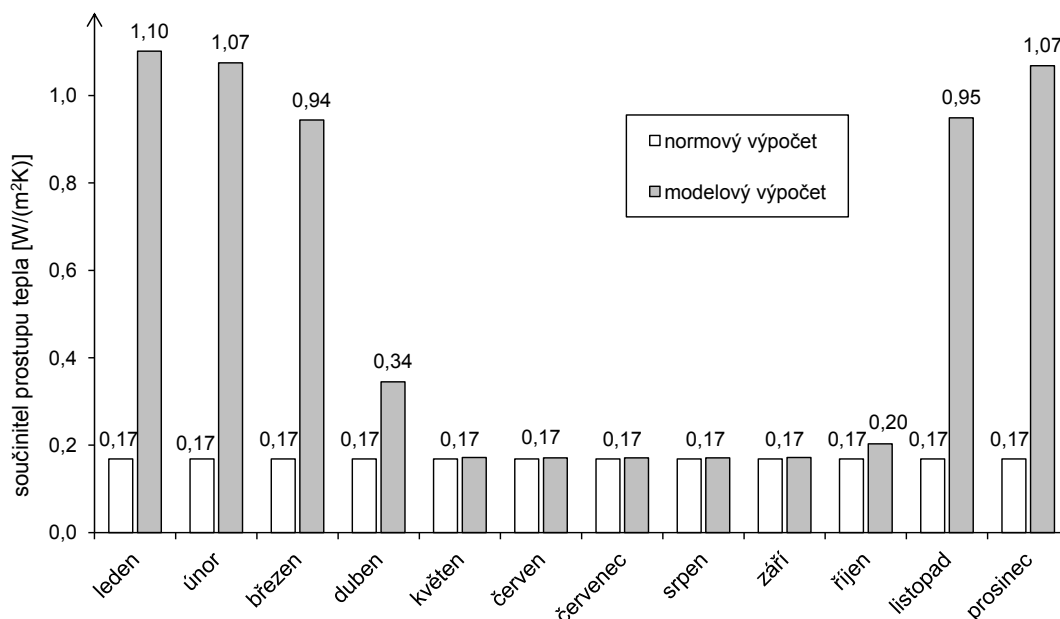
$$R = \frac{d}{\lambda}, \quad (5.2)$$

kde d je tloušťka konstrukce a λ součinitel tepelné vodivosti v suchém stavu. V případě, že počítaná konstrukce je vícevrstvá, je tepelný odpor součtem tepelných odporů jednotlivých vrstev. Užitím vztahů (5.1), (5.2) snadno vypočítáme součinitel prostupu tepla u zadané konstrukce:

$$R = \sum_{i=1}^4 \frac{d_i}{\lambda_i} = \frac{0,02}{0,87} + \frac{0,22}{0,04} + \frac{0,2}{2,1} + \frac{0,025}{1,05} = 5,64 \text{ m}^2\text{K/W},$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + R + \frac{1}{\alpha_e}} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 5,64 + \frac{1}{23}} = 0,17 \text{ W/(m}^2\text{K)}.$$

Ten je podle normového výpočtu stálý během celého roku. Součinitel prostupu tepla jsme vypočetli i podle našeho modelu s akceptováním vlivu vlhkosti. Vzájemný rozdíl v obou výpočtech je vidět v grafu.



Obrázek 5.1: Srovnání součinitele prostupu tepla U v průběhu roku

Můžeme si povšimnout, že rozdílné hodnoty U jsou v chladnější části roku, zatímco od května do září jsou si rovny. To je dáno tím, že v těchto měsících nedochází ke kondenzaci vodních par, které nárůst způsobují. Největší rozdíl je pak v měsíci lednu, který je zároveň nejchladnějším měsícem modelovaného roku, a tedy i největší množství zkondenzované vlhkosti. Kondenzace dle normy [5, s. 37], nastává, platí-li

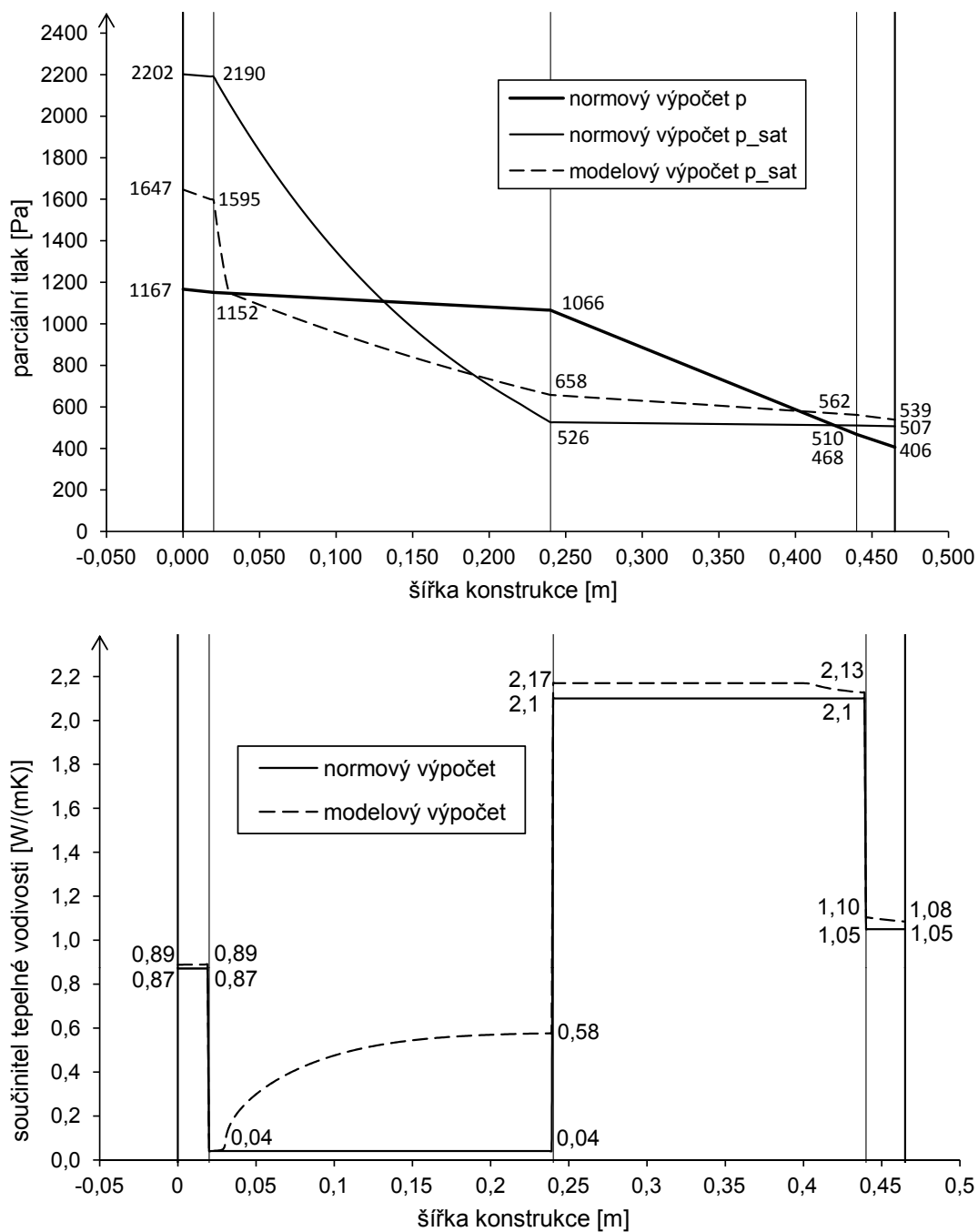
$$p_{sat} < p. \quad (5.3)$$

Graficky je tato podmínka splněna, jestliže křivka parciálního tlaku vodních par přeroste v určitém místě křivku parciálního tlaku nasycených vodních par. Ve skutečnosti je však parciální tlak nasycených vodních par maximálním možným tlakem a

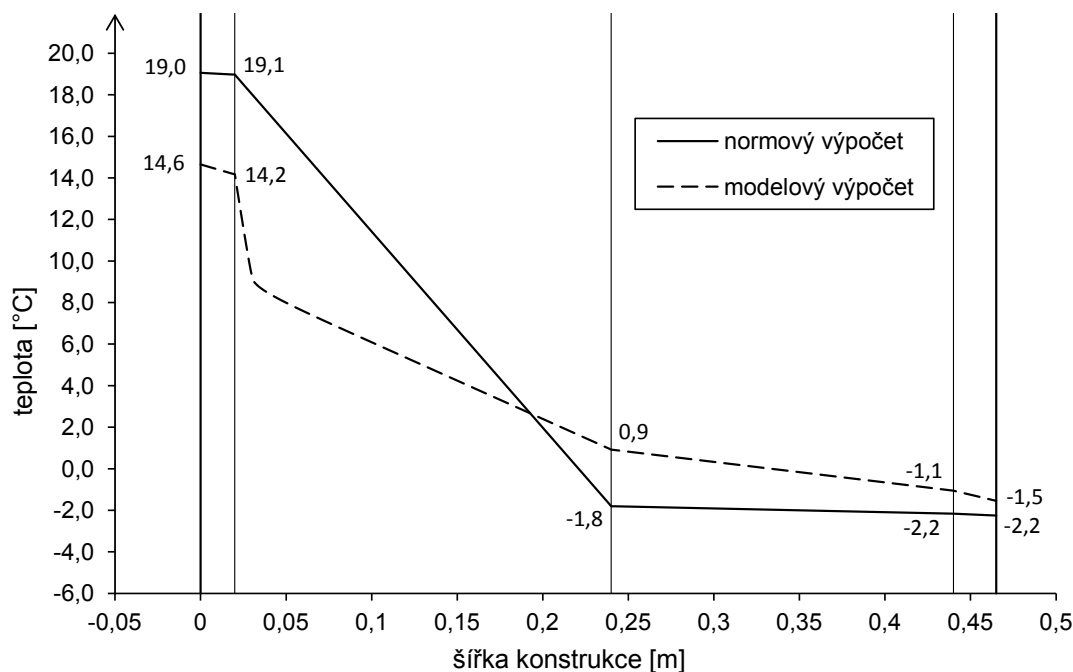
jeho překročení už není možné. Podmínka (5.3) slouží pouze pro stanovení výskytu kondenzace.

5.3 Srovnání výsledků

V této části porovnáme mezi sebou výsledky výpočtu podle normy s modelovým výpočtem. Na dalších třech grafech je srovnání obou typů výpočtů v měsíci lednu.



Obrázek 5.2: Výsledky normového a modelového výpočtu v měsíci lednu



Obrázek 5.3: Výsledky normového a modelového výpočtu v měsíci lednu

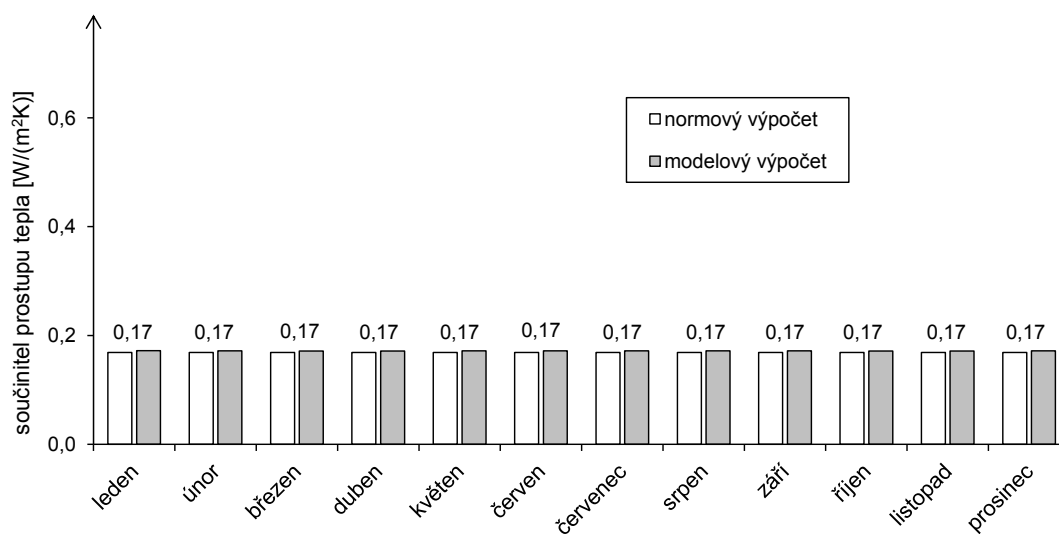
V prvním grafu je znázorněn průběh parciálního tlaku vodních par a parciálních tlaků nasycených vodních par. Rozdíl mezi křivkami nasycených parciálních tlaků je způsoben změnou součinitele tepelné vodivosti, který ovlivňuje rozložení teplot, a ty zase zpětně průběh nasycených parciálních tlaků. V tomto případě navíc dochází uvnitř konstrukce ke kondenzaci vodních par, což má negativní dopad především na tepelné izolace. V druhém grafu je tato skutečnost vyjádřena změnou součinitele tepelné vodivosti, který je největší právě u minerální vlny. Logickým důsledkem je pak i změna průběhu teplot v konstrukci (třetí graf) Tepelná izolace pak přestává plnit svoji funkci a jedním z důsledků je, že v konstrukci vznikají tepelné mosty. Jimi dochází k úniku tepelné energie z objektu a je vytvářeno ideální prostředí pro růst plísní a v konečném důsledku pak nevhodné mikroklima pro pobyt lidí.

5.4 Přínos modelu

Přínos tohoto modelu je omezený v tom smyslu, že počítá pouze stacionární (ustálený) přenos tepla a nebere tedy do úvahy relativně krátký počet dnů, kdy jsou u zvoleného příkladu okrajové podmínky takto nepříznivé. Výše uvedené grafy jsou proto vlastně nejhorším možným scénářem, který může v konstrukci z hlediska kondenzace nastat.

Zároveň se ale můžeme na základě výpočtu podle tohoto modelu dozvědět něco o kvalitě navržené skladby. V zadání jsme uvedli, že jsme pro tento případ záměrně posunuli tepelnou izolaci blíže k interiéru. To mělo za následek vytvoření kondenzační zóny a další zmíněné chování. Víme však, že daleko lepším řešením by bylo umístit tepelnou izolaci (v souladu s konstrukčními pravidly) k venkovnímu povrchu. To potvrzuje i výpočet prostupu tepla v průběhu roku podle našeho modelu. Výsledky součinitele prostupu tepla udávané normovým i modelovým výpočtem jsou prakticky stejné – obrázek 5.4. Oproti předchozí variantě (obrázek 5.1) jde tedy o jednoznačně

lepší uspořádání vrstev ve skladbě obvodového pláště, neboť i v těch nejneprůznivých podmínkách nedochází ke zhoršení tepelně izolačních vlastností konstrukce.



Obrázek 5.4: Součinitel prostupu tepla nové skladby

Kapitola 6

Závěr

V této práci byl ukázán odlišný způsob výpočtu vedení tepla ve stavební konstrukci oproti standardnímu postupu podle normy ČSN 73 0540. Vytvořili jsme jednoduchý model, který zahrnuje vliv vlhkosti stavebních materiálů při výpočtu ustáleného vedení tepla v 1D. Přitom jsme využili externí databázi materiálových charakteristik programu DELPHIN [7], o kterou se tento model opírá. Jako pracovní prostředí nám sloužil program MATLAB, ze kterého byly také získány všechny výsledky uvedené v této práci (zdrojové soubory jsou k dispozici v elektronické podobě na přiloženém médiu).

Tento model dává vhled do problematiky tepelné techniky a představuje jednu z možných cest, kterou se lze ubírat k získání přesnějších výsledků vedení tepla. Přestože uvažujeme pouze ustálené vedení tepla, může být tento model přínosem například při orientačním posuzování správnosti navržené skladby konstrukce v daném prostředí (podrobněji v předcházející kapitole).

Jako další rozšíření tohto modelu se proto logicky nabízí zahrnout do výpočtu i časovou závislost. Ta by přinesla lepší obraz o průběhu teplot v konstrukci během roku, ale zároveň bychom nutně potřebovali i nové fyzikální parametry, jež by tento vliv času vyjadřovaly. Více o tomto tématu [10].

Literatura

- [1] MATHWORKS. *Product Documentation*. fsolve. [cit. 2011-10-08].
Dostupné z: www.mathworks.com/help/toolbox/optim/ug/fsolve.html
- [2] WIKIPEDIA. *Finite element method*. [cit. 2011-11-16].
Dostupné z: en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method
- [3] ČSN 73 0540-1. *Tepelná ochrana budov - Část 1: Terminologie*.
Praha: Český normalizační institut, 2005.
- [4] ČSN 73 0540-3. *Tepelná ochrana budov - Část 3: Návrhové hodnoty veličin*.
Praha: Český normalizační institut, 2005.
- [5] ČSN 73 0540-4. *Tepelná ochrana budov - Část 4: Výpočtové metody*.
Praha: Český normalizační institut, 2005.
- [6] ČERMÁK, L.; HLAVIČKA, R.: *Numerické metody*. VUT v Brně, druhé vydání, 2008.
- [7] GRUNEWALD, J.: *DELPHIN 4.1 Documentation*. Theoretical fundamentals, Dresden: TU Dresden, 2000.
- [8] HALAMA, R.: *MKP a MHP*. 7. přednáška, VŠB-TU Ostrava. [cit. 2012-01-08].
Dostupné z: www.339.vsb.cz/PDF/MKPaMHP/MKPaMHP7new.pdf
- [9] HANSEN, K. K.: *Sorption isotherms catalogue*. Technical report 162/86, Denmark: TDU, 1986.
- [10] KÜNZEL, H. M.: *Simultaneous Heat and Moisture Transport in Building Components*. Dizertační práce, Stuttgart: Fraunhofer IRB, 1995.
- [11] KULHÁNEK, F.; TYWONIAK, J.: *Stavební fyzika 20 - stavební tepelná technika*. ČVUT v Praze, první vydání, 1996.
- [12] PAVLÍKOVÁ, M.; PAVLÍK, Z.; HOŠEK, J.: *Materiálové inženýrství 1*. ČVUT v Praze, první vydání, 2011.
- [13] SVOBODA, Z.: *Teplo*, Svoboda Software. 2005.
- [14] VRBKA, M.; VAVERKA, M.: *Metoda konečných prvků*. Soubor přednášek. VUT v Brně. [cit. 2011-12-02].
Dostupné z: old.uk.fme.vutbr.cz/index98e1.html