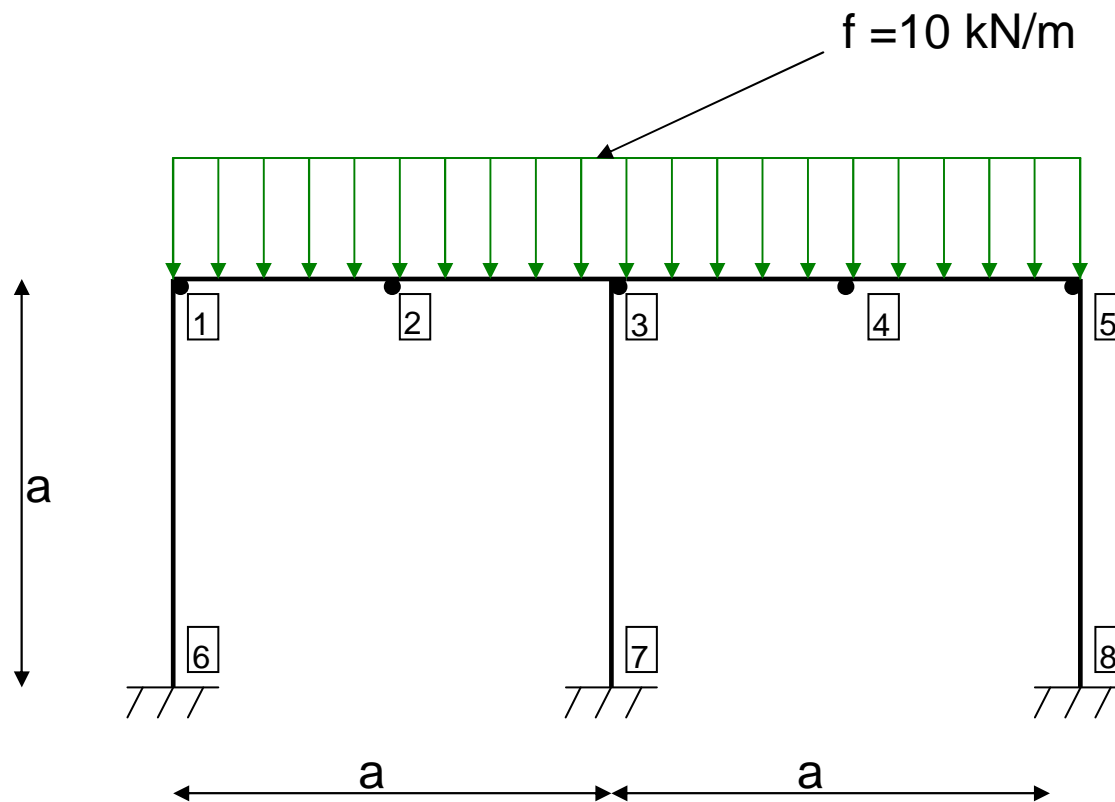


Mindlinův a Kirchhoffův model
prutu-odhad chyb při zanedbání
smykového zkosení

Zadání



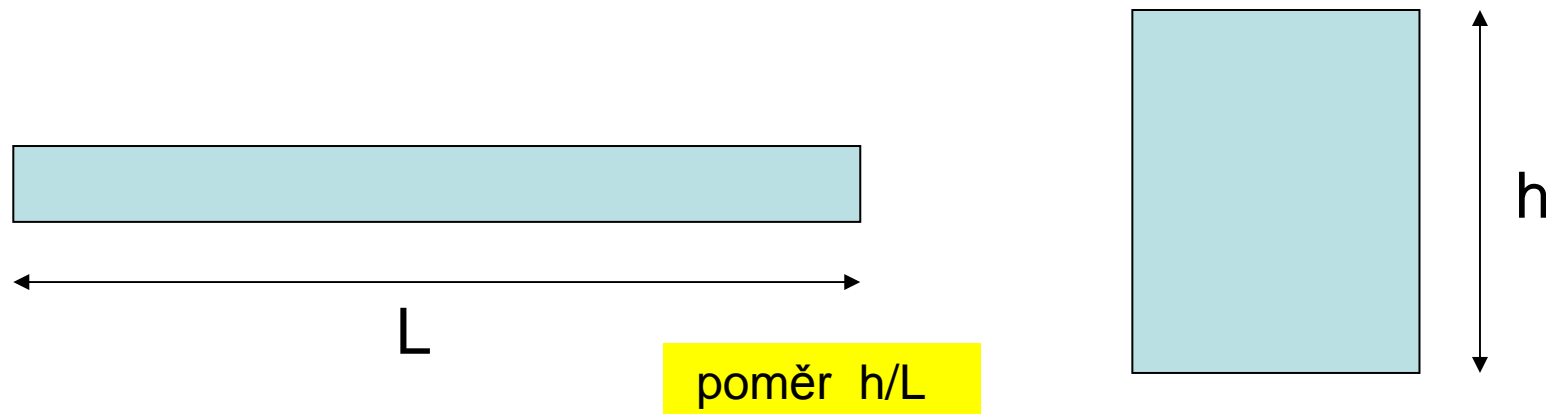
Řešení:

- 3 možnosti řešení- deformační x silová x MKP

Deformační metoda – neznámé jsou posuny $\{u\}$
v našem příp. posuny styčniců

Co budu potřebovat: rozměry konstrukce,
materiálové charakteristiky (E, ν, G) ,
vektor vnějšího zatížení,
ale hlavně geometrii průřezu!!

Proč hlavně geometrii průřezu?



Protože nám řekne, kterou teorií výpočtu použít.

Kirchhoffova teorie prutu,

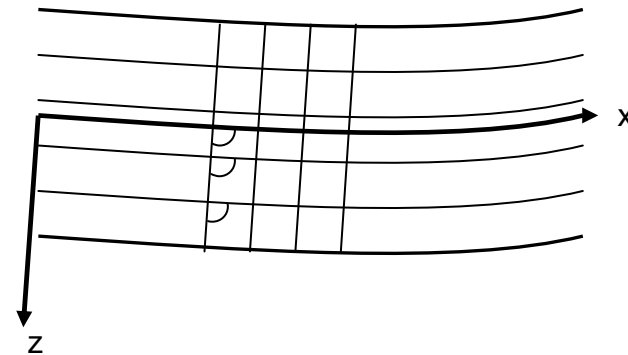
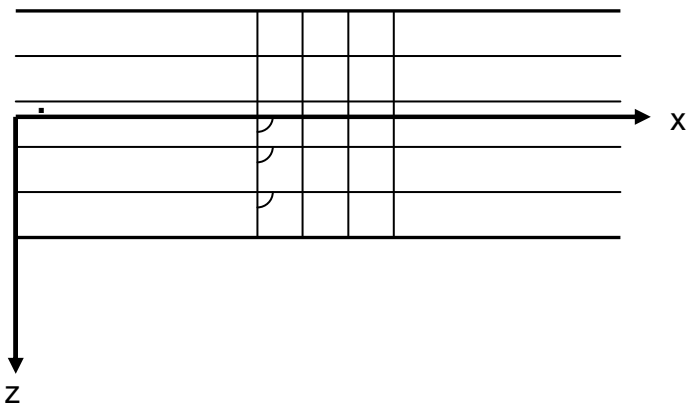
Mindlinova teorie prutu.

Kirchhoffův model prutu

- Také Navierova- Bernoulliiova teorie

Zavádíme tyto předpoklady:

- 1) Průřez prutu zůstává i po deformaci rovinný a kolmý na deformovanou střednici.



- 2) Normálová napětí kolmá na střednici prutu jsou zanedbatelná. Nedochozí k příčnému stlačení prutu.

Základní rovnice Kirchhoffovy teorie

geometrické	$\varepsilon_s = u'_s(x)$	$\kappa(x) = -w''_s(x)$
fyzikální	$N(x) = EA [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_s^{(t)}(x)]$	$M(x) = EI [\kappa(x) - \kappa^{(t)}(x)]$
statické	$f_x(x) = -N'(x)$	$f_z(x) = -M''(x)$

ε_s -relativní deformace střednice

κ - křivost

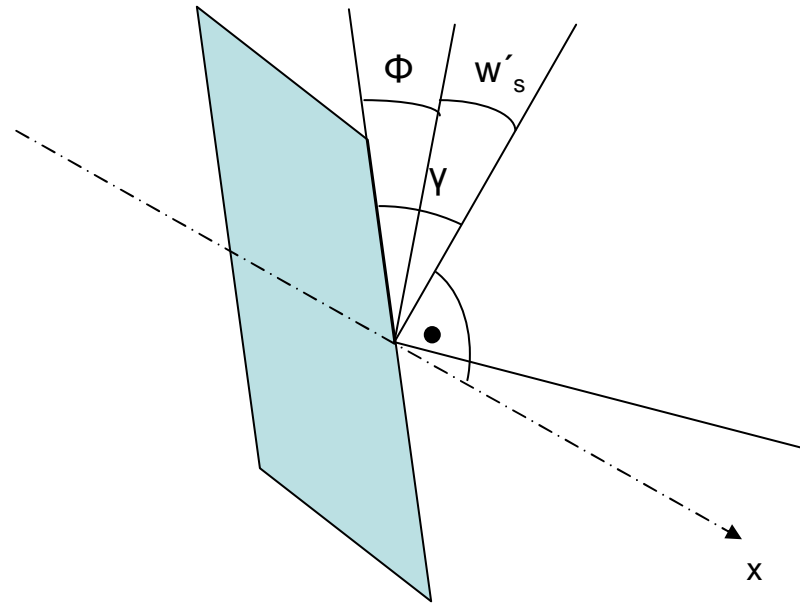
E – Youngův modul pružnosti

Mindlinův model prutu

- Také Reissner, Timošenko

Zavádíme tyto předpoklady:

- 1) Průřez prutu zůstává i po deformaci rovinný, ale už ne kolmý k deformované střednici
- 2) Normálová napětí kolmá na střednici prutu jsou zanedbatelná



Základní rovnice Mindlinovi teorie

geometrické	$\gamma(x) = \Phi(x) + w'_s(x)$	$\kappa(x) = \Phi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \gamma(x)$	$M(x) = EI [\kappa(x) - \kappa^{(t)}(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

γ – úhel, o který se změní původně pravý úhel

G – modul pružnosti ve smyku

K - pseudokřivost

A^* - pomyslná smyková plocha

$$A^* = \frac{I_y^2}{\int_A \frac{S_y^2}{b^2} dA}$$

Rozdíl

V Kirchhoffově teorii jsme nebrali v potaz zkosení γ vyvolané smykovým napětím, neboli $\tau_{xz} = 0$.

Smyková tuhost roste nade všechny meze $G \rightarrow \infty$.

V Mindlinově teorii jsme již s tímto zkosením počítali.

Proč?

Kvůli přesnějším výsledkům, které odpovídají skutečnosti.

Hlavně při různých poměrech výšky/délky prutu .

Kirchhoff

obor platnosti

poměr

$$h/L < 1/10$$

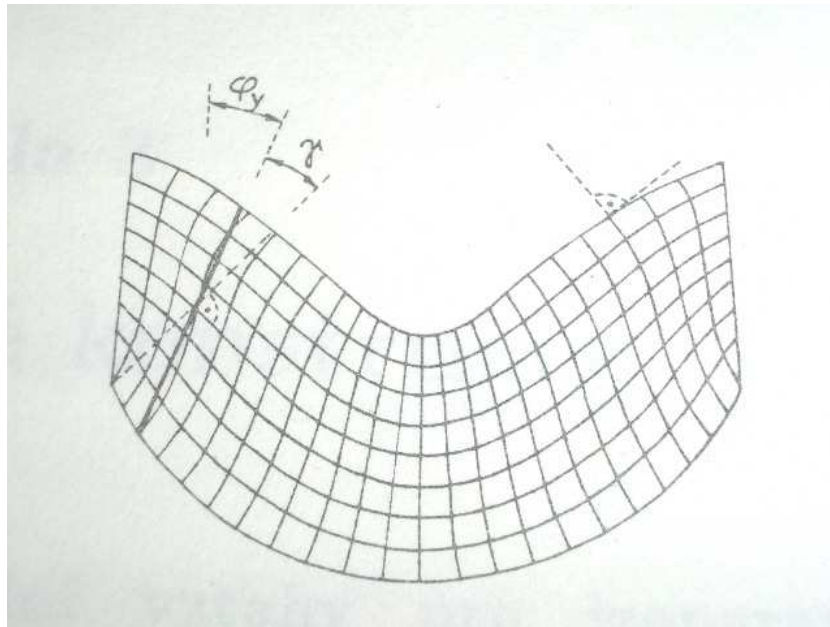
$$1/10 < h/L < 1/3$$

chyba

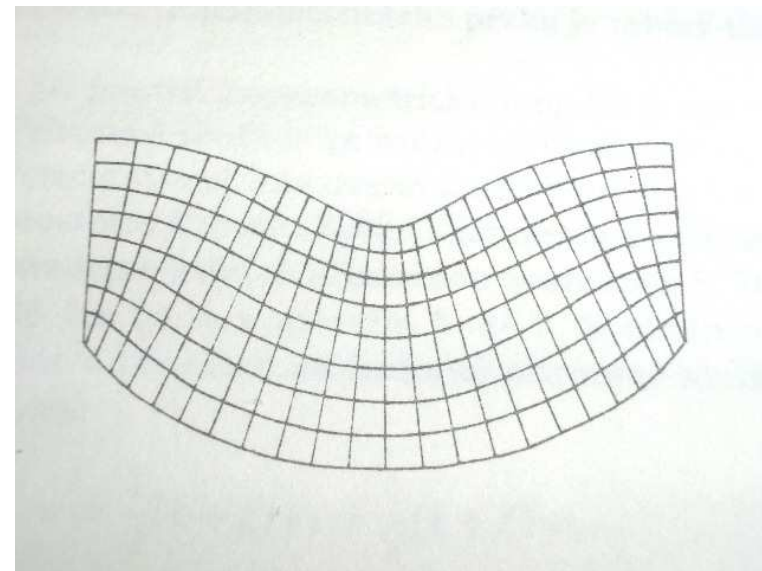
1%

10%

Lépe použít Mindlinův model prutu



Mindlin



Kirchhoff

Řešení

1) Sestrojení matice tuhosti celé konstrukce.

2) Vektor vnějšího zatížení

Matice tuhosti = matice od tahu-tlaku (stejná pro obě varianty) + matice od ohybu,

a kde

$$k^* = \frac{6EI}{GA^* L^2} \cdot$$

Matice od ohybu

$\frac{2EI}{L(1+2k^*)}$	$\frac{s}{L}$	$\frac{c}{L}$	1	$\frac{s}{L}$	$\frac{c}{L}$	1
s/L	6	-6	3	-6	6	3
c/L	-6	6	-3	6	-6	-3
1	3	-3	$2+k^*$	-3	3	$1-k^*$
s/L	-6	6	-3	6	-6	-3
c/L	6	-6	3	-6	6	3
1	3	-3	$1-k^*$	-3	3	$2+k^*$

Pokud $k^* \rightarrow 0$ potom dostáváme matici ohybové tuhosti pro Kirchhoffovu teorii.

Poměry

$$\text{Poměr } h/L = 1/10$$

Výsledky MKP

UZEL 1: $u = 0,0035$ $v = 0,3471$

UZEL 2: $u = -0,00025$ $v = 0,3462$

Výsledky dle Kirchhoffa

$u = 0.0017$ $v = 0.3210$

Výsledky dle Mindlina

$u = 0.0017$ $v = 0.3431$

Poměr $h/L = 1/3$

Výsledky MKP

UZEL 1: $u = 0,0003471$ $v = 0,01059$

UZEL 2: $u = -0,0000854$ $v = 0,01061$

- Výsledky dle Kirchhoffa

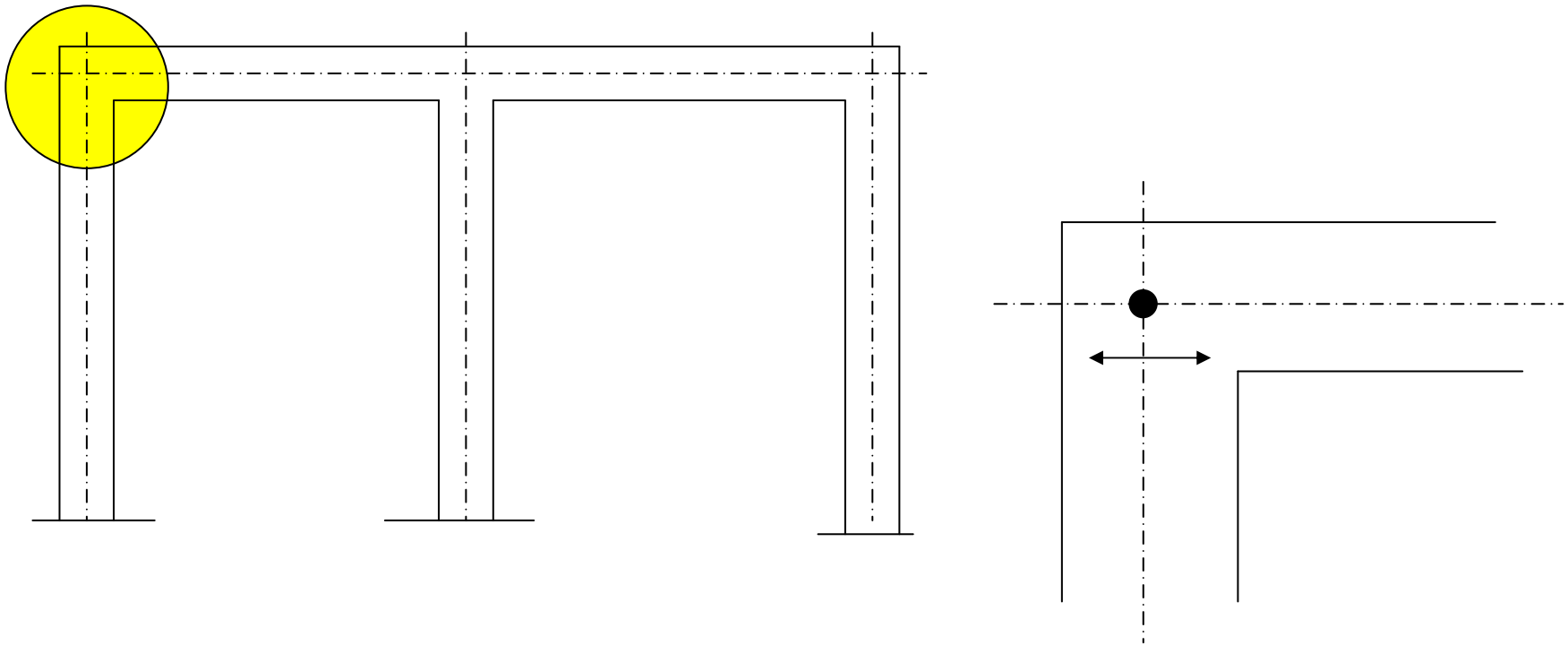
$u = 0.0002$ $v = 0.0067$

- Výsledky dle Mindlina

$u = 0.0002$ $v = 0.0087$

Problém

V MKP jsme získali posuny v jednotlivých uzlech, ale pro přesný výsledek musíme určit, který uzel odpovídá styčníku → důležité pro určení délky prutu a tedy i poměru



Závěr

Pro běžné účely se používá Kirchhoffova teorie ze dvou důvodů

- 1) Vliv smykové deformace bývá ve většině praktických úloh zanedbatelný.
- 2) Zahrnutí vlivu smykové deformace nepřináší podstatné změny v postupu, pouze zvyšuje numerickou pracnost výpočtu.

Poděkování

Literatura

1) Z. Bittnar ,J. Šejnoha, Numerické metody mechaniky, vol. I, ES
CVUT, Praha, 1992.

2) Z.Bittnar, M.Jirásek, P.Konvalinka, Statika stavebních konstrukcí II, ES
CVUT,Praha, 1992

3)J.Zeman – přednášky na webu
<http://cml.fsv.cvut.cz/~zemanj/teaching/mk10>