ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Katedra mechaniky

Bakalářská práce

Petr HAVLÁSEK

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Katedra mechaniky

Mezní únosnost železobetonových prutů s přihlédnutím k nelineárnímu chování

Vedoucí bakalářské práce:	**prof.Ing. Milan Jirásek, DrSc.**
Autor bakalářské práce:	**Petr Havlásek**
Studijní obor:	**Konstrukce a dopravní stavby**
Forma studia:	**prezenční**
Bakalářská práce dokončena:	**červen 2008**

Čestné prohlášení:

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Mezní únosnost železobetonových prutů s přihlédnutím k nelineárnímu chování* vypracoval samostatně pod odborným vedením prof.Ing. Milana Jiráska, DrSc.

Petr Havlásek

Praha, červen 2008

Poděkování:

Děkuji prof.Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc., za cenné rady, podněty a připomínky při zpracování této bakalářské práce.

Anotace: *Srovnání teoretických metod a postupů daných normou EC2 pro výpočet mezních stavů železobetonových prvků. Pozornost se soustředí zejména na pruty obdélníkového a kruhového průřezu zatížené kombinací dvouosého ohybu a tlaku nebo tahu. Uvážen přitom bude jak nelineární charakter pracovních diagramů pro beton a ocel, tak i vliv geometricky nelineárních účinků v tlačených prutech.*

Annotation: *The comparison between theoretical methods and methods given in standard EC2, used for calculation of the ultimate limit states of steel-reinforced concrete beams. Scope is set on members of rectangular and circular cross-section, subject to axial force and biaxial bending, accounting for their both material and geometrical non-linear behaviour.*

Obsah:

1. Úvod

Cílem první části této práce byl výpočet interakčního diagramu (ID) pro železobetonový prvek obdélníkového a kruhového průřezu a porovnání ID v závislosti na geometrii průřezu, stupni vyztužení a použitých materiálových modelech daných normou.

Zkoumal jsem průřezy vystavené zatížení normálovou silou a buď jedním nebo dvěma ohybovými momenty. Jedná se o kombinace namáhání, které jsou typické pro většinu stavebních konstrukcí; pokud je zanedbána normálová síla, jde o prostý/šikmý ohyb, tedy způsob namáhání, kterému jsou nejčastěji vystaveny vodorovné nosné konstrukce – nosníky. Oproti tomu, je-li dominantní složkou namáhání síla normálová, ve většině případů se jedná o namáhání svislých nosných konstrukcí – při poměru stran do 4:1 o namáhání sloupů, při vyšším o namáhání pilířů a stěn. Pokud je významný vliv excentricity vnější síly, je konstrukce posuzována na kombinaci normálové síly a jednoho dominantního ohybového momentu (např. rámové stojky). Zatížení všemi třemi vnitřními silami může být uvažováno např. u rohových sloupů skeletových konstrukcí. Průřez vystavený kroucení a smyku jsem nezkoumal.

Druhá část je zaměřena na mezní únosnost konstrukce s přihlédnutím k účinkům 2. řádu. Výpočet jsem provedl na nejjednodušším možném prvku – kloubově podepřeném štíhlém nosníku zatíženém excentricky působící silou. Cílem bylo porovnat účinky 1. a 2. řádu se zjednodušenými výpočty danými normou.

V závěru jsem spojil výsledky 1. a 2. části, abych získal upravený ID pro přímý výpočet únosnosti štíhlých prvků bez komplikovaného výpočtu dle 2. řádu.

Při svém bádání jsem se řídil zásadami danými normou ČSN EN 1992-1-1: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby, častěji označovanou jako „Eurokód 2“. Norma nabývá účinnosti 1.12.2006 a časem plně nahradí stávající normu ČSN 73 1201. Eurokódu jsem využil především ke zjištění konstrukčních zásad betonových prvků (nemá cenu zkoumat prvky, které nelze navrhnout – například příliš silně vyztužené průřezy).

Všechny výpočty jsem prováděl v programu Matlab (části 2.4, 2.5 ve verzi 6.1, zbytek 2007a), data druhé části jsou zpracována v programu Excel, vzorce jsou psané v programu Mathcad.

2. Interakční diagram – mezní analýza průřezu

2.1 Definice ID

Interakční diagram je tvořen uzavřenou, téměř konvexní křivkou vymezující v rovině množinu bodů. Každý bod této roviny je určen souřadnicí: [normálová síla *N*; ohybový moment *M*]. Pokud leží bod uvnitř této křivky, nedochází k překročení únosnosti prvku; oproti tomu body vně odpovídají kombinacím, při kterých je únosnost průřezu překročena. Proto body na hranici mezi těmito plochami odpovídají zatížení, při kterém je právě dosaženo maximální únosnosti. Tento stav se nazývá „Mezní stav únosnosti“ (MSÚ), patří do skupiny „Prvních mezních stavů“ (stabilita, únosnost…).

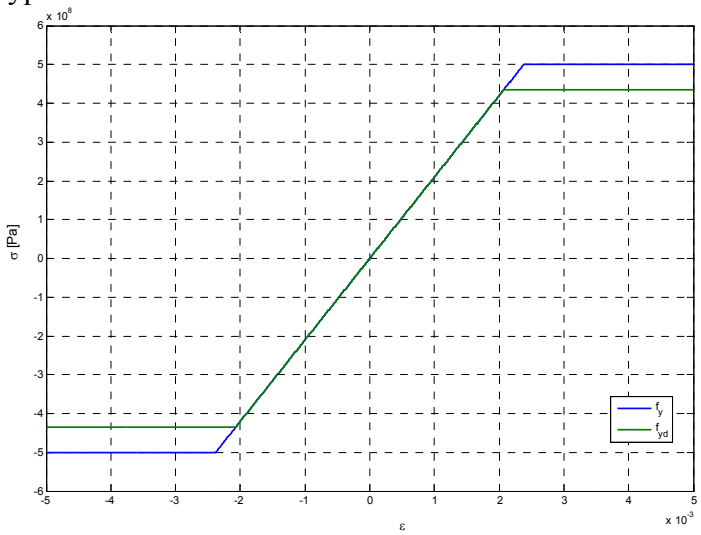
Jak z definice vyplývá, ID je velice vhodný nástroj k posuzování mnoha silových kombinací na prvky stejného průřezu.

2.2 Materiálové vlastnosti betonu a oceli

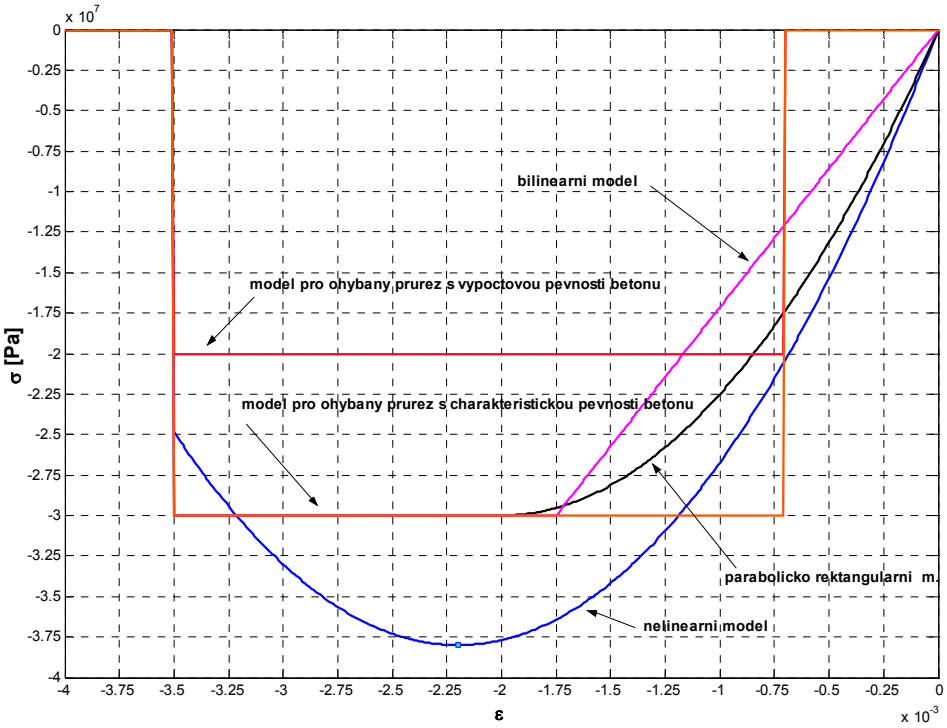
Ocel: předpokládal jsem lineární závislost chování mezi napětím a deformací až do dosažení hodnoty napětí, při které začne ocel plastizovat - tzv. mez kluzu. Tu jsem stanovil hodnotou f_y=500MPa, která odpovídá běžné betonářské výztuži R 10505. Při dalším zvětšování deformace již nedochází k nárůstu napětí (tzv. zpevnění) nad (pod v případě tlaku) tuto mez.

Beton: Model chování betonu a charakteristické pevnosti byly určeny na základě EC2. Pro lepší srovnání mezi výpočtovými modely jsem použil jen jednu třídu betonu - C30/37.

Dílčí součinitele bezpečnosti materiálu: Národní aplikační dokument pro ČR předepisuje γ_{Mc}=1.5 pro beton a γ_{Ms}=1.15 pro ocel. Vliv těchto součinitelů jsem v části 2.4 neuvažoval, pracoval jsem tedy s charakteristickými hodnotami pevností materiálů, které jsou pro srovnání stejně vhodné jako výpočtové.



Obr.1: Pracovní diagram oceli - charakteristická a návrhová pevnost.



Vztah pro par-rekt prac. diagram

$$\sigma_c = f_{cd}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \quad \text{pro} \quad 0 \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{c2}$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{pro} \quad \varepsilon_{c2} \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu2}$$

Prac. diag. pro nelin. analýzu kce.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\cdot\eta-\eta^2}{1+(k-2)\cdot\eta} \quad \text{kde}$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \qquad k = \frac{1.05\cdot E_{cm}\cdot|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}$$

Obr. 2: Pracovní diagramy betonu.

2.3 Konstrukční zásady

EC2 definuje minimální a maximální stupeň vyztužení ŽB prvku betonářskou výztuží, tyto hodnoty se mírně liší pro nosníky a pro sloupy. Ve výpočtech jsem užíval $A_{S,min}=0,002A_C$ a $A_{S,max}=0,04A_C$, kde A_S je plocha výztuže a A_C je plocha betonu.

Současně musí být v průřezu umístěny minimálně 4 podélné pruty; 1 v každém rohu obdélníkového průřezu, v případě mnohoúhelníka v každém jeho rohu 1 prut. Tento požadavek plyne z požadavku zajištění správné polohy třmínků při betonování. Třmínky slouží u nosníků jako smyková výztuž, u sloupů jako výztuž zabraňující vybočení tlačených prutů. U kruhového sloupu se doporučuje navrhovat minimálně 6 podélných prutů. Nejmenší průměr výztužného prutu je 8mm.

Krytí výztuže betonem slouží k zajištění její dlouhodobé trvanlivosti a zároveň ke zlepšení spolupůsobení. Tloušťka krycí vrstvy je funkcí agresivity prostředí, délky uvažované životnosti kce, předpokládaného rozvoje trhlin atd... Stanovil jsem ji hodnotou 20mm (kromě části 2.4, kde krytí není uvažováno).

2.4 Obdélníkový průřez namáhaný dvojicí sil M, N

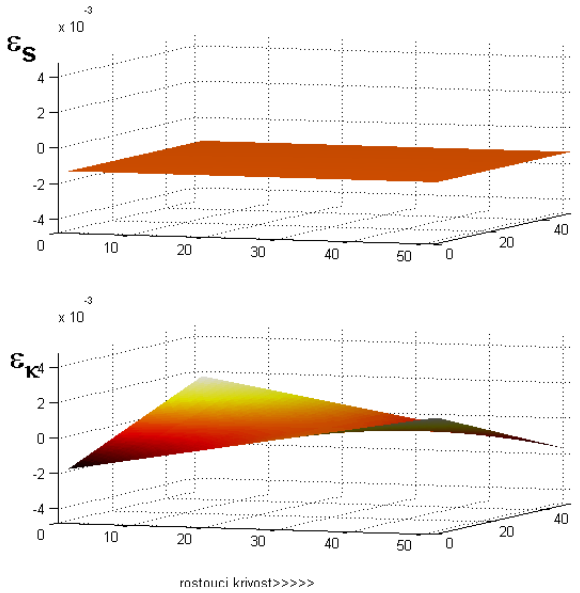
2.4.1 Výpočetní model

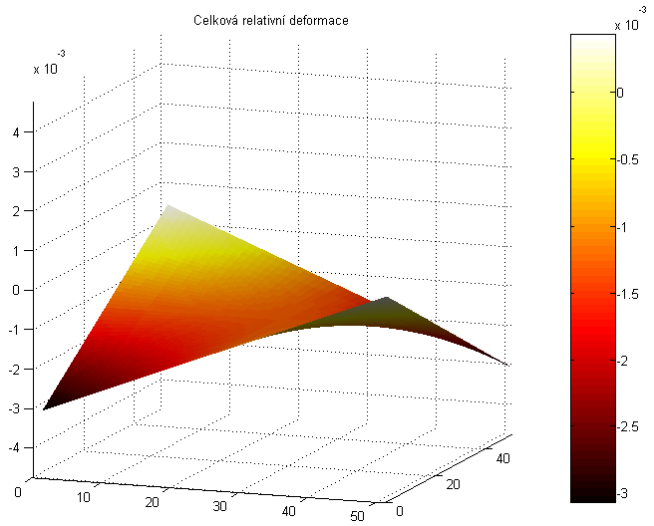
Výpočty jsem prováděl na průřezu o rozměrech 300mm x 500mm, který je v oblasti nejvíce tlačených a tažených vláken vyztužen betonářskou výztuží. Pro zjednodušení a urychlení výpočtu jsem celý průřez nahradil sloupcovou maticí, jejíž první a poslední členy představovaly výztuž, zbylé, po výšce průřezu rovnoměrně rozdělené členy beton. Počet členů matice průřezu neměl na výsledek výpočtu příliš velký vliv, dá se říci, že od dvaceti členů výše je dosahováno téměř stejných hodnot. Výpočet jsem zformoval tak, aby stupeň vyztužení průřezu byl nezávislý na počtu členů matice.

Cílem výpočtu bylo porovnat různé pracovní diagramy betonu a také vytvořit grafické výstupy zachycující vývoj distribuce napětí po průřezu. Z tohoto důvodu jsem neuvažoval vliv krycí vrstvy.

2.4.2 Postup výpočtu

1) Generuje se matice relativních deformací ε_{tot}, ve které každý člen vzniká sečtením relativní deformace střednice ε_s a deformace způsobené vlivem křivosti ε_κ. Matice má stejný počet řádků a sloupců jako je počet řádků v matici průřezu, každému bodu průřezu tedy přísluší jiná relativní deformace. Je pochopitelné, že celý výpočet nelze učinit najednou, proto je řešen v cyklech po krocích; s každým krokem se zvětšuje velikost relativní deformace střednice.

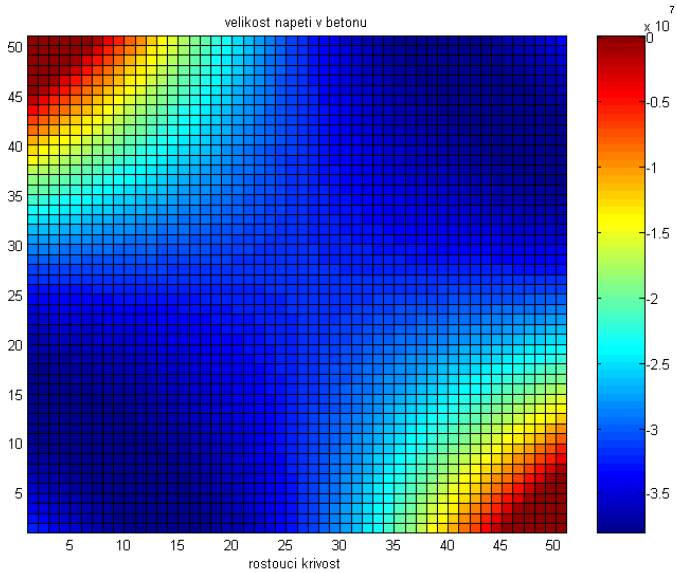


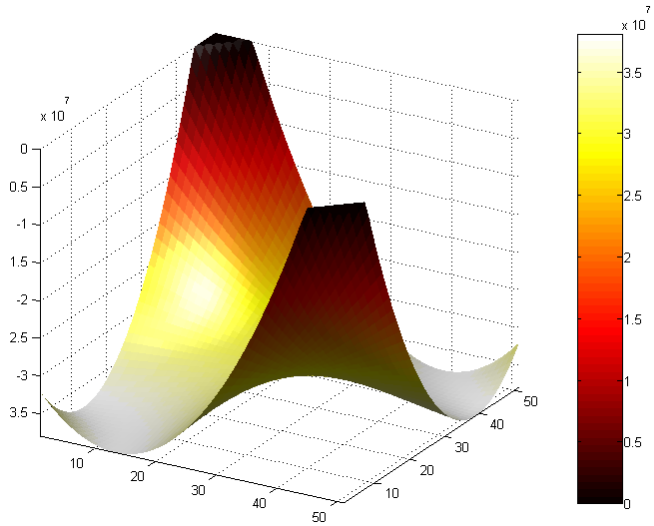


Obr. 3: Grafické znázornění matic relativních deformací. *Obr. 4: Grafické znázornění matice celkové deformace.*

- vodorovná osa x: rostoucí křivost, vodorovná osa y: výška průřezu, svislá osa z: velikost deformace,

2) Z hodnot relativních deformací se přímo vypočítají hodnoty napětí v bodech průřezu



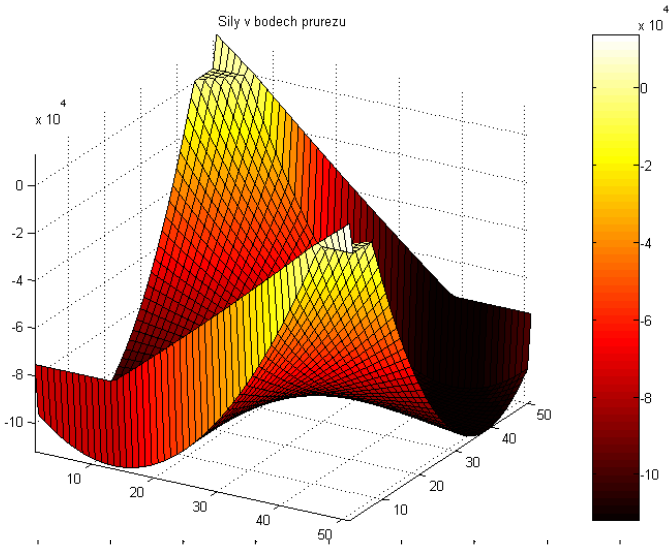


Obr. 5 *Obr. 6*

2D a 3D graf rozložení napětí v betonu po průřezu. Zleva se zvyšuje křivost. Graf zachycuje průřez v jednom kroku, při kterém relativní deformace střednice zůstává konstantní.. Svislá osa znázorňuje výšku průřezu. V tomto grafu byl použit nelineární model betonu.

3) Výpočet síly v bodech průřezu

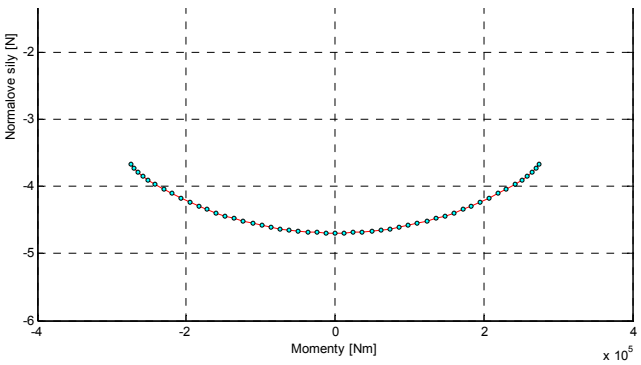
Obr. 7: 3D graf rozložení bodových sil po průřezu. Zleva roste křivost. V první a poslední řadě se nachází ocelová výztuž. Průřez je v tomto případě minimálně vyztužen, proto téměř není rozdíl mezi velikostí síly v betonovém a ocelovém elementu.

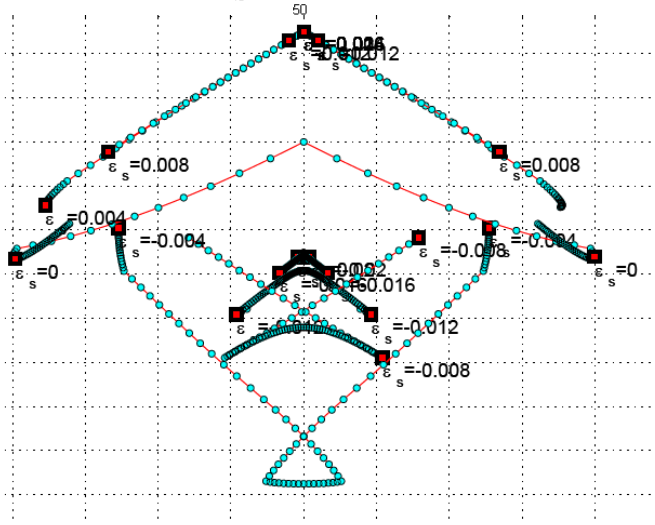


4) Určení výslednic sil

Výslednice N a M se zapíší do matice výsledků, každému sloupci odpovídá jedna dvojice hodnot N, M.

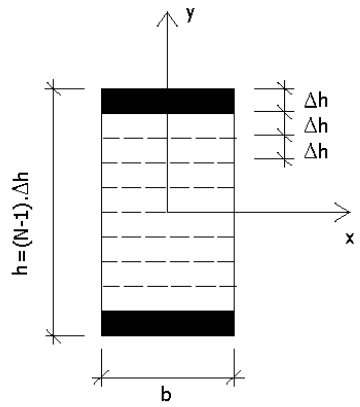
Obr. 8 (dole) – Výsledek jednoho zatěžovacího cyklu, průřez vystaven relativním křivostem při konstantním protažení střednice.
Obr. 9 (napravo)- „Růst interakčního diagramu“, vybrané zatěžovací větve.





- **Zadání vstupních parametrů**
  - **Geometrické parametry průřezu**
    - šířka obd. průřezu — b
    - výška obd. průřezu — h
    - počet prvků N - vertikální členění průřezu > — Δh
    - stupeň vyztužení — ρ
  - **Materiálové charakteristiky**
    - třída betonu
    - charakteristické hodnoty pracovního diagramu
    - počáteční modul pružnosti betonu — Ec
    - volba pracovního diagramu betonu
    - modul pružnosti oceli — Es
    - mez kluzu oceli — σ_y
  - **Rozsahy vynucených poměrných deformací** — κ_{min} κ_{max} $\varepsilon_{s,min}$ $\varepsilon_{s,max}$
    - počet kroků, po kterých se mění deformace — N

$\longrightarrow$ $\Delta\kappa$ $\Delta\varepsilon_s$



- **Sestavení matice průřezu**

$$P = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & \dots & \dots & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} - \Delta h & \dots & \dots & \frac{h}{2} - \Delta h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-h}{2} & \dots & \dots & \frac{-h}{2} \end{pmatrix} \quad \text{N řádků}$$

- **Sestavení matice křivostí κ**

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{min} & \kappa_{min} + \Delta\kappa & \dots & \dots & \kappa_{max} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{min} & \kappa_{min} + \Delta\kappa & \dots & \dots & \kappa_{max} \end{pmatrix} \quad \text{N řádků}$$

- **for k=1:N**
  - **Sestavení matice relativních deformací střednice ε_s**

$$\varepsilon_s(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{s.min} + (k-1)\cdot\Delta\varepsilon_s & \dots & \varepsilon_{s.min} + (k-1)\cdot\Delta\varepsilon_s \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{s.min} + (k-1)\cdot\Delta\varepsilon_s & \dots & \varepsilon_{s.min} + (k-1)\cdot\Delta\varepsilon_s \end{bmatrix} \quad \text{N řádků}$$

  - **Matice celkových deformací** $\varepsilon_{tot}(k) = \varepsilon_s(k) + \kappa * P$
  - **Výpočet napětí po průřezu**

$$\sigma_C = E_C(\varepsilon)\cdot\varepsilon_{tot}(k)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{N řádků} \qquad \sigma_S = E_S\cdot\varepsilon_{tot}(k)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{N řádků}$$

pozn: násobení je myšleno buňka x buňka, nikoliv jako matice x matice

if $\sigma_s(i,j) \geq \sigma_y \longrightarrow \sigma_s(i,j) = \sigma_y$

if $\text{abs}(\sigma_s(i,j)) \geq \sigma_y \longrightarrow \sigma_s(i,j) = -\sigma_y$

  - **Výpočet síly v bodech průřezu**

F(1,j) = $\sigma_s(1,j)$. Δh . b . ρ

F(n,j) = $\sigma_s(n,j)$. Δh . b . ρ

F(i,j) = $\sigma_c(i,j)$. Δh . b

$$F = \begin{pmatrix} F(1,1) & F(1,2) & \dots & F(1,j) \\ F(2,1) & F(2,2) & \dots & F(2,j) \\ F(3,1) & F(3,2) & \dots & F(3,j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(N,1) & F(N,2) & \dots & F(N,j) \end{pmatrix}$$

  - **Výpočet výslednic N a My**

sum[F(1,1)….F(N,1)] = **N** pro κ_{min} a $\varepsilon_s(k)$

sum[F(1,j)….F(N,j)] = **N** pro κ_{max} a $\varepsilon_s(k)$

sum[F(1,1)*P(1,1)….F(N,1)*P(N,1)] = **M** pro κ_{min} a $\varepsilon_s(k)$

sum[F(1,j)*P(1,j)….F(N,j)*P(N,j)] = **M** pro κ_{max} a $\varepsilon_s(k)$

end

- **vynesení vnitřních sil do grafu = ID**

2.4.3 Výpočet obálky ID

A) Matematický postup

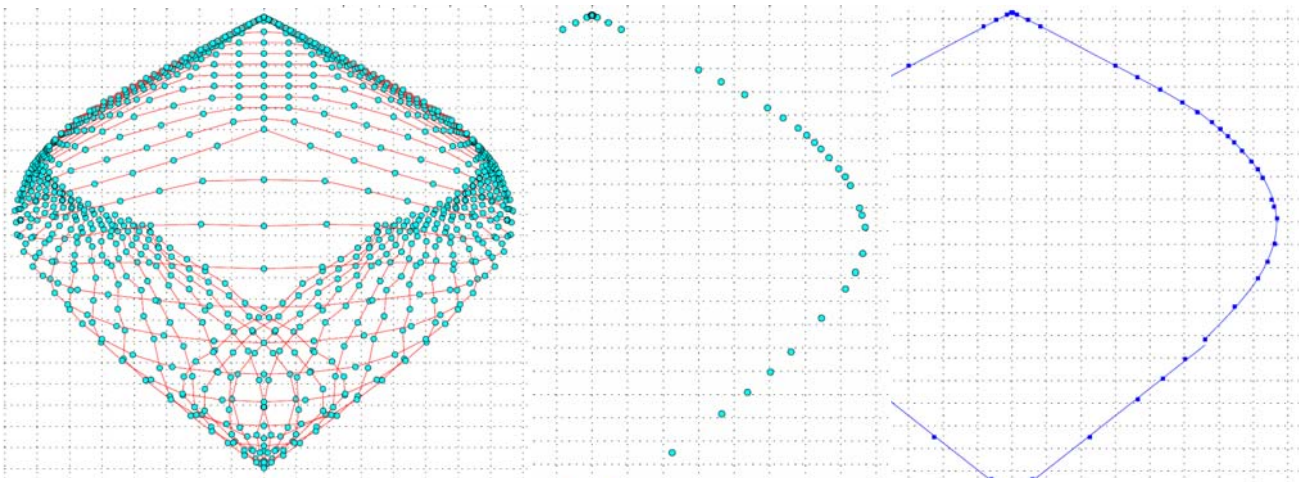
Program pracuje se vstupními hodnotami (*H*), které jsou zapsány v matici o 2 sloupcích, kde každý řádek (kterých je celkem $\boldsymbol{n}^2$) představuje dvojici [N; M]. Tak jako v předchozím výpočtu, i zde jde o cyklus, kdy program postupně prochází všechny body matice *H*; právě proto je výpočet obálky časově nejdelší etapou výpočtu.

V prvním kroku se z matice *H* určí body, které splňují podmínku, že leží v okolí X=[Ni; Mi]. bodu (*i*=krok cyklu). V další fázi se vypočítají směrové vektory s počátky v bodě *X* a konci v bodech okolí. Posledním krokem je vyhodnocení, zda se bod *X* nachází na obálce, či nikoliv. Podmínkou je že úhel α mezi sousedními vektory musí být větší, než π.

V případě velmi slabě vyztuženého průřezu jsem musel změnit podmínku s úhlem α z úhlu π *na* $0{,}98.\pi$. Kdybych tak neučinil, filtr by odstranil téměř všechny body obálky v blízkosti maximální a minimální normálové síly ID. Diagram se tak stal mírně nekonvexní křivkou. Pokud se bod skutečně nachází na obálce, je zapsán do matice obálky *O*.

Jak jsem zjistil, parametr velikosti okolí ΔN popř. ΔM nelze nastavit tak, aby byly testovány body z bezprostředního okolí bodu *X* a současně byla správně vytvořena obálka ID. Problém nastává s body, které leží blízko středu ID a mají tak málo sousedů, že je filtr vyhodnotí jako body ležící na obálce. Pracoval jsem tedy s okolím velikosti abs(N_{max})/2 a M_{max}/2. Jak je z grafických výsledků patrné, velikost a tvar interakčního diagramu jsou silně závislé na stupni a charakteru vyztužení (symetrické, nesymetrické).

Tvar diagramu symetricky vyztuženého průřezu lze s jistou mírou nepřesnosti aproximovat v intervalu momentů $(-3M_{max}/4;\ 0)$ a $(0;\ 3M_{max}/4)$ přímkou. Zbylé krajní intervaly jsem proložil polynomem 5. stupně.



Obr. 10: Vývoj tvoření obálky ID. ***FÁZE 1*** *– Všechny body ID. Červené křivky spojují body jednoho cyklu,* ***FÁZE 2*** *– Vyfiltrované body obálky ID,* ***FÁZE 3*** *– Proložení křivek body obálky ID.*

B) Automatický postup

Jak jsem později zjistil, program Matlab disponuje funkcí „convhull“, která je schopna konvexní obálku vytvořit v řádu několika vteřin. Nicméně pro slabě vyztužené průřezy ji z důvodu nekonvexnosti nelze použít.

- **Vstupní parametry**
  - Matice N*2.. $[N_i, M_i]$ ….n=cca10 000
- **Definice okolí bodu**

  $\Delta N = \max(\mathrm{abs}(N_i))/2$

  $\Delta M = \max(\mathrm{abs}(M_i))/2$
- **Určení bodů tvořících obálku ID**
- **for i=1:N**
  - **Určení bodů ležících v okolí**
  - **for j=1:N**
    - **if** $\mathrm{abs}(N_i - N_j) \le \Delta N$ & $\mathrm{abs}(M_i - M_j) \le \Delta M$ & $i \ne j$

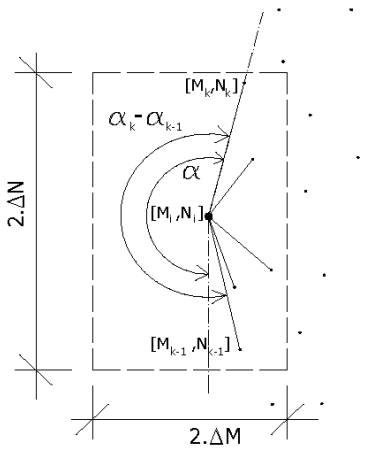
      podmínka splněna -> bod v řádku "j" leží v okolí bodu v řádku "i"

      pod. není splněna -> bod v řádku "j" neleží v okolí bodu v řádku "i"

    end

    Na konci cyklu pro "j" je vytvořena matice bodů ležících v okolí bodu "i"

  end



  - **Určení směrového úhlu k bodům v okoí**
  - **for k=1:N'** N' je počet řádků matice "sousedů"

    $\delta N = N_k - N_i$

    $\delta M = M_k - M_i$

    - **if** $\delta N \ne 0$ & $\delta M \ne 0$
      - **if** $\delta N < 0$ & $\delta M < 0$ -> $\alpha = \mathrm{atan}[\mathrm{abs}(\delta M) / \mathrm{abs}(\delta N)]$
      - **if** $\delta N > 0$ & $\delta M < 0$ -> $\alpha = -\mathrm{atan}[\mathrm{abs}(\delta M) / \mathrm{abs}(\delta N)] + \pi$
      - **if** $\delta N > 0$ & $\delta M > 0$ -> $\alpha = \mathrm{atan}[\mathrm{abs}(\delta M) / \mathrm{abs}(\delta N)] + \pi$
      - **if** $\delta N < 0$ & $\delta M > 0$ -> $\alpha = -\mathrm{atan}[\mathrm{abs}(\delta M) / \mathrm{abs}(\delta N)] + 2\pi$
      - **if** $\delta N = 0$ & $\delta M > 0$ -> $\alpha = 3\pi/2$
      - **if** $\delta N = 0$ & $\delta M < 0$ -> $\alpha = \pi/2$
      - **if** $\delta N < 0$ & $\delta M = 0$ -> $\alpha = 0$
      - **if** $\delta N > 0$ & $\delta M = 0$ -> $\alpha = \pi$

      end

    end

  end

  sort α_1 až α_k …. seřadí vzestupně hodnoty směrových úhlů
  - **for k=1:N'**
    - **if** $\alpha_{k+1} - \alpha_k < \pi$

    or $\alpha_1 + 2\pi - \alpha_{N'} < \pi$

    jedná se o bod na obálce ID

    end

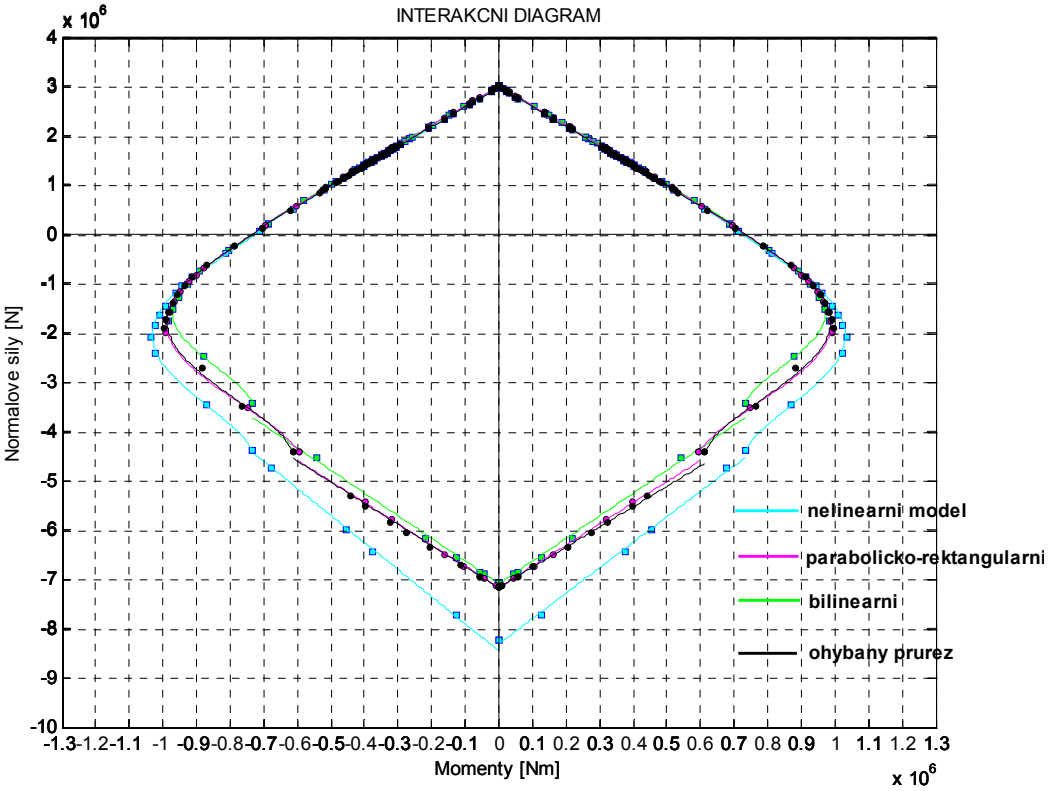
  end

end

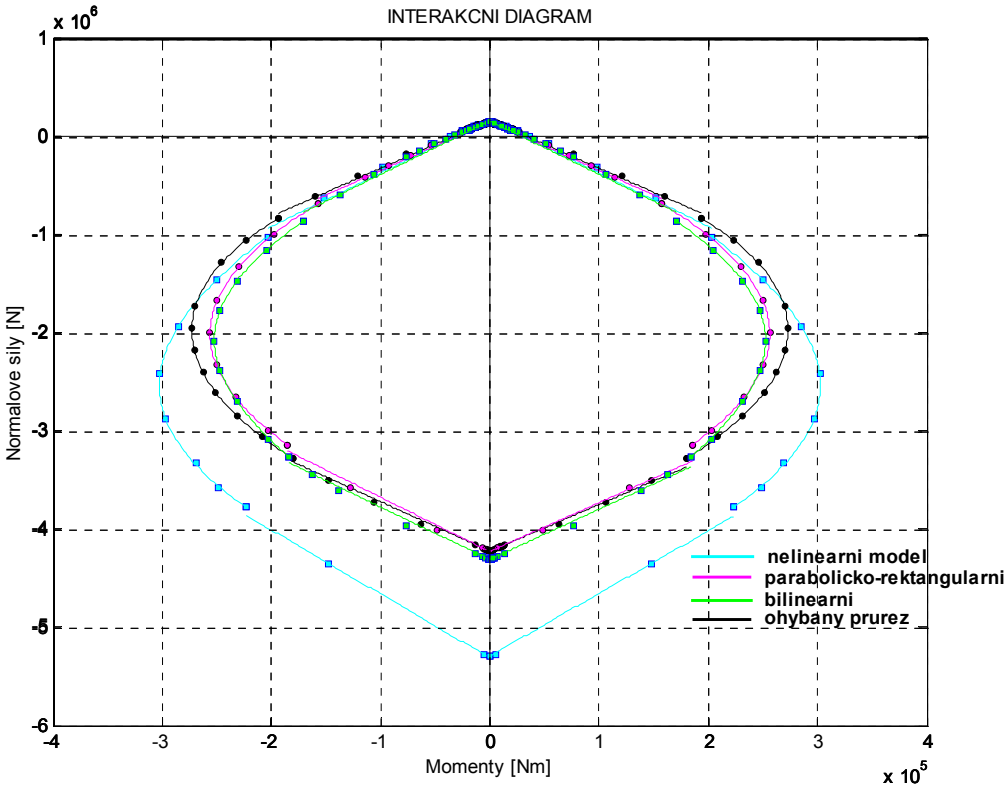
(v případě, že v nějaké části diagramu vychází málo bodů na obálce, opraví se hodnota p součinitelem mezi 0,95-0,99 - zejména pro slabě vyztužené prvky)

- **Rozdělení bodů obálky podle polohy v ID**
  - Dvojice sil mající hodnotu momentu větší, než 3/4 Mmax se pomocí funkce polyfit a polyval nahradí polynomem 5. stupně; body s hodnotou momentu menší úsečkou

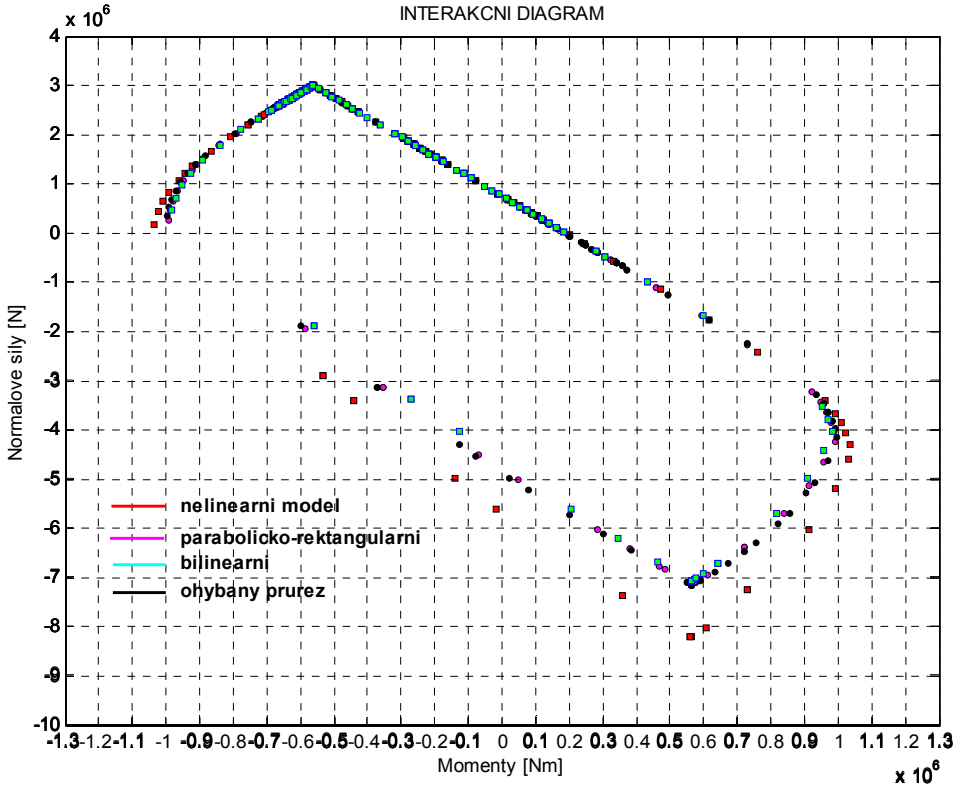
2.4.4 Porovnání ID při výpočtu s různými modely betonu



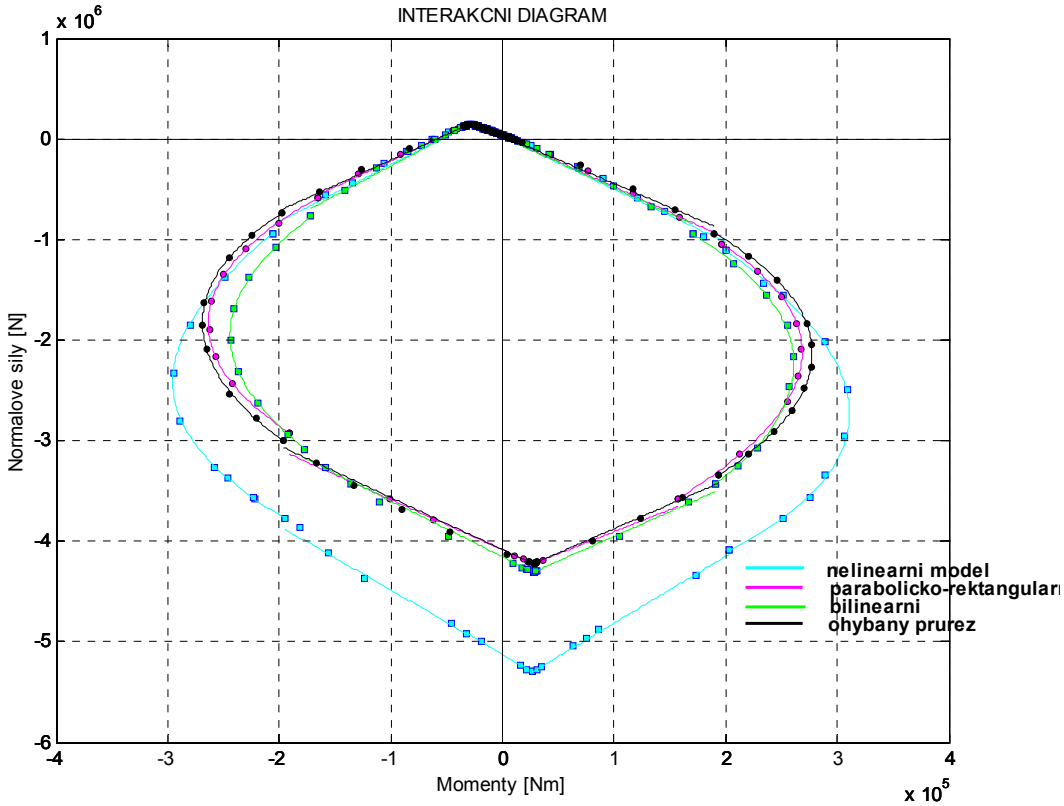
Obr. 11: b=300mm, h=500mm, stupeň vyztužení ρ=4%, výztuž umístěna symetricky, třída betonu C30/37.



Obr. 12: b=300mm, h=500mm, stupeň vyztužení ρ=0,2%, výztuž umístěna symetricky, třída betonu C30/37.



Obr. 13: b=300mm, h=500mm, stupeň vyztužení ρ=4%, asymetrická výztuž v poměru 1:7, beton C30/37.



Obr. 14: b=300mm, h=500mm, st. vyztužení ρ=0,2%, asymetrická výztuž v poměru 1:7, beton C30/37.

Jak bylo z původních předpokladů zřejmé (pracovní diagramy betonů dle EC2), nejvyšší únosnosti je dosahováno při výpočtu s užitím nelineárního pracovního diagramu betonu. Model parabolicko-rektangulární je s modelem bilineárním téměř shodný, přičemž v oblasti menších záporných relativních deformací střednice dosahuje model parabolicko-rektangulární. vyšší momentové únosnosti. Výpočtový model, který je v praxi díky své jednoduchosti používán nejčastěji – model rektangulární s aktivovanou plnou pevností betonu při relativních deformacích $0{,}2\varepsilon_{cu3}$-ε_{cu3} - dosahuje při malých deformacích střednice (pouze u slabě vyztužených průřezů) nejvyšší momentové únosnosti. Naopak při vyšších hodnotách ε_s (větších záporných) se výsledky blíží modelu bilineárnímu nebo parabolicko-rektangulárnímu.

V tahové oblasti jsou všechny diagramy shodné; pevnost betonu v tahu není uvažována.

2.5 Kruhový průřez namáhaný dvojicí sil M, N

2.5.1 Motivace

Zvláště ve skeletových konstrukcích, kde je kladen důraz na vytvoření velkého, vzdušného, ničím nepřerušovaného prostoru, působí kruhové sloupy zpravidla lepším architektonickým dojmem, než sloupy klasického, pravoúhelníkového průřezu. Ruční výpočet posouzení takových prvků je však o třídu těžší, než tomu bylo u obdélníkového sloup, neboť je potřeba sestavit podmínky rovnováhy na průřezu, kde se nelineárně mění šířka tlačené oblasti betonu.

2.5.2 Výpočetní model

Zásadní změna oproti výpočtu 2.4 je v zavedení dvou samostatných matic průřezu: jedné „betonové“ a druhé „ocelové“. Matice betonového průřezu se od matice obdélníkového průřezu z (2.4) neliší, proměnná šířka průřezu je zohledněna až při výpočtu sil. Volba šířky segmentů, tak jak je zobrazena na schématu, je myslím v dobrém poměru výsledek/pracnost. Při dělení na více než dvacet částí je rozdíl mezi obdélníkovými a lichoběžníkovými segmenty zanedbatelný.

Matice ocelového průřezu má ***p*** řádků, kde ***p*** je počet prutů, a dva sloupce – s x-ovými a y-ovými souřadnicemi prutů.. Specifikem kruhových sloupů je silná závislost ve směru osy ohybu k poloze výztuže. Uvažoval jsem jen rovnoměrné rozdělení výztuže.

Oproti předchozímu modelu se tento liší v zavedení dalšího vstupní parametru – krycí vrstvy a dále v počítání s návrhovými hodnotami pevností betonu a oceli.

2.5.3 Postup výpočtu

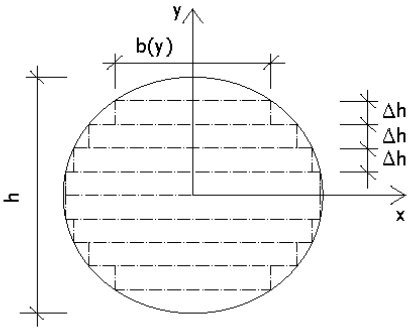
Postup výpočtu je shodný s výpočtem 2.4, pouze účinky relativních deformací se počítají zvlášť pro betonovou a ocelovou část. Výsledné dvojice vnitřních sil vznikají součtem: $N=N_S+N_C$; $M=M_S+M_C$.

- **Zadání vstupních parametrů**
  - **Geometrické parametry průřezu**
    - průměr bet. Průřezu — b
    - počet prvků N - vertikální členění průřezu > — Δh
    - průměr a počet prutů výztuže

    výsledkem matice souřadnic "betonového" a "ocelového" průřezu; graficky výstup

    Psx .... x-ové souřadnice ocelového průřezu
    Psy .... y-ové souřadnice ocelového průřezu
    Pc .... y-ové souřadnice betonového půřezu
    b(y) .... šířky elementů v závislosti na y souřadnici
    p .... počet prutů
  - **Materiálové charakteristiky**
    - třída betonu, návrhová pevnost
    - charakteristické hodnoty pracovního diagramu betonu
    - počáteční modul pružnosti betonu — Ec
    - volba pracovního diagramu betonu
    - modul pružnosti oceli — Es
    - mez kluzu oceli — σ_y
  - **Rozsahy vynucených poměrných deformací** — $\kappa_{x,min}$ $\kappa_{x,max}$ $\varepsilon_{s,min}$ $\varepsilon_{s,max}$
    - počet kroků, po kterých se mění deformace — A, B

    $\longrightarrow$ $\Delta\kappa_x$ $\Delta\varepsilon_s$



- **for k=1:A**
  - **for l=1:B**
    - **Matice celkových deformací**

      $\varepsilon_{tot\_S}(k,l) = \varepsilon_s(k) + \kappa_x(l) * Psy$

      $\varepsilon_{tot\_C}(k,l) = \varepsilon_s(k) + \kappa_x(l) * Pcy$
    - **Výpočet napětí po průřezu**

      $\sigma_c(y) = Ec(\varepsilon) \,.\, \varepsilon_{tot\_c}(k,l)$

      $\sigma_s(p) = Es \,.\, \varepsilon_{tot\_s}(k,l,m)$

      if $\sigma_s(y) \geq \sigma_y \longrightarrow \sigma_s(y) = \sigma_y$

      if $abs(\sigma_s(y)) \geq \sigma_y \longrightarrow \sigma_s(y) = -\sigma_y$
    - **Výpočet síly v bodech průřezu**

      $Fc(y) = \sigma_c(y) \,.\, \Delta h \,.\, b(y)$

      $Fs(p) = \sigma_s(p) \,.\, A(p)$
    - **Výpočet výslednic N, Mx a My**

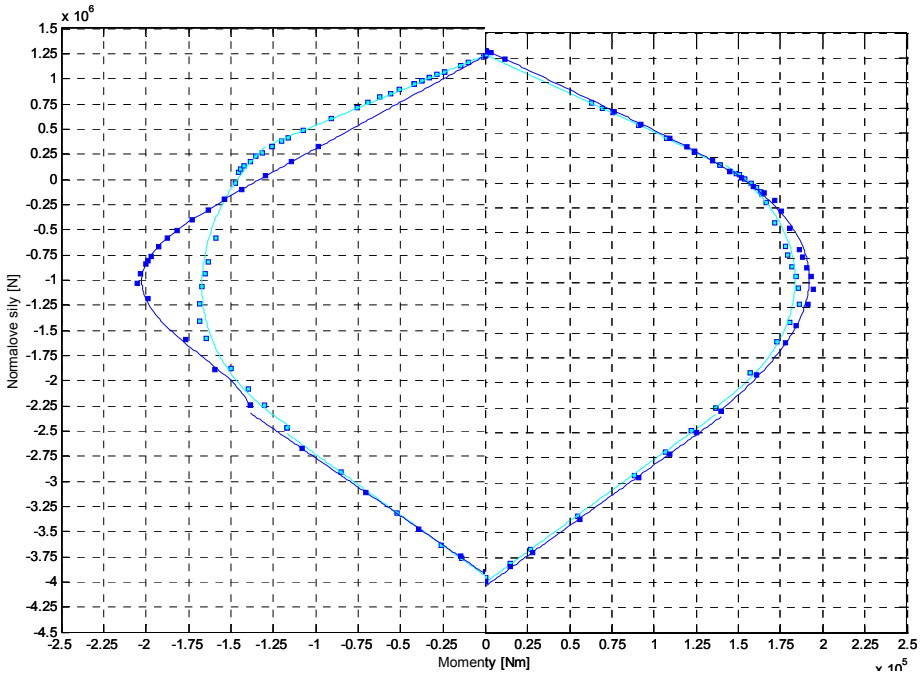
      $$N = \sum_y F_C(y) + \sum_p F_S$$

      $$M_x = \sum_y \left(F_C(y) \cdot P_{Cy}\right) + \sum_p \left(F_S(p) \cdot P_{Sy}\right)$$

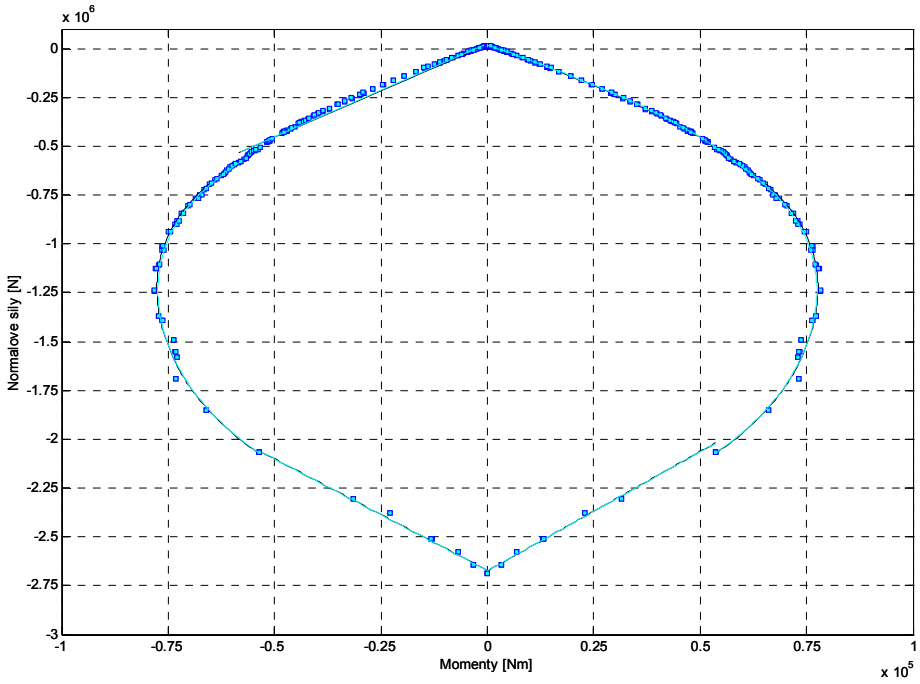
      $$M_y = \sum_p \left(F_S(p) \cdot P_{Sx}\right)$$
  - **end**
- **end**
- **vynesení dvojic [Mx, N] a [My, N] do grafu**

2.5.4 Porovnání ID v závislosti na poloze výztuže ke směru namáhání, počtu prutů a stupni vyztužení

Jak je z grafů vidět, závislost natočení polohy výztuže k ohybovému momentu se zmenšuje se zvyšujícím se počtem výztužných prutů a se zmenšujícím se stupněm vyztužení.



Obr. 15: Kruhový průřez s maximálním stupněm vyztužení.
Tyrkysová: uspořádání výztuže poloha A, tmavě modrá: poloha B (viz dále).
Vlevo d=300mm, výztuž 4∅30mm, vpravo d=300mm, výztuž 6∅25mm.

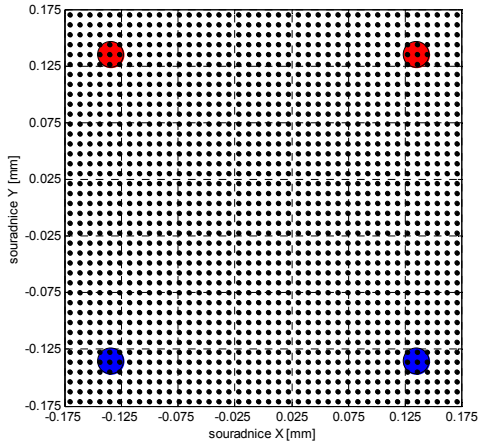


Obr. 16: Kruhový průřez s minimálním stupněm vyztužení.
Tyrkysová: uspořádání výztuže poloha A, tmavě modrá: poloha B; d=300mm výztuž 4∅8mm.

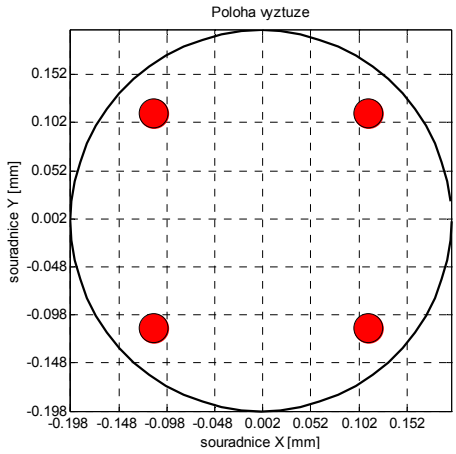
2.5.5 Porovnání ID kruhového a čtvercového průřezu se stejnou průřezovou plochou betonu

Pro porovnání ID kruhového a čtvercového průřezu se stejnou plochou betonu a stupněm vyztužení jsem pro výpočet ID čtvercového průřezu použil modifikovaný výpočet (oddělení betonové a ocelové části a zavedení krycí vrstvy).

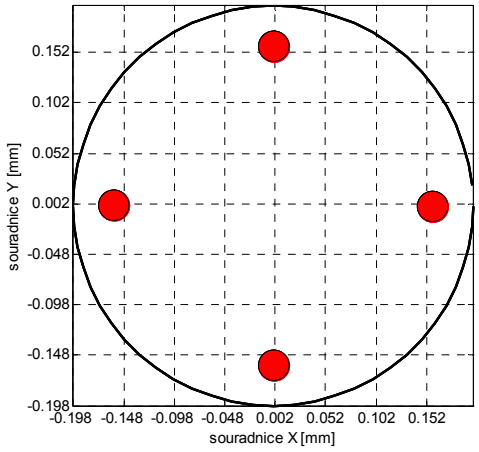
Zkoumal jsem čtvercový průřez 350 x 350mm s různými stupni vyztužení a kruhový průřez odpovídajícího průměru. Volil jsem uspořádání, kdy se nejvíce projeví rozdíly v poloze a nerovnoměrnosti výztuže – tj. 4 výztužné pruty namáhané v poloze „A“ a „B“.



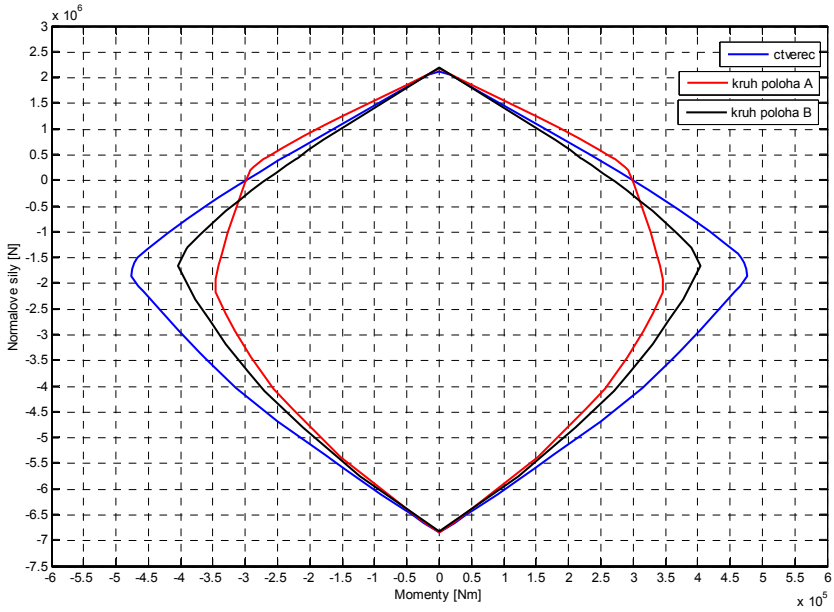
Obr. 17: Čtvercový průřez 300x300, výztuž 4∅40mm.



Obr. 18 (nahoře): Kruhový průřez Ac=90000mm^2, 4∅40mm, POLOHA A.



Obr. 19 (vlevo): Kruhový průřez Ac=90000mm^2, 4∅40mm, POLOHA B.



Obr. 20: Interakční diagramy pro případy z obr 17, 18, 19.

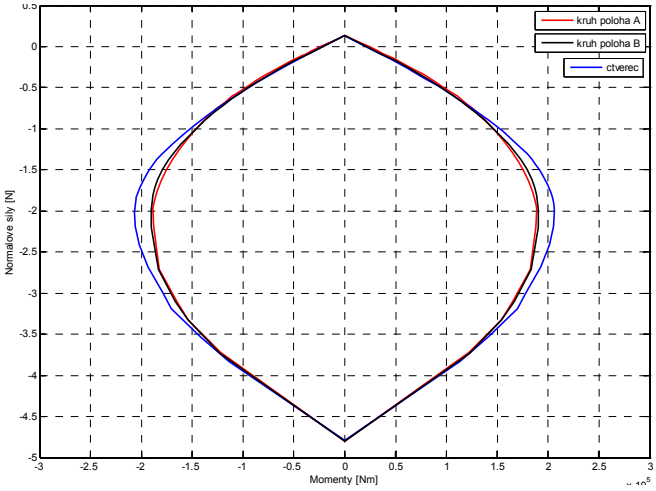
Závislost momentové únosnosti čtvercového a kruhového průřezu na stupni vyztužení

Vyztužení „min“ 4∅10mm → rozdíl v maximální momentové únosnosti 18%

Vyztužení „střed“ 4∅30mm → rozdíl v maximální momentové únosnosti 24%

Vyztužení „max“ 4∅40mm → rozdíl v maximální momentové únosnosti 26%

Pokud je tedy potřeba navrhnout kruhový průřez, je možno použít ID pro čtvercový průřez s redukovanou momentovou únosností o 25%. Lze předpokládat, že v případě vyztužení více pruty by byla redukce momentové únosnosti menší.



Obr. 21:Interakční diagramy pro minimální vyztužení (4∅10mm).

2.6 3D interakční diagram obdélníkového průřezu

2.6.1 Motivace

Cílem bylo vytvořit jednoduché diagramy pro posuzování železobetonového obdélníkového průřezu na namáhání normálovou silou a dvěma ohybovými momenty (nebo jedním vyvolávajícím tzv. šikmý ohyb).

2.6.2 Výpočetní model

Princip je i zde obdobný; vzhledem k tomu, že průřez může být namáhán šikmým ohybem, bylo nutné rozdělit průřez na segmenty ve směru obou os.

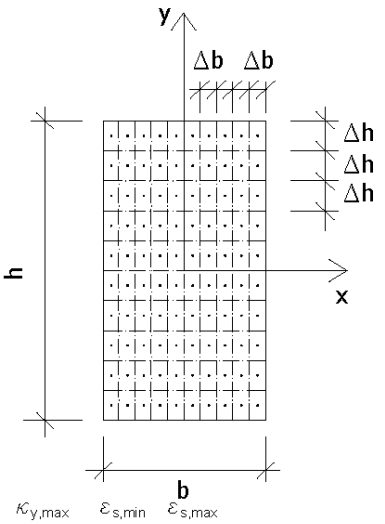
2.6.3 Postup výpočtu

Principielně je výpočet shodný s výpočtem 2.5.3 s tím rozdílem, že tentokrát je průřez zatěžován relativními deformacemi: relativním protažením střednice ε_s a křivostí ve směru obou hlavních os průřezu κ_x a κ_y ve třech v sobě vnořených cyklech. Pro dosažení dobré přesnosti je nezbytné vypočítat velké množství bodů v prostoru *Mx*, *My*, *N*, z nichž jenom malá část bude skutečně ležet na obálce ID. Při výpočtu jsem používal dělení intervalu $<\kappa_{x\_min}; \kappa_{x\_max}>$ na 30 hodnot, κ_y na 30 hodnot a ε_s na 60 hodnot.

- **Zadání vstupních parametrů**
  - **Geometrické parametry průřezu**
    - šířka obd. průřezu — b
    - výška obd. průřezu — h
    - počet prvků M - horizontální členění průřezu > — Δb
    - počet prvků N - vertikální členění průřezu > — Δh
    - průměr a počet prutů ve spodní řadě
    - ditto horní
    - krytí výztuže betonem
  - **Materiálové charakteristiky**
    - třída betonu, návrhová pevnost
    - charakteristické hodnoty pracovního diagramu betonu
    - počáteční modul pružnosti betonu — Ec
    - volba pracovního diagramu betonu
    - modul pružnosti oceli — Es
    - mez kluzu oceli — σ_{yd}
  - **Rozsahy vynucených poměrných deformací** — $\kappa_{x,min}$ $\kappa_{x,max}$ $\kappa_{y,min}$ $\kappa_{y,max}$ $\varepsilon_{s,min}$ $\varepsilon_{s,max}$
    - počet kroků, po kterých se mění deformace — A, B, C

$\longrightarrow$ $\Delta\kappa_x$ $\Delta\kappa_y$ $\Delta\varepsilon_s$

výsledkem matice souřadnic "betonového" a "ocelového" průřezu; grafický výstup



- **for k=1:A**
  - **for l=1:B**
    - **for m=1:C**
      - **Matice celkových deformací**

$$\varepsilon_{tot\_S}(k,l,m) = \varepsilon_s(k) + \kappa_x(l) * Psy - \kappa_y(m) * Psx$$
$$\varepsilon_{tot\_C}(k,l,m) = \varepsilon_s(k) + \kappa_x(l) * Pcy - \kappa_y(m) * Pcx$$

      - **Výpočet napětí po průřezu**

$$\sigma_c(i,j) = Ec(\varepsilon) \,.\, \varepsilon_{tot\_c}(k,l,m)$$
$$\sigma_s(p) = Es \,.\, \varepsilon_{tot\_s}(k,l,m)$$
$$\text{if } \sigma_s(i,j) \geq \sigma_y \longrightarrow \sigma_s(i,j) = \sigma_y$$
$$\text{if } abs(\sigma_s(i,j)) \geq \sigma_y \longrightarrow \sigma_s(i,j) = -\sigma_y$$

      - **Výpočet síly v bodech průřezu**

$$Fc(i,j) = \sigma_c(i,j) \,.\, \Delta h \,.\, \Delta b$$
$$Fs(p) = \sigma_s(p) \,.\, A(p)$$

      - **Výpočet výslednic N, Mx a My**

$$N = \sum_i \left[\sum_j \left(F_C(i,j) \right) \right] + \sum_p F_S$$

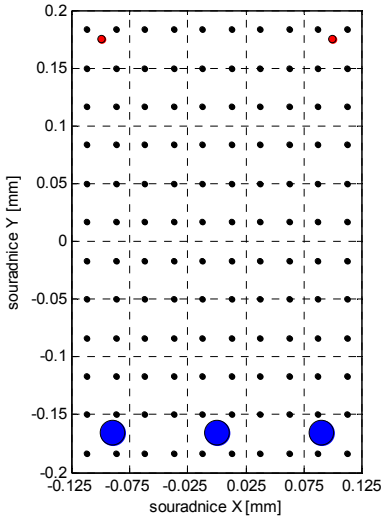
$$M_x = \sum_i \left[\sum_j \left(F_C(i,j) \cdot P_{Cy} \right) \right] + \sum_p \left(F_S(p) \cdot P_{Sy} \right)$$

    - **end**
  - **end**
- **end**

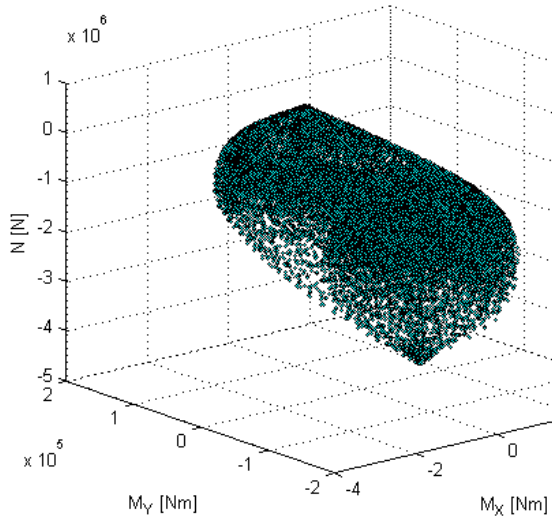
$$M_y = -\sum_i \left[\sum_j \left(F_C(i,j) \cdot P_{Cx} \right) \right] - \sum_p \left(F_S(p) \cdot P_{Sx} \right)$$

- **vynesení vnitřních sil do grafu = 3D ID**

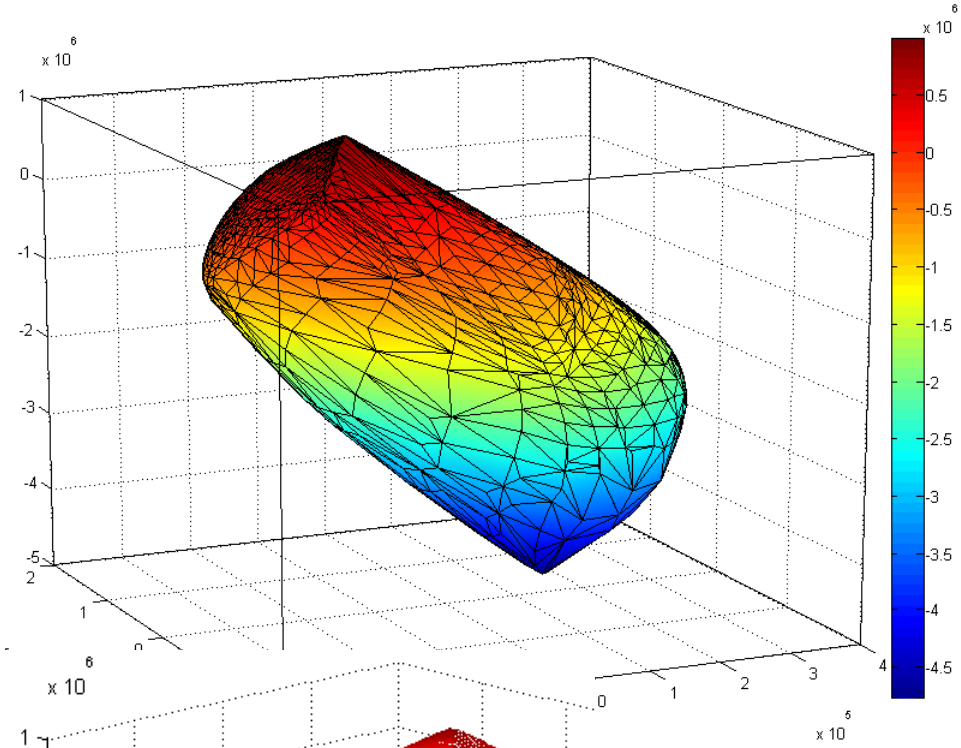
- TOT=[N,Mx,My]
- CONVHULLN(TOT) vypočte pořadová čísla bodů vnitřních sil tvořících konvexní obálku ID
- MIN, MAX(TOT) - maximum a minimum vnitřních sil
- rozdělení hodnot TOT na kladné a záporné pro My
- MESHGRID - vytvoření "mřížky" na ploše min(N), max(N), min(Mx) a max(Mx)
- GRIDDATA - interpolace hodnot My pro body "mřížky"
- ...třízení, řazení a promazávání...
- separace vnitřních sil se stejnou hodnotou N (vrstevnice 3D ID), pomocí fce CONVHULL vytvoření uzavřené křivky pro zápornou a kladnou část My



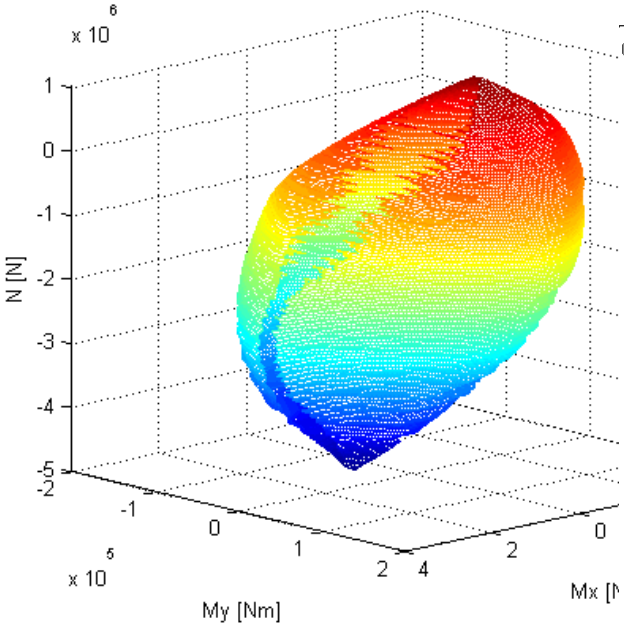
Obr. 22 (vlevo): Zadání průřezu - černé tečky = souřadnice bodů



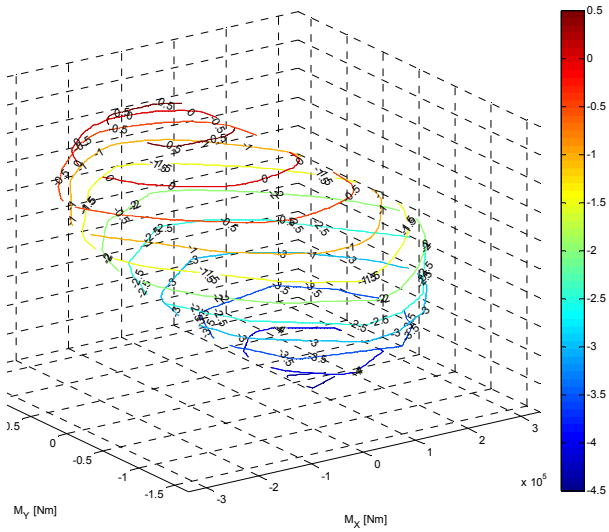
Obr. 23: Všechny body [Mx, My, N] vypočtené při zatěžování průřezu.



Obr. 24: Aplikace funkce „convuhulln“ → získání bodů ležících na povrchu interakčního diagramu.

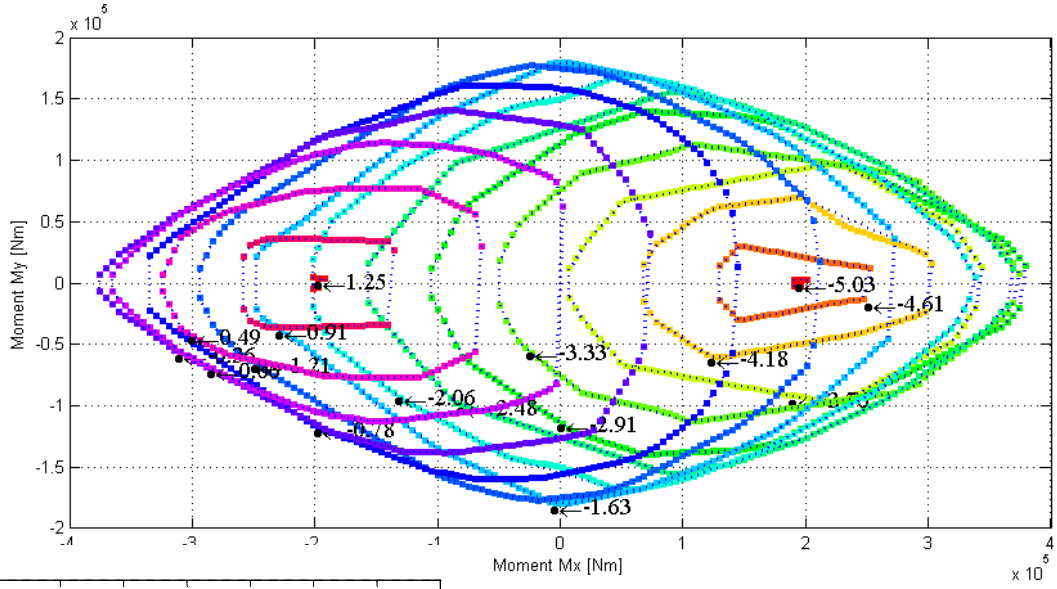


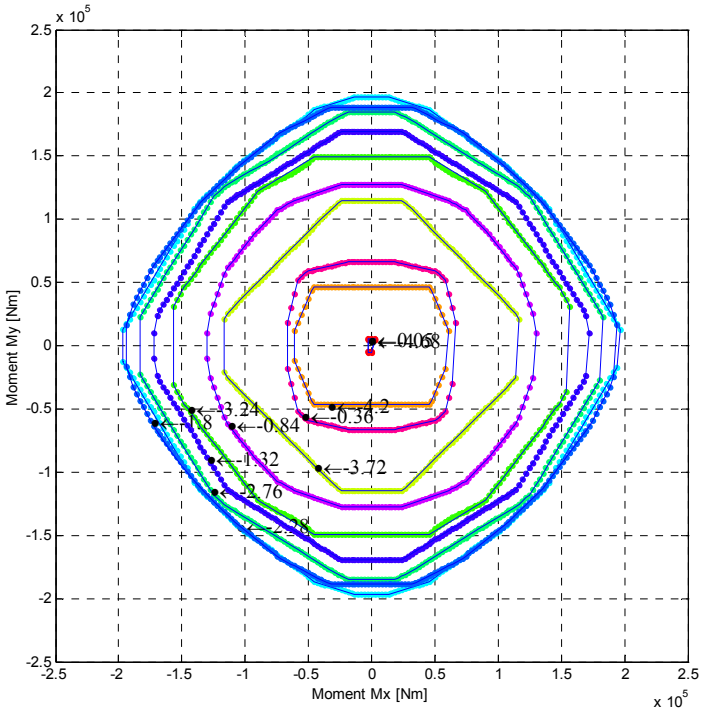
Obr. 25 (vlevo): Po aplikaci funkce „mesh3“



Obr. 26: Po aplikaci funkce „contour3“

2.6.4 Porovnání ID v závislosti na stupni a poměru vyztužení

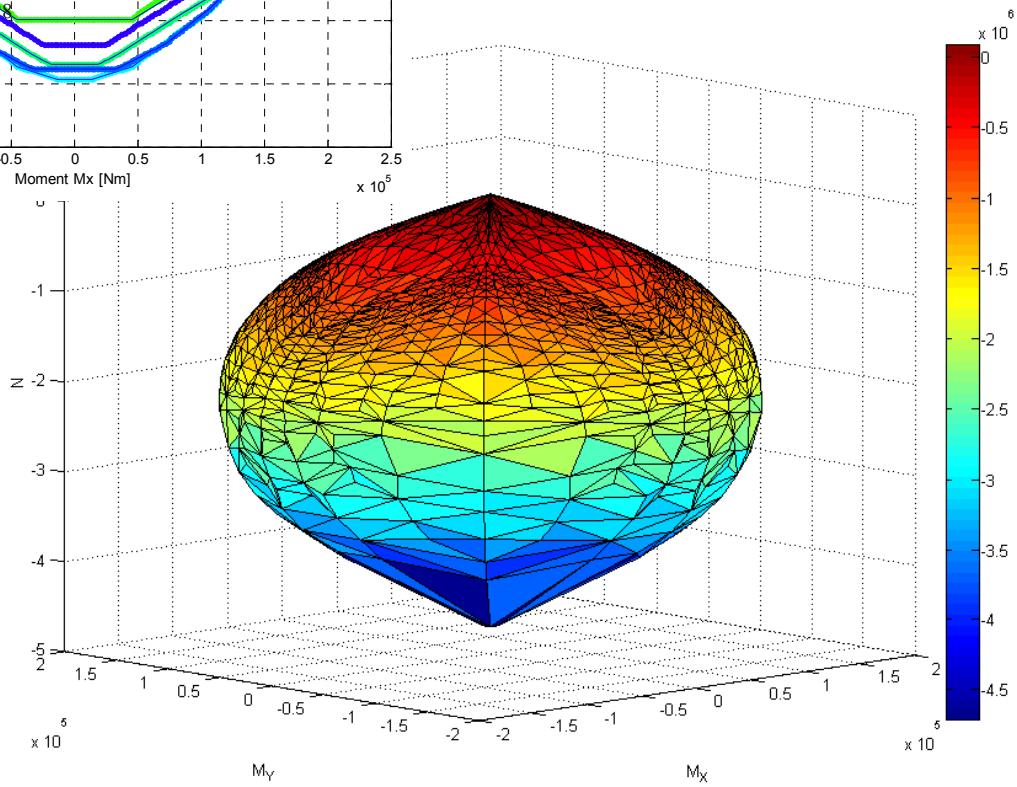




Obr. 27: 2D vrstevnice. Popisky u šipek představují hodnotu velikosti normálové síly a jsou v MN. Graf pro asymetricky vyztužený průřez: b=0,25m, h=0,4m, spodní výztuž 3x∅25mm, horní 2x∅8mm.

Obr. 28: b=0,35m, h=0,35m, spodní výztuž 2x∅8mm, horní 2x∅8mm.

Obr 29: 3D ID pro průřez z obr. 28.



3. Aplikace teorie 2. řádu na tlačený železobetonový prvek s uvážením nelineárního chování betonu

3.1.1 Motivace.

Cílem druhé části této práce je porovnání tří různých způsobů výpočtu uvedených v Eurokódu 2.

První způsob je v normě označen jako „obecný“. Jedná se, jak název napovídá, o čistě teoretický výpočet podle teorie 2. řádu. Norma nedává žádný návod, jak postupovat, jen přikazuje, jaké pracovní diagramy a součinitele použít.

Druhý způsob je označen jako „metoda založená na jmenovité tuhosti“, třetí: „metoda založená na jmenovité křivosti“; na rozdíl od obecného postupu, teoretický základ těchto teorií v normě uveden není.

3.1.2 Způsob porušení prvku v závislosti na jeho štíhlosti

Dle EC2 je štíhlost definovaná: $\lambda = l_0/i$,

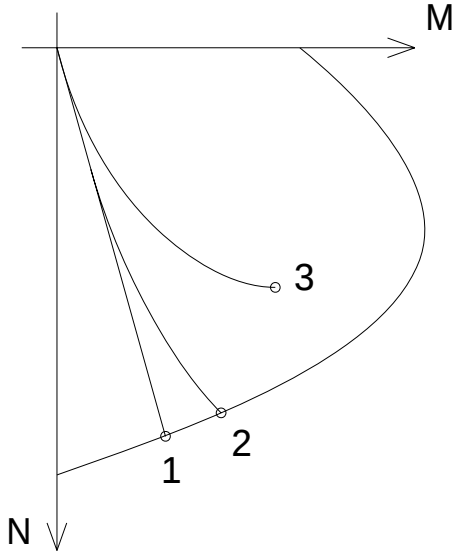
kde l_0 je vzpěrná délka

i je poloměr setrvačnosti betonového průřezu neporušeného trhlinami.

Takto definovaná štíhlost tedy nezávisí na stupni vyztužení.

Způsoby porušení tlačených prvků se dají rozdělit do 3 skupin.

1. Tento způsob odpovídá masivním prvkům s malou štíhlostí. K dosažení meze únosnosti dojde k okamžiku, kdy z počátku vedená polopřímka protne interakční diagram průřezu. Závislost mezi normálovou silou a momentem je lineární (M=N.e).
2. Způsob porušení středně štíhlých prvků; závislost mezi normálovou silou a momentem je mírně nelineární. Porušení podobné jako (1), jen síla potřebná ke kolapsu je menší.
3. Kolaps typický pro velmi štíhlé prvky. K porušení dojde „uvnitř“ ID postupným zvyšováním momentu 2. řádu vedoucího až ke ztrátě stability tvaru tlačeného prvku.



Obr. 30:Způsoby porušení prvku v závislosti na jeho štíhlosti.

3.2 Specifika výpočtu podle 2. řádu daná normou

● Při výpočtu podle 2. řádu se musí upravit vztah pro výpočet pracovního diagramu betonu:

- modul pružnosti betonu vydělením součinitelem spolehlivosti materiálu γ_{CE}=1.2.

- průměrná hodnota válcové pevnosti betonu v tlaku f_{cm} nahrazena návrhovou pevností f_{cd}.

● Norma také stanovuje 2 možnosti, kdy je možné od výpočtu dle 2.řádu upustit:

- štíhlost prvku je menší než λ_{lim}

- účinky 1. a 2. řádu se neliší o více jak 10%

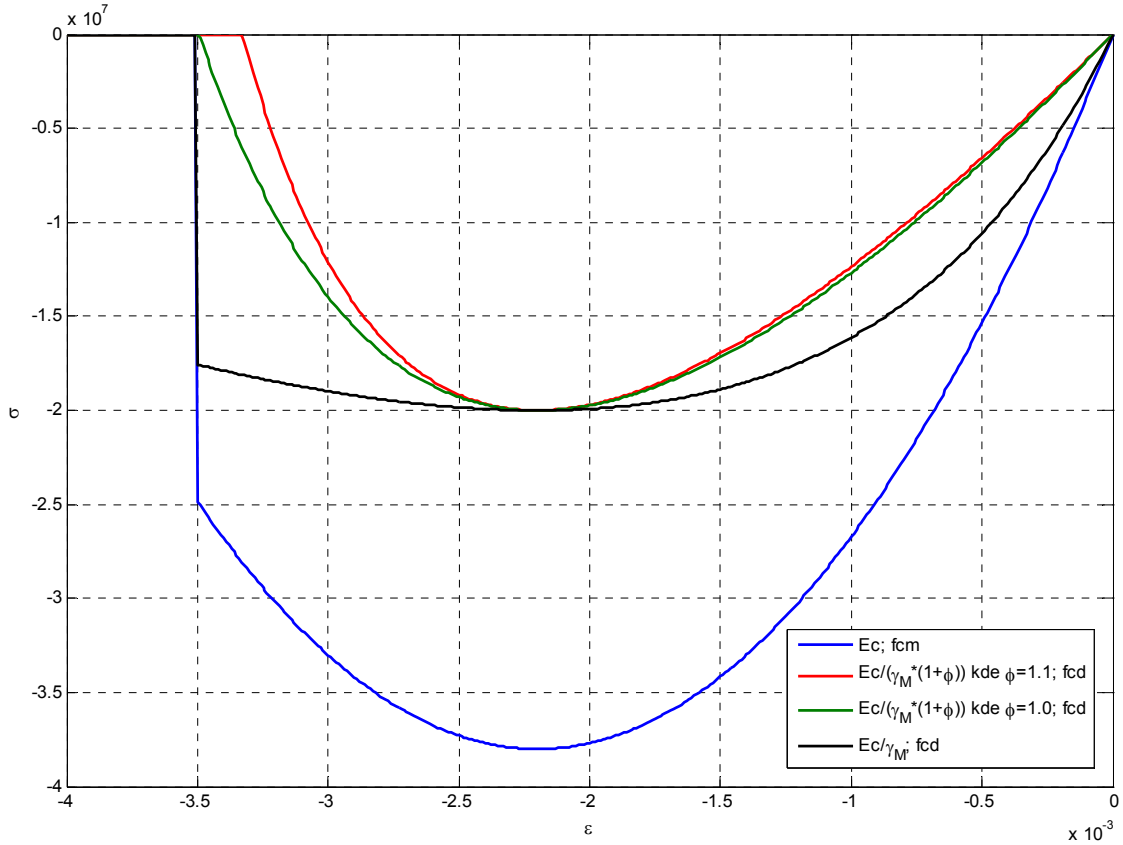
● Vliv dotvarování může být zanedbán, pokud jsou současně splněny následující podmínky:

- efektivní součinitel dotvarování $\varphi_{eff} \leq 2$

- štíhlost $\lambda \leq 75$

- $M_{0Ed}/N_{Ed} \geq h$, kde M_{0Ed} = moment od 1. řádu, N_{Ed} = návrhová normálová síla a

h= rozměr průřezu odpovídající směru namáhání.

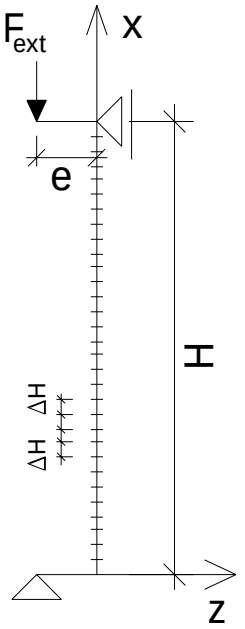


Obr. 31: Pracovní diagramy betonu:
1) nelineární model s průměrnou pevností betonu v tlaku 2) nelineární model s modulem pružnosti vyděleným součinitelem spolehlivosti materiálu γ_M a s návrhovou pevností betonu v tlaku,
3) + 4) nelineární model se zohledněným vlivem dotvarování a s návrhovou pevností betonu v tlaku.

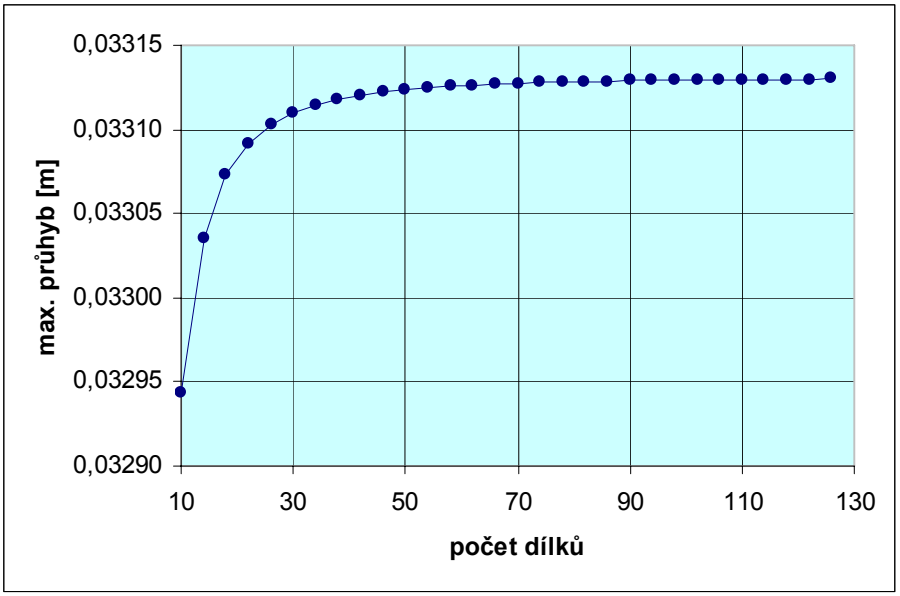
3.2.1 Geometrie konstrukce

Výpočty jsem prováděl na jednoduché, staticky určité konstrukci – prostém, kloubově podepřeném nosníku. Nosník je zatížen silou působící rovnoběžně se střednicí prutu na rameni o velikosti ***e.*** Minimální hodnota tohoto ramena je dána normou, a sice jako součet geometrické imperfekce prutu (závisí na délce prvku a počtu svislých prvků v případě složitější konstrukce) a imperfekce silového působení (větší z hodnot 20mm nebo *h/30*, kde *h*…výška průřezu; samozřejmě síla může působit i na rameni větším).

Prut je po výšce rozdělen na elementy výšky ΔH. Počet prvků jsem stanovil hodnotou 70; při vyšším počtu již není významný vzrůst přesnosti.

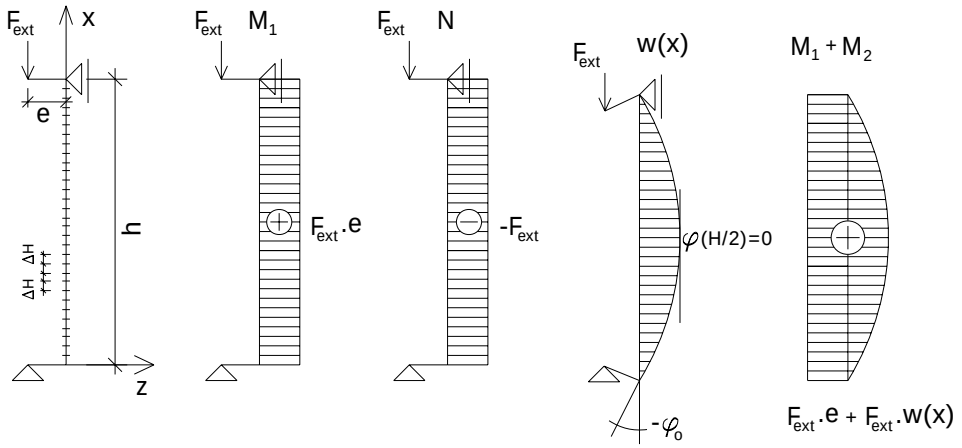


Obr. 32: Geometrie zkoumané konstrukce.



Obr. 33: Vliv počtu prvků ΔH na přesnost výpočtu.

3.2.2 Postup výpočtu



Obr. 34: Schéma výpočtu.

Komentář k Obr. 34:

V prvním kroku je definovaná geometrie konstrukce a velikost vnější síly včetně excentricity působiště (1). V kroku (2) je vypočítán průběh momentu prvního řádu. Krok (3) zobrazuje průběh normálové síly, který zůstává během celého výpočtu stejný. Kroky (4) a (5) se týkají výpočtu podle 2. řádu, budu se jim zde věnovat podrobněji.

Výpočet podle teorie 2. řádu spočívá v iterativním řešení účinků vnějších sil na zdeformovanou konstrukci. Může být dosaženo dvou možných řešení.

1) S každým krokem iterace se přírůstky deformací a tedy i druhotných momentů zmenšují, limitně se blíží k nule. Konstrukce se ustálí v rovnovážné poloze.

2) Přírůstky deformací ani momentů se nezmenšují, v průběhu výpočtu dojde k překročení únosnosti v nejvíce namáhaném průřezu.

Cílem každého kroku iterace je výpočet zdeformovaného tvaru konstrukce zatížené vnitřními silami. Vycházel jsem z materiálové rovnice (R1) a geometrické rovnice ohybové čáry, která má diferenciální charakter (R2).

$$\text{R1:}\ M(x) = E(x)\cdot I\cdot\kappa(x) \qquad \text{R2:}\ \kappa(x) = -\frac{d^2}{dx^2}w(x)$$

Vzhledem k tomu, že se sečnový modul pružnosti mění po výšce průřezu i po výšce nosníku, není možné úlohu řešit přímou integrací. Integrace po výšce nosníku je nahrazena sumací po malých elementech, ve kterých jsou hodnoty relativních deformací (κ a ε_s) vypočítány řešičem (viz. dále).

Při výpočtu pootočení z křivostí je uplatněna geometrická okrajová podmínka shodnosti velikosti pootočení na obou koncích prutu - viz. (4) obr. 34.

$$\varphi(x) = \int_0^x \kappa(\xi)\,d\xi = \varphi_{.0} + \sum_i \left(\kappa\left(x_{.i}\right)\cdot\Delta H\right)$$

$$w(x) = -\int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi = w_{.0} - \sum_i \left(\varphi\left(x_{.i}\right)\cdot\Delta H\right) \qquad w_0 = 0$$

Poslední fází kroku iterace je výpočet zvětšených hodnot vnitřních sil - viz. (5) obr. 34.

$$M_{tot} = M_1 + M_2 \qquad M_1 = F_{ext}\,.\,e \qquad M_2(x) = F_{ext}\,.\,w(x).$$

Výpočet končí, když se dvě po sobě jdoucí hodnoty maximálního momentu od sebe neliší o přípustnou hodnotu, nebo pokud výpočet deformací z vnitřních sil nekonverguje (tzn. pokud je překročena únosnost průřezu).

- **Zadání vstupních parametrů**
  - výška prutu — H
  - dělení prutu, m bodů po — ΔH
  - Velikost vnější svislé síly, její excentricita — Fext e
  - Vnitřní síly 1. řádu — $N_{int} = -F_{ext}$, $M_{int} = F_{ext} \cdot e$

- **for k=1:1000**
  - **for l=1:1000**
    - **Vložen řešič na převod vnitřních sil na relativní deformace**
      pokud nedojde ke konvergenci vnitřních sil, přeruší se celý výpočet, prut kolabuje

  end

  - výsledkem je matice křivostí

$$K(x) = \begin{pmatrix} \kappa(1) \\ \kappa(2) \\ \dots \\ \kappa(m) \end{pmatrix}$$

  - ze které vypočítají pootočení v jednotlivých bodech po výšce prutu

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_{.0} \\ \varphi_{.0} + \Delta H \cdot \frac{\kappa(1) + \kappa(2)}{2} \\ \dots \\ \varphi(m-1) + \Delta H \cdot \frac{\left(\kappa(m-1) + \kappa(m)\right)}{2} \end{bmatrix} \qquad \varphi(0) = \frac{\varphi_{.0} + \varphi(m) - 2 \cdot \varphi_{.0}}{-2}$$

φ_0 vyplývá z okrajové podmínky, že pootočení na obou koncích prutu musí být shodné

  - průhyby

$$w(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ w(0) + \Delta H \cdot \frac{\varphi(1) + \varphi(2)}{2} \\ \dots \\ w(m-1) + \Delta H \cdot \frac{\varphi(m-1) + \varphi(m)}{2} \end{pmatrix}$$

  - **if** $\left| M_{max}(k) - M_{max}(k-1) \right| \le 10^{-6}$
    break
  - **else**

    $N_{int} = -F_{ext}$

    $M_{int} = F_{ext} \cdot (e + w(x))$
  - **end**

- **end**

3.2.3 Výpočet deformací z vnitřních sil

- **Zadání vstupních parametrů**
  - většina parametrů viz. výpočet ID
  - Vnitřní síly M_{int} N_{int}
  - Přibližné hodnoty relativních deformací $\varepsilon_{.s.guess}$ κ_{guess}
- **Definice funkce napětí v betonu** $\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)$
- **Symbolický výpočet parciálních derivací** $\frac{d}{d\varepsilon_s}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)$ $\frac{d}{d\kappa}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)$
- **Sestavení matic betonového a ocelového průřezu** P_C P_S
- $\varepsilon_s = \varepsilon_{.s.guess}$ $\kappa = \kappa_{guess}$
- **for** I =1:1000
  - Výpočet napětí po průřezu pro rel. deformace κ a ε, sumací vnitřní síly **M**, **N**
  - **if** $N - N_{int} \le \frac{N_{int}}{10^6}$ $M - M_{int} \le \frac{M_{int}}{10^6}$
    break
  - **else**
    - Sest. matic pro rel. deformace κ a ε, jako parametr z hodnota z matice průřezu **Pc** a **Ps**

      $\frac{d}{d\varepsilon_s}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)$, $\frac{d}{d\kappa}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)$ $\frac{d}{d\kappa}\sigma_S(\varepsilon_s, \kappa, z)$ $\frac{d}{d\varepsilon_s}\sigma_S(\varepsilon_s, \kappa, z)$

    - Výpočet parciálních derivací

      $$\frac{d}{d\varepsilon_s}N(\varepsilon_s, \kappa) = \sum_{i=0}^{h}\left(\frac{d}{d\varepsilon_s}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot b\cdot\Delta h\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{d\varepsilon_s}\sigma_S(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot A\right)$$

      $$\frac{d}{d\kappa}N(\varepsilon_s, \kappa) = \sum_{i=0}^{h}\left(\frac{d}{d\kappa}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot b\cdot\Delta h\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{d\kappa}\sigma_S(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot A\right)$$

      $$\frac{d}{d\varepsilon_s}M(\varepsilon_s, \kappa) = \sum_{i=0}^{h}\left(\frac{d}{d\varepsilon_s}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot P_{Ci}\cdot b\cdot\Delta h\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{d\varepsilon_s}\sigma_S(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot P_{Sj}\cdot A\right)$$

      $$\frac{d}{d\kappa}M(\varepsilon_s, \kappa) = \sum_{i=0}^{h}\left(\frac{d}{d\kappa}\sigma_C(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot P_{Ci}\cdot b\cdot\Delta h\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{d\kappa}\sigma_S(\varepsilon_s, \kappa, z)\cdot P_{Sj}\cdot A\right)$$

    - Řešení soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých pro $\Delta\kappa$ a $\Delta\varepsilon_s$

      $$N_{int} = N + \frac{d}{d\varepsilon_s}N(\varepsilon_s, \kappa)\cdot\Delta\varepsilon + \frac{d}{d\kappa}N(\varepsilon_s, \kappa)\cdot\Delta\kappa$$

      $$M_{int} = M + \frac{d}{d\varepsilon_s}M(\varepsilon_s, \kappa)\cdot\Delta\varepsilon + \frac{d}{d\kappa}M(\varepsilon_s, \kappa)\cdot\Delta\kappa$$

      $$\varepsilon_s = \varepsilon_s + \Delta\varepsilon$$

      $$\kappa = \kappa + \Delta\kappa$$

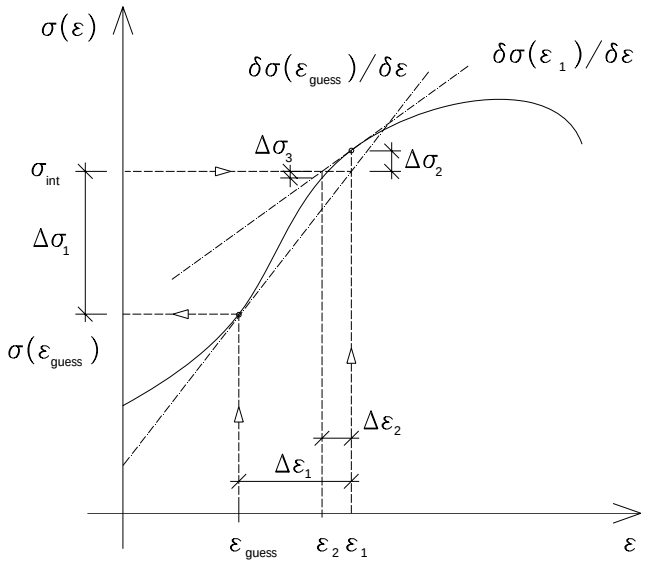
end

- **if** I = 1000
  Průřez není schopen přenést zadané zatížení

end

Na rozdíl od výpočtu vnitřních sil z relativních deformací κ a ε_s není možné stejně jednoduchým způsobem řešit úlohu opačným způsobem (materiálová nelinearita). K tomuto účelu se hodí jedna z iteračních metod: Eulerova, modifikovaná/plná Newton–Raphsonova a metoda BFGS.

Postup iterativního řešení Newtonovou metodou tečen je zřejmý z obr. 35.



Obr. 35

σ_{int} představuje hodnotu, ke které hledáme odpovídající hodnotu ε. Výpočet začíná ve zvolení hodnoty ε_{guess}, která je v blízkosti předpokládaného řešení. Z hodnoty ε_{guess} se přímo vypočítá hodnota $\sigma(\varepsilon_{guess})$, rozdíl $\Delta\sigma=\sigma_{int}-\sigma(\varepsilon_{guess})$ a derivace $d\sigma(\varepsilon_{guess})/d\varepsilon$. Z rovnice $\Delta\varepsilon.\ d\sigma(\varepsilon_{guess})/d\varepsilon = \Delta\sigma$ se vypočítá $\Delta\varepsilon$, které se přičte k ε_{guess} a celý výpočetní cyklus se opakuje pro novou hodnotu relativní deformace. Výpočet končí při dosažení požadované přesnosti (malé hodnoty $\Delta\varepsilon$).

Ve výpočtu jsem uplatnil plnou metodu Newton-Raphsonovu, která je sice nejvíce výpočetně náročná, nicméně je s ní dosahováno nejvyšší přesnosti v nejméně krocích. Ve své podstatě jde o metodu Newtonovu, která je zobecněna pro více proměnných. V našem případě hledanými hodnotami jsou relativní deformace střednice ε_s a křivost κ (analogicky k ε z obrázku 35), které odpovídají zadaným vnitřním silám M a N (analogicky k σ z obr. 35).

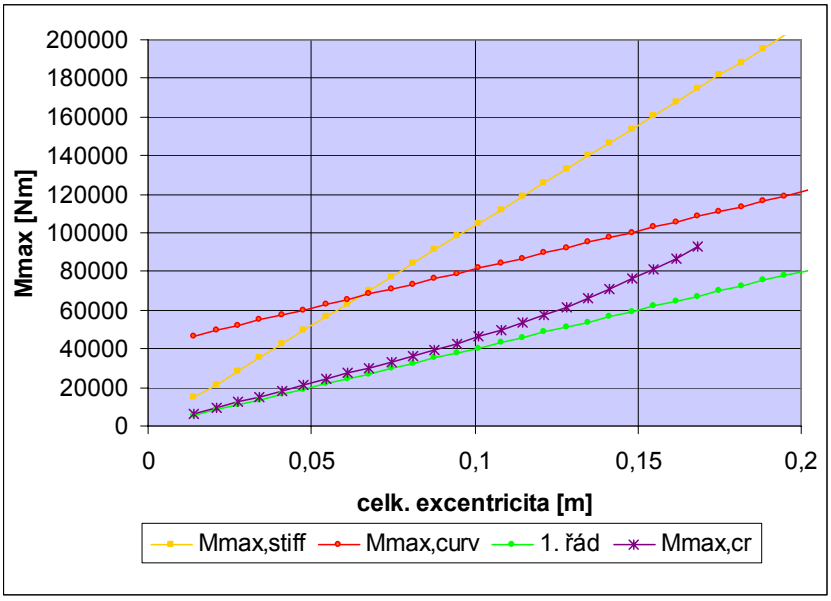
3.3 Odlišnosti návrhových hodnot při výpočtu dle teorie 1. řádu, 2. řádu s uvážením dotvarování a normy

A) Závislost návrhového momentu na excentricitě působící síly a stupni vyztužení průřezu

Při tomto výpočtu byl kloubově podepřený prvek zatěžován konstantní silou se zvětšující se excentricitou až do svého porušení.

Jak se dalo očekávat, výpočet obecnou metodou (obrázky 36-43) leží v intervalu omezeném shora konzervativními postupy danými normou – metodou jmenovité křivosti a

metodou jmenovité tuhosti. Spodní hranici tohoto intervalu tvoří řešení se zanedbanými účinky 2. řádu, kdy návrhový moment je součinem působící síly a její excentricity: $M_1 = F_{ext} \cdot e$



Obr.36: b=0.4m; h=0.4m; H=8m, ρ=0.2%; F=400kN.

Legenda ke grafům:

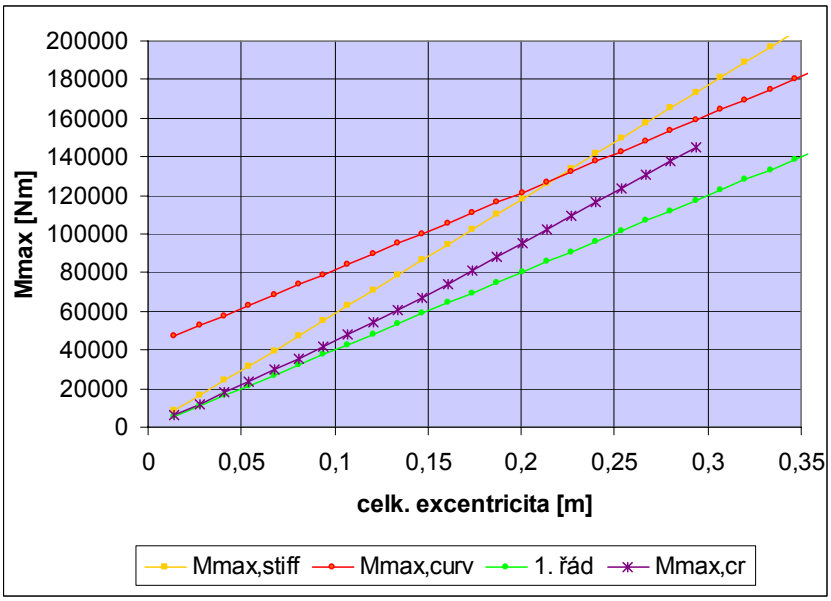
Mmax,stiff = dimenzační moment vypočtený metodou jmenovité tuhosti

Mmax,curv = dimenzační moment vypočtený metodou jmenovité křivosti

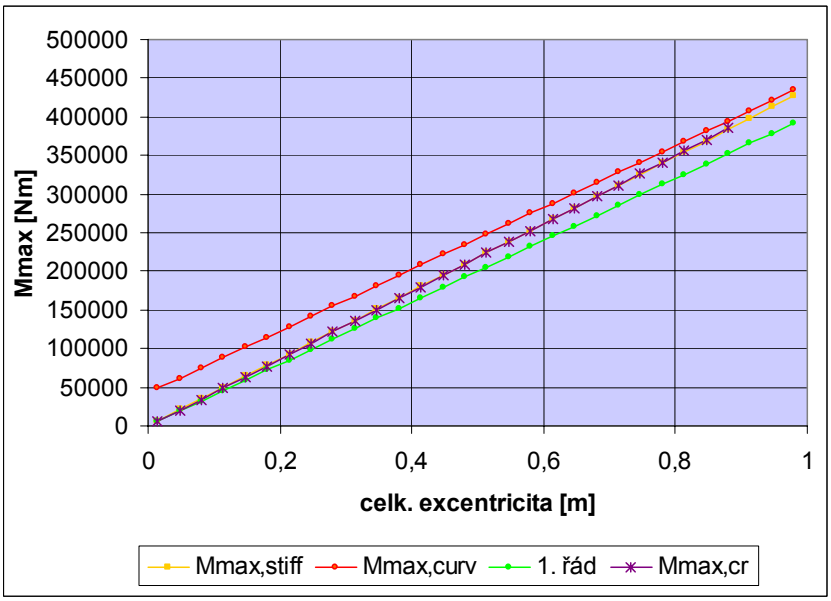
1.řád = dimenzační moment vypočtený dle teorie 1. řádu

Mmax,cr = dimenzační moment vypočtený obecnou metodou (teorie 2. řádu) s uvážením dotvarování betonu.

Při malém stupni vyztužení je velký rozdíl mezi použitými postupy výpočtu. Pro malé excentricity se výpočet blíží teorii 1. řádu, pro větší teorii jmenovité křivosti.



Obr. 37: b=0.4m; h=0.4m; H=8m, ρ=0.8%; F=400kN.

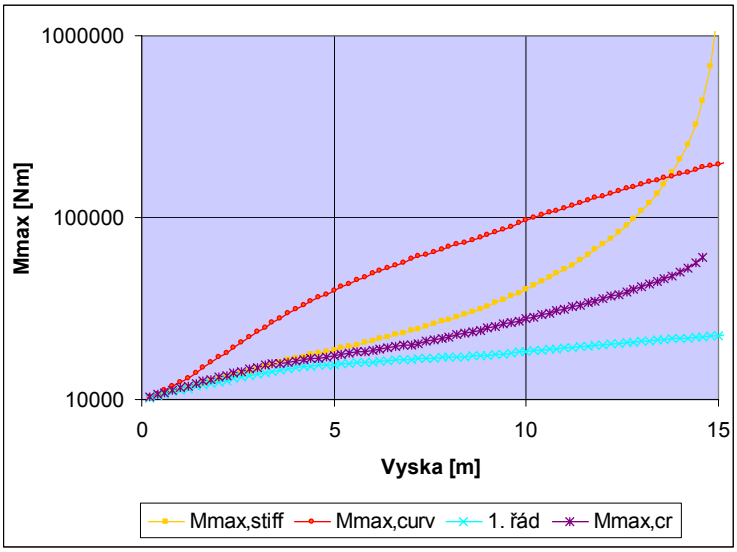


Obr.38: b=0.4m; h=0.4m; H=8m, ρ=3%; F=400kN.

Pro velký stupeň vyztužení již nejsou velké rozdíly v užitém způsobu výpočtu.

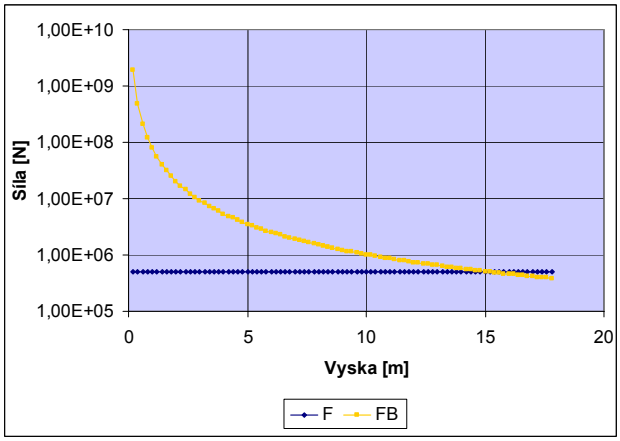
Křivka 2. řádu a metody jmenovité tuhosti mají téměř identický průběh.

B) Závislost návrhového momentu na délce prvku

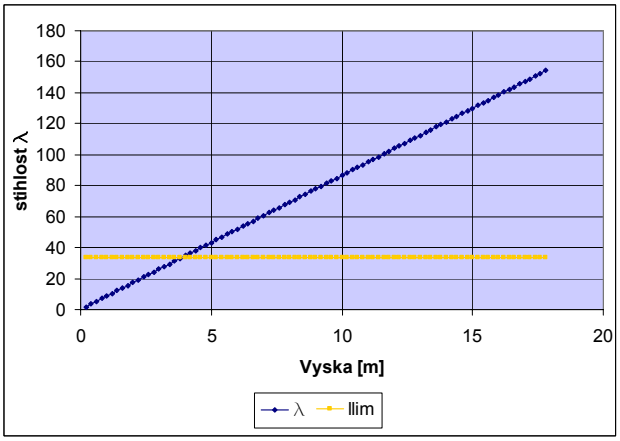


Obr. 39: b=0.4m; h=0.4m; H=var, ρ=0.8%; F=500kN.

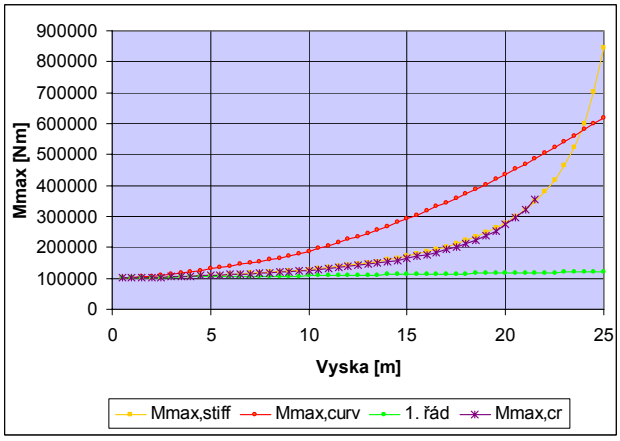
Za povšimnutí při tomto výpočtu stojí závislost metody jmenovité tuhosti na výšce prvku. V tomto případě se při výšce 15ti metrů rovná velikost působícího a kritického břemene; řešení se limitně blíží k nekonečnu.



Obr. 40: Graf závislosti velikosti kritického břemene a působící vnější síly na výšce prvku.



Obr. 41: Graf závislosti štíhlosti a vymezující štíhlosti na výšce prvku.



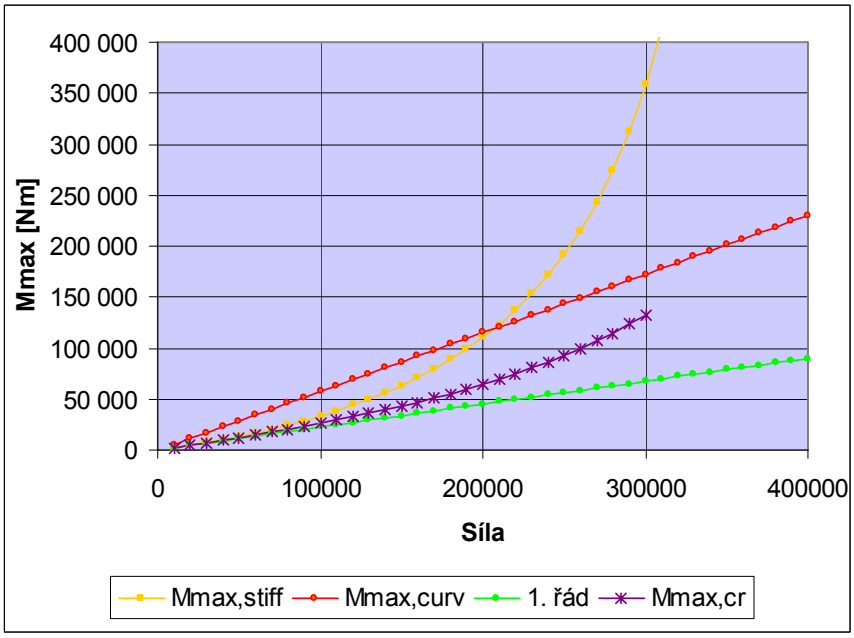
Obr.42: b=0.4m; h=0.4m; H=var, ρ=3%; F=500kN.

Dle obr. 41 je povinnost provádět výpočet s uvážením vlivu 2. řádu od cca 4 metrů. Při této výšce se „odděluje“ křivka M1 od M2 (viz obr 39).

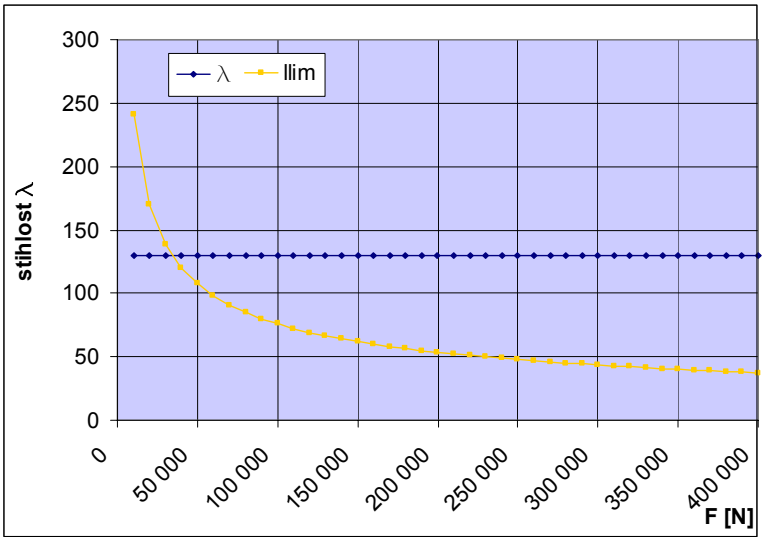
Pozn: křivka M1 není konstantní, protože minimální excentricita daná normou se zvětšuje s rostoucí výškou.

Při zkoumání silně vyztuženého prvku vysoké štíhlosti je řešení velmi dobře vystiženo teorií jmenovité tuhosti (Obr 42).

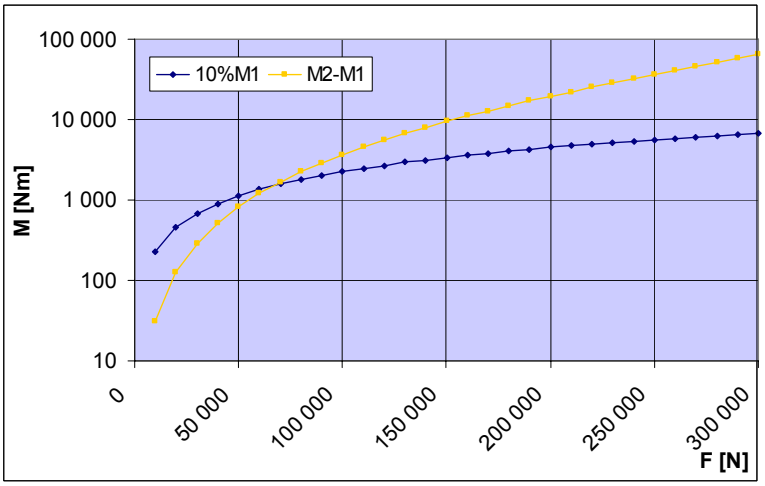
C) Závislost návrhového momentu na velikosti návrhové síly



Obr.43 b=0.4m; h=0.4m; H=15m, ρ=0.8%; F=var

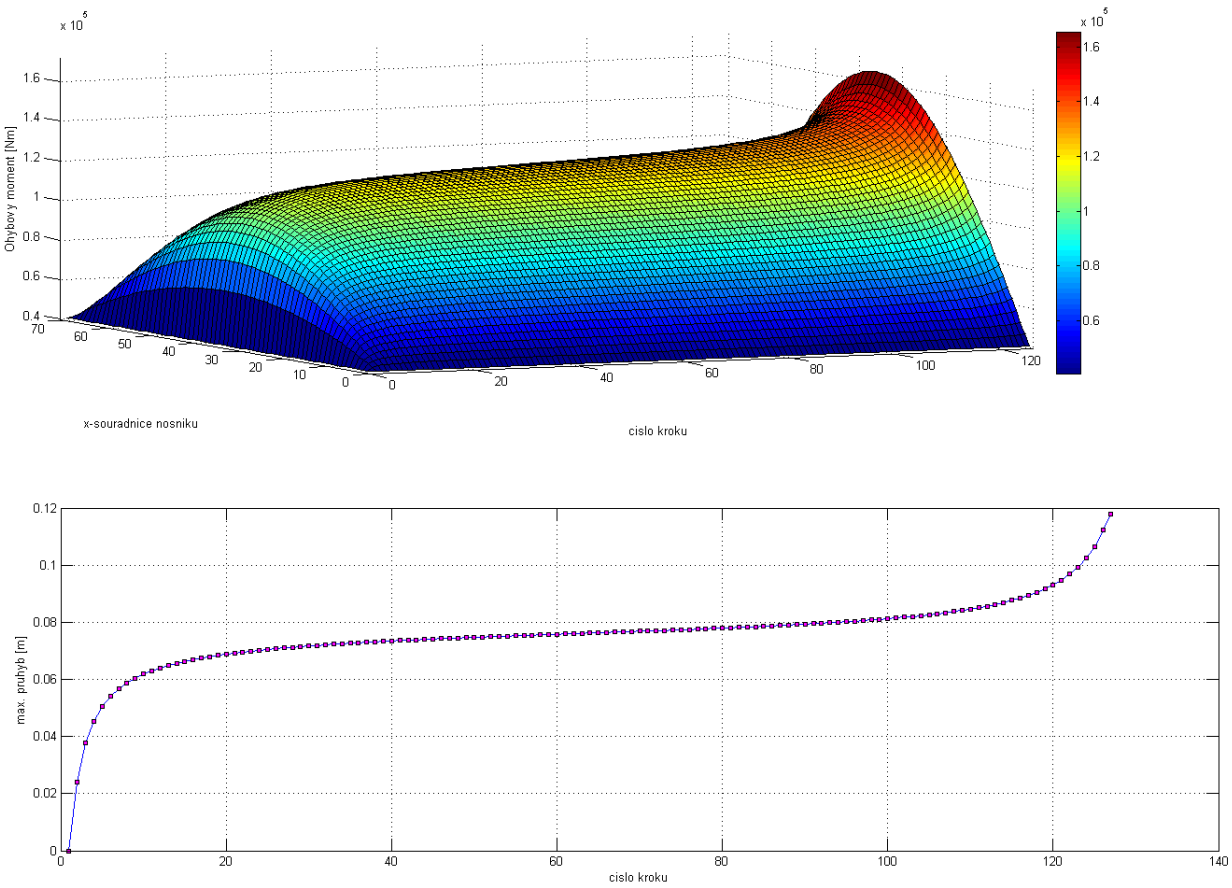


Obr.44 Graf závislosti vnější síly na kritériu vymezující štíhlosti

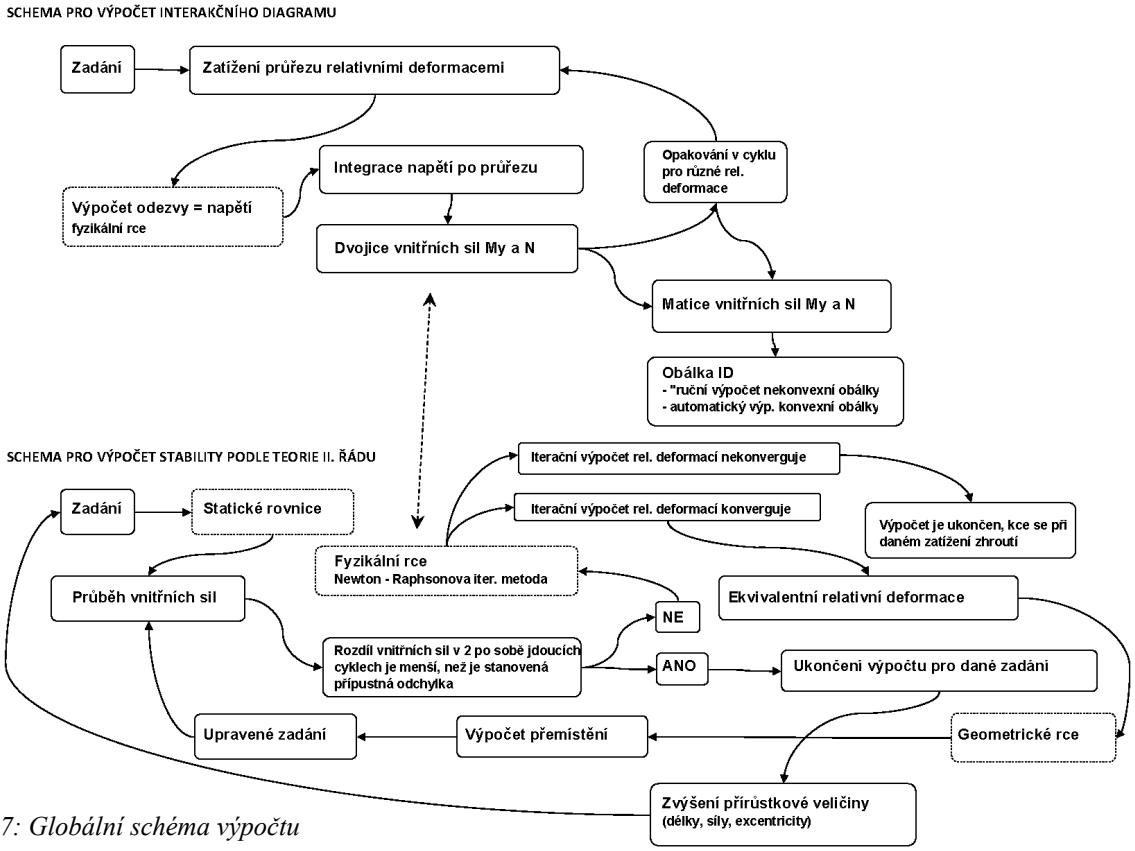


Obr.45 Graf závislosti velikosti vnější síly na kritériu 10% M1

Na obrázcích 44 a 45 jsou srovnána 2 vymezující kritéria, kdy lze opustit od výpočtu podle teorie 2. řádu. Je patrné, že kritérium vymezující štíhlosti je mnohem více konzervativní (výpočet podle 2. řádu nutné aplikovat již při menší síle nebo menší výšce prvku). Oproti druhému kritériu (10% rozdíl mezi M_1 a M_2) ho lze ale aplikovat přímo.



Obr.46 Horní část: graf závislosti dimenzačního momentu (svislá osa) na souřadnici po výšce nosníku a čísle iterace ve výpočtu dle 2. řádu. Ve spodní části závislost maximálního průhybu téhož nosníku na čísle iterace výpočtu. Tento nosník zkolaboval při 127. kroku, kdy průřez uprostřed nosníku nebyl schopen přenést zatížení

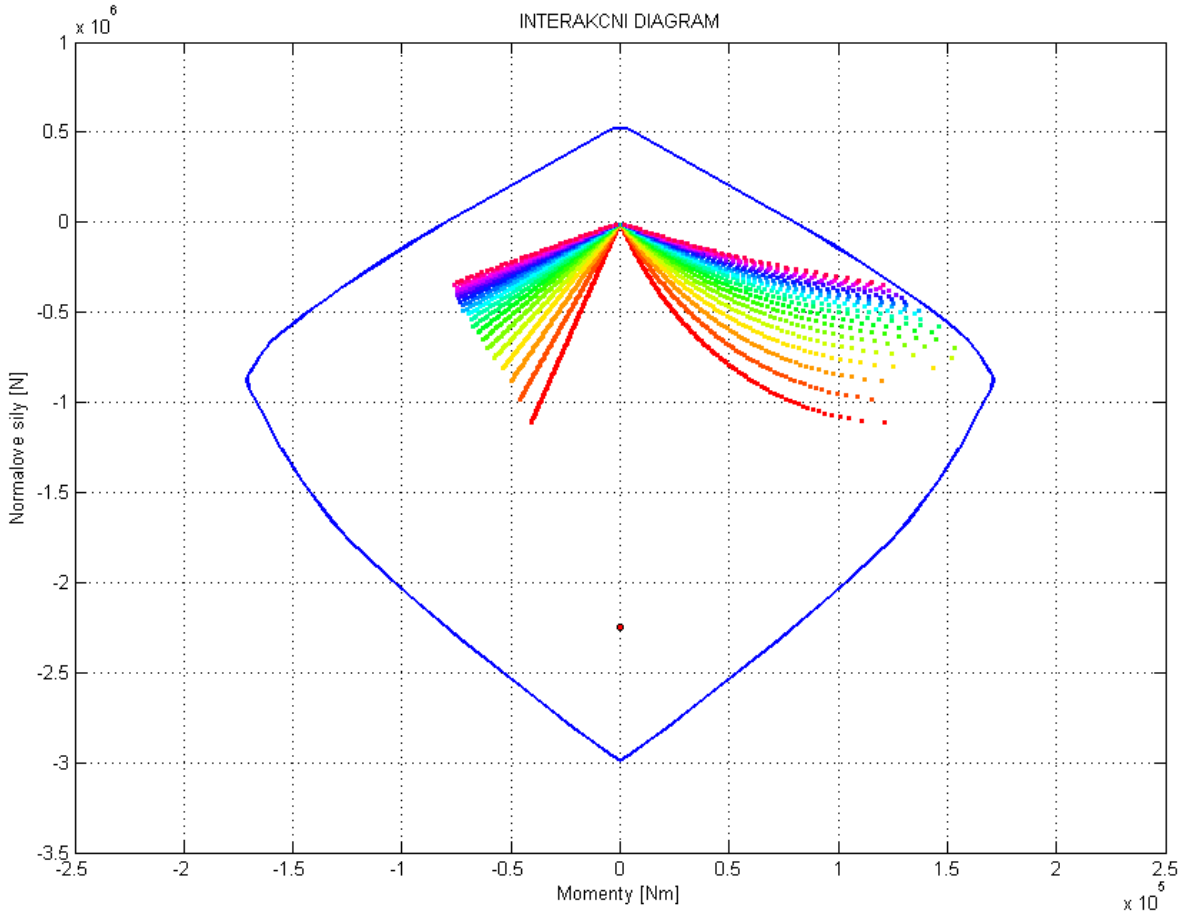


Obr. 47: Globální schéma výpočtu

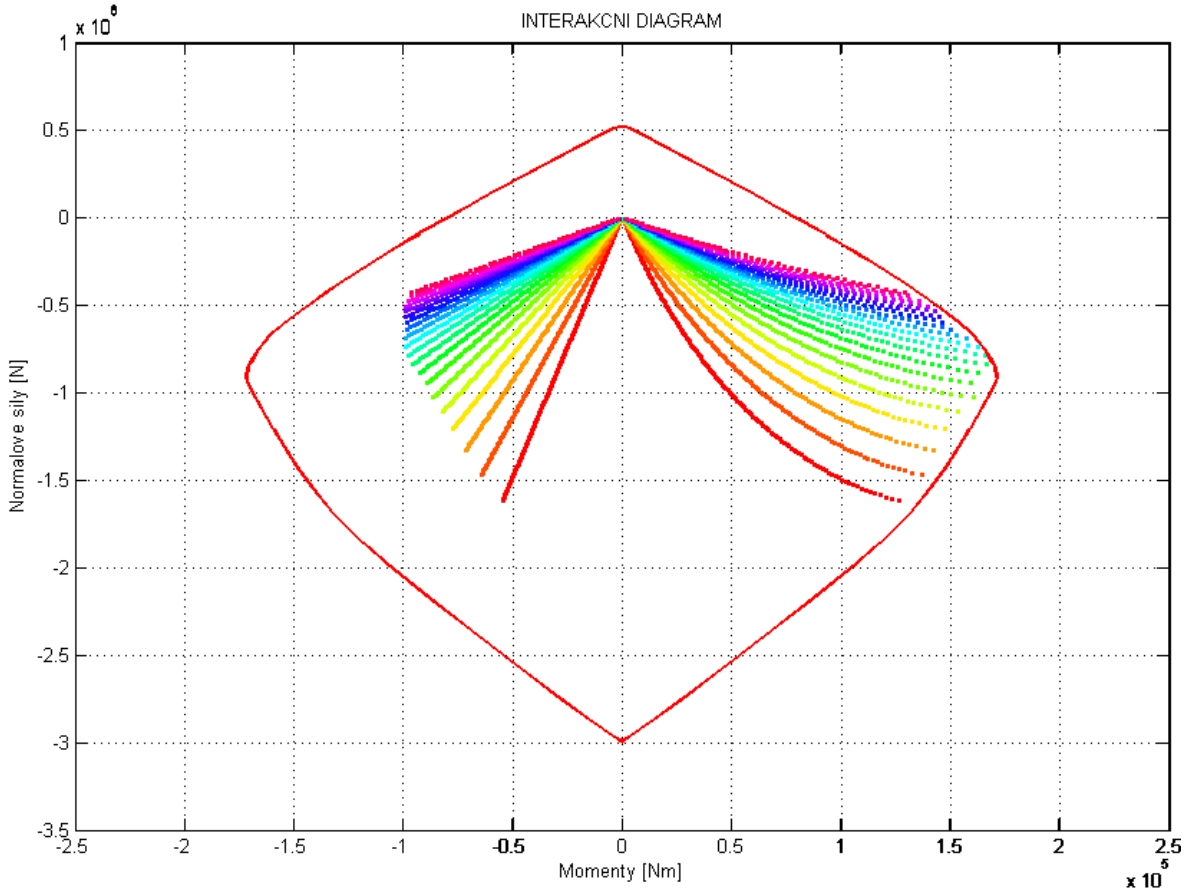
3.4 Upravený ID pro výpočet dle teorie 2. řádu

Cílem bylo propojit výsledky 1. a 2. části – tedy vytvořit modifikovaný interakční diagram, který by při znalosti předpokládané návrhové síly a její excentricity sloužil k rychlému posouzení únosnosti tlačeného železobetonového prvku daného průřezu, stupně vyztužení a výšky.

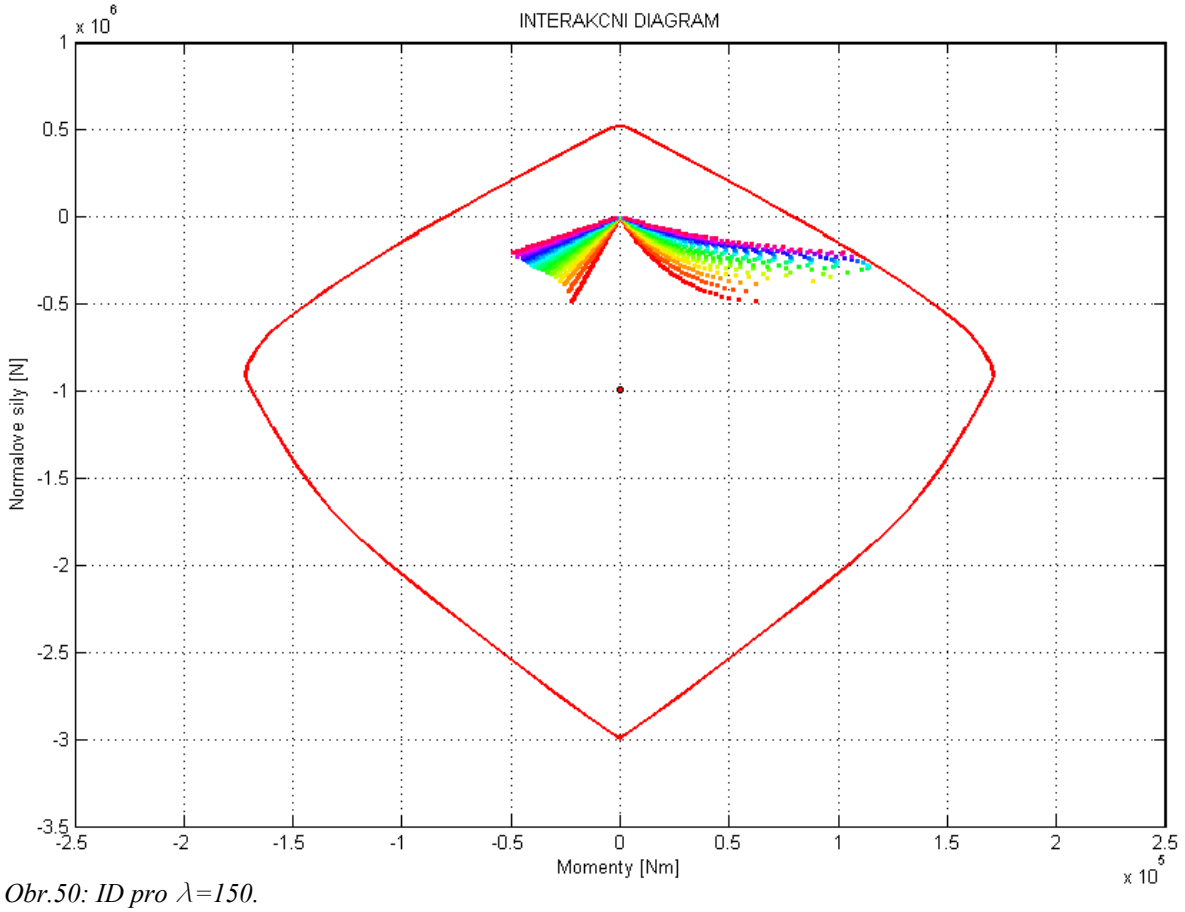
Zvolil jsem sloup průřezu 350 x 350mm, výztuž 4∅20mm, výška 7.5m, 10m a 15m. Tomu odpovídají hodnoty štíhlosti přibližně 75, 100 a 150. Ve výpočtu byl uvažován vliv dotvarování, a to úpravou sečnového modulu pružnosti $E_{cd}=E_c/(1.2+2)$.



*Obr. 48: Interakční diagram pro nejvíce exponovaný průřez a štíhlost prutu λ=100. Pravá část grafu odpovídá zatěžovacím křivkám vypočítaným dle teorie 2. řádu. K přerušení zatěžování (krokovému zvětšování normálové síly) dojde v okamžiku protnutí obálky ID, kdy je dosaženo mezní únosnosti průřezu. Každé 2 sousední křivky se od sebe liší zvětšenou excentricitou o malý přírůstek.Levá část diagramu slouží pro rychlé posouzení prvku na účinky 2. řádu bez výpočtu. Jedná se o polopřímky s rovnicí M=N . e, kde **e** je excentricita a **N** je normálová síla. Maximální normálová síla je stejná jako N_{Max} v pravé části grafu u křivky příslušné excentricity. Bodem je označeno kritické břemeno.*



Obr. 49: ID pro λ=75. Kritické břemeno je větší, než je únosnost průřezu (leží mimo rozsah grafu).



Obr.50: ID pro λ=150.

4. Závěr

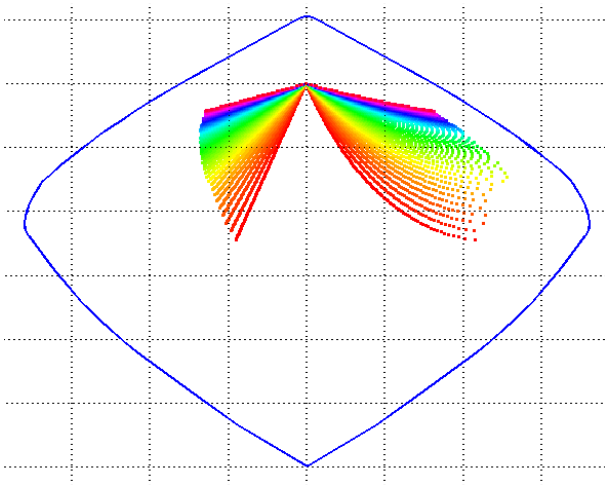
Výsledkem první části mé práce je script v programu Matlab pro výpočet interakčního diagramu obdélníkového nebo kruhového průřezu namáhaného normálovou silou a jedním nebo dvěma ohybovými momenty. Kromě základní geometrie průřezu je možné definovat třídu betonu, pracovní diagram betonu a oceli, stupeň vyztužení, uspořádání výztuže (symetrické x nesymetrické) a tloušťku krycí vrstvy.

Přínos první části tkví zejména v možnosti výpočtu interakčního diagramu průřezu, jehož materiálové vlastnosti jsou popsané nelineárními funkcemi. Oproti standardním postupům, kde jsou pro svou výpočetní jednoduchost užívány vysoce konzervativní pracovní diagramy betonu, je možné užitím nelineárních pracovních diagramů navrhovat pro přenos stejného zatížení subtilnější prvky a dosáhnout tak nemalých úspor materiálu.

To samé platí i pro druhou část mé práce, ve které byly zkoumány účinky 2. řádu na štíhlé tlačené prvky. Při výpočtu dimenzačního ohybového momentu zjednodušenými metodami uvedenými v Eurokódu 2 (metoda založená na jmenovité tuhosti a metoda založená na jmenovité štíhlosti) je mnohdy potřeba na stejné zatížení nadimenzovat průřez na mnohem větší ohybový moment, než jaký vychází při výpočtu obecnou metodou podle teorie 2. řádu.

Výsledkem poslední části je modifikovaný interakční diagram sloužící pro rychlé posouzení únosnosti štíhlého tlačeného prvku, u kterého známe velikost vnější síly a excentricitu jejího působení.

Předmětů dalšího zkoumání je mnoho. V první řadě bych uvedl zpřesnění výpočtu relativních deformací z vnitřních sil /část 3.2.3/. Užitím plné Newton-Raphsonovy iterační metody je sice dosaženo výsledku velmi rychle – řádově v 10-15 krocích s přesností 10^{-6}, nicméně jen pro body neležící v blízkosti hraniční obálky ID. Ještě horších výsledků je dosahováno u modelu betonu bez uvážení dotvarování, kde výpočet nekonverguje v celém prstenci *(viz obr 51)*.



Obr. 51

Druhým cílem by mohl být výpočet interakčního diagramu při uvážení všech kombinací namáhání, tzn. i s uvážením smyku a kroucení průřezu. Výpočet ID pro další tvary průřezu je myslím zbytečný, jediná změna oproti stávajícímu výpočtu by byla v modifikaci matice průřezu.

Třetím a posledním cílem je zrychlit a optimalizovat všechny výpočty. Pro představu uvádím časovou náročnost výpočtů použitých v této práci.

Výpočet 2D ID	podle metody a přesnosti dělení průřezu 10s až 30s
Matematický popis obálky ID	1 min
Výpočet 3D ID	1-2 min

Výpočet stability tlačeného prvku pro jednu kombinaci zatížení

- málo zatížené pruty a pruty blízko kolapsu zatížené silou velké výstřednosti	30s
- pruty, kde kolapsu předchází postupné mírné zvětšování momentu viz *obr.46*	5min
- modifikovaný ID *(obr 48-50)*	12hod

Literatura:

[1] *ĆSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha, Český normalizační institut, 2006. 213 stran.

[2] prof. Ing. Jaroslav PROCHÁZKA, CSc., a kol. *Navrhování betonových konstrukcí 1*. 1. vydání. Praha, ČBS Servis, s.r.o., 2005. 308 stran.

[3] prof. Ing. Milan JIRÁSEK, Ing. Jan ZEMAN, PhD., *Přetváření a porušování materiálů*. Praha, ČVUT, 2006. 176 stran.