

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE
Fakulta stavební**

Studentská vědecká a odborná činnost
Akademický rok 2008/2009

Sekce: Stavební mechanika

Lokalizační vlastnosti modelů poškození

Jméno a příjmení studenta : Martin Horák
Ročník, obor : 5. ročník, Kce. a dopravní stavby
Vedoucí práce : Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.
Katedra : Katedra mechaniky

Bratislava 21. května 2009

Obsah

1	Mechanika poškození	3
2	Modely poškození s jedním skalárním parametrem	3
2.1	Zákon poškození	4
2.2	Ekvivalentní deformace	5
3	Model Comi–Perego	6
4	Tenzor tečné tuhosti	8
4.1	Modely řízené ekvivalentní deformací	8
4.2	Model Comi–Perego	9
5	Lokalizace poškození	9
6	Lokalizační analýza	11
6.1	Lokalizační analýza izotropních modelů poškození	12
7	Lokalizační analýza za rovinné napjatosti	13
7.1	Výsledky lokalizační analýzy	14
7.2	Simulace lokalizace metodou konečných prvků	17

Abstrakt

Mechanika poškození je vhodným nástrojem pro modelování materiálů oslabených rozvíjejícími se defekty, např. trhlinami. Lokální modely poškození však neposkytují objektivní popis chování materiálů po ztrátě eliptičnosti, která může být detekována klasickými metodami lokalizační analýzy založenými na singularitě akustického tenzoru. Tato práce se zaměřuje na analýzu lokalizačních vlastností modelů izotropního poškození s jedním skalárním parametrem poškození a s různými definicemi ekvivalentní deformace a modelu pro beton se dvěma skalárními parametry, který byl navržen v [1]. Jsou odvozeny nutné podmínky pro vznik slabých nespojitostí (skoků v poli deformace) a je diskutována orientace potenciální plochy nespojitosti. Výsledky lokalizační analýzy jsou ověřeny numerickými výpočty.

Continuum damage mechanics provides an appropriate modeling framework for materials weakened by evolving defects. However, local damage models fail to provide an objective description of the material behavior after the loss of ellipticity, which can be detected by classical methods of localization analysis based on the acoustic tensor. This paper presents analysis of localization properties of the family of isotropic damage models with one scalar damage variable driven by the equivalent strain, and also of a more sophisticated model proposed by [1] and designed specifically for concrete. Necessary conditions for the formation of a weak discontinuity (jump in strain) are derived and the dependence of the orientation of potential discontinuity surface and of the critical tangent modulus on the stress state is discussed. The results are confirmed by finite element simulations.

1 Mechanika poškození

Pro popis porušování kvazikřehkých materiálů, jako je například beton, je potřeba konstitutivní zákon se změkčením. Jak je známo, změkčení může vést k lokalizaci nepružné deformace. Pro tradiční modely mechaniky kontinua může docházet k nerealistickým jevům, jako je lokalizace do libovolně malých zón, při kterých se disipovaná energie blíží k nule. Tyto výsledky nejsou fyzikálně přijatelné. Další obtíže nastávají při numerickém řešení metodou konečných prvků, neboť výsledky velmi silně závisejí na počtu prvků, hovoříme o tzv. "patologické závislosti" řešení na počtu konečných prvků. Z matematického hlediska máme úlohu s eliptickým operátorem, ale změkčování vede ke ztrátě eliptičnosti. Ztráta eliptičnosti má za následek nejednoznačnost řešení, ze kterého vyplývají již zmíněné nesrovnalosti. Je tedy velice důležité vědět, v jakých případech jsou modely mechaniky poškození schopné objektivně popsat reálné chování materiálu. Z tohoto důvodu je vhodné se zabývat podmínkami za, kterých dochází k lokalizaci nepružné deformace.

Hlavním cílem této práce je zjistit nutné podmínky pro vznik slabých nespojitostí pro izotropní modely poškození

- s jedním skalárním parametrem poškození a s různými definicemi ekvivalentní deformace (Mazarsova definice, Rankinova definice, upravená von Misesova definice),
- se dvěma skalárními parametry, který pro beton navrhli Comi a Perego.

2 Modely poškození s jedním skalárním parametrem

Tato skupina modelů je popsána konstitutivním vztahem

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí, $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor deformace, \mathbf{D}_e je tenzor pružné tuhosti a ω je vnitřní proměnná popisující poškození. Rozvoj poškození je řízen zákonem poškození

$$\omega = g(\kappa) \quad (2)$$

a zatěžovacími–odtěžovacími podmínkami

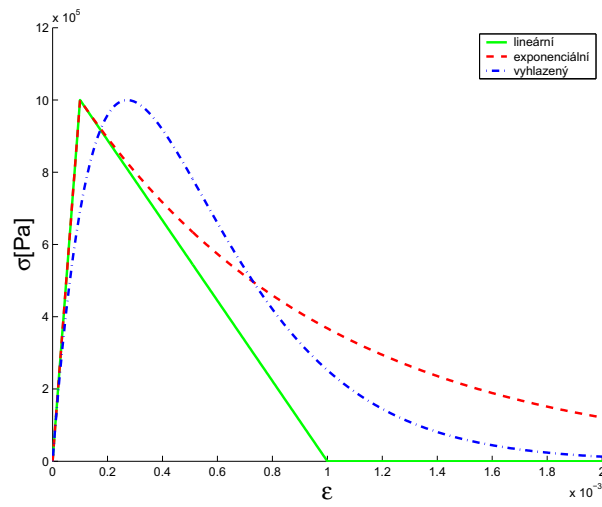
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) \equiv \varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \kappa \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) \dot{\kappa} = 0 \quad (3)$$

kde f je zatěžovací funkce, g je funkce poškození související s tvarem pracovního diagramu pro jednoosou napjatost, ε_{eq} je ekvivalentní deformace (tj. skalární míra hladiny dosažené

deformace) a vnitřní proměnná κ představuje maximální hodnotu ekvivalentní deformace dosaženou v dosavadním průběhu deformačního procesu. Konkrétní volba výrazu pro ekvivalentní deformaci silně ovlivňuje tvar obálky pevnosti a také lokalizační vlastnosti modelu, jak bude předvedeno později.

2.1 Zákon poškození

Pokud chceme, aby zákon poškození odpovídal skutečnému chování materiálů, můžeme vyjít z pracovního diagramu jednoosé tahové zkoušky. Zde zmíníme tři typy zákona poškození.



Obrázek 1: Pracovní diagramy pro různé modely poškození

Při použití lineárního zákona poškození dostáváme jak vzestupnou tak sestupnou část pracovního diagramu lineární. Vztah pro poškození zapíšeme

$$g(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \kappa \leq \varepsilon_0, \\ \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa}\right) & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \kappa \leq \varepsilon_f, \\ 1 & \text{pro } \varepsilon_f \leq \kappa. \end{cases} \quad (4)$$

Kde ε_0 je deformace při dosažení meze pevnosti a ε_f značí deformaci při úplném poškození.

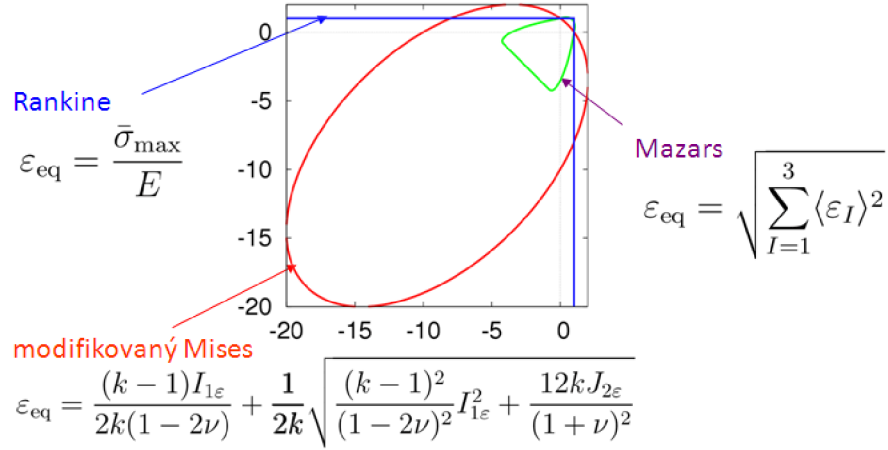
U exponenciálního zákona poškození se materiál chová pružně až po dosažení meze pevnosti, poté napětí klesá exponenciálně při zvyšující se deformaci:

$$g(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \kappa \leq \varepsilon_0, \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa} e^{-\frac{\kappa - \varepsilon_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0}} & \text{pro } \varepsilon_0 < \kappa. \end{cases} \quad (5)$$

Pokud dochází k rozvoji defektů již krátce po začátku zatěžování, zvolíme vyhlazený zákon poškození,

$$g(\kappa) = 1 - e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon_0}} \quad (6)$$

2.2 Ekvivalentní deformace



Obrázek 2: Obálky pevnosti pro různé definice ekvivalentní deformace v prostoru hlavních napětí

Uvedeme zde tři definice ekvivalentní deformace, u kterých budeme dále zkoumat lokalizační vlastnosti. Pro další výpočty využijeme i derivaci ekvivalentní deformace podle tenzoru deformace, kterou označíme jako $\boldsymbol{\eta}$.

- Mazarsova ekvivalentní deformace

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle^2} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\varepsilon_{eq}} \quad (8)$$

ε_I je I-tá hlavní deformace a $\langle x \rangle$ značí kladnou hodnotu x .

- Rankinova ekvivalentní deformace

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\bar{\sigma}_1}{E} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{E} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{E} (\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1) : \mathbf{D}_e = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \boldsymbol{\delta} + \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 \right) \quad (10)$$

$\bar{\sigma}_1$ je největší hlavní napětí a \mathbf{p}_1 příslušný hlavní směr. E a ν jsou pružnostní konstanty.

- upravená von Misesova ekvivalentní deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eq} = \frac{(k-1)I_{1\varepsilon}}{2k(1-2\nu)} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon}^2 + \frac{12kJ_{2\varepsilon}}{(1+\nu)^2}} \quad (11)$$

Přitom $I_{1\varepsilon} = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ a $J_{2\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{e}$, kde \mathbf{e} značí deviatorickou část deformace. Při derivaci von Misesovy ekvivalentní deformace využijeme vztahů

$$\frac{\partial I_{1\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\delta}, \quad \frac{\partial J_{2\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{e}$$

,

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} \boldsymbol{\delta} + \frac{\frac{2(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon} \boldsymbol{\delta} + \frac{12k}{(1+\nu)^2} \mathbf{e}}{4k \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon}^2 + \frac{12kJ_{2\varepsilon}}{(1+\nu)^2}}} \quad (12)$$

$\boldsymbol{\delta}$ je jednotkový tenzor 2. řádu.

3 Model Comi–Perego

Tento izotropní model se dvěma parametry poškození je vhodný pro popis betonu. Podle něj je objemový modul pružnosti K redukován faktorem $(1 - \omega_t)(1 - \omega_c)$, pokud je objemová část deformace $I_{1\varepsilon} = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ kladná, respektive $(1 - \omega_c)$, pokud je záporná. Smykový modul G je vždy redukován faktorem $(1 - \omega_t)(1 - \omega_c)$. Vztah mezi napětím a deformací je vhodné rozdělit na objemové a tvarové změny:

$$\sigma_m = (1 - \omega_c)K [(1 - \omega_t)\langle I_{1\varepsilon} \rangle - \langle -I_{1\varepsilon} \rangle] \quad (13)$$

$$\mathbf{s} = (1 - \omega_t)(1 - \omega_c)2G\mathbf{e} \quad (14)$$

Přitom $\sigma_m = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ je střední (hydrostatické) napětí, \mathbf{s} je deviatorická část tenzoru napětí a \mathbf{e} je deviatorická část tenzoru deformace. Výraz $\langle I_{1\varepsilon} \rangle$ značí kladnou část objemové deformace a $\langle -I_{1\varepsilon} \rangle$ její zápornou část. Pro $I_{1\varepsilon} > 0$ můžeme rovnice (13) a (14) přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega_t)D_e^c : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

kde

$$\mathbf{D}_e^c = \left(K - \frac{2}{3}G^c\right) \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2G^c \mathbf{I} \quad (16)$$

je tenzor sečné tuhosti, $G^c = (1 - \omega_c)G$ je smykový modul redukovaný tlakovým poškozením, \mathbf{I} je symetrický jednotkový tenzor 4. řádu.

Na rozdíl od předešlých modelů nejsou parametry poškození přímo závislé na ekvivalentní deformaci, ale jejich vývoj je určen složitější zatěžovací funkcí. Každý parametr poškození je sdružený s jinou zatěžovací funkcí, takže vývoj tahového a tlakového poškození je nezávislý. Zatěžovací funkce byly původně definovány v prostoru napětí, ale po dosažení z rovnic (13)–(14) je lze přepsat v závislosti na deformaci a poškození:

$$\begin{aligned} f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) = & 4(1 - \omega_t)^2(1 - \omega_c)^2 G^2 J_{2\varepsilon} - 9K^2 a_t [(1 - \omega_t)^2 \langle I_{1\varepsilon} \rangle^2 + (1 - \omega_c)^2 \langle -I_{1\varepsilon} \rangle^2] \\ & + 3K b_t r_t(\omega_t) [(1 - \omega_t) \langle I_{1\varepsilon} \rangle - (1 - \omega_c) \langle -I_{1\varepsilon} \rangle] - (1 - \alpha \omega_c) k_t r_t^2(\omega_t) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) = & 4(1 - \omega_t)^2(1 - \omega_c)^2 G^2 J_{2\varepsilon} + 9K^2 a_c [(1 - \omega_t)^2 \langle I_{1\varepsilon} \rangle^2 + (1 - \omega_c)^2 \langle -I_{1\varepsilon} \rangle^2] \\ & + 3K b_c r_c(\omega_c) [(1 - \omega_t) \langle I_{1\varepsilon} \rangle - (1 - \omega_c) \langle -I_{1\varepsilon} \rangle] - k_c r_c^2(\omega_c) \end{aligned} \quad (18)$$

kde $\alpha, a_t, a_c, b_t, b_c, k_t$ a k_c jsou nezáporné parametry a r_t a r_c jsou bezrozměrné funkce, které souvisejí s tvarem pracovního diagramu v jednoosém tahu a jednoosém tlaku. Případy, kdy obě funkce poškození nabývají záporných hodnot, odpovídají pružnému stavu a poškození zůstává konstantní. Jakmile je dosaženo hodnoty $f_t = 0$, materiál se začne poškozovat v tahu a ω_t začne růst. Obdobně ω_c roste, pokud je $f_c = 0$. Kladné hodnoty zatěžovacích funkcí jsou nepřijatelné. To vše lze popsat podmínkami

$$f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \leq 0, \quad \dot{\omega}_t \geq 0, \quad f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \dot{\omega}_t = 0 \quad (19)$$

$$f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \leq 0, \quad \dot{\omega}_c \geq 0, \quad f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \dot{\omega}_c = 0 \quad (20)$$

Jak již bylo zmíněno, tvar pracovního diagramu závisí na bezrozměrných funkcích r_t a r_c . Jejich konkrétní podoba, kterou navrhli Comi a Perego, je

$$r_i(\omega_i) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{ei}}{\sigma_{0i}}\right) \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega_{0i}}\right)^2 & \text{pro } \omega_i < \omega_{0i} \\ \left[1 - \left(\frac{\omega_i - \omega_{0i}}{1 - \omega_{0i}}\right)^{c_i}\right]^{0.75} & \text{pro } \omega_i \geq \omega_{0i} \end{cases} \quad i = t, c \quad (21)$$

Přítom index i nabývá hodnot t nebo c , σ_{ei} představuje mezní pružné napětí (mez úměrnosti), σ_{0i} je maximální napětí na vrcholu pracovního diagramu (pevnost), ω_{0i} je odpovídající poškození a c_i je bezrozměrný parametr.

4 Tenzor tečné tuhosti

4.1 Modely řízené ekvivalentní deformací

Při analýze modelu poškození mohou nastat dva stavy.

1. Materiál je v pružném stavu a poškození se nemění. Vztah mezi napětím a deformací můžeme diferencovat podle času a hodnotu poškození považovat za konstantu. Tím dospějeme k přírůstkovému tvaru

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (22)$$

2. Pokud okamžitý stav splňuje podmínku $\varepsilon_{eq} = \kappa$, může docházet k pružnému od-tížení za konstatního poškození nebo k růstu poškození. Poškození tedy není konstantní a musíme ho také diferencovat podle času:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \dot{\omega} \quad (23)$$

Parametr poškození ω je funkcí vnitřní proměnné κ , vyjádříme ho tedy jako $\omega = g(\kappa)$ a pomocí pravidla pro derivaci složené funkce

$$\dot{\omega} = \dot{g}(\kappa) = \frac{dg(\kappa)}{d\kappa} \frac{d\kappa(t)}{dt} = g' \dot{\kappa} \quad (24)$$

V případě růstu poškození je funkce poškození nulová a platí rovnost $\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}_{eq}$. Při derivaci ekvivalentní deformace podle času opět použijeme pravidlo o derivaci složené funkce, neboť ekvivalentní deformace je funkcí deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \frac{d\varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (25)$$

kde

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (26)$$

Je třeba dodat, že k rozvoji poškození materiálu dochází pokud je

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad (27)$$

a rychlost poškození je dána vztahem

$$\dot{\omega} = g' \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (28)$$

Po dosazení do (23) získáme hledaný vztah mezi přírůstkem napětí a přírůstkem deformace

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [(1 - \omega)\mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - g'\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta}] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (29)$$

Výraz

$$\mathbf{D}_{ed} = [(1 - \omega)\mathbf{D}_e - g'\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta}] \quad (30)$$

je tenzor tečné tuhosti poškozujícího se materiálu. Konkrétní hodnota tenzoru tečné tuhosti závisí na okamžitém stavu, ve kterém se materiál nachází, ale také na volbě ekvivalentní deformace.

4.2 Model Comi–Perego

Při výpočtu rychlosti poškozování, pro model Comi–Perego, vyjdeme z podmínky konzistence

$$\frac{\partial f_t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f_t}{\partial \omega_t} \dot{\omega}_t = 0 \quad (31)$$

Z této rovnice dostáváme

$$\dot{\omega}_t = - \frac{\frac{\partial f_t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f_t}{\partial \omega_t}} \quad (32)$$

Po dosazení do (23) dostaneme tenzor tuhosti. Výsledná struktura tenzoru tuhosti se nemění, pouze tenzor $\boldsymbol{\eta}$ a g' mají jiný význam. Tenzor $\boldsymbol{\eta}$, který měl pro izotropní modely založené na ekvivalentní deformaci význam derivace ekvivalentní deformace podle tenzoru deformace, má v tomto případě význam derivace funkce poškozování podle tenzoru deformace:

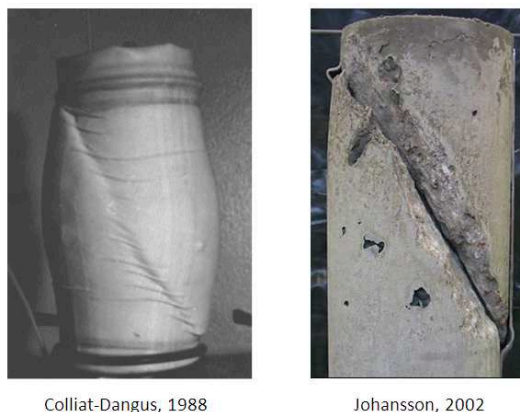
$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial f_t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (33)$$

Skalární veličina g' se vypočítá následovně

$$g' = \frac{1}{\frac{\partial f_t}{\partial \omega_t}} \quad (34)$$

5 Lokalizace poškozování

Problém lokalizace poškozování objasníme na jednoduchém příkladu taženého prutu. Uvažujme prut o konstantním průřezu A , délky L , který je natahován silou F . Prut se chová lineárně pružně až po dosažení deformace ε_0 , které odpovídá napětí, jež označíme jako mez pevnosti v tahu f_t . Poté uvažujme ten nejjednodušší (lineární) zákon poškozování.



Obrázek 3: Příklady lokalizované nepružné deformace v zemině a betonu

V každé části prutu klesá napětí, buď při klesající deformaci (prut se pružně odtěžuje) nebo při rostoucí deformaci (prut změkčuje). Ze statických rovnic plyne, že napětí musí zůstat stejné po celé délce prutu. Pro jakékoliv efektivní napětí $\bar{\sigma}$ mezi 0 a f_t existují dvě hodnoty deformace, které vyhovují materiálovým rovnicím. Problém nastává v tom, že žádná rovnice nám neurčuje, jaká část prutu se pružně odtěžuje a která část prutu změkčuje. Řešení tedy není jednoznačné. Pokud má malá část prutu menší průřez, například v důsledku nějaké imperfekce, pak je v tomto průřezu dosaženo pevnosti f_t dříve než v ostatních částech prutu. V této části prutu začne docházet ke změkčování, zatímco zbylá délka prutu se pružně odtěžuje, neboť pevnosti f_t ještě nebylo dosaženo. Z toho vyplývá, že velikost oblasti, která změkčuje, je dána velikostí oblasti s nejmenší pevností. Při výpočtech metodou konečných prvků můžeme síť zjemňovat a měli bychom dostávat stále přesnější řešení. Avšak v tomto případě se poškození může lokalizovat stále do menšího segmentu prutu. Velikost tohoto segmentu je dána rozměrem prvku. Lokalizaci poškození při výpočtech metodou konečných prvků ovlivňuje nejenom velikost prvků, ale také jejich orientace, pravidelnost sítě a další faktory. Otázkou tedy zůstává, jak se bude chovat skutečná konstrukce, neboť poškození, které vzniká rozvojem trhlin a jiných defektů, se nemůže lokalizovat do libovolně malého segmentu prutu, ale lokalizuje se do zóny o velikosti, která odpovídá vnitřní charakteristické délce materiálu. Izotropní model poškození však o této vnitřní charakteristické délce materiálu nic neudává. Z matematického hlediska je důsledkem nejednoznačnosti řešení při změkčování materiálu ztráta eliptičnosti diferenciální rovnice, kterou je problém popsán. Při popisu materiálu izotropním modelem poškození dochází k těmto nesrovnalostem:

1. Deformace a poškození se lokalizují do zóny, která může být libovolně malá.
2. Práce vykonaná vnějšími silami (práce vykonaná při porušení konstrukce) je libovolně malá.

3. Při řešení metodou konečných prvků je výsledek patologicky závislý na počtu konečných prvků.

6 Lokalizační analýza

Uvažujme těleso rozdělené plochou nespojitosti na dvě části. Označíme je V^- a V^+ . Vektor \mathbf{n} je normálový vektor na tuto plochu a je orientován z V^- do V^+ . Rychlosti napětí jsou vázány podmínkou

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (35)$$

a rychlosti deformací v jedné a druhé části tělesa podmínkou

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^+ = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^- + \mathbf{c} \otimes \mathbf{n} \quad (36)$$

Pro lepší představu můžeme \mathbf{c} rozložit jako součin $\mathbf{c} = \dot{\epsilon} \mathbf{m}$, $\dot{\epsilon}$ značí velikost skoku a $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$ je normovaný tenzor prvního řádu zvaný polarizační vektor. Úhel mezi vektory \mathbf{n} a \mathbf{m} udává, o který mód porušení se jedná. Pokud $\mathbf{n} = \mathbf{m}$, jedná se o tzv. tahový mód. Jeli \mathbf{m} kolmé na \mathbf{n} , jedná se o mód smykový. V teorii malých deformací je deformace definovaná jako symetrická část gradientu posunů. Rovnici (36) vyjádříme ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m})\dot{\epsilon} \quad (37)$$

Vztah mezi napětím a deformací v oblasti V^+ a V^-

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{D}^+ : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- = \mathbf{D}^- : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- \quad (38)$$

Kde \mathbf{D}^- a \mathbf{D}^+ je tenzor tuhosti na jedné a druhé části tělesa. Po dosazení rovnice (37) do rovnice (38), využití malé symetrie tenzoru tuhosti a několika úpravách dostáváme rovnici

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \dot{\epsilon} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^- - \mathbf{D}^+) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- \quad (39)$$

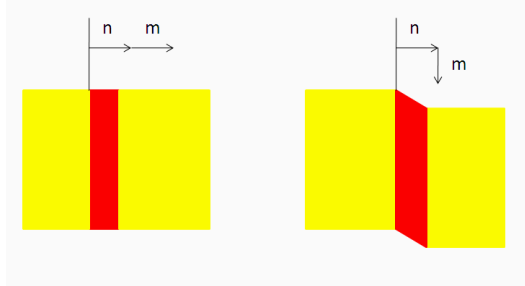
Pokud uvažujeme tenzor tuhosti na obou stranách tělesa stejný, rovnice se nám zjednoduší. Vyloučíme $\dot{\epsilon} = 0$, neboť tato situace neodpovídá skutečné bifurkaci. Po těchto úpravách dostáváme

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (40)$$

Výraz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ označíme jako \mathbf{Q} a nazveme lokalizační tenzor. Z rovnice (40) je zřejmé, že lokalizační podmínka je ekvivalentní singularitě lokalizačního tenzoru. Vektor \mathbf{m} odpovídá vlastnímu vektoru pro nulové vlastní číslo lokalizačního tenzoru. Dostáváme tedy klasickou lokalizační podmínku

$$\det \mathbf{Q} = 0 \quad (41)$$

Singularita lokalizačního tenzoru je ekvivalentní již zmíněné ztrátě eliptičnosti.



Obrázek 4: Módy lokalizace: (a) tahový mód (b) smykový mód

Při lokalizační analýze musíme najít vektor \mathbf{n} tak, aby byla splněna rovnice (40). Když takový vektor neexistuje, pole napětí musí zůstat spojitě.

6.1 Lokalizační analýza izotropních modelů poškození

Při lokalizační analýze musíme rozlišovat tři stavy:

1. Pružné odtěžování na obou stranách. V tomto případě můžeme položit

$$\mathbf{D}^- = \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}_u = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \quad (42)$$

Lokalizační tenzor poté vypadá následovně:

$$\mathbf{Q}_u = (1 - \omega)\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{n} = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e \quad (43)$$

Není těžké ukázat, že \mathbf{Q}_u je pozitivně definitní, lokalizační podmínka tedy nemůže být splněna.

2. K růstu poškození dochází na obou stranách. Tentokrát je opět tenzor tuhosti na obou stranách stejný, ale má význam tečné tuhosti materiálu.

$$\mathbf{D}^- = \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}_{ed} \quad (44)$$

$$\mathbf{Q}_{ed} = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e - g'(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{Q}_u - g'\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n \otimes \boldsymbol{\eta}_n \quad (45)$$

Je-li \mathbf{Q}_{ed} singulární, musí existovat nenulový vektor \mathbf{m} tak, že $\mathbf{Q}_{ed} \cdot \mathbf{m} = 0$. Po dosazení dostáváme

$$\mathbf{Q}_u \cdot \mathbf{m} = g' \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n (\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{m}) \quad (46)$$

Jelikož je \mathbf{Q}_u vždy pozitivně definitní, je invertibilní. Pravá strana rovnice je pouze skalárním násobkem $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$, \mathbf{m} můžeme vyjádřit jako $a \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$, kde a je zatím neznámé číslo. Po dosazení do rovnice (46)

$$(1 - g' \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n) a \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \mathbf{0} \quad (47)$$

Pokud je a nebo $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ rovno nule, dostáváme triviální řešení, které neodpovídá skutečné bifurkaci. Pokud chceme, aby rovnice (47) byla splněna, musí být nulový výraz v závorce. Odtud plyne podmínka

$$g' \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = 1 \quad (48)$$

Výsledek součinu $\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ závisí na elastických konstantách, na okamžitém stavu materiálu a na směru plochy nespojitosti. Pro daný materiál a daný stav materiálu je výsledek funkcí jednotkového vektoru \mathbf{n} . Minimální hodnota g' potřebná k bifurkaci je

$$g'_{crit} = \frac{1}{\max_{\|\mathbf{n}\|=1} (\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)} \quad (49)$$

3. V tomto případě je tenzor tuhosti na každé straně tělesa jiný a musíme vycházet z rovnice (39). Řešení je v tomto případě komplikovanější a zde ho zmiňovat nebudeme. Dá se ukázat, že podmínka singularity lokalizačního tenozru je postačující. Řešení je k nalezení v [2].

7 Lokalizační analýza za rovinné napjatosti

V této části se budeme zabývat analýzou ve dvou rozměrech za předpokladu rovinné napjatosti. Tenzor pružné tuhosti za rovinné napjatosti má tvar

$$\mathbf{D}_e = 2G \left(\mathbf{I} + \frac{\nu}{1-\nu} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \right) \quad (50)$$

kde ν je Poissonův součinitel. Příslušný elastický akustický tenzor je

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{n} = G \left(\boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \quad (51)$$

Pro dosažení do (49) potřebujeme vypočítat inverzi tenzoru $\mathbf{Q}_u = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e$,

$$\mathbf{Q}_u^{-1} = \frac{1}{1 - \omega}\mathbf{Q}_e^{-1} = \frac{1}{(1 - \omega)G} \left(\boldsymbol{\delta} - \frac{1 + \nu}{2}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \quad (52)$$

Pro přehlednost zavedeme funkci

$$f(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \frac{1}{(1 - \omega)G} \left[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - \frac{1 + \nu}{2}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \right] \quad (53)$$

Pokud tuto funkci přepíšeme ve složkovém zápisu vzhledem k hlavním směrům tenzorů $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\eta}$ (oba mají stejné hlavní směry), dostaneme polynom 4. stupně

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{(1 - \omega)G} \left[\eta_1 \bar{\sigma}_1 n_1^2 + \eta_2 \bar{\sigma}_2 n_2^2 - \frac{1 + \nu}{2}(\eta_1 n_1^2 + \eta_2 n_2^2)(\bar{\sigma}_1 n_1^2 + \bar{\sigma}_2 n_2^2) \right] \quad (54)$$

Tento polynom musíme maximalizovat s omezením $n_1^2 + n_2^2 = 1$, neboť \mathbf{n} je jednotkový vektor. Označíme-li $n_1^2 = N_1$ a položíme $N_2 = 1 - N_1$, přejde funkce f na kvadratickou funkci jedné proměnné N_1 . Musíme ale zabezpečit splnění omezující podmínky $0 \leq N_1 \leq 1$.

Za předpokladu $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2$ a $\eta_1 \geq \eta_2$ je maximalizovaná funkce konkávní a globálního maxima nabývá pro

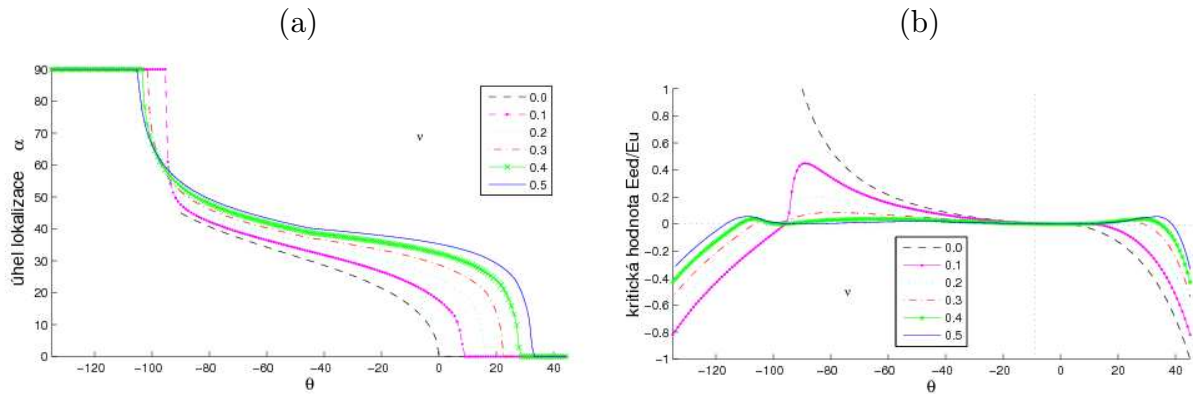
$$N_{1,crit} = \frac{\eta_1 \bar{\sigma}_1 + \nu \eta_2 \bar{\sigma}_1 - (1 + \nu)(\eta_1 \bar{\sigma}_2 + \eta_2 \bar{\sigma}_1)/2}{(1 + \nu)(\eta_1 - \eta_2)(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)} \quad (55)$$

Pokud je tato hodnota záporná, je hledaným řešením $N_{1,crit} = 0$ a plocha nespojitosti je kolmá na směr největšího hlavního napětí. Pokud je větší než 1, je řešením $N_{1,crit} = 1$ a plocha nespojitosti je kolmá na směr nejmenšího hlavního napětí. Kritická hodnota g' se vypočte jako $g'_{crit} = 1/f(n_{1,crit}, n_{2,crit})$, kde $n_{1,crit} = \sqrt{N_{1,crit}}$ a $n_{2,crit} = \sqrt{1 - N_{1,crit}}$. Lepší představu o chování modelu než g'_{crit} nám dá kritická hodnota tečného modulu

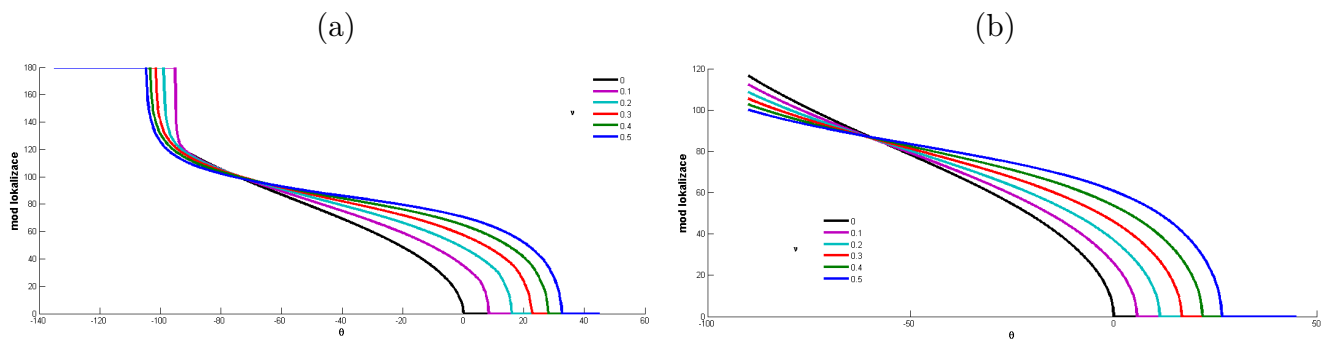
$$E_{ed,crit} = (1 - \omega - g'_{crit} \varepsilon_{eq})E = \left(1 - \omega - \frac{\varepsilon_{eq}}{f(n_{1,crit}, n_{2,crit})} \right) E \quad (56)$$

7.1 Výsledky lokalizační analýzy

Výsledky lokalizační analýzy pro tři definice ekvivalentní deformace za rovinné napjatosti jsou znázorněny na obrázcích 5-9. Směr potenciální plochy nespojitosti je popsán lokalizačním úhlem α , což je úhel mezi normálou na plochu nespojitosti a hlavní osou, odpovídající největšímu hlavnímu napětí. Tento úhel se vypočítá jako $\alpha = \arccos n_{1,crit} = \arccos \sqrt{N_{1,crit}}$. Místo hodnoty g'_{crit} je vykreslen kritický poměr tečného a sečného modulu $E_{ed,crit}/E_u$. Mód lokalizace je znázorněn úhlem mezi vektory \mathbf{m}



Obrázek 5: Výsledky lokalizační analýzy pro Mazarsovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

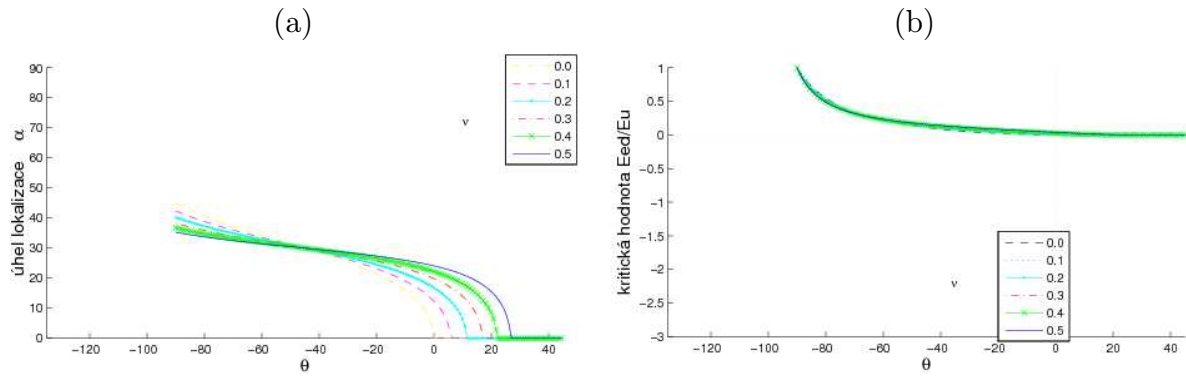


Obrázek 6: Typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání: (a) Mazarsova definice ekvivalentní deformace, (b) Rankinova definice ekvivalentní deformace

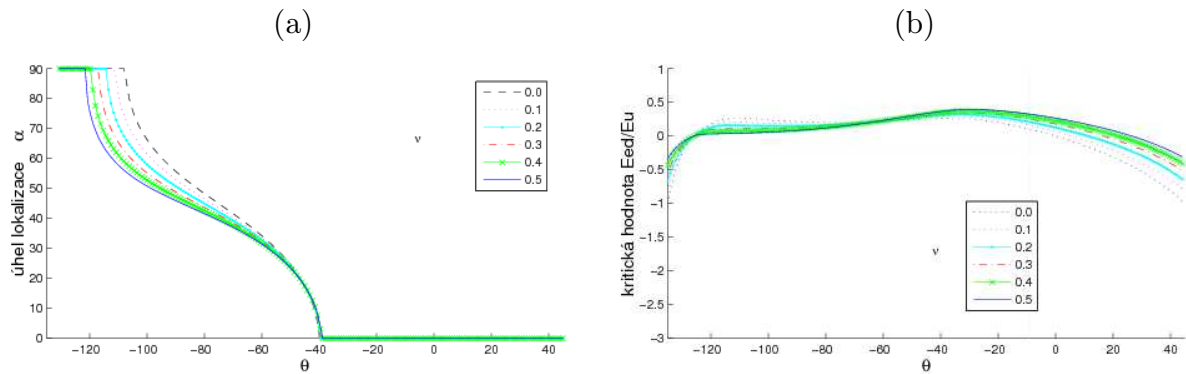
a n . Lokalizační úhel, hodnota kritického modulu i mód lokalizace závisejí na zvoleném typu ekvivalentní deformace, Poissonově součiniteli a napjatosti. Napjatost je charakterizována poměrem $\bar{\sigma}_2/\bar{\sigma}_1$. Pro její názorný popis zavedeme v rovině hlavních napětí polární úhel θ , pro který platí $\bar{\sigma}_1 = c \cos \theta$ a $\bar{\sigma}_2 = c \sin \theta$, kde $c = \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2}$ je nezáporné číslo. Pro $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2$ je $\theta \in [-135^\circ; 45^\circ]$. Hodnoty $\theta = -135^\circ, -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ odpovídají dvojosému tlaku, jednoosému tlaku, smyku, jednoosému tahu a dvojosému tahu.

Výsledky lokalizační analýzy jsou poněkud překvapivé. Pro **Mazarsovu** definici ekvivalentní deformace (obrázek 5) je za jednoosého tahu lokalizační úhel nulový a lokalizační mód tahový pouze v případě nulového Poissonova součinitele. Pro typickou hodnotu $\nu = 0.2$ je plocha nespojitosti odkloněná a neprochází tedy kolmo k hlavnímu napětí, navíc nenastává tahový mód. Ještě více překvapující je kritická hodnota tečného modulu. V některých případech může k lokalizaci docházet dokonce ještě před dosažením vrcholu pracovního diagramu. Neplatí tedy příliš zjednodušená představa, že lokalizace nastává pouze při změkčování.

Na obrázku 7 jsou zobrazeny lokalizační vlastnosti modelu s **Rankinovou** definicí ekvivalentní deformace. Pokud jsou obě hlavní napětí záporná, k lokalizaci nemůže docházet.



Obrázek 7: Výsledky lokalizační analýzy pro Rankinovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

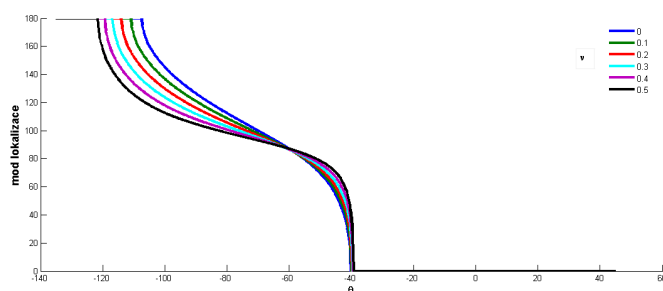


Obrázek 8: Výsledky lokalizační analýzy pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

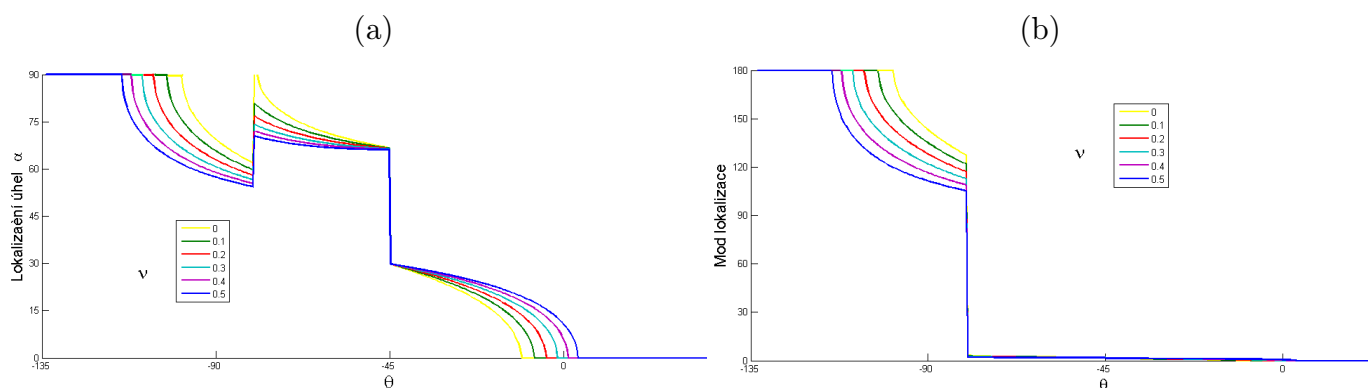
To je logické, protože v tomto případě není ekvivalentní deformace podle Rankinovy definice kladná a nedochází vůbec k rozvoji poškození. Pro jednoosý tah je lokalizační úhel opět nulový pouze při nulovém Poissonově součiniteli. Tahový mód lokalizace za jednoosého tahu nastává také pouze při hodnotě $\nu = 0$. Ve většině případů je kritická hodnota tečného modulu kladná a k lokalizaci opět může docházet ve zpevňující části pracovního diagramu.

Nakonec uvažujme upravenou **von Misesovu** definici ekvivalentní deformace (obrázek 8). Na první pohled se zdají být tyto výsledky v dobrém souladu s naším očekáváním, například za jednoosého tahu je lokalizační úhel nulový a plocha nespojitosti je tedy kolmá ke směru zatížení, úhel mezi vektory \mathbf{m} a \mathbf{n} je taktéž nulový. Avšak tečný modul dosahuje v tomto případě výrazně kladné hodnoty a lokalizace může nastat velmi brzy před dosažením vrcholu pracovního diagramu.

Vlastnosti modelu **Comi–Perego** závisejí na celé řadě parametrů. Lokalizační analýza byla provedena pro následující hodnoty (převzaté od autorů modelu): $E = 31.84$ GPa, $a_t = 0.25$, $b_t = 3.16$ MPa, $k_t = 9.8$ MPa², $\sigma_{0t} = 2.882$ MPa, $\sigma_{et} = 1.729$ MPa, $\omega_{0t} = 0.3$,



Obrázek 9: Typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání: upravená von Misesova definice ekvivalentní deformace



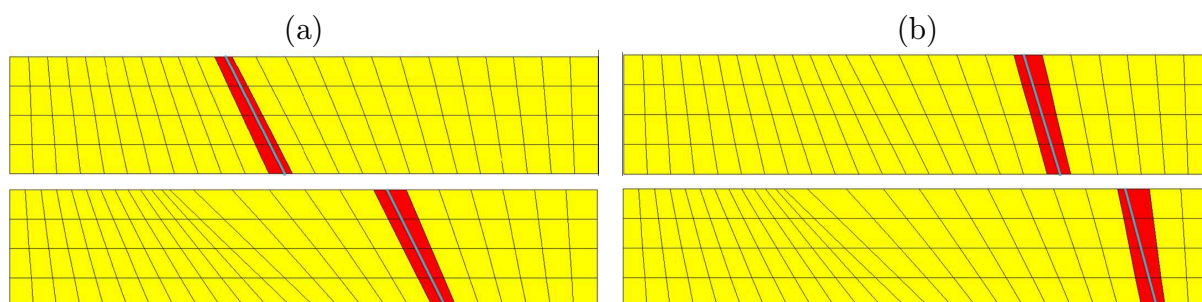
Obrázek 10: Výsledky lokalizační analýzy pro model Comi–Perego: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost módu lokalizace na typu namáhání

$c_t = 2$, $a_c = 0.003$, $b_c = 2.804$ MPa, $k_c = 233.4$ MPa², $\sigma_{0c} = 30.84$ MPa, $\sigma_{ec} = 15.42$ MPa, $\omega_{0c} = 0.555$, $c_c = 2$. Výsledky lokalizační analýzy modelu navrženého Comi a Peregem jsou patrné z obrázku 10. Pro tento model je za jednoosého tahu lokalizační úhel nulový nejen pro hodnotu $\nu = 0$, ale i pro standardní hodnoty Poissonova součinitele $\nu = 0.2$, $\nu = 0.3$. Pro $\nu = 0.4$ a větší k lokalizaci již nedochází kolmo na zatížení. Při smyku je lokalizační úhel roven 45°. Za jednoosého tlaku je hodnota závislá na Poissonově součiniteli a pohybuje se v rozmezí 60 až 70 stupňů.

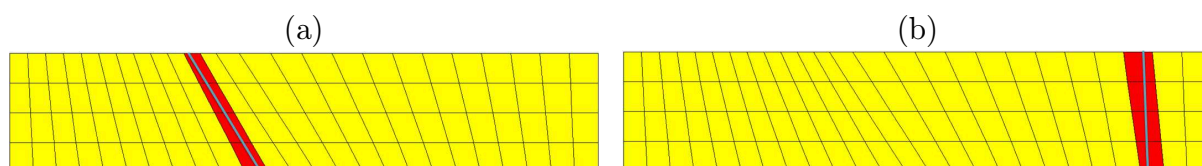
Pokud dochází k lokalizaci tlakového poškození, úhel mezi vektory \mathbf{n} a \mathbf{m} leží v intervalu (110°, 145°). Pro θ rovno přibližně 83° začíná docházet k lokalizaci tahového poškození a mód lokalizace je pro všechny hodnoty ν velice blízko módu tahovému.

7.2 Simulace lokalizace metodou konečných prvků

Některé výsledky získané teoretickou analýzou byly ověřeny numericky metodou konečných prvků. Simulovaný vzorek obdélníkového tvaru byl zatížen jednoosým tahem. Výpočty metodou konečných prvků byly provedeny za předpokladu rovinné napjatosti, prvky byly čtyřúhelníkové izoparametrické s bilineární aproximací a čtyřbodovou integrací. Bylo sestrojeno několik šikmých sítí, obsahujících natočené pásy prvků. Ukázalo se, že numerické řešení spontánně lokalizuje do vrstvy prvků, která je natočena o úhel



Obrázek 11: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků na dvou různých sítích pro (a) Mazarsovu, (b) Rankinovu definici ekvivalentní deformace

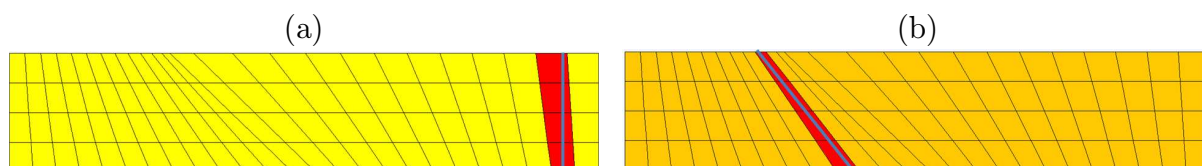


Obrázek 12: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace s poměrem pevností (a) $k = 1$, (b) $k = 10$

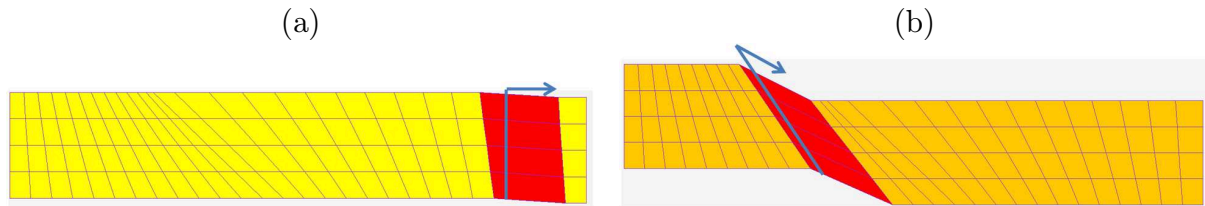
velmi blízký úhlu předpovězenému teoretickou analýzou.

Obrázky 11–12 dokumentují vliv sítě konečných prvků na lokalizační vlastnosti, Poissonův součinitel byl pevně zvolen jako $\nu = 0.2$. Na obrázku 11a jsou předvedeny výsledky pro dvě různé sítě s izotropním modelem poškození a Mazarsovou definicí ekvivalentní deformace. Lokalizované poškození je znázorněno červeně, modrá čára značí úhel určený teoretickou analýzou. Obdobně jsou prezentovány výsledky na obrázku 11b pro model s Rankinovou ekvivalentní deformací.

Obrázek 12 ukazuje lokalizaci pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace na stejné síti, pro různé hodnoty parametru k , který udává poměr pevností v jednoosém tlaku a tahu. Dále byl simulován vliv Poissonova čísla na úhel lokalizace na obrázku 13 jsou zobrazeny dvě sítě s Mazarsovou definicí ekvivalentní deformace a s různým Poissonovým číslem. Na posledním obrázku 14 je mód nespojitosti, šipkou je naznačen teoretický směr, ve kterém by se měla nespojitost šířit. Je patrné, že výsledky simulace jsou v dobré shodě s teoretickou analýzou.



Obrázek 13: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků pro Mazarsovu definici ekvivalentní deformace s Poissonovým součinitelem (a) $\nu = 0$, (b) $\nu = 0.5$



Obrázek 14: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků : mód nespojitosti při Poissonově součiniteli (a) $\nu = 0$, (b) $\nu = 0.5$

Reference

- [1] Comi, C. & Perego, U. 2001: Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, 6427-6454.
- [2] Jirásek, M. 2007: Mathematical analysis of strain localization. *Revue Européenne de Génie Civil*, special issue on Damage and Fracture in Geomaterials, vol. 11, 977-911.
- [3] Bittnar, Z. & Šejnoha, J. 1992: Numerické metody mechaniky, *Nakladatelství ČVUT*.
- [4] Jirásek, M. & Zeman, J. 2006: Přetváření a porušování materiálů, *Nakladatelství ČVUT*.