PRUŽNOST A PEVNOST
(132PPA)

2+2 Z, ZK

Doporučená literatura:

Šejnoha J., Bittnarová J.: Pružnost a pevnost,
ES ČVUT, 2006

Bittnarová J. a kol.: Pružnost a pevnost –
příklady, ES ČVUT, 2006

Šejnoha J., Bittnarová J.: Pružnost a pevnost 20,
ES ČVUT, 2003

Bittnarová J. a kol.: Pružnost a pevnost 20 –
příklady, ES ČVUT, 2004

ÚVOD

Cíl předmětu

Určit

- **přetvoření**
- **napjatost**

v konstrukci od vlivu zatížení

Nutno uvažovat **těleso poddajné**, nikoli dokonale tuhé (jako např. při výpočtu reakcí).

Teorie **pružnosti**: určit posunutí všech bodů tělesa

Nauka o **pevnosti**: určit napětí a jejich meze podle druhu materiálu

Základní předpoklady

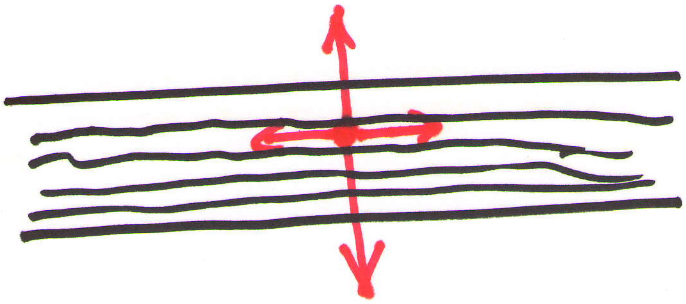
- **Kontinuum**…těleso je souvisle vyplněno hmotou
(ocel, dřevo, beton - uspokojivý předpoklad zeminy, kompozity - nevyhovující).

- **Homogenní materiál**: vlastnosti stejné ve všech bodech.

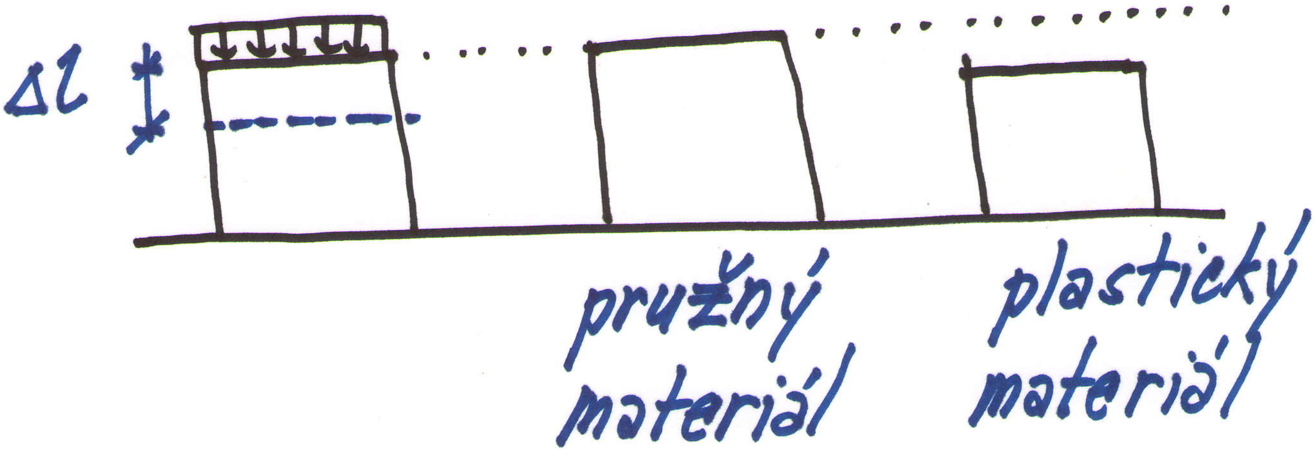
- **Izotropní materiál**: vlastnosti stejné ve všech směrech
(opakem je anizotropie, zvláštní případ je ortotropie).

- **Elementární vnitřní síly jsou spojitě rozloženy** v kontinuu – umožní definovat napětí.

- Dokonale **pružný materiál** – těleso se po odtížení vrátí do původního tvaru (vznik trvalých deformací ▸▸ teorie plasticity).



ortotropie



- **Statické působení** – zatížení roste nekonečně pomalu (neuplatní se setrvačné síly). Disciplina zabývající se vlivem setrvačných sil ▸▸ dynamika.

- **Vliv času se neuvažuje** (pokud je třeba uvážit vliv času ▸▸ reologie – např. dotvarování betonu).

- Předpoklad jednoznačně určených fyzikálních, geometrických vlastností i zatížení, tj. **deterministická mechanika.** (Pro navrhování konstrukcí je nutno uvážit náhodné vlastnosti materiálů i zatížení ▸▸ stochastická mechanika).

Kurz PRPA:

- Základní rovnice teorie pružnosti
- Analýza prutů (ohyb, smyk za ohybu, kroucení)
- Stabilita přímých prutů
- Dvojrozměrná napjatost, úvod do řešení stěn a desek

I/4

ZÁKLADNÍ ROVNICE TEORIE PRUŽNOSTI

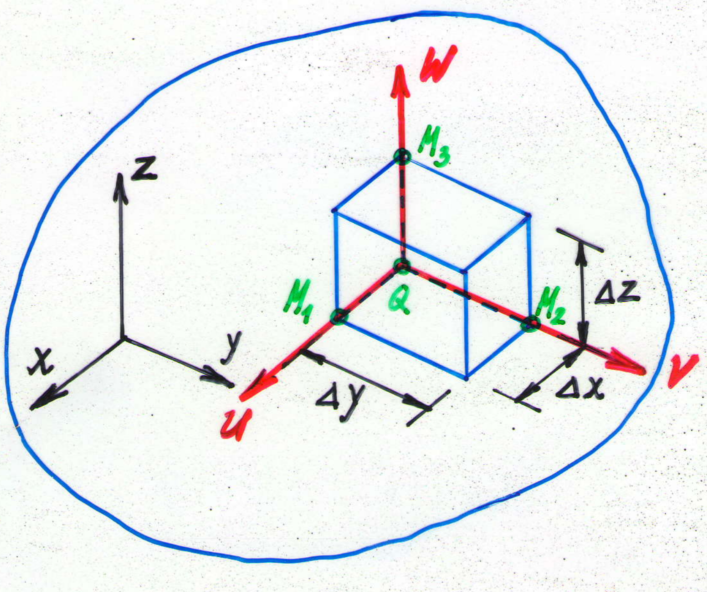
POPIS STAVU DEFORMACE GEOMETRICKÉ ROVNICE

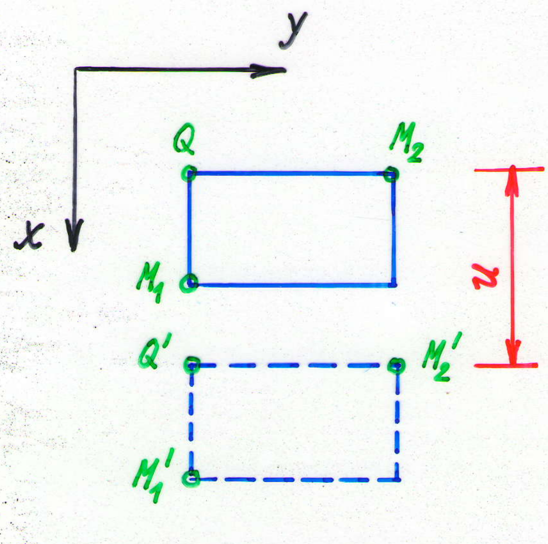
Změna tvaru a objemu těles se nazývá **deformace**

Popis deformace

- **složkami posunutí** u, v, w
- **složkami deformace** $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

Složky posunutí a deformace lze vysvětlit na tvarových změnách **elementárního kvádru**:



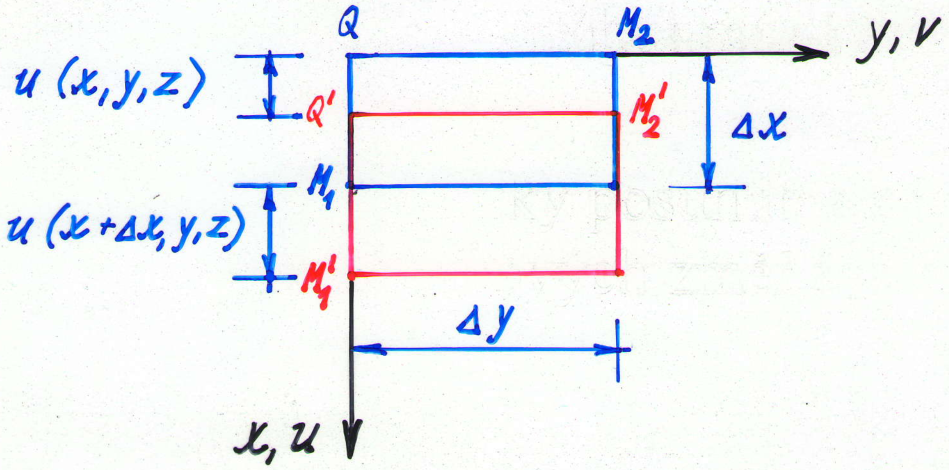


Složky deformace:

- **poměrné délkové deformace** $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
- **poměrné úhlové deformace** $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

Pole deformace: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T$

1. deformační model: pouze protažení hran

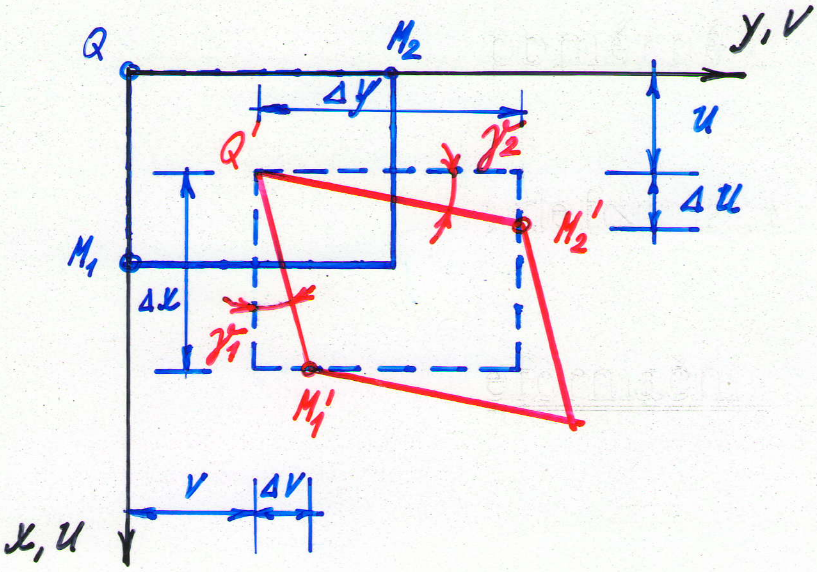


Relativní změna délky hrany QM_1:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Cyklickou záměnou indexů se odvodí další dvě rovnice – tzv. **geometrické rovnice**.

2. deformační model: pouze změny pravých úhlů, délky hran jsou zachovány



Relativní změna pravého úhlu:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta \mathrm{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2ex] \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{array}}$$

Celkem **6 geometrických rovnic** – popisují vztahy mezi složkami posunutí a složkami deformace.

Poznámka:
Soustavu šesti geometrických rovnic lze zapsat v maticovém tvaru

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [\partial]^T \{u\},}$$

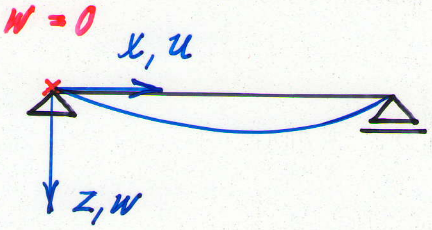
kde $[\partial]^T$ *je tzv. geometrická matice, která obsahuje pouze diferenciální operátory* $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$

Geometrické okrajové podmínky

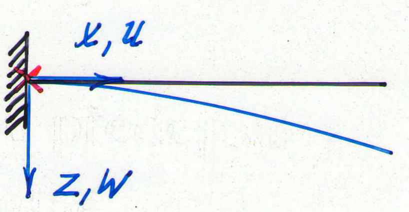
Na části hranice tělesa Γ_u jsou předepsány některé složky posunutí případně jejich derivace.

$$\{u\} = \{\bar{u}\}$$

$u = 0$
$w = 0$



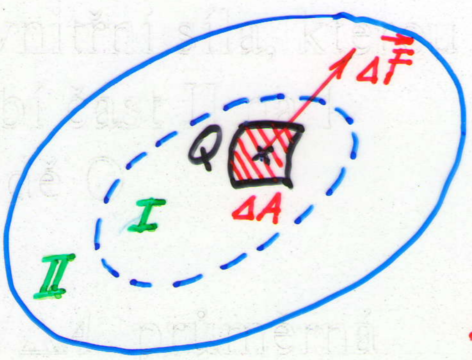
$u = 0, \; w = 0, \; \frac{\partial w}{\partial x} = 0$



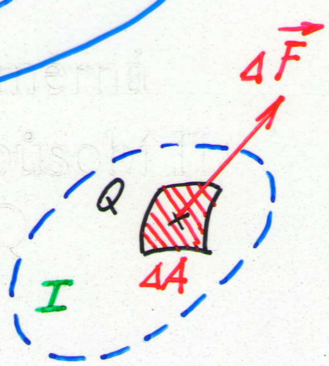
POPIS STAVU NAPĚTÍ STATICKÉ ROVNICE

Hledáme podmínky, za nichž bude libovolná částice tělesa v rovnováze.
V podmínkách rovnováhy se uplatní dva druhy sil:

- vnější (zatížení)
  1. objemové [N/m^3] (např.gravitační)
  2. povrchové
     - [N/m^2] plošné
     - [N/m] liniové
     - [N] bodové
- vnitřní (působí plošně mezi částicemi tělesa)



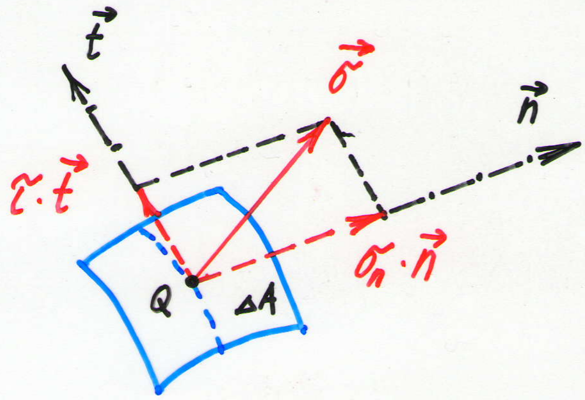
$\Delta\vec{F}$ vnitřní síla, kterou působí část II na I v bodě Q



$\Delta\vec{F}/\Delta A$ průměrná síla, kterou působí II na I v bodě Q

Vektor napětí : $\vec{\sigma} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$ $[\mathrm{N/m^2}]=[\mathrm{Pa}]$

- rozklad $\vec{\sigma}$ do směru normály a tečny



σ_n ...**normálové napětí**

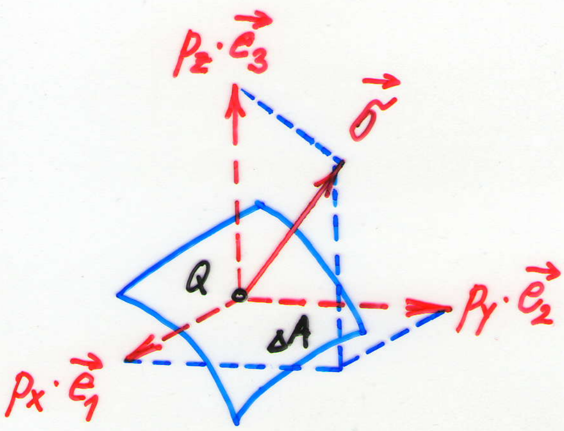
τ ...**smykové napětí**

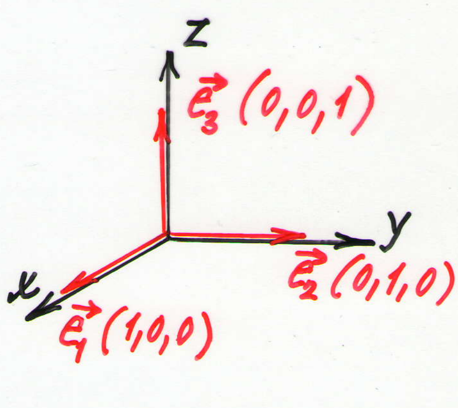
$$\vec{\sigma} = (\sigma_n, \tau)$$

- rozklad $\vec{\sigma}$ do směrů os souřadnic

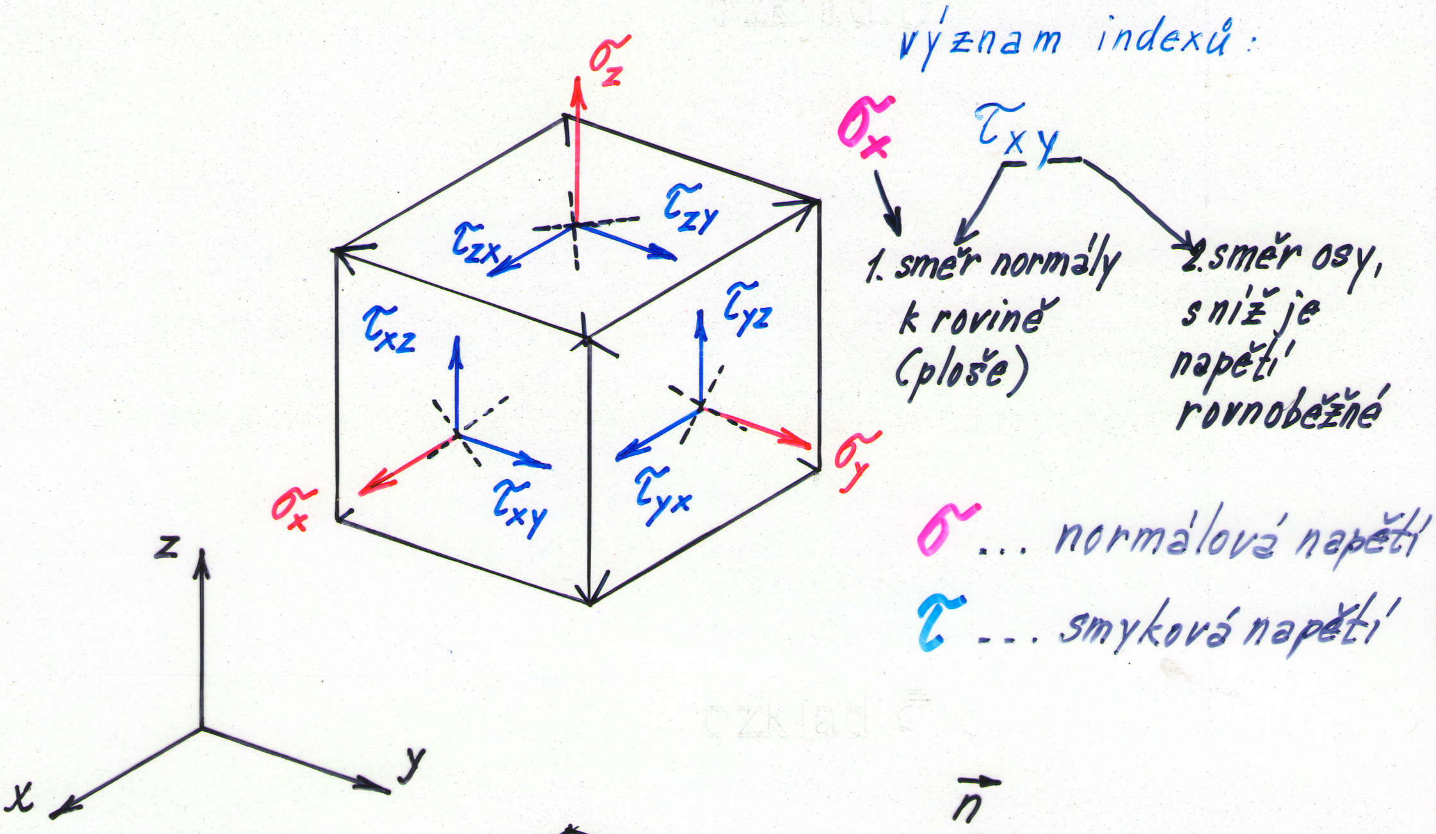
p_x, p_y, p_z ...kartézské složky vektoru napětí

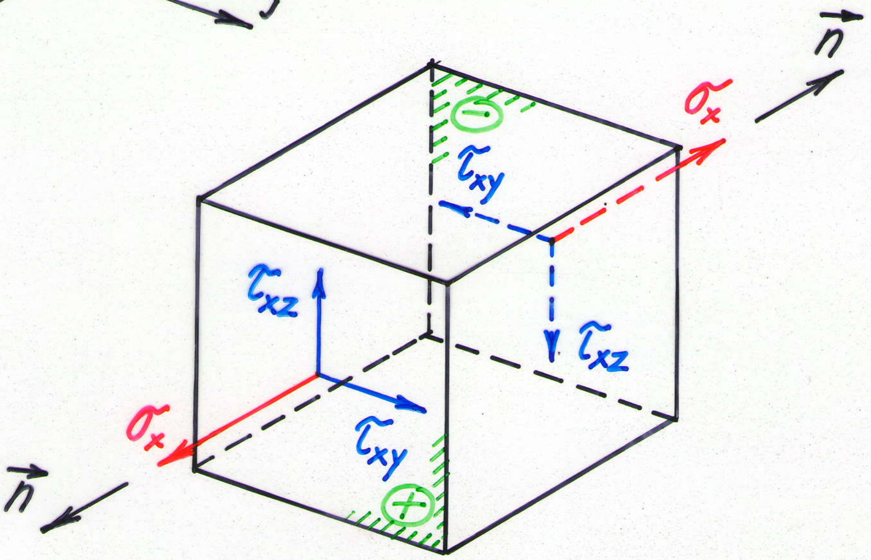
$$\vec{\sigma} = (p_x, p_y, p_z)$$





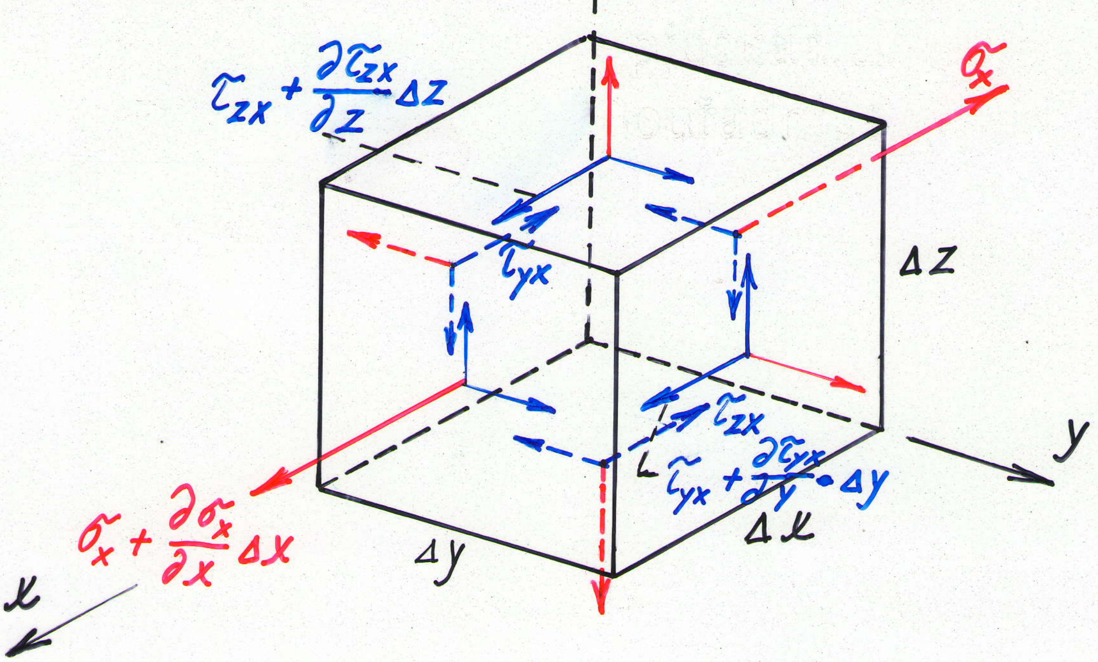
- složky napětí na elementárním kvádru (ploška ΔA je rovnoběžná se souřadnicovými rovinami)





Pole napětí: $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T$

Statické rovnice



- **Cauchyho statické rovnice**
  (ze silových podmínek rovnováhy)
  $\vec{X}$:

$$\left(\cancel{\sigma_x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z - \cancel{\sigma_x \Delta y \Delta z} + \left(\cancel{\tau_{yx}} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta z$$

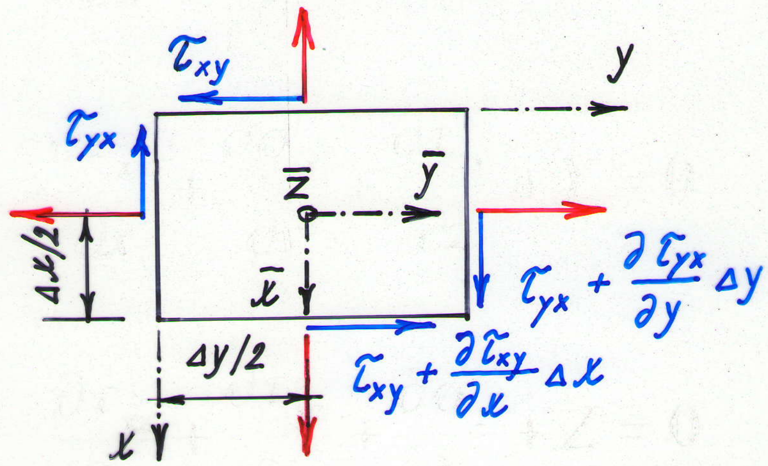
$$-\cancel{\tau_{yx}\Delta x \Delta z} + \left(\cancel{\tau_{zx}} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x \Delta y - \cancel{\tau_{zx}\Delta x \Delta y}$$

$$+ X \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

(pro směry Y,Z analogicky, resp. cyklická záměna indexů). $X, Y, Z \ldots$objemové síly
$[N/m^3]$ (např. objemová tíha)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}}$$

- **Věta o vzájemnosti smykových napětí**
  (z momentových podmínek)



$\overset{\curvearrowleft}{\overline{Z}}$:

$$\tau_{xy}\Delta y\Delta z\frac{\Delta x}{2}+\left(\tau_{xy}+\cancel{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\Delta x}\right)\Delta y\Delta z\frac{\Delta x}{2}$$

4.ř.

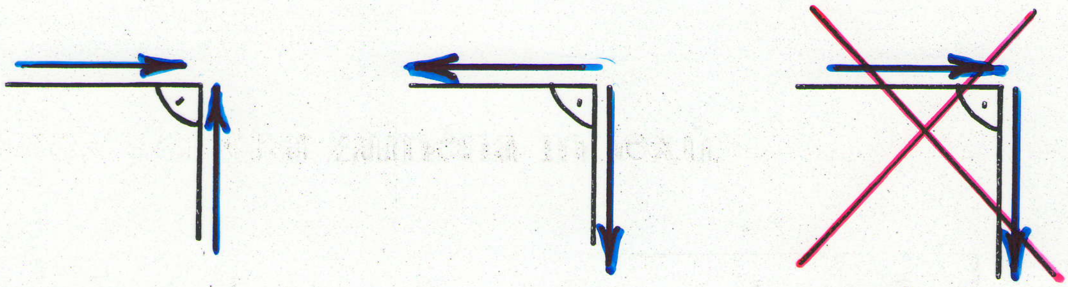
$$-\tau_{yx}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2}-\left(\tau_{yx}+\cancel{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\Delta y}\right)\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2}=0$$

4.ř.

Dále cyklická záměna indexů.

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}}$$

Smyková napětí na dvou vzájemně kolmých ploškách jsou stejně velká a obě směřují buď k průsečnici obou plošek nebo od ní.



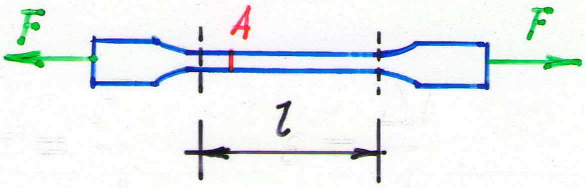
nelze!

FYZIKÁLNÍ ROVNICE

Vztahy mezi složkami napětí $\{\sigma\}$ a složkami deformace $\{\varepsilon\}$.
Určeny experimentálně, vyjadřují fyzikální vlastnosti materiálu.

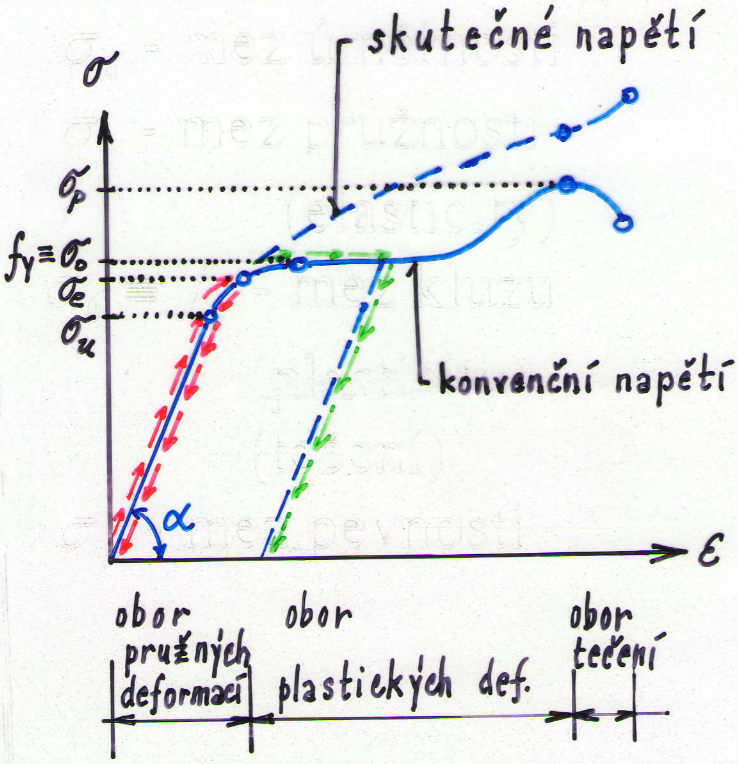
- **Jednoosá napjatost**

  tahová zkouška ⏩ pracovní diagram



$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

příklad – pracovní diagram oceli



σ_u - mez úměrnosti

σ_e - mez pružnosti (elasticity)

$\sigma_0 \equiv f_y$ - mez kluzu (plasticity) (tečení)

σ_p - mez pevnosti

odtěžování

Hookeův zákon

Platí pouze v pružné oblasti až do meze úměrnosti $(\sigma \leq \sigma_u)$

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$

$E = tg\alpha$ [Pa]… Youngův modul pružnosti

ocel: $2{,}1.10^5$ MPa

beton: $2{,}1.10^4$ MPa

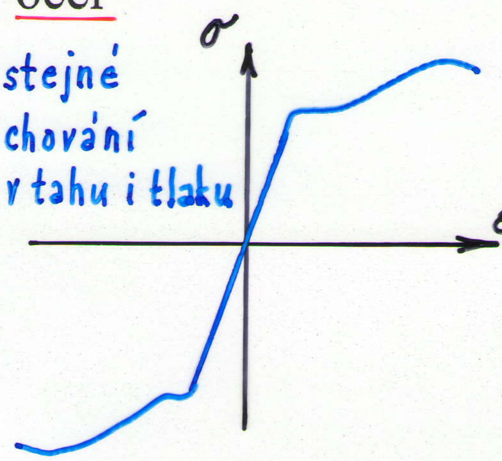
dřevo: 10^4 MPa

zeminy: ~ 25 MPa

Příklady:

ocel

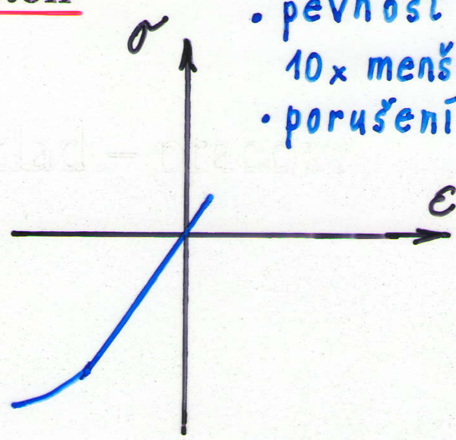
• stejné chování v tahu i tlaku



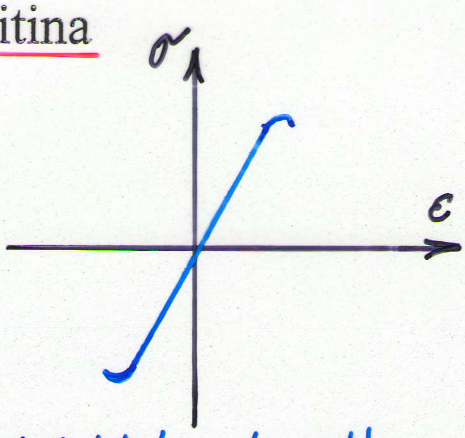
beton

• pevnost v tahu 10x menší než v tlaku

• porušení nastává náhle

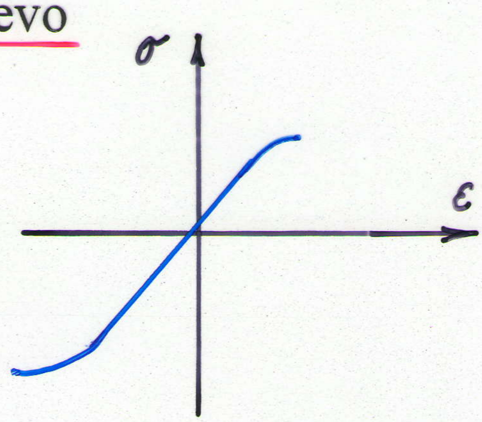


litina



• křehký materiál (nemá plastickou oblast)

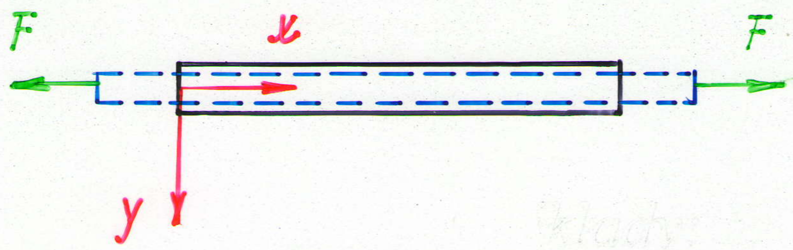
dřevo



• Trojosá napjatost

Rozšířený Hookeův zákon (platí v lineárně pružné oblasti)

Vliv příčné kontrakce (zúžení) při tahové zkoušce:



$$\sigma_x \quad \blacktriangleright\blacktriangleright \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

ν …[-] Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)

$$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}} \qquad 0 \le \nu \le 0{,}5$$

ocel: $\nu \approx 0{,}3$

beton: $\nu \approx 0{,}15$

($m = \dfrac{1}{\nu}$ … Poissonova konstanta)

$$\sigma_y \quad \blacktriangleright\!\!\blacktriangleright \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \| \quad \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\sigma_z \quad \blacktriangleright\!\!\blacktriangleright \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \| \quad \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

Vliv změny teploty na relativní protažení:

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha t$$

α [K^{-1}] … součinitel teplotní roztažnosti

t [K] … změna teploty

(ocel, beton: $\alpha = 12.10^{-6}$ K^{-1})

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right) + \alpha t \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x\right) + \alpha t \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + \alpha t \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}}$$

fyzikální rovnice

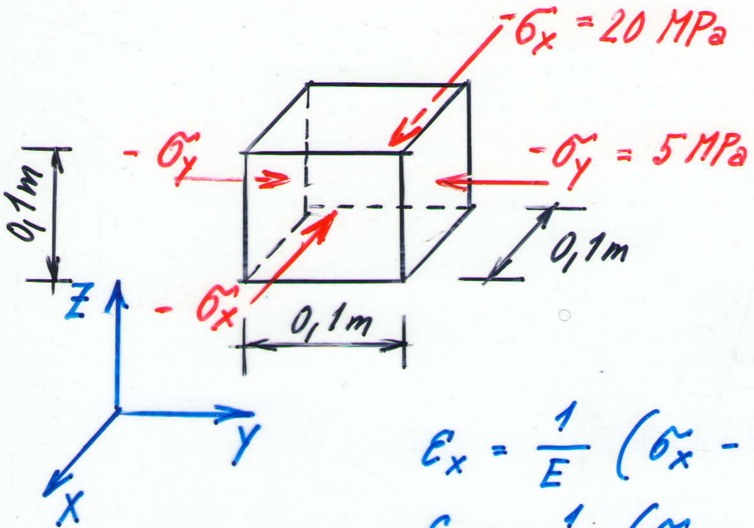
G [Pa] … modul pružnosti ve smyku

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

(jen 2 konstanty nezávislé) !!

Příklady

1) Určete materiálové charakteristiky vzorku ve tvaru krychle s hranou 0,1m, která je zatížena ve dvou kolmých směrech napětím $\sigma_x = -20\,MPa$, $\sigma_y = -5\,MPa$. Hrana rovnoběžná s osou X se zkrátila o 0,1mm, hrana rovnoběžná s osou Y se zkrátila o 0,01mm.



$$\varepsilon_x = \frac{-0{,}0001}{0{,}1} = -0{,}001$$

$$\varepsilon_y = \frac{-0{,}00001}{0{,}1} = -0{,}0001$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$-0{,}001 = \frac{1}{E}[-20 - \nu(-5)]$$

$$-0{,}0001 = \frac{1}{E}[-5 - \nu(-20)]$$

$$E = 19\,231\ MPa$$

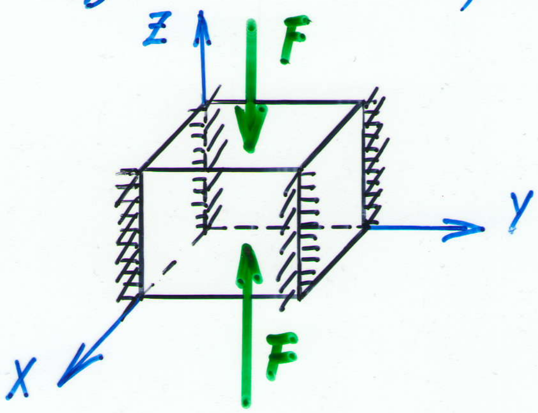
$$\nu = 0{,}154$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8332\ MPa$$

Jedná se o beton.

2) Jak se stlačí betonová krychle o hraně 0,2m, jestliže je nepoddajně upnuta ve dvou kolmých směrech a ve třetím směru je zatížena silou $F = 200\,kN$.

$E_b = 20\,000\ MPa$, $\nu_b = 0{,}15$



$$\sigma_z = \frac{-F}{A} = \frac{-200}{0{,}2 \cdot 0{,}2} = -5000\,kPa$$
$$= -5\,MPa$$

$\varepsilon_x = 0$; $\varepsilon_y = 0$; $\varepsilon_z \neq 0$

Z fyz. rovnic plyne:

$$0 = \frac{1}{20\,000}\left[\sigma_x - 0{,}15\,\sigma_y - 0{,}15(-5)\right] \qquad (a)$$

$$0 = \frac{1}{20\,000}\left[\sigma_y - 0{,}15\,\sigma_x - 0{,}15(-5)\right] \qquad (b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{20\,000}\left[-5 - 0{,}15\,\sigma_x - 0{,}15\,\sigma_y\right] \qquad (c)$$

$$-0{,}75 = \sigma_x - 0{,}15\,\sigma_y \qquad (a)$$
$$-0{,}75 = \sigma_y - 0{,}15\,\sigma_x \qquad (b)$$

$$\sigma_x = -0{,}88235\ MPa$$
$$\sigma_y = -0{,}88235\ MPa$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{20\,000}\left[-5 + 0{,}15 \cdot 0{,}88235 + 0{,}15 \cdot 0{,}88235\right] \qquad (c)$$

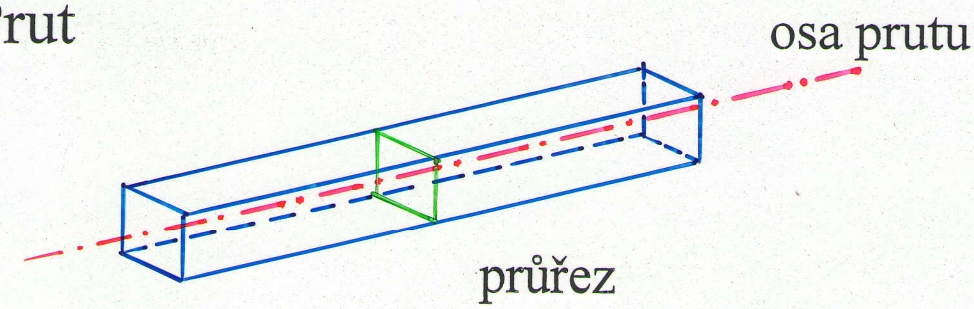
$$= -2{,}3676 \cdot 10^{-4}$$

Absolutní stlačení

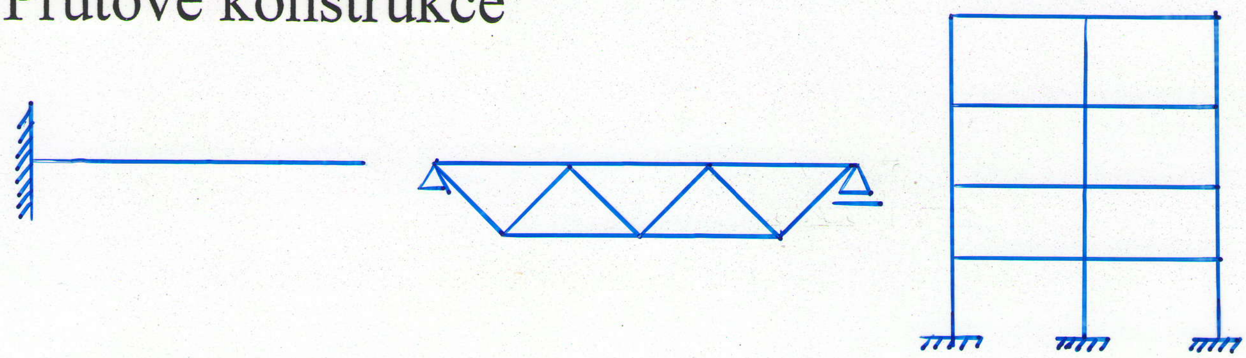
$$\Delta l = \varepsilon_z \cdot l_z = -2{,}3676 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4} = -4{,}735 \cdot 10^{-5}\,m =$$
$$= -0{,}047\,mm$$

ANALÝZA PRUTŮ

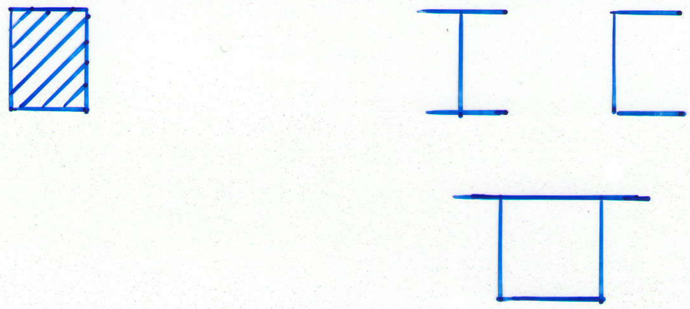
Prut



Prutové konstrukce



Průřezy masivní tenkostěnné



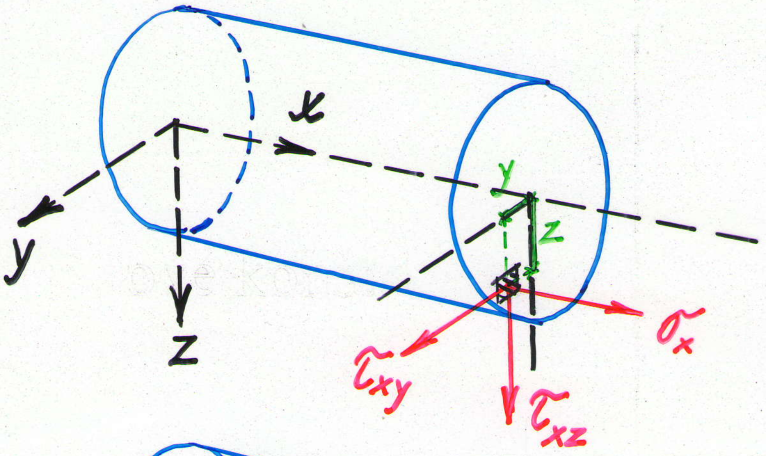
Základní algoritmus:

- Stanovení vnitřních sil v průřezech (statika)
- Výpočet napětí a deformací v bodech průřezů
(pružnost a pevnost)

Integrální definice vnitřních sil

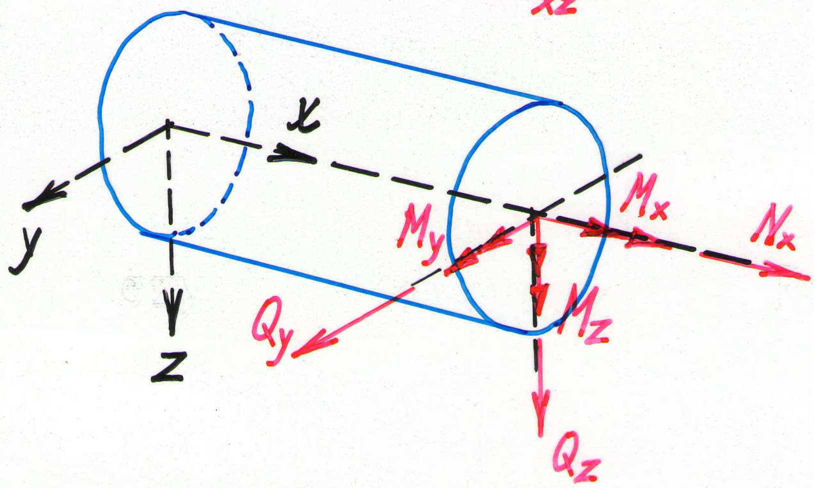
Složky napětí v průřezu prutu

$$\boxed{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}}$$



Vnitřní síly v průřezu prutu

$$\boxed{\begin{matrix} N_x, Q_y, Q_z \\ M_x, M_y, M_z \end{matrix}}$$



$$N_x = \iint_A \sigma_x \mathrm{d}A \qquad M_x = \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z)\mathrm{d}A$$

$$Q_y = \iint_A \tau_{xy} \mathrm{d}A \qquad M_y = \iint_A \sigma_x z \mathrm{d}A$$

$$Q_z = \iint_A \tau_{xz} \mathrm{d}A \qquad M_z = \iint_A -\sigma_x y \mathrm{d}A$$

N_x, M_y, M_z, Q_y, Q_z ▸▸ ohyb

M_x ▸▸ kroucení

OHYB PRUTŮ

vnitřní síly		napětí	přetvoření
M_y, M_z, N_x	⏩	σ_x	u, v, w
Q_y, Q_z	⏩	τ_{xy}, τ_{xz}	

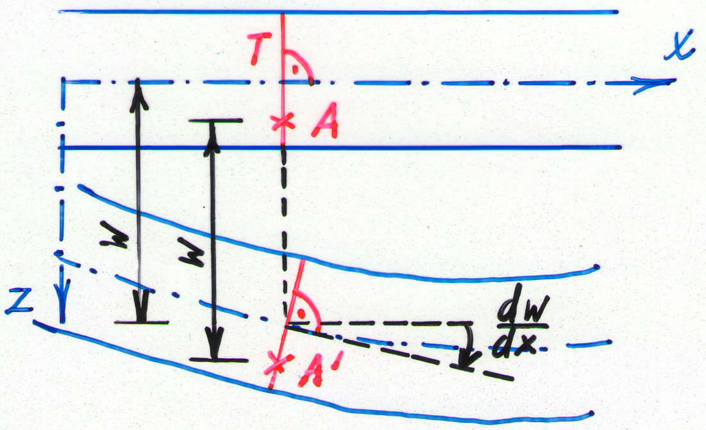
Předpoklady: podélná deformace ε_x je řádově větší než ostatní složky deformace

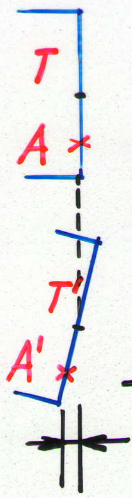
a) $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$...tvar průřezu se nemění

b) $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ ... zachování pravých úhlů v rovinách XY a XZ

Bernoulli – Navierova hypotéza:

Průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstávají rovinné a kolmé k ose prutu i po deformaci





$w = w(x)$

$v = v(x)$

$-u(x,y,z)$

Funkce posunutí u(x,y,z) je lineární funkce v souřadnicích (y,z):

$$u(x,y,z) = A(x) + B(x)\cdot y + C(x)\cdot z$$

(v průřezu $x=x_0$ jsou A, B, C konstanty)

$A(x)=u_0$
(translace)

Z předpokladu b) plyne:

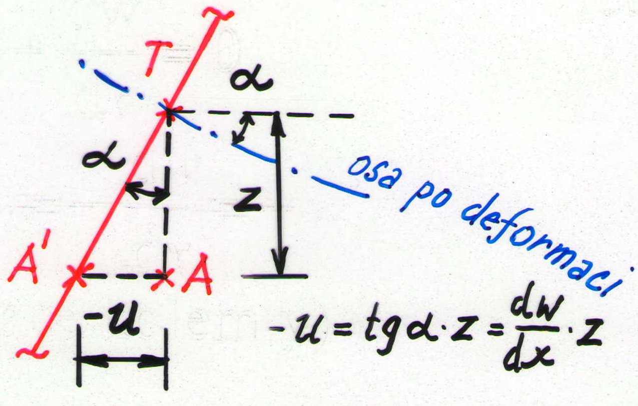
$$\alpha)\ \gamma_{xy} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} = 0$$

$$B(x) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$B(x) = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -v'$$

(rotace kolem z)

$$\beta)\ \gamma_{xz} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x)}{\partial x} = 0$$



$$C(x) + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$C(x) = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -w'$$

(rotace kolem y)

$$u = u_0 - v'(x)\cdot y - w'(x)\cdot z$$

Normálové napětí

Z fyzikálních rovnic:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\partial u}{\partial x} = E\left(\underline{u_0'} - \underline{v''}\cdot y - \underline{w''}\cdot z\right)$$

Parametry deformace $\underline{u_0'}, \underline{v''}, \underline{w''}$ určíme z definičních vzorců vnitřních sil:

$$N_x = \iint_A \sigma_x \mathrm{d}A = E\left(u_0' \overbrace{\iint_A \mathrm{d}A}^{A} - v'' \overbrace{\iint_A y\mathrm{d}A}^{S_z} - w'' \overbrace{\iint_A z\mathrm{d}A}^{S_y} \right)$$

$$-M_z = \iint_A \sigma_x y\mathrm{d}A = E\left(u_0' \overbrace{\iint_A y\mathrm{d}A}^{S_z} - v'' \overbrace{\iint_A y^2\mathrm{d}A}^{I_z} - w'' \overbrace{\iint_A yz\mathrm{d}A}^{D_{yz}} \right)$$

$$M_y = \iint_A \sigma_x z\mathrm{d}A = E\left(u_0' \overbrace{\iint_A z\mathrm{d}A}^{S_y} - v'' \overbrace{\iint_A yz\mathrm{d}A}^{D_{yz}} - w'' \overbrace{\iint_A z^2\mathrm{d}A}^{I_y} \right)$$

V maticovém tvaru:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{N_x} \\ \boldsymbol{-M_z} \\ \boldsymbol{M_y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{E} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \cancel{\boldsymbol{S_z}} & \cancel{\boldsymbol{S_y}} \\ \cancel{\boldsymbol{S_z}} & \boldsymbol{I_z} & \boldsymbol{D_{yz}} \\ \cancel{\boldsymbol{S_y}} & \boldsymbol{D_{yz}} & \boldsymbol{I_y} \end{bmatrix}}_{} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u_0'} \\ \boldsymbol{-v''} \\ \boldsymbol{-w''} \end{Bmatrix}$$

matice tuhosti průřezu

pro těžišťové osy y, z platí: $S_y = S_z = 0$

Řešení soustavy rovnic:

$$\underline{u_0'} = \frac{N_x}{EA}$$

$$\underline{-v''} = -\frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{EI} \qquad I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

$$\underline{-w''} = \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{EI}$$

Vzorec pro funkci σ_x, jsou-li <u>Y,Z libovolné těžišťové osy</u>:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I} y + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I} z}$$

Vzorec pro funkci σ_x, jsou-li <u>Y,Z hlavní těžišťové osy</u> (D_{yz}=0):

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z}$$

σ_x je lineární funkce y, z a představuje rovinu, protínající průřez v přímce nazývané <u>neutrální osa</u> ($\underline{\sigma_x = 0}$).

Zvláštní případy namáhání

1. Prostý tah (tlak) $N_x \neq 0 \ (M_y = M_z = 0)$

2. Jednoduchý ohyb $M_y \neq 0 \ (M_z = N_x = 0)$

nebo

$M_z \neq 0 \ (M_y = N_x = 0)$

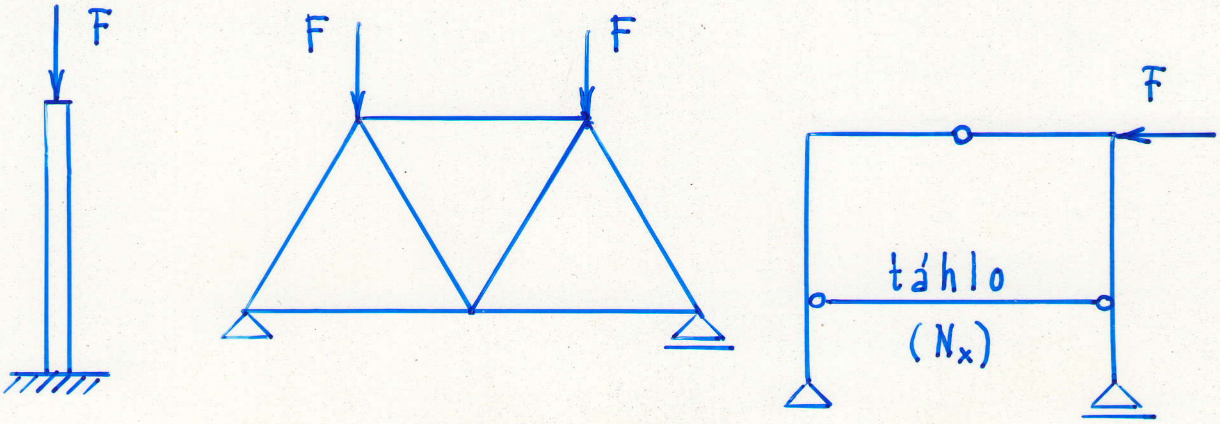
3. Šikmý ohyb $M_y \neq 0, \ M_z \neq 0 \ (N_x = 0)$

4. Kombinace tahu (tlaku) s ohybem

$N_x \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0$

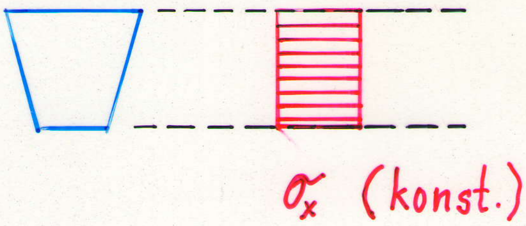
1. Prostý tah (tlak)

- V průřezu vzniká pouze normálová síla N_x



- Normálové napětí rozloženo po průřezu rovnoměrně. Neutrální osa ($\sigma_x = 0$) leží v nekonečnu.

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{A}}$$



- Deformace ε_x

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha t}$$ (fyzikální rovnice)

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}$$ ▸▸ $u = \ldots$ (geometrická rovnice)

- Zvláštní případ: N_x, A, E, t … konstantní
  Prodloužení (zkrácení) prutu:

$$\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l \varepsilon_x \mathrm{d}x = \int_0^l \left(\frac{N_x}{EA} + \alpha t \right) \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{N_x l}{EA} + \alpha t l}$$

$\dfrac{l}{EA}$ … poddajnost prutu v tahu (tlaku)

$\dfrac{EA}{l}$ … tuhost prutu v tahu (tlaku)

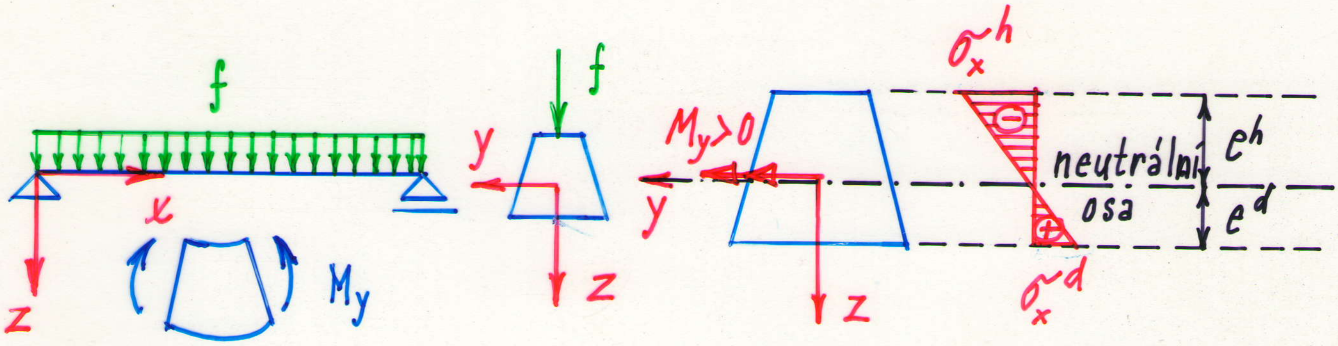
2. Jednoduchý ohyb

Rovina vnějšího zatížení obsahuje jednu z hlavních centrálních os y, z.

Osa prutu zůstává i po deformaci v rovině zatížení.

V průřezu vzniká pouze ohybový moment M_y nebo M_z.

a) $\boxed{M_y \neq 0}$



$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z}$$

neutrální osa $\sigma_x = 0$ ⏩ $z = 0$

kolmá k rovině zatížení a prochází těžištěm

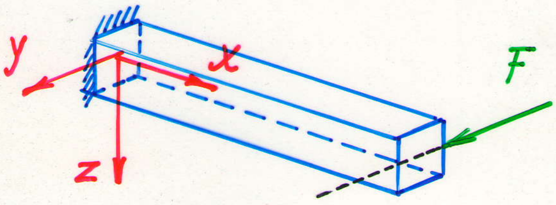
Vzorce vhodné pro návrh průřezu:

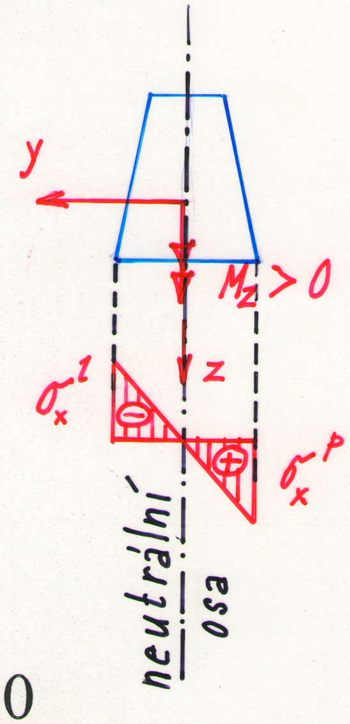
$$\sigma_x^d = \frac{M_y}{I_y} e^d \qquad \boxed{\left|\sigma_x^d\right| = \frac{\left|M_y\right|}{W_y^d}} \qquad \boxed{W_y^d = \frac{I_y}{\left|e^d\right|} \quad [\mathrm{m}^3]}$$

$$\sigma_x^h = \frac{M_y}{I_y}\left(-e^h\right) \qquad \boxed{\left|\sigma_x^h\right| = \frac{\left|M_y\right|}{W_y^h}} \qquad \boxed{W_y^h = \frac{I_y}{\left|e^h\right|} \quad [\mathrm{m}^3]}$$

W … průřezový modul

b) $\boxed{M_z \neq 0}$



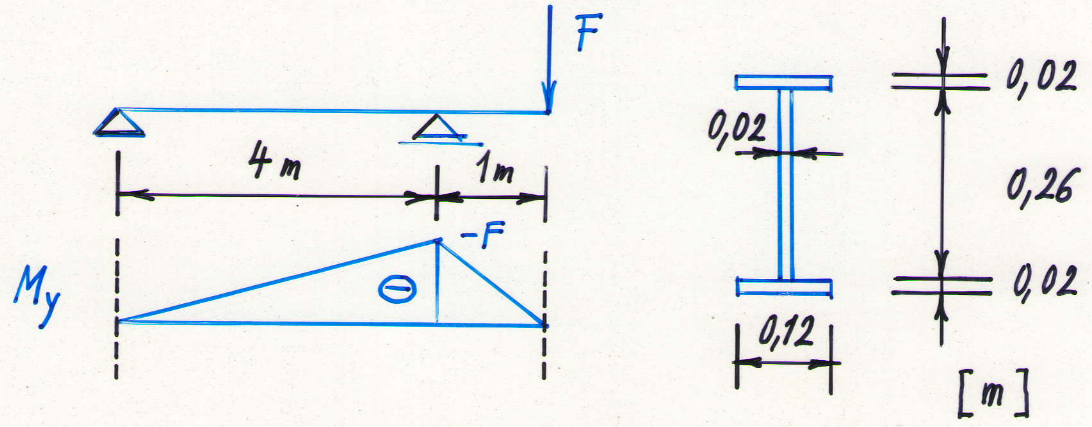


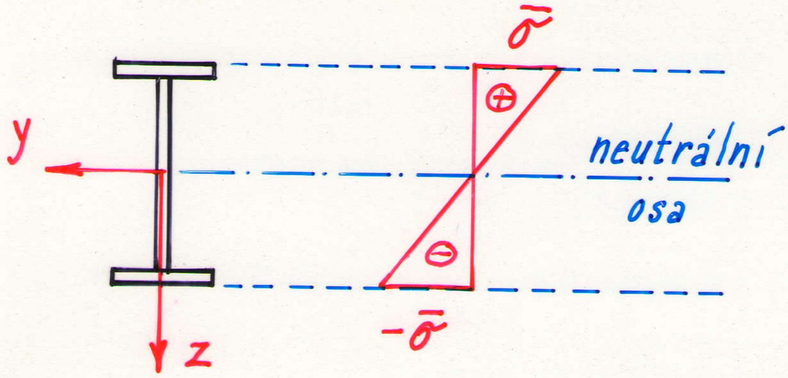
$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y}$$

neutrální osa $\sigma_x = 0$ ▸▸ $y = 0$

Poznámka: pokud v průřezu nevznikají posouvající síly, označuje se případ jako ***prostý ohyb.***

Příklad: *Jak velká síla F může namáhat nosník s převislým koncem, aby největší napětí nepřekročilo hodnotu $\bar{\sigma}$ =160 MPa?*





$$\max \boldsymbol{M}_y = -\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{I}_y = 1{,}235 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$

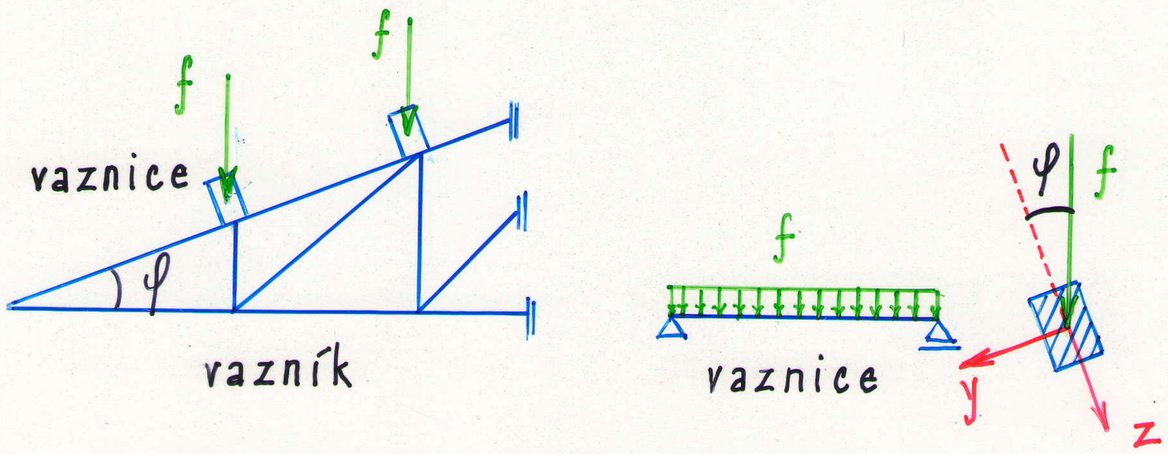
$$\boldsymbol{W}_y = \frac{1{,}235 \cdot 10^{-4}}{0{,}15} = 8{,}2355 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\left|\max \boldsymbol{M}_y\right|}{\boldsymbol{W}_y}$$

$$\underline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{W}_y \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{0{,}132\mathrm{MN}}$$

3. Šikmý ohyb

Rovina zatížení neobsahuje žádnou z hlavních centrálních os.



a) Vyjádření v hlavních osách y, z
($M_y \neq 0, M_z \neq 0$)

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z}$$

b) Vyjádření pro osy y, z, které nejsou hlavní

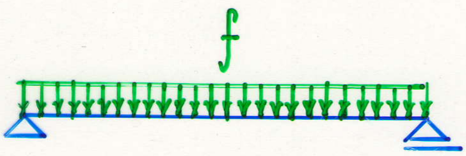
$$\sigma_x = -\frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I}y + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I}z$$

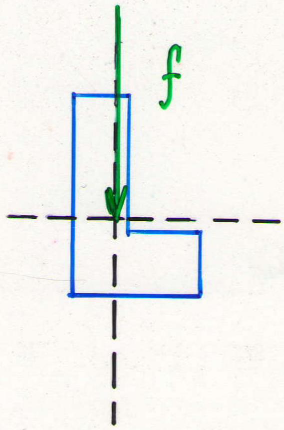
$$I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

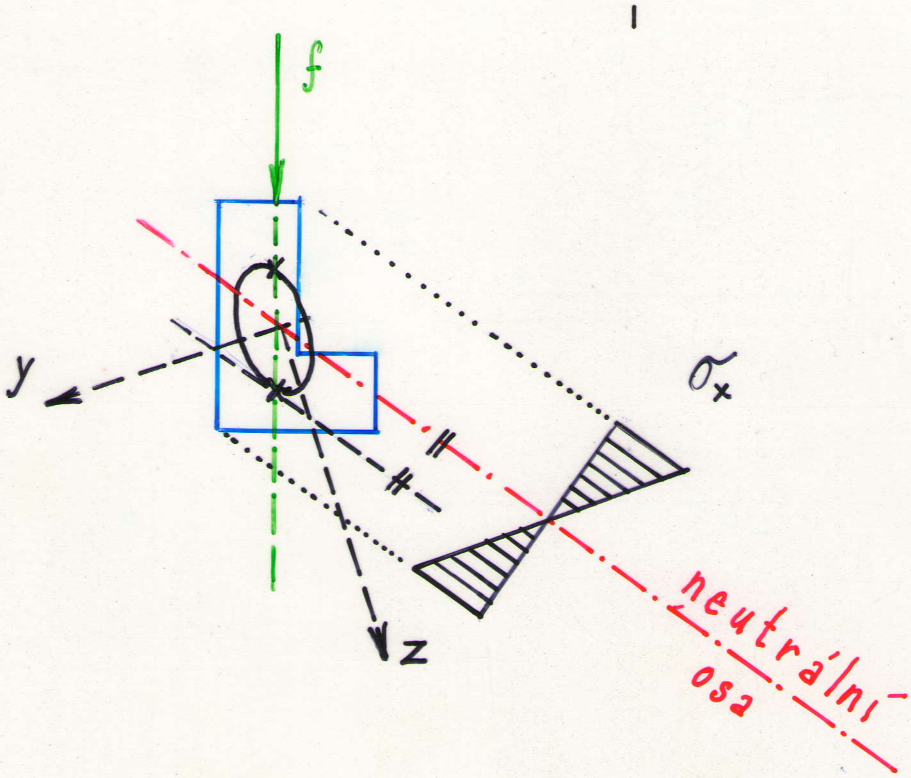
Neutrální osa: $\sigma_x = 0$

$$-\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = 0$$

- je přímka procházející těžištěm průřezu
- není kolmá k rovině zatížení
- paprsek zatížení a neutrální osa tvoří sdružené směry v hlavní centrální elipse setrvačnosti

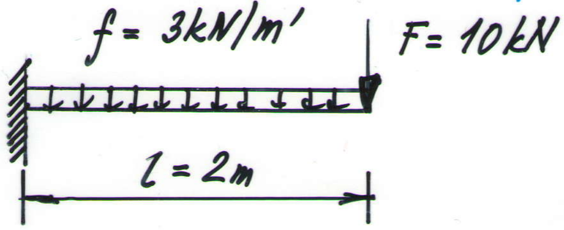


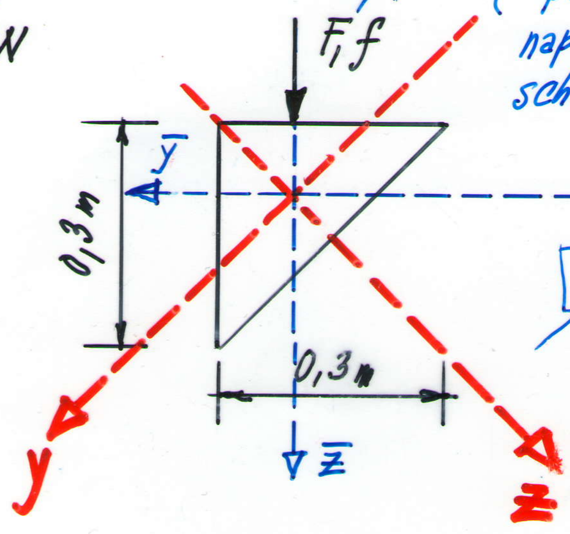


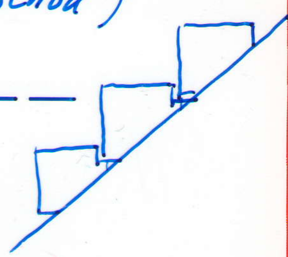


Příklad: Vypočítejte průběh normálového napětí v nejvíce namáhaném průřezu konzoly.

(Aplikace: např. vetknutý schod)







y, z ... hlavní osy

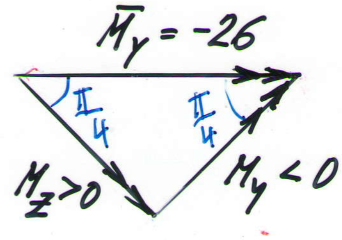
$\bar{y}, \bar{z}$ ... pomocné osy

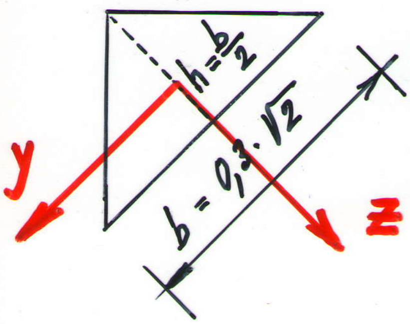
① Řešení v hlavních osách y, z

$$\max \bar{M}_y = -Fl - f\frac{l^2}{2} = -26\,kNm$$

$$\max M_y = -|\max \bar{M}_y| \cdot \sin\frac{\pi}{4} = -18{,}4\,kNm$$

$$\max M_z = |\max \bar{M}_y| \cdot \cos\frac{\pi}{4} = +18{,}4\,kNm$$





$b = 0{,}42\,m$ $\qquad h = 0{,}21\,m$

$$I_y = \frac{1}{36} b h^3 = 1{,}125 \cdot 10^{-4}\,m^4$$

$$I_z = \frac{1}{48} h b^3 = 3{,}375 \cdot 10^{-4}\,m^4$$

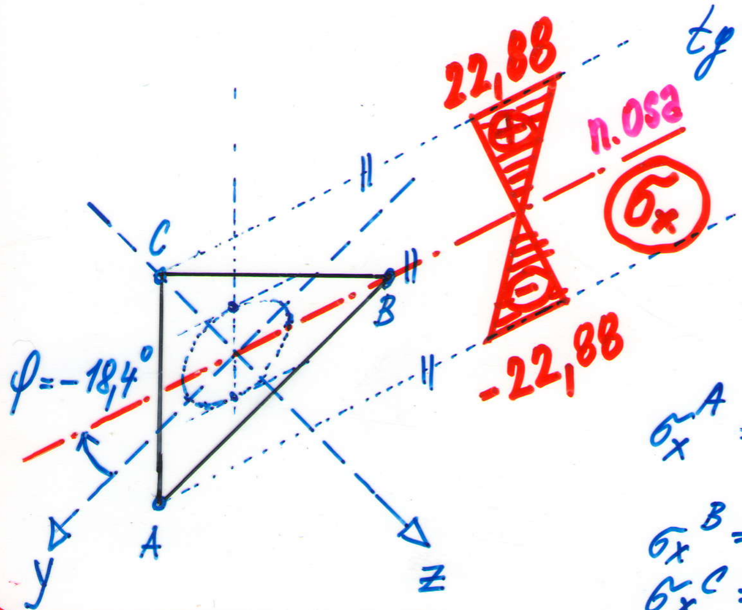
$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_x = -\frac{18{,}4 \cdot 10^{-3}}{3{,}375 \cdot 10^{-4}} y + \frac{-18{,}4 \cdot 10^{-3}}{1{,}125 \cdot 10^{-4}} z \; [MPa]$$

$$\sigma_x = -54{,}47\,y - 163{,}42\,z$$

n. osa: $\quad -54{,}47\,y - 163{,}42\,z = 0$

$$tg\,\varphi = \frac{z}{y} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = -18{,}4^\circ$$



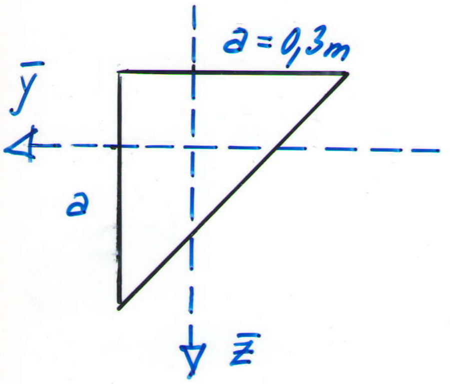
A [0,21; 0,07]
B [-0,21; 0,07]
C [0; -0,14]

$$\sigma_x^A = -54{,}47 \cdot 0{,}21 - 163{,}42 \cdot 0{,}07 = -22{,}88\,MPa$$

$$\sigma_x^B = 0$$

$$\sigma_x^C = 22{,}88\,MPa$$

② Řešení v pomocných osách $\bar{y}, \bar{z}$



$$\bar{M}_y = -26\,kNm \quad ; \quad \bar{M}_z = 0$$

$$\bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{1}{36} a^4 = 2{,}25 \cdot 10^{-4}\, m^4$$

$$\bar{D}_{yz} = \frac{1}{72} a^4 = 1{,}125 \cdot 10^{-4}\, m^4$$

$$I = \bar{I}_y \bar{I}_z - \bar{D}_{yz}^2 = 3{,}8 \cdot 10^{-8}\, m^8$$

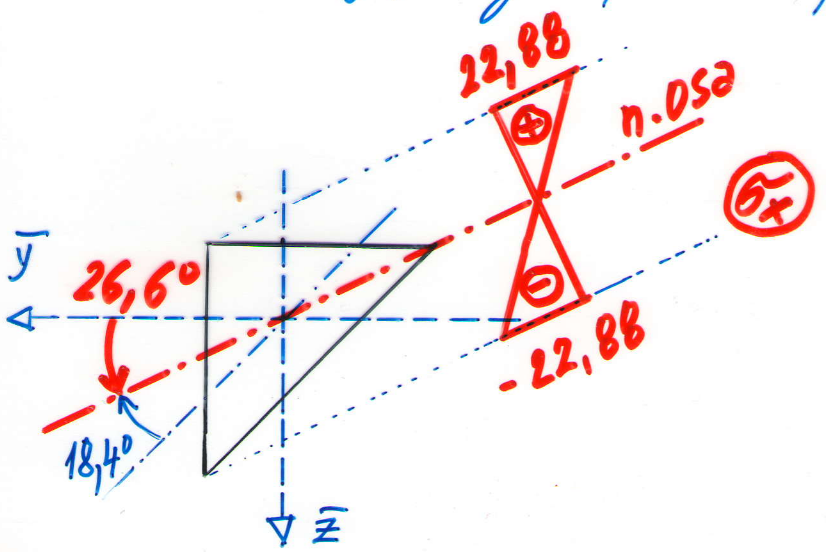
$$\sigma_x = -\frac{\bar{M}_z \bar{I}_y + \bar{M}_y \bar{D}_{yz}}{I}\,\bar{y} + \frac{\bar{M}_y \bar{I}_z + \bar{M}_z \bar{D}_{yz}}{I}\,\bar{z}$$

[MPa] $$\sigma_x = -\frac{-0{,}026 \cdot 1{,}125 \cdot 10^{-4}}{3{,}8 \cdot 10^{-8}}\,\bar{y} + \frac{-0{,}026 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-4}}{3{,}8 \cdot 10^{-8}}\,\bar{z}$$

$$\sigma_x = 76{,}974\,\bar{y} - 153{,}947\,\bar{z}$$

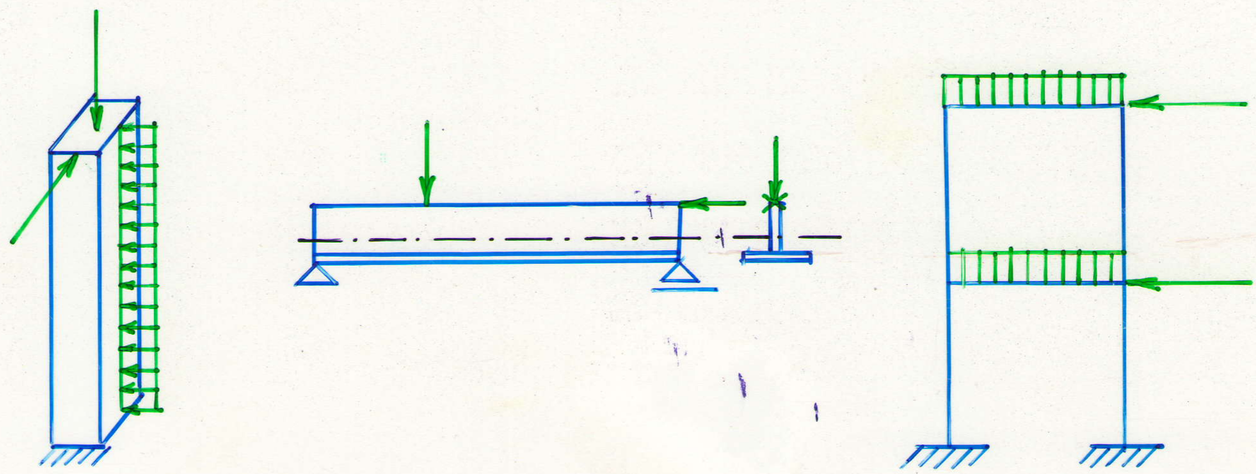
n.osa: $76{,}974\,\bar{y} - 153{,}947\,\bar{z} = 0$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\bar{z}}{\bar{y}} = 0{,}5 \longrightarrow \underline{\varphi \doteq 26{,}6^\circ}$$



4. Kombinace tahu (tlaku) s ohybem

Účinek N_x, M_y, M_z



Normálové napětí σ_x:

a) Vyjádření v hlavních osách y, z

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

b) Vyjádření v osách y, z, které nejsou hlavní

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I} y + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I} z$$

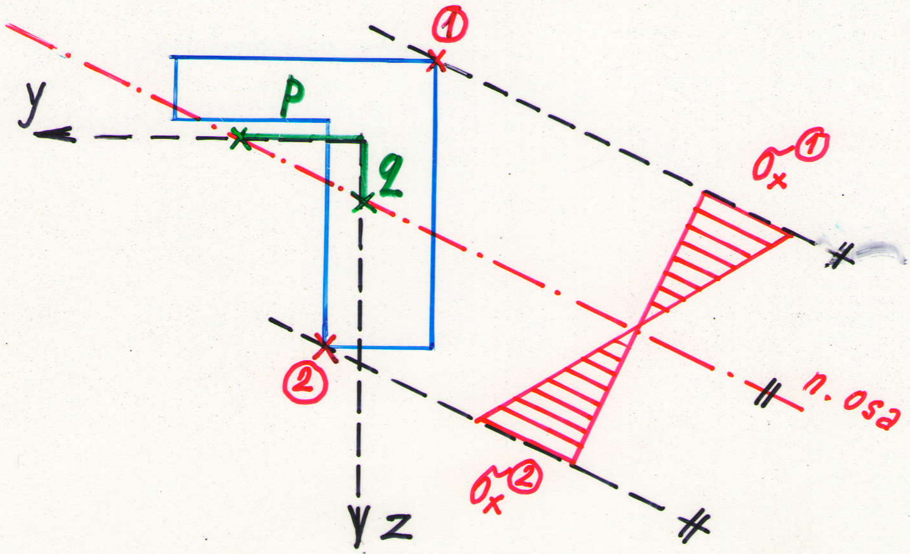
$$I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

(n.o. neprochází těžištěm)

Poloha neutrální osy ($\sigma_x = 0$): $a + by + cz = 0$

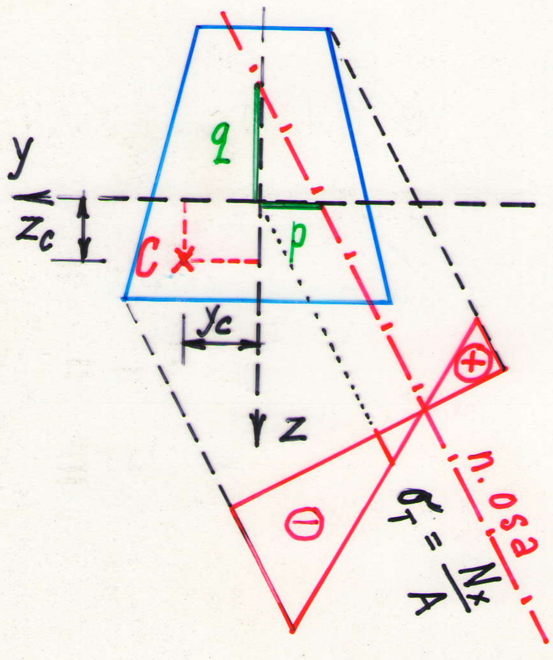
úsekový tvar přímky… $z = 0 \Rightarrow p = y_N = \dots$

$y = 0 \Rightarrow q = z_N = \dots$



- Excentricky působící tlaková síla F … zvláštní případ

rovnoběžná s osou x (osy y, z jsou hlavní)



$C(y_c, z_c)$…tlakové centrum

$N_x = -F$

$M_y = -F \cdot z_c$

$M_z = F \cdot y_c$

neutr. osa: $0 = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_c}{i_z^2 \cdot A} y - \frac{F \cdot z_c}{i_y^2 \cdot A} z \quad \Big/ \cdot \frac{-A}{F}$

$I_z = A \cdot i_z^2$

$I_y = A \cdot i_y^2$

$$0 = 1 + \frac{y_c}{i_z^2} y + \frac{z_c}{i_y^2} z$$

Úseky neutrální osy na hlavních osách y, z:

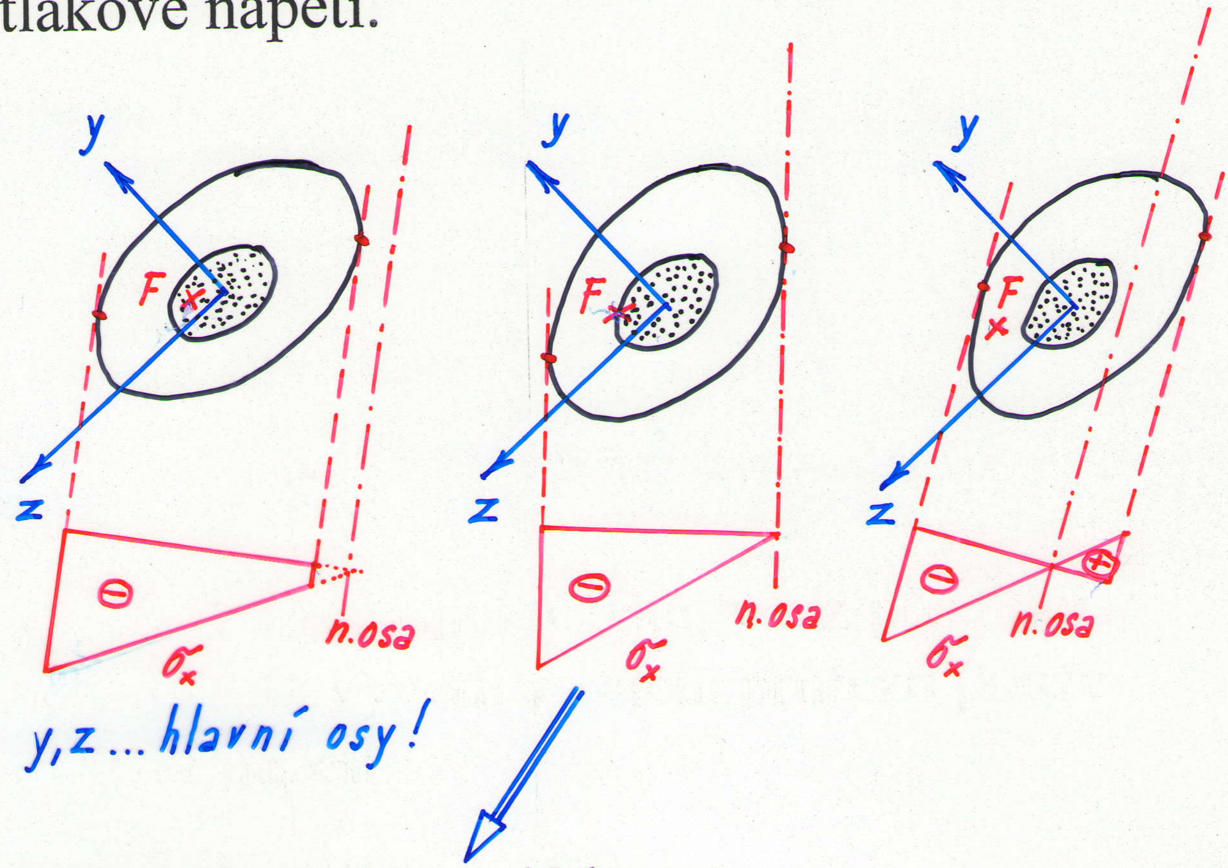
$$z = 0 \ \ldots \quad \boxed{p = -\frac{i_z^2}{y_c}}$$

$$y = 0 \ \ldots \quad \boxed{q = -\frac{i_y^2}{z_c}}$$

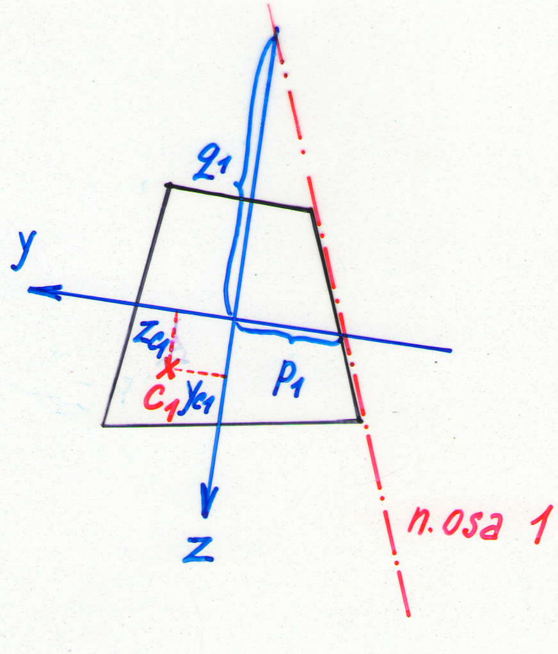
Vzorce se využijí pro konstrukci tzv. **jádra průřezu.**

Jádro průřezu

je oblast obsahující těžiště, v níž působící tlaková síla vyvodí v celém průřezu pouze tlakové napětí.

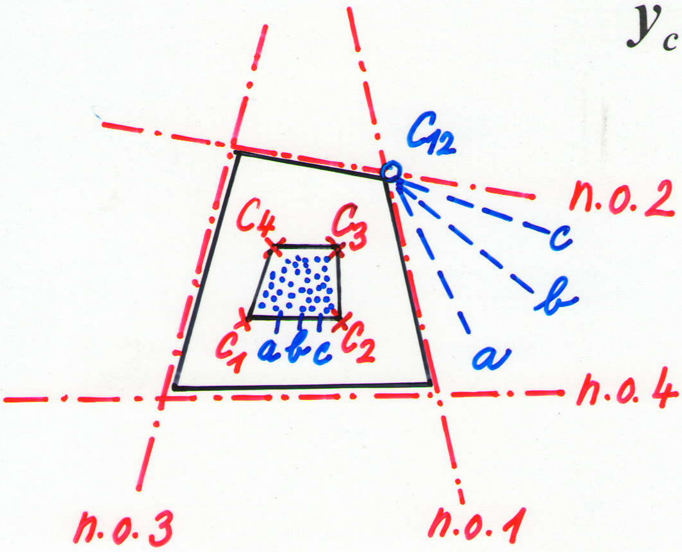


Konstrukce obrysu jádra:

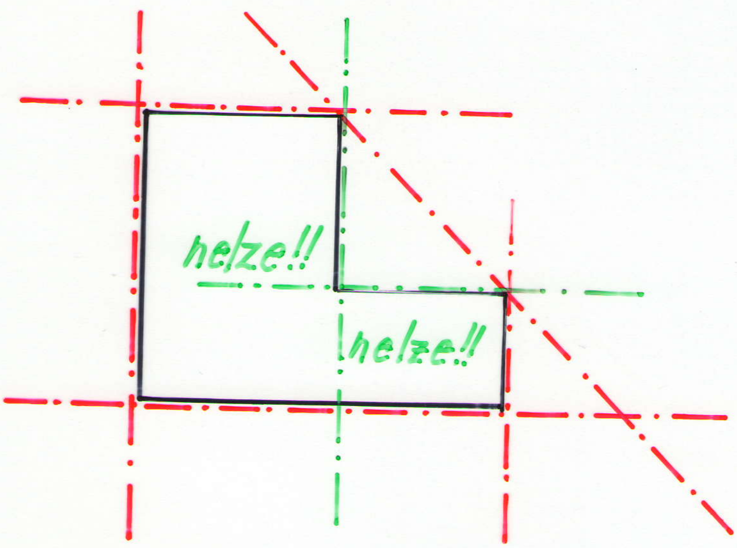


Neutrální osy se kladou postupně jako obálky průřezu, určí se úseky ***p, q*** a odpovídající tlaková centra na obrysu jádra ze vzorců

$$y_c = -\frac{i_z^2}{p}, \quad z_c = -\frac{i_y^2}{q}$$



Obálka musí tvořit konvexní útvar



Použití jádra: konstrukční části z materiálů špatně vzdorujících tahu (např. beton) se snažíme zatěžovat excentrickou osovou silou působící v jádře průřezu.

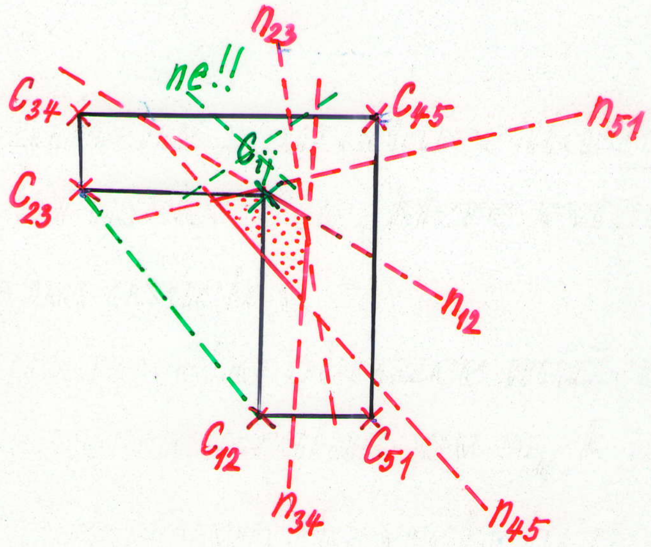
Poznámka:

Při konstrukci jádra je možné uplatnit tzv. princip duality. Ve vzorcích

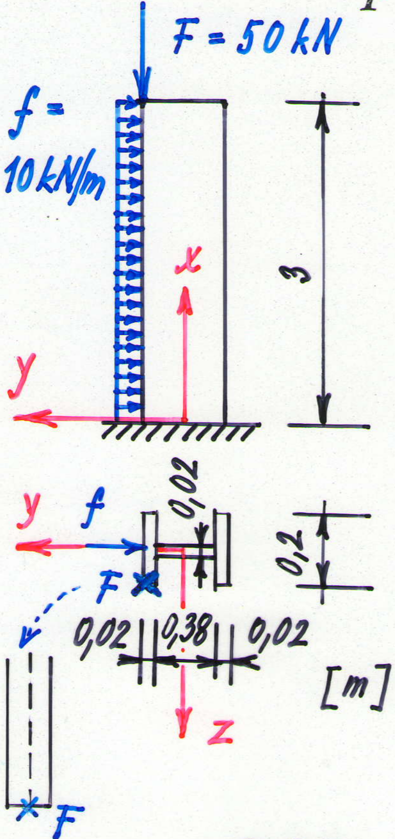
$$y_c = -\frac{i_z^2}{p}, \ z_c = -\frac{i_y^2}{q}$$

lze formálně zaměnit souřadnice tlakového centra y_c, z_c *za úseky* p, q, *které vytíná neutrální osa na osách y, z.*

Proto strany jádrového obrazce můžeme sestrojit také jako neutrální osy n_{ij} *k tlakovým centrům* C_{ij}, *umístěným do vrcholů průřezu (resp. doplněného konvexního útvaru).*



Příklad 1: *Určete průběh normálového napětí ve vetknutém průřezu sloupu.*



$$N_x = -50\text{kN}$$
$$M_y = -50 \cdot 0{,}1 = -5{,}0\text{kNm}$$
$$M_z = 50 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5$$
$$= -35\text{kNm}$$
$$A = 0{,}0156\text{m}^2$$
$$I_y = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^4$$
$$I_z = 41{,}2 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^4$$

$$\sigma_x = -\frac{0{,}05}{0{,}0156} - \frac{-0{,}035}{41{,}2 \cdot 10^{-5}}y + \frac{-0{,}005}{2{,}7 \cdot 10^{-5}}z\,[\text{MPa}]$$

$$\sigma_x = -3{,}205 + 84{,}951y - 185{,}285z$$

neutrální osa… $\sigma_x = 0$

$$-3{,}205 + 84{,}951y - 185{,}285z = 0$$

$z = 0 \ldots p = 0{,}038\text{m}$

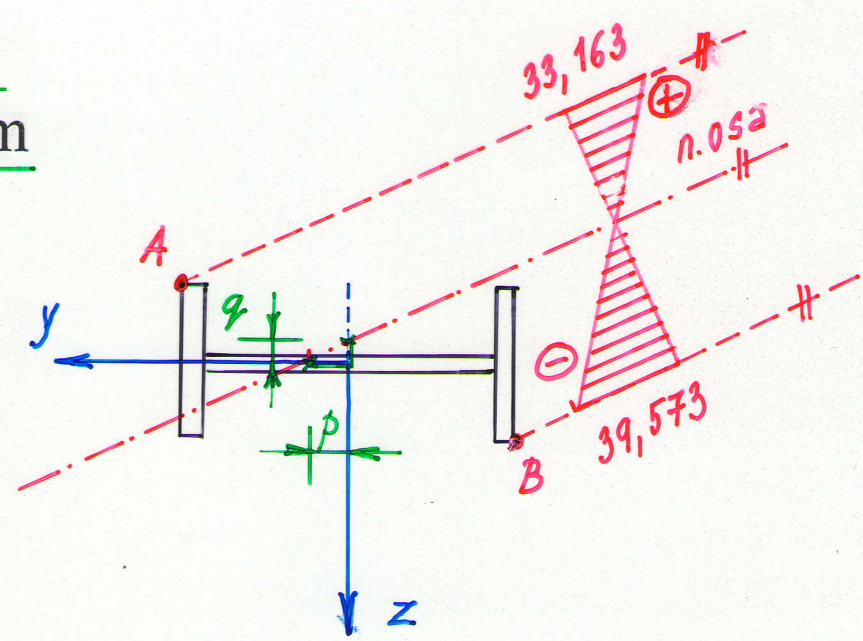
$y = 0 \ldots q = -0{,}017\text{m}$

$A[0{,}21; -0{,}1]$

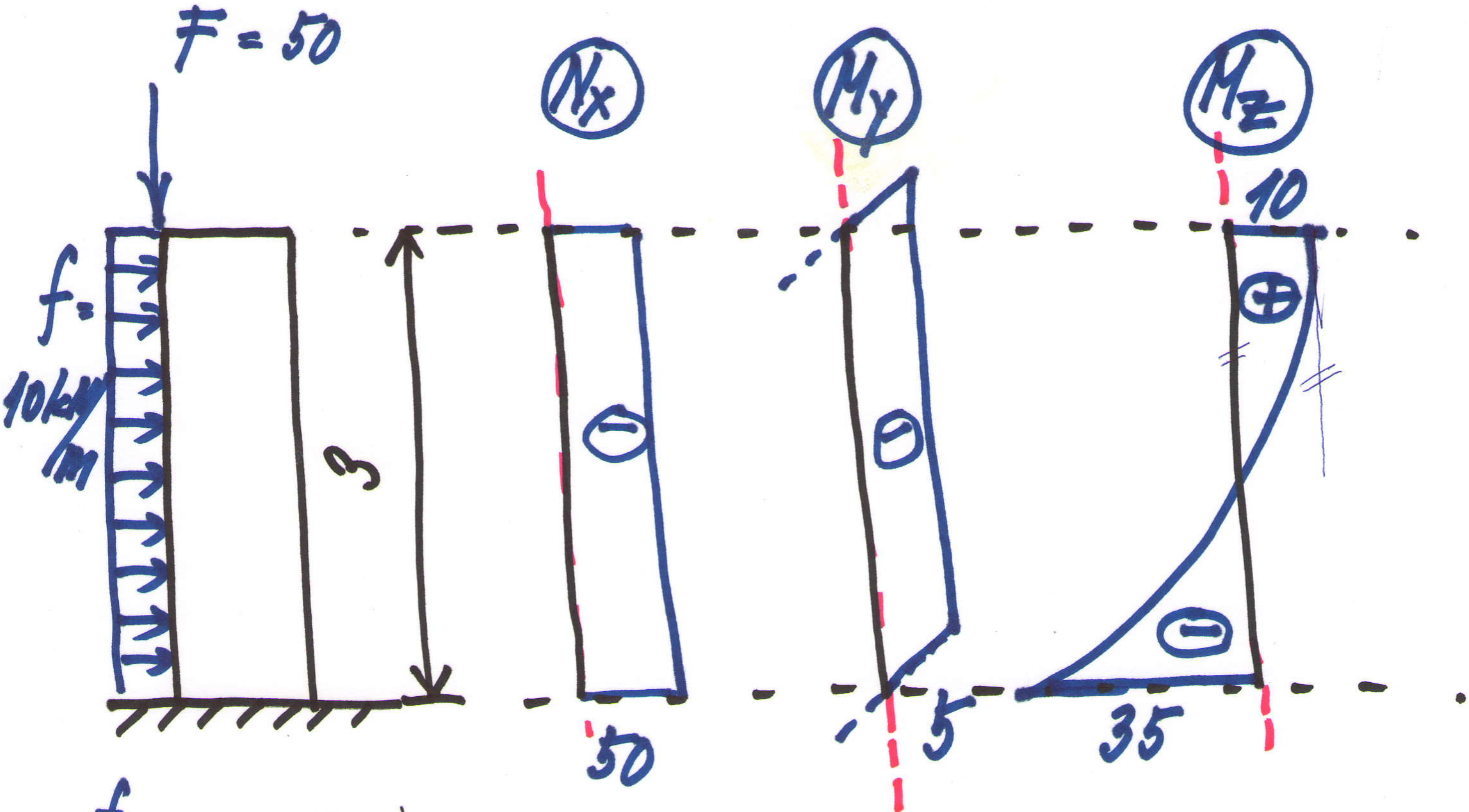
$B[-0{,}21; 0{,}1]$

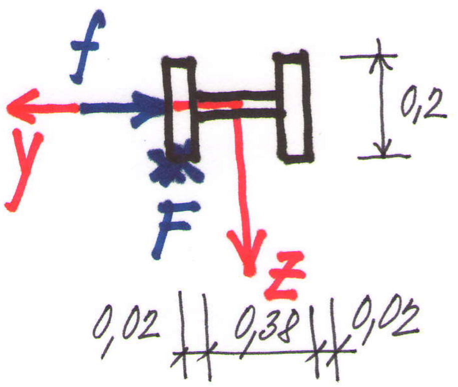
$\sigma_x^A = 33{,}163\text{MPa}$

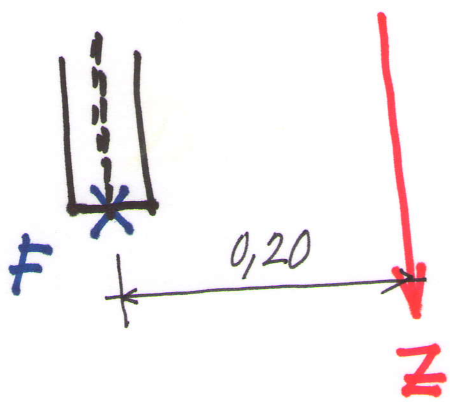
$\sigma_x^B = -39{,}573\text{MPa}$



[kN, m]





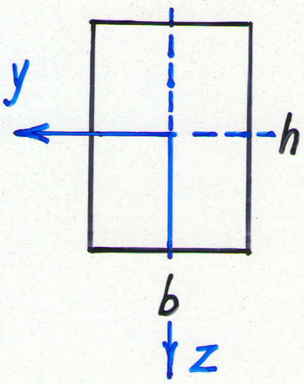


$$M_y = -50 \cdot 0{,}1 = \underline{-5 \text{ kNm}}$$

$$M_z^h = 50 \cdot 0{,}2 = \underline{10 \text{ kNm}}$$

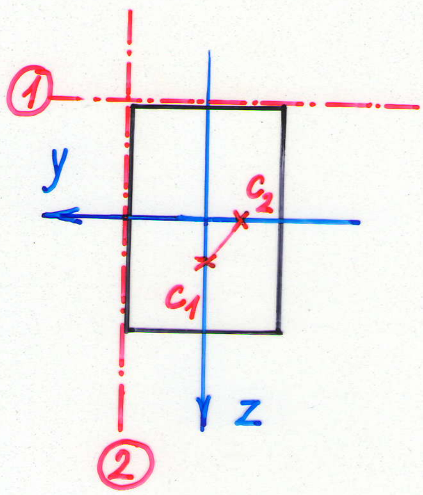
$$M_z^d = 50 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = \underline{-35 \text{ kNm}}$$

Příklad 2: *Určete jádro obdélníkového průřezu.*



$$i_y^{\,2} = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12} bh^3}{bh} = \frac{h^2}{12}$$

$$i_z^{\,2} = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12} b^3 h}{bh} = \frac{b^2}{12}$$



n. o. 1 ... $p \to \infty; \quad q = -\frac{h}{2}$

$$y_{c1} = -\frac{i_z^{\,2}}{p} = 0$$

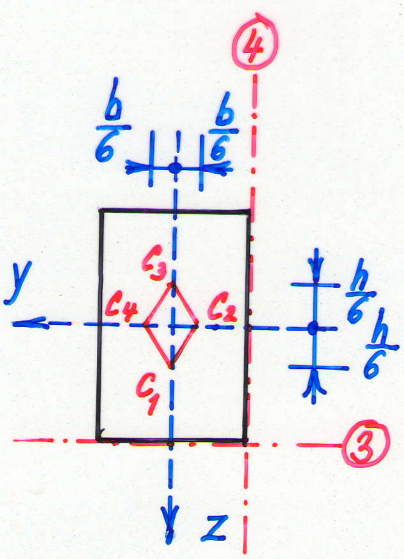
$$z_{c1} = -\frac{i_y^{\,2}}{q} = \frac{h}{6}$$

n. o. 2 ... $p = \frac{b}{2}; \quad q \to \infty$

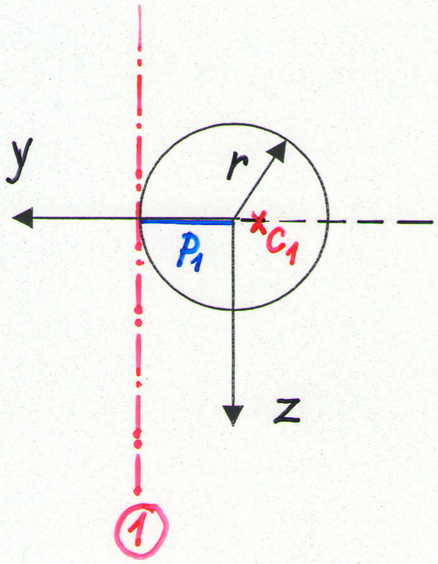
$$y_{c2} = -\frac{b}{6}$$

$$z_{c2} = 0$$

(dále využít symetrie)



Příklad 3: *Určete jádro kruhového průřezu.*



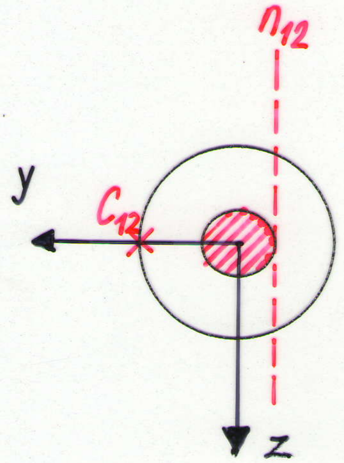
$$i_y^{\;2} = i_z^{\;2} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4}$$

n. o. 1… $p_1 = r$; $q_1 \rightarrow \infty$

$$y_{c1} = -\frac{i_z^{\;2}}{p} = -\frac{r}{4}$$

$$z_{c1} = -\frac{i_y^{\;2}}{q} = 0$$

Z rotační symetrie průřezu vyplývá rotačně symetrický tvar jádra.



Dualita:

$y_{C_{12}} = r$

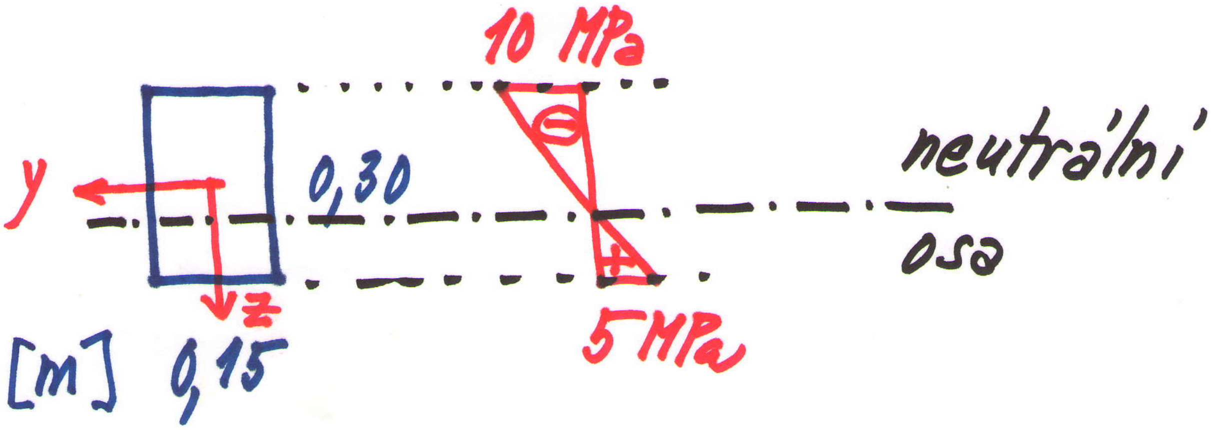
$z_{C_{12}} = 0$

$$p_{12} = -\frac{i_z^2}{y_{C_{12}}} = -\frac{\frac{r^2}{4}}{r} = -\frac{r}{4}$$

$$q_{12} = -\frac{i_y^2}{z_{C_{12}}} = -\frac{\frac{r^2}{4}}{0} \rightarrow \infty$$

PŘÍKLADY

① Jaké vnitřní síly působí v průřezu, je-li průběh σ_x následující:



$\boxed{N_x, M_y}$?

$A = 0{,}045\ m^2$ $\qquad I_y = 0{,}0003375\ m^4$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$$

(1) $$5 = \frac{N_x}{0{,}045} + \frac{M_y}{3{,}375 \cdot 10^{-4}} \cdot 0{,}15$$

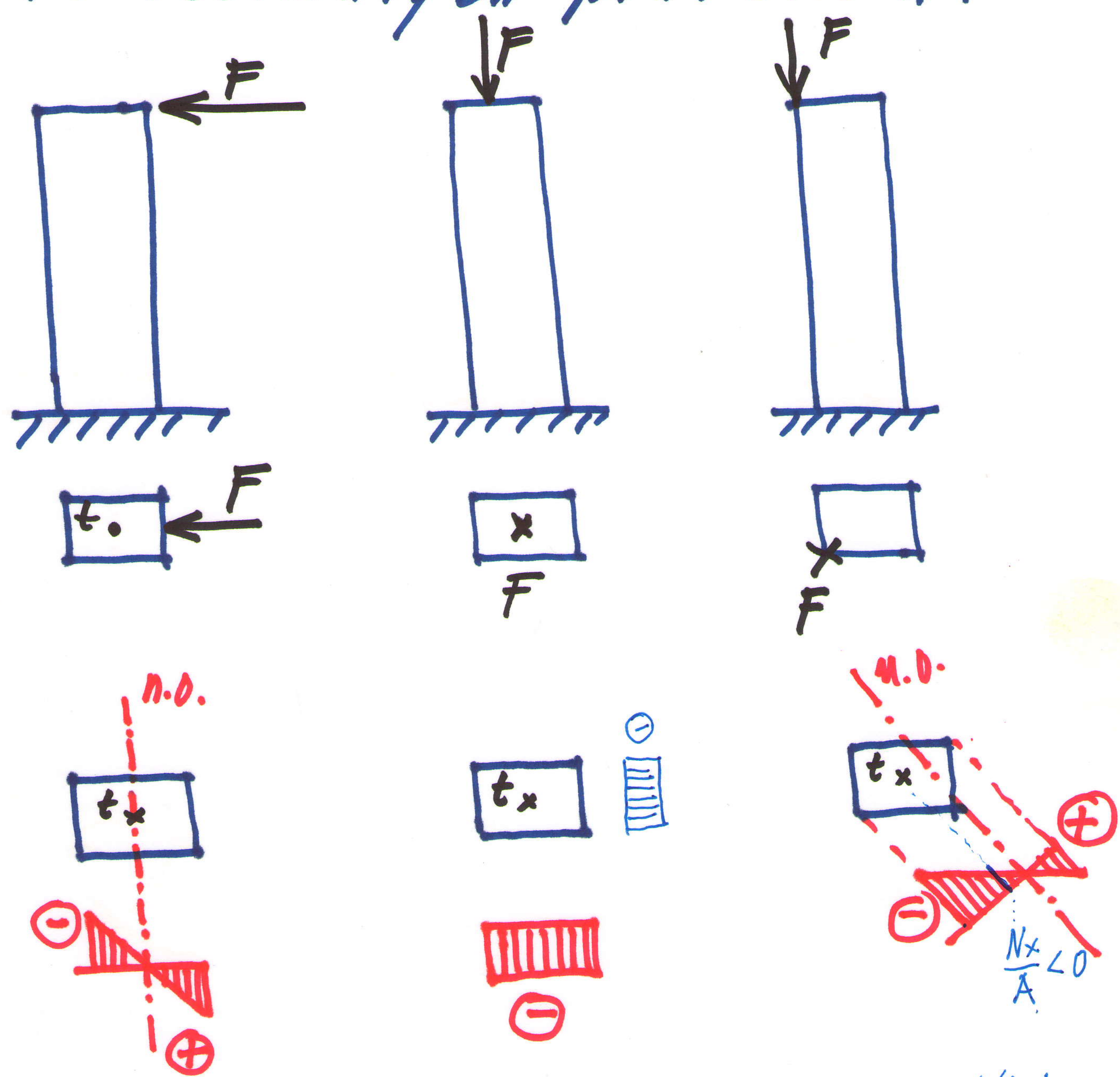
(2) $$-10 = \frac{N_x}{0{,}045} + \frac{M_y}{3{,}375 \cdot 10^{-4}} \cdot (-0{,}15)$$

$\Downarrow$

$N_x = -0{,}1125\ MN$

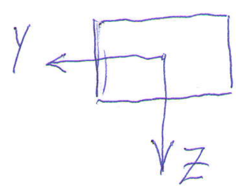
$M_y = 0{,}016875\ MNm$

② Načrtněte průběhy σ_x ve vetknutých průřezech:



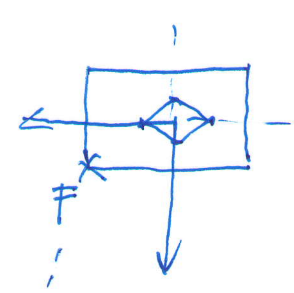
prostý tlak

excentrický tlak



$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

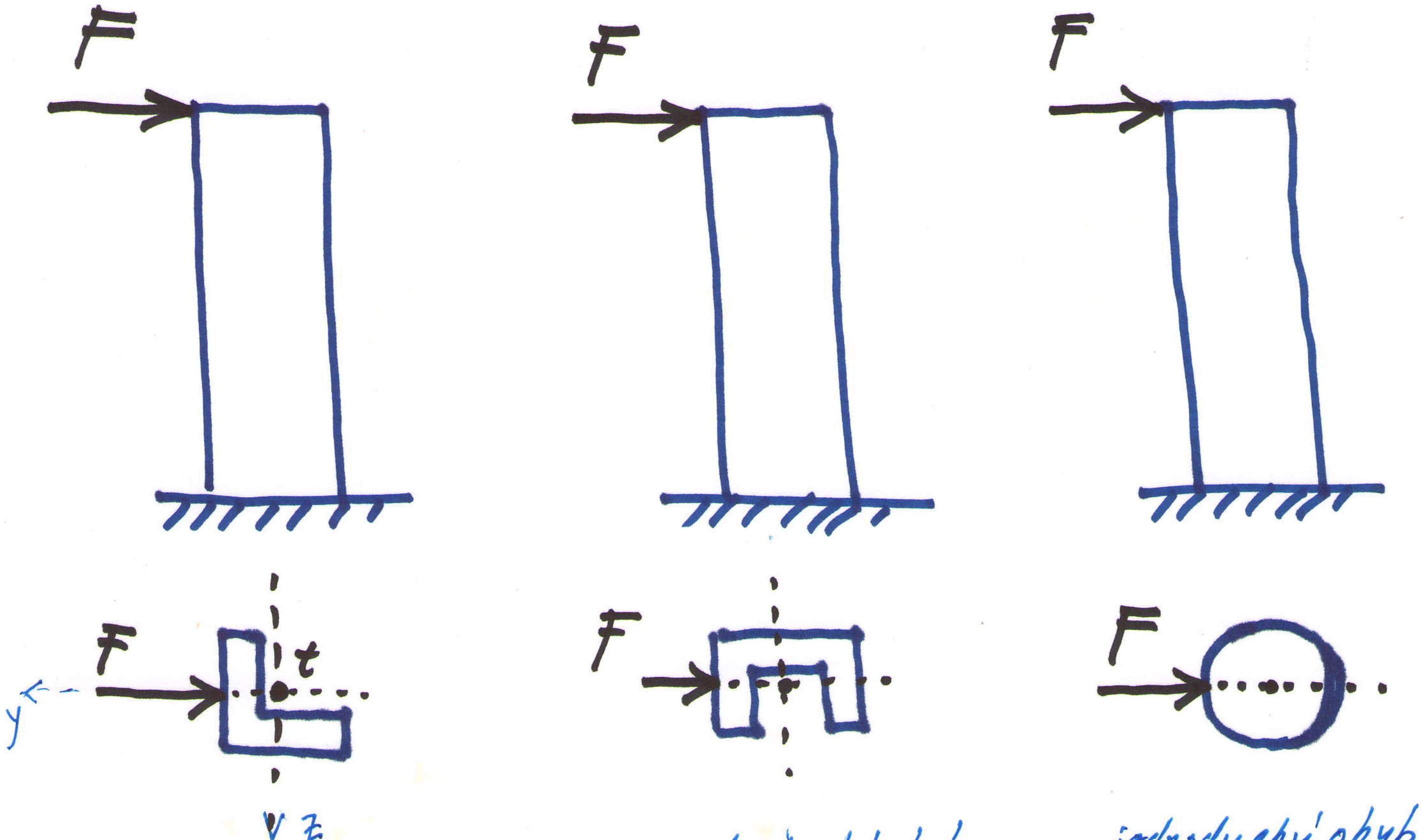
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{-F}{A}$$



$M_z \neq 0$

jednoduchý ohyb

vně jádra

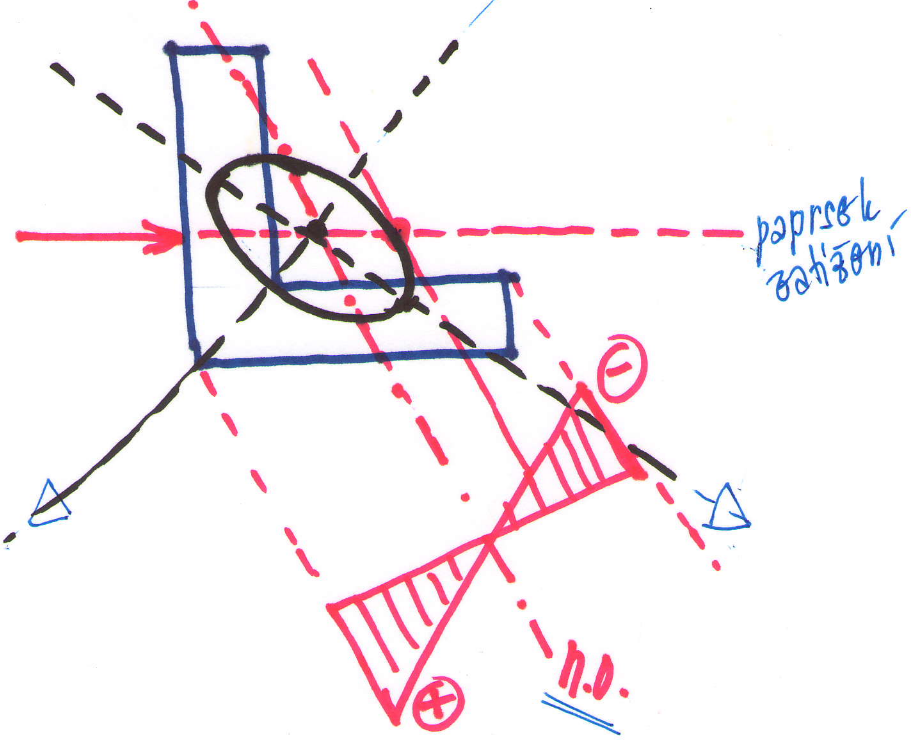


šikmý ohyb !!

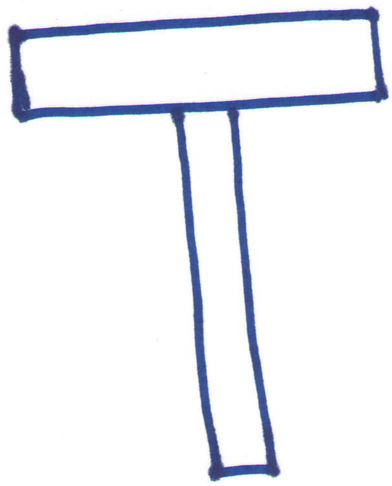
jednoduchý ohyb

jednoduchý ohyb

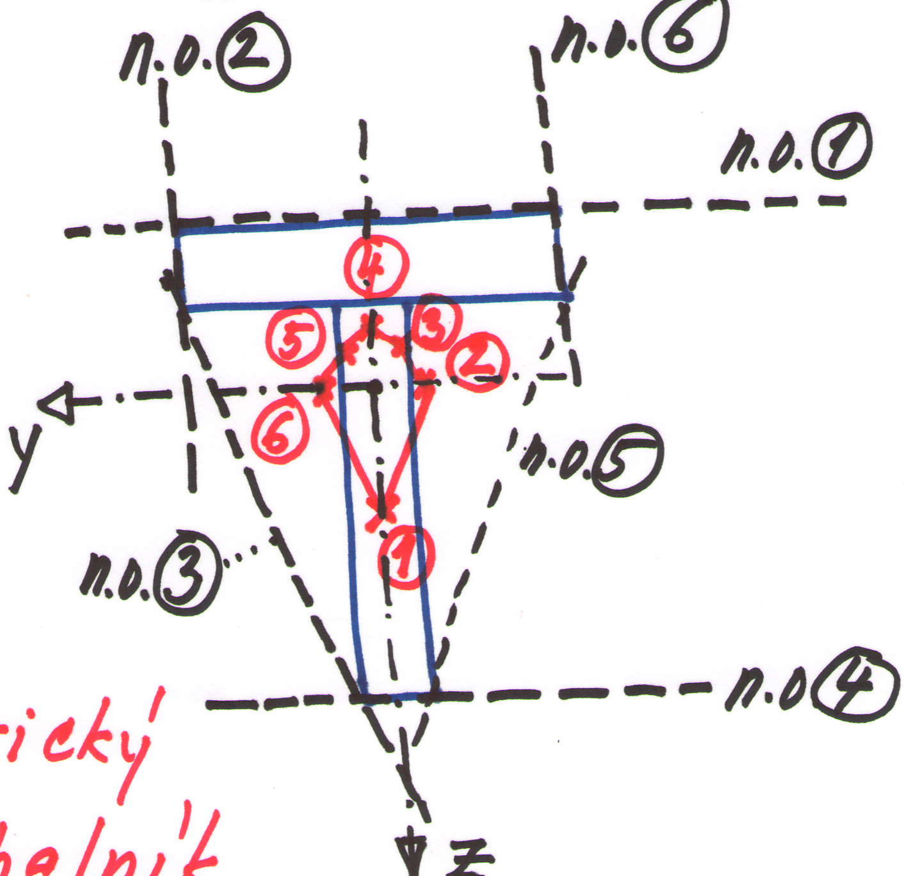
(y,z nejsou hlavní osy)



3 Načrtněte jádro průřezu



- konvexní obálka průřezu
- n. osa ⊥ k hlavní ose ⇒ jádrový bod na této ose leží !!!



symetrický 6-ti úhelník

Přetvoření ohýbaných prutů

3 diferenciální rovnice pro parametry přetvoření u_0', v'', w'' byly odvozeny ve tvaru (viz přednáška Ohyb prutů):
II/7

y,z ...nejsou hlavní osy

$$u_0' = \frac{N_x}{EA}$$

$$v'' = \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{EI} \qquad I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

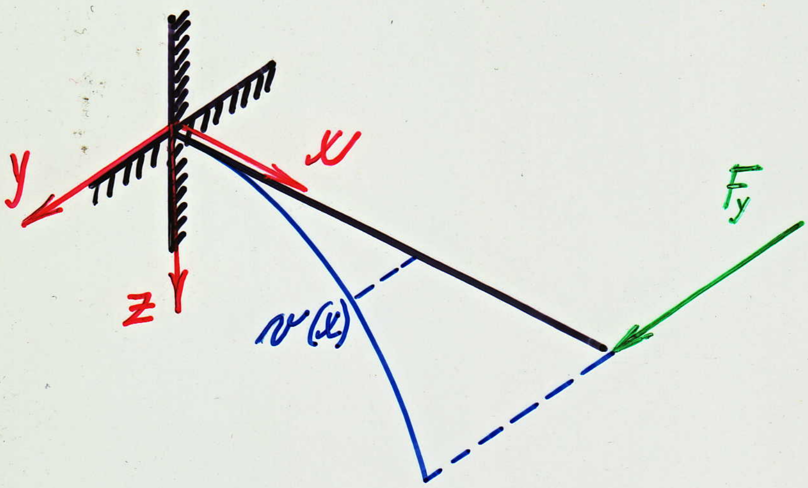
$$w'' = -\frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{EI}$$

y,z ... jsou hlavní osy

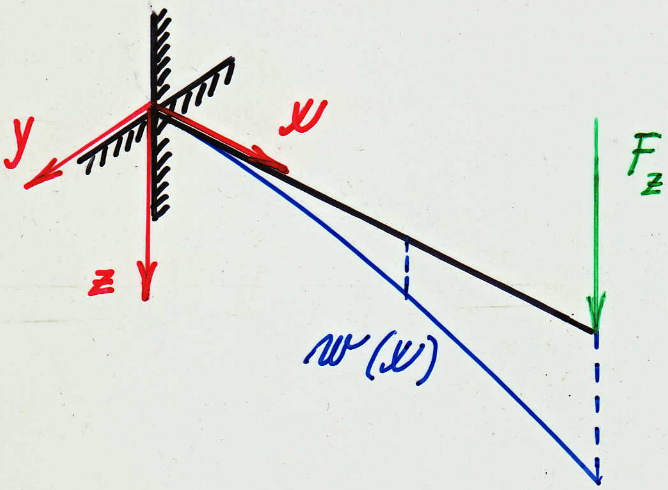
$$u_0' = \frac{N_x}{EA}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v'' &= \frac{M_z}{EI_z} \\ w'' &= -\frac{M_y}{EI_y} \end{aligned}}$$

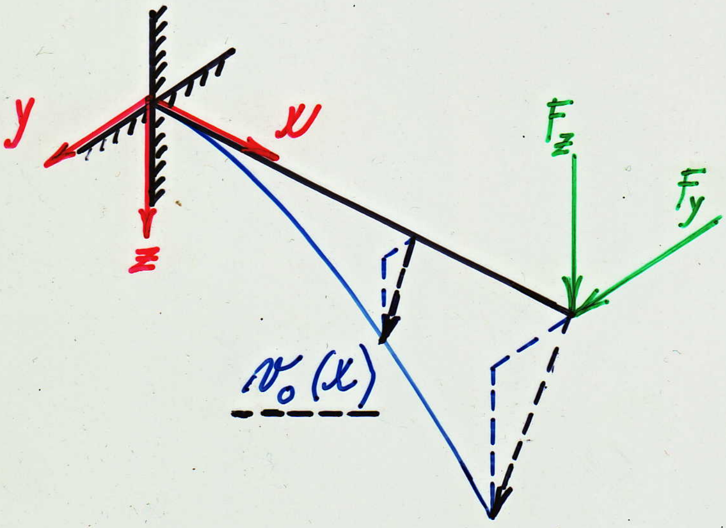
diferenciální rovnice ohybové čáry



$$v'' = \frac{M_z}{E I_z}$$



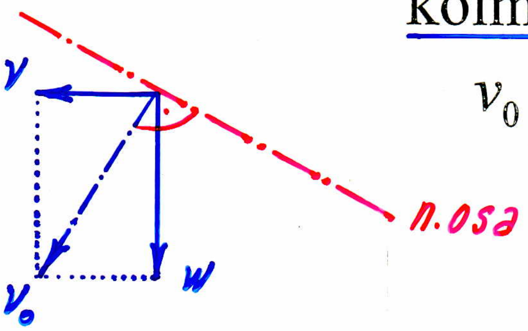
$$w'' = -\frac{M_y}{E I_y}$$



$$v_0 = \sqrt{v^2 + w^2}$$

Obecné zatížení prutu $\Rightarrow$ ohybová čára je prostorová křivka

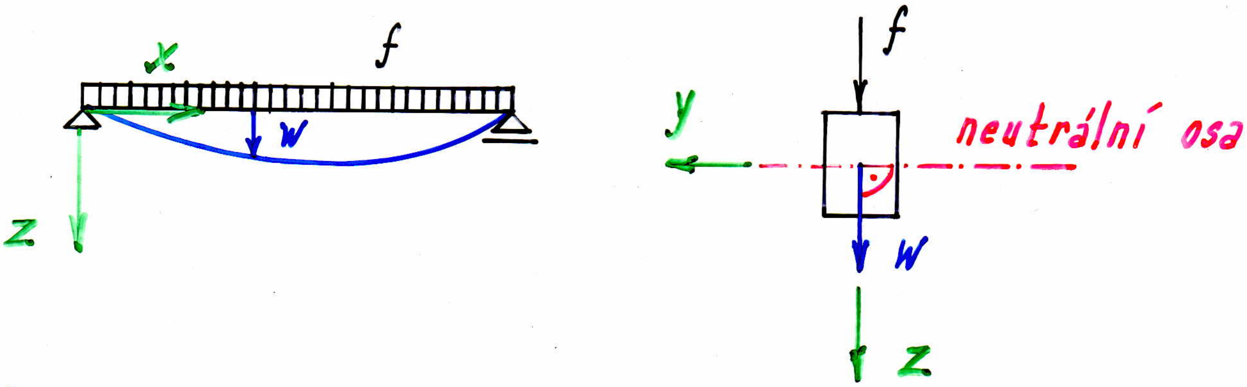
zatížení v rovině $\Rightarrow$ výsledné průhyby v_0 jsou kolmé k neutrální ose



$$v_0 = \sqrt{v^2 + w^2}$$

Zvláštní případ $\Rightarrow$ zatížení působí v rovině xz

pouze průhyb $w \neq 0$ $(v = 0)$

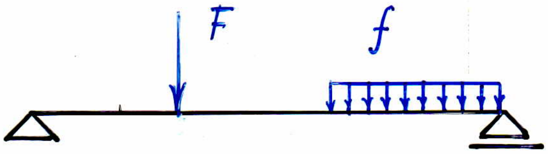


$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

$$w' = \int -\frac{M_y}{EI_y}\,dx + C_1$$

$$w = \int\left(\int -\frac{M_y}{EI_y}\,dx + C_1\right)dx + C_2$$

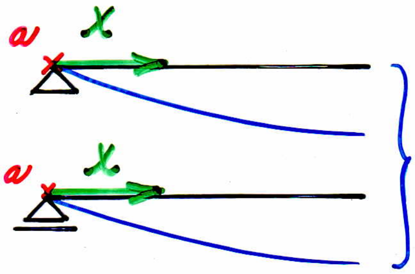
Při nespojitém zatížení…n intervalů →
$2n$ integračních konstant



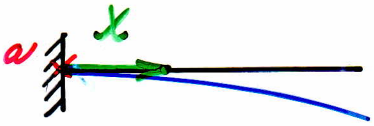
3 intervaly
6 konstant

Podmínky pro řešení integračních konstant:

- okrajové podmínky



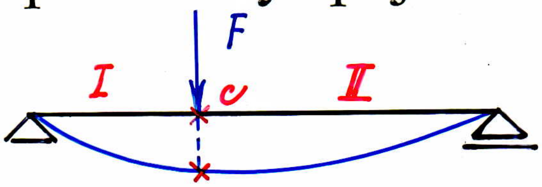
$x = 0$
$w^a = 0$



$x = 0$

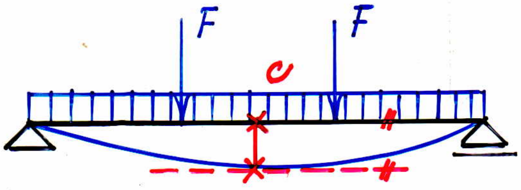
1) $w^a = 0$ 2) $w'^a = 0$

- podmínky spojitosti



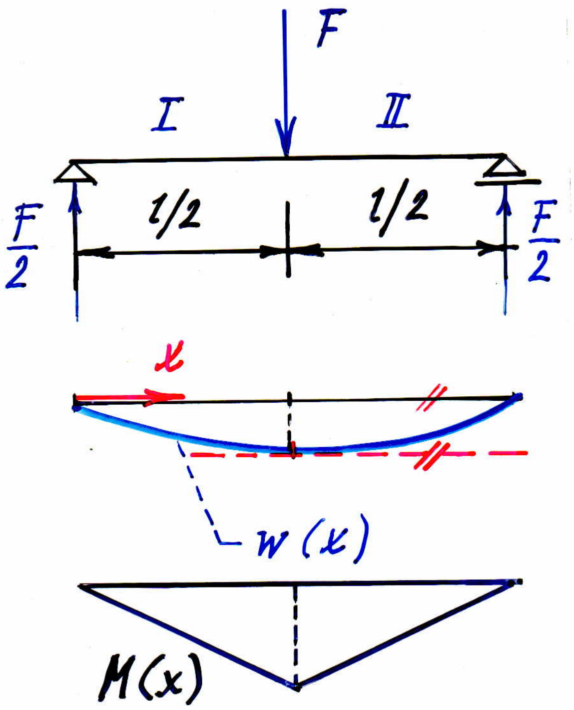
1) $w_I^c = w_{II}^c$ 2) $w_I'^c = w_{II}'^c$

- podmínky symetrie



$w'^c = 0$

Příklad: *Určete maximální průhyb nosníku, jehož ohybová tuhost je konstantní.*



Využití symetrie

Interval I

$$M(x)=\frac{F}{2}x$$

$$EIw''=-\frac{F}{2}x$$

$$EIw'=-\frac{F}{4}x^2+C_1$$

$$EIw=-\frac{F}{12}x^3+C_1x+C_2$$

Okrajové podmínky:

1) $x=0 \ldots w=0 \;\rightarrow\; C_2=0$

Podmínka symetrie:

2) $x=l/2 \ldots w'=0 \rightarrow\; 0=-\frac{F}{4}\frac{l^2}{4}+C_1$

$$C_1=\frac{Fl^2}{16}$$

$$EIw=-\frac{F}{12}x^3+\frac{Fl^2}{16}x$$

$$\max w(x=l/2)=\frac{Fl^3}{48EI}$$

Clebschova metoda

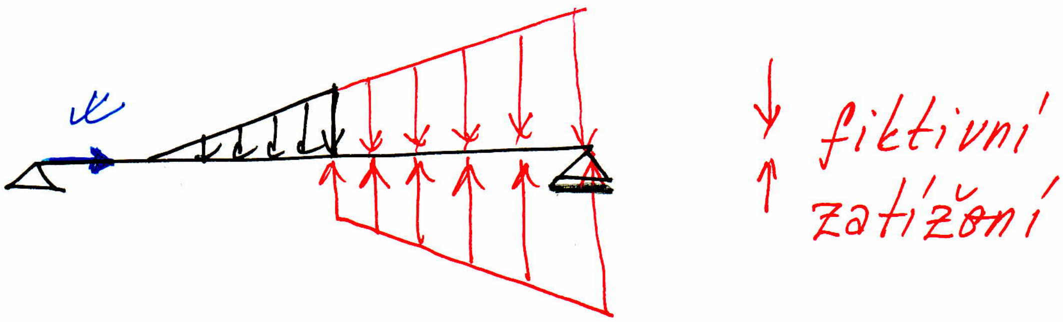
- vhodná pouze pro nosníky s konstantní tuhostí
- při libovolném počtu intervalů zredukuje počet integračních konstant na dvě

Zásady integrace:

1) systém souřadnic volit jednotně pro celý nosník
2) moment vyjádřit jako součet momentu z předchozího intervalu a dalšího členu
3) výrazy typu $(x-a)^n$ integrovat v uzavřeném tvaru tak, aby byly na rozhraní intervalů rovny nule (tedy jako při substituci $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$)

Clebschova metoda – doplněk

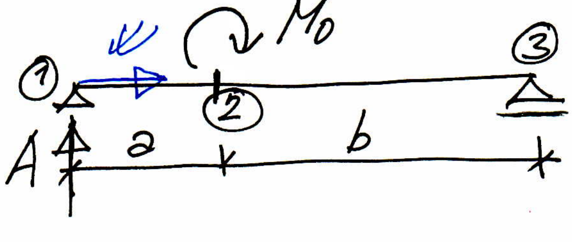
- působí-li na nosník částečně spojité zatížení $\longrightarrow$ přidat fiktivní zatížení („prodloužit" spojité zatížení až do konce posledního intervalu a zároveň přidat stejné zatížení opačného směru)



(do předcházejících intervalů nepřidávat fiktivní zatížení)

- působí-li na nosník osamělý moment $\longrightarrow$ nutno integrovat přes $\boxed{d(x-a)}$, nikoli přes dx

(a je vzdálenost působiště momentu od počátku x)



int. 2 3

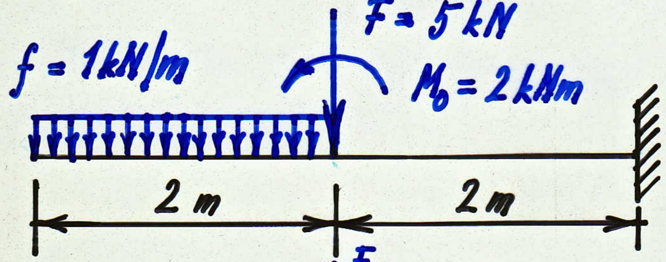
$$EIw'' = -Ax - M_0$$

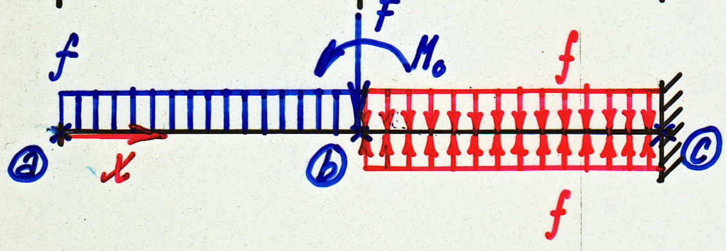
$$EIw' = -A\frac{x^2}{2} - M_0(x-a) + C_1$$

!!!

⋮

Příklad: *Určete rovnici ohybové čáry konzoly, průhyb a natočení jejího konce. EI je konst.*





f…fiktivní zatížení

Interval$\langle ab \rangle$

$$M = -\frac{x^2}{2}$$

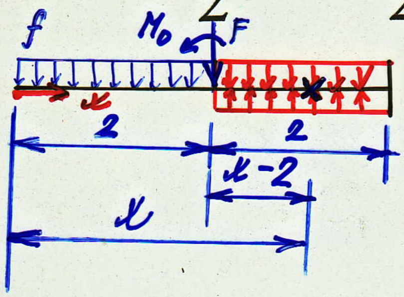
$$EIw'' = \frac{x^2}{2}$$

$$EIw' = \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EIw = \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Interval$\langle bc \rangle$

$$M = -\frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} - 5(x-2) - \underbrace{2}_{(M_0)}$$



$$EIw'' = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2} + 5(x-2) + 2$$

$$EIw' = \frac{x^3}{6} - \frac{(x-2)^3}{6} + \frac{5(x-2)^2}{2} + \underline{2(x-2)} + C_3$$

$$EIw = \frac{x^4}{24} - \frac{(x-2)^4}{24} + \frac{5(x-2)^3}{6} + (x-2)^2 + C_3 x + C_4$$

Podmínky spojitosti:

a) $x=2 \;\ldots\; w'_{ab} = w'_{bc} \quad \Rightarrow \quad \underline{C_1 = C_3}$

b) $x=2 \;\ldots\; w_{ab} = w_{bc} \quad \Rightarrow \quad \underline{C_2 = C_4}$

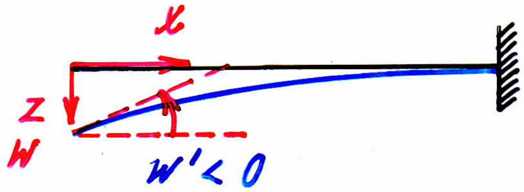
Okrajové podmínky:

1) $x=4 \;\ldots\; w'_{bc} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = C_1 = -\dfrac{70}{3}$

2) $x=4 \;\ldots\; w_{bc} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = C_2 = \dfrac{218}{3}$

$x=0 \;\ldots\; \underline{\max w = \dfrac{C_2}{EI} = \dfrac{218}{3EI}}$

$$\underline{w'_a = \frac{C_1}{EI} = -\frac{70}{3EI}}$$



Poznámka: pozor na jednotky! E [kPa]

I [m^4]

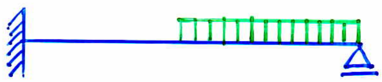
např. $E = 2{,}1\cdot 10^5$ MPa, $I = 0{,}214\cdot 10^{-4}\,m^4$

$$\max w = \frac{218}{3\cdot 2{,}1\cdot 10^8\cdot 0{,}214\cdot 10^{-4}} \doteq 0{,}0162\,m$$

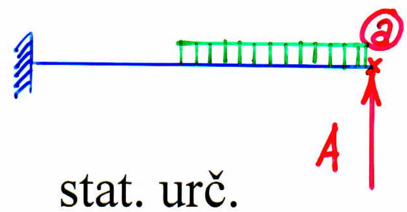
$w'_a = -0{,}0052$ rad $\doteq -0{,}3°$

Staticky neurčité případy ohybu

Podmínky rovnováhy nestačí k určení vnitřních sil, je třeba připojit podmínky přetvárné (deformační).



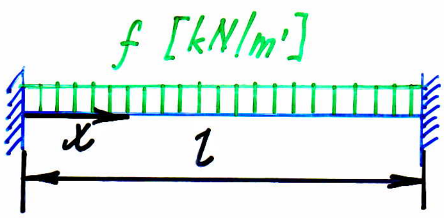
1x stat. neurč.



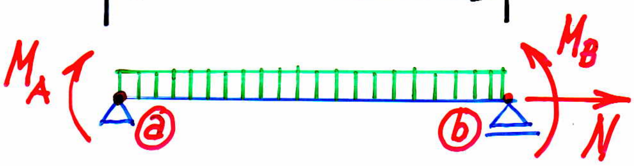
stat. urč.
(zákl. soustava)

$w_a = 0$
přetvárná podmínka

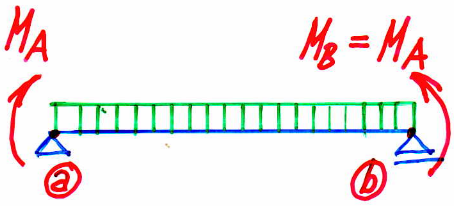
Příklad: *Určete průběh ohybového momentu a maximální průhyb nosníku. EI je konstantní.*



3x stat. neurč. konstr.

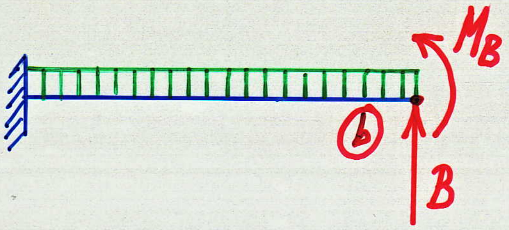


základní soustava
neznámé: $\boldsymbol{M_A, M_B, N}$
př. podm.: $w'_A = 0$,
$w'_B = 0 \quad u_B = 0$



zjednodušení:
N=0, $\boldsymbol{M_A = M_B}$ (symetrie)
1x stat. neurč. případ
neznámá: $\boldsymbol{M_A}$
přetvár. podm.: $w'_A = 0$

Poznámka: volba jiné základní soustavy je možná, ale pak nelze využít symetrie =>

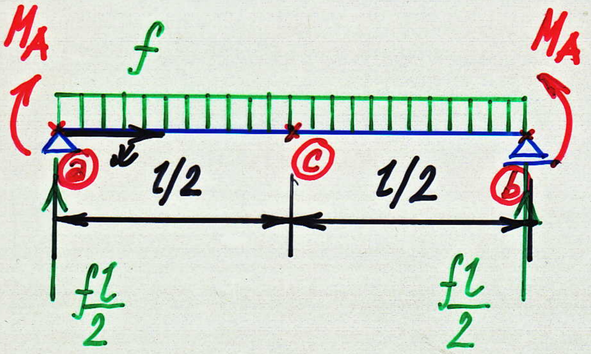


2x stat. neurč. případ

neznámé: $\boldsymbol{B, M_B}$

přetvár. podm.: $w_B = 0$

$w'_B = 0$



3 podmínky pro

3 neznámé $\boldsymbol{M_A, C_1, C_2}$

$w_A = 0, w'_A = 0, w'_C = 0$

(*nebo* $w'_B = 0$)

$\langle ac \rangle$

$$M = -M_A + \frac{fl}{2}x - \frac{f}{2}x^2$$

$$EIw'' = -M_A - \frac{fl}{2}x + \frac{f}{2}x^2$$

$$EIw' = -M_A x - \frac{fl}{4}x^2 + \frac{f}{6}x^3 + C_1$$

$$EIw = -\frac{M_A}{2}x^2 - \frac{fl}{12}x^3 + \frac{f}{24}x^4 + C_1 x + C_2$$

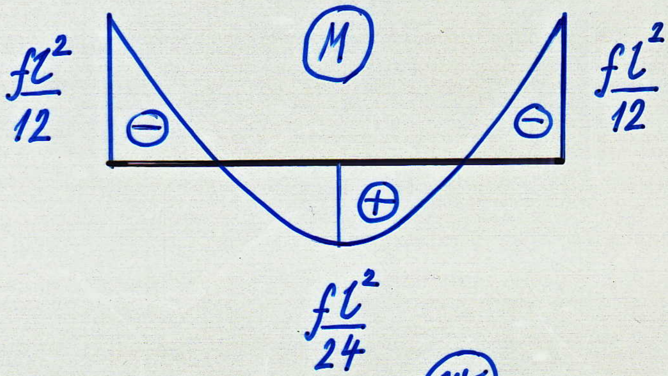
1) $x=0 \ldots w=0 \quad \Rightarrow \quad C_2=0$

2) $x=0 \ldots w'=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0$

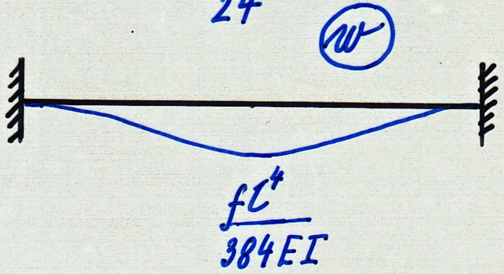
3) $x=l/2 \ldots w'=0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -\dfrac{fl^2}{12}$

$$M = -\frac{fl^2}{12} + \frac{fl}{2}x - \frac{f}{2}x^2$$

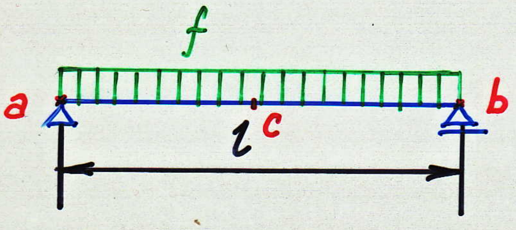
$x=l/2 \ldots \quad M_C = \dfrac{fl^2}{24}$



$$\max w_C = \frac{fl^4}{384EI}$$



Porovnání se staticky určitou konstrukcí:

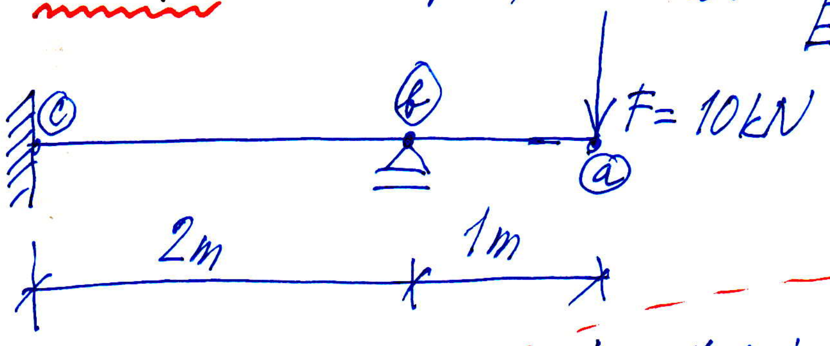


$$\max w_C = \frac{5fl^4}{384EI}$$

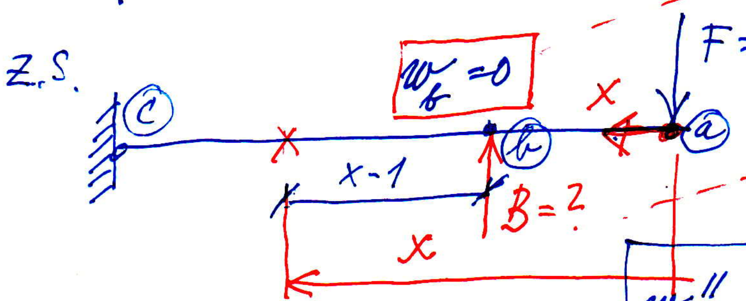
Staticky neurčité konstrukce jsou tužší nežli konstrukce staticky určité!

Příklad: Určete průhyb v bodě a.

$EI = konst$

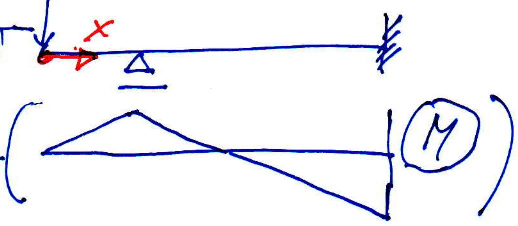


deformační podmínka (přetvárná)



B... stat. neurčitá reakce

$$w'' = -\frac{M}{EI}$$



<ab>	<bc>
$M(x) = -10x$	$M(x) = -10x + B\cdot(x-1)$
$EIw'' = 10x$	$EIw'' = 10x - B(x-1)$
$EIw' = 5x^2 + C_1$	$EIw' = 5x^2 - B\frac{(x-1)^2}{2} + C_1$
$EIw = \frac{5}{3}x^3 + C_1x + C_2$	$EIw = \frac{5}{3}x^3 - B\frac{(x-1)^3}{6} + C_1x + C_2$

3 neznámé konstanty B, C_1, C_2

3 podmínky:

O.P. 1) $x = 1 \dots w_b = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{3}\cdot 1^3 + C_1\cdot 1 + C_2$

2) $x = 3 \dots w'_c = 0 \Rightarrow 0 = 5\cdot 3^2 - B\frac{(3-1)^2}{2} + C_1$

3) $x = 3 \dots w_c = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{3}\cdot 3^3 - B\frac{(3-1)^3}{6} + C_1\cdot 3 + C_2$

1) $C_2 = -\frac{5}{3} - C_1$

2) $0 = 45 - B\cdot 2 + C_1 \Rightarrow B = \frac{45 + C_1}{2}$

3) $0 = 45 - \frac{45 + C_1}{2}\cdot\frac{8}{6} + C_1\cdot 3 - \frac{5}{3} - C_1 \Rightarrow$

$$\boxed{C_1 = -10}$$
$$\boxed{C_2 = 8,\overline{33}}$$
$$\boxed{B = 17,5\ kN}$$

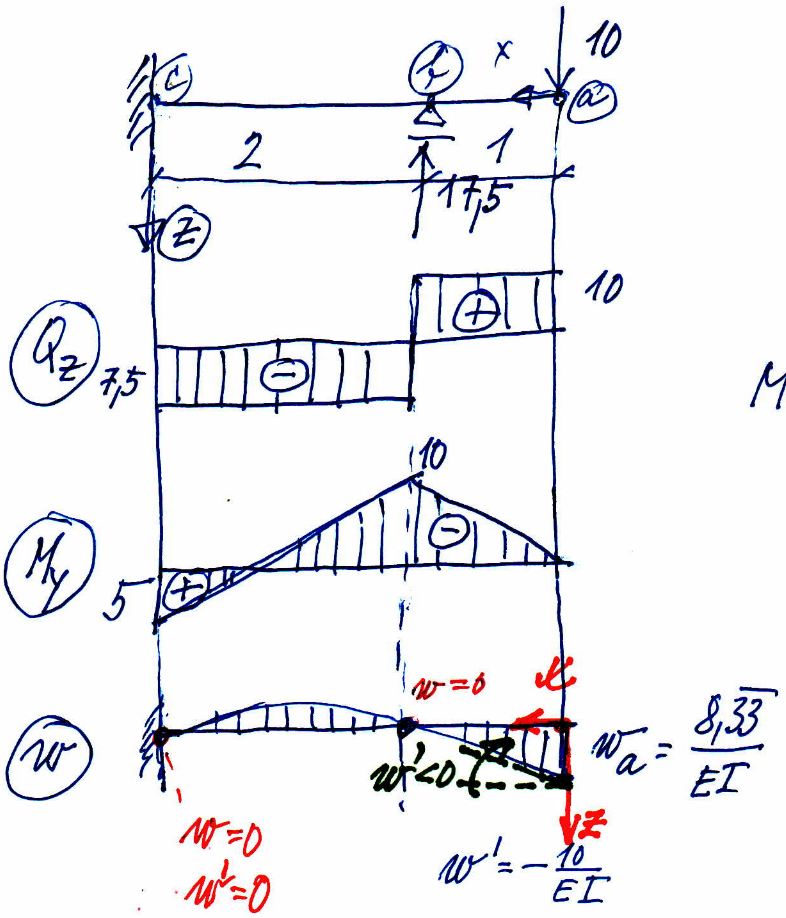
$x = 0$

$$w_a = \frac{C_2}{EI} = \frac{8,\overline{33}}{EI}$$

$E\,[kPa]$

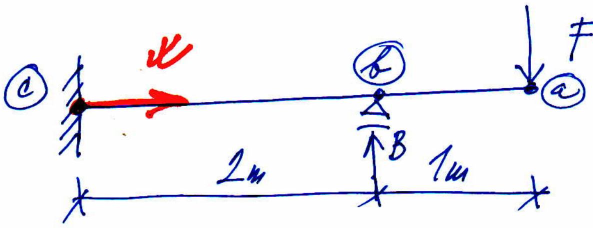
$I\,[m^4]$

$$w'_a = \frac{C_1}{EI} = -\frac{10}{EI}$$



$$M_y(x=3) = -10\cdot 3 + 17{,}5\cdot 2 =$$
$$= 5 \ [kNm]$$

Pozor na jinak zavedenou osu x!



EI=konst.

$\langle ab \rangle$

$M = -10(3-x)$

$EIw'' = 10(3-x)$

$EIw' = \int 10(3-x)\,dx$

[substituce: $t = 3-x$, $dt = -dx$]

$EIw' = \int 10 \cdot t\,(-dt)$

$EIw' = 10\,\frac{t^2}{2}\cdot(-1) + C_1$

$EIw' = 5(3-x)^2\cdot(-1) + C_1$

$EIw = 5\,\frac{(3-x)^3}{3}\cdot(-1)\cdot(-1) + C_1x + C_2$

$\langle bc \rangle$

$M = -10(3-x) + B(2-x)$

$EIw'' = 10(3-x) - B(2-x)$

$EIw' = \left[10\,\frac{(3-x)^2}{2} - B\,\frac{(2-x)^2}{2}\right](-1) + C_3$

$EIw = \left[5\,\frac{(3-x)^3}{3} - B\,\frac{(2-x)^3}{6}\right]\cdot(-1)\cdot(-1) + C_3x + C_4$

[subst. $3-x = t$, $-dx = dt$; $2-x = u$, $-dx = du$]

Podm. spoj.:

a) $x = 2 \ldots w'_{ab} = w'_{bc} \Rightarrow -5(3-2)^2 + C_1 = -5(3-2)^2 + \cancel{B\,\frac{(2-2)^2}{2}} + C_3$ $\Rightarrow \boxed{C_1 = C_3}$

b) $x = 2 \ldots w_{ab} = w_{bc} \Rightarrow 5\,\frac{(3-2)^3}{3} + C_1\cdot 2 + C_2 = 5\,\frac{(3-2)^3}{3} - \cancel{B\,\frac{(2-2)^3}{6}} + C_3\cdot 2 + C_4$ $\Rightarrow \boxed{C_2 = C_4}$

Okraj. podm.

1) $x = 0 \ldots w'_{bc} = 0 \Rightarrow 0 = -5\cdot 3^2 + B\cdot\frac{2^2}{2} + C_1$

2) $x = 0 \ldots w_{bc} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{3}\cdot 3^3 - B\cdot\frac{2^3}{6} + C_1\cdot 0 + C_2$

Deformační podm.

3) $x = 2 \ldots w_b = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{3}\cdot(1)^3 + C_1\cdot 2 + C_2$

1) $C_1 + 2B = 45$

2) $C_2 - \frac{4}{3}B = -45$

3) $2C_1 + C_2 = -\frac{5}{3}$

$C_1 = 10$

$C_2 = -21{,}6\overline{6}$

$\boxed{B = 17{,}5\ \mathrm{kN}}$

$\underline{x = 3}$: $EI\,w_{ab} = \frac{5}{3}\overset{0}{\cancel{(3-3)}}^3 + 10 \cdot 3 - 21{,}6\overline{6}$

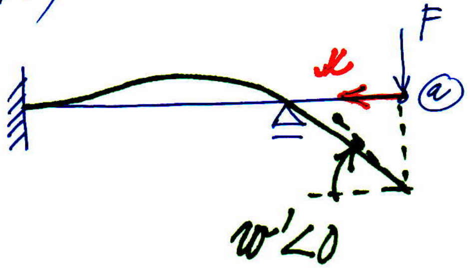
$$w_a = \frac{8{,}\overline{33}}{EI}$$

$\underline{x = 3}$: $EI\,w'_{ab} = -5 \cdot \overset{0}{\cancel{(3-3)}}^2 + 10$

$$w'_a = \frac{10}{EI}$$

Porovnání výsledků:

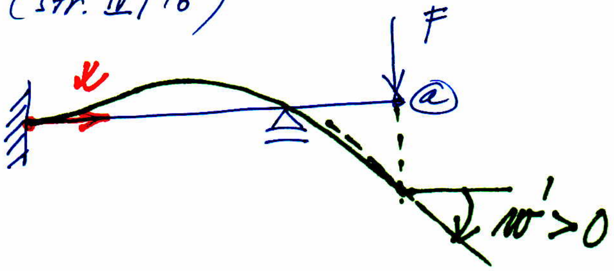
(str. IV/13)



$$w'_a = -\frac{10}{EI}$$

$$w_a = \frac{8{,}\overline{33}}{EI}$$

(str. IV/16)

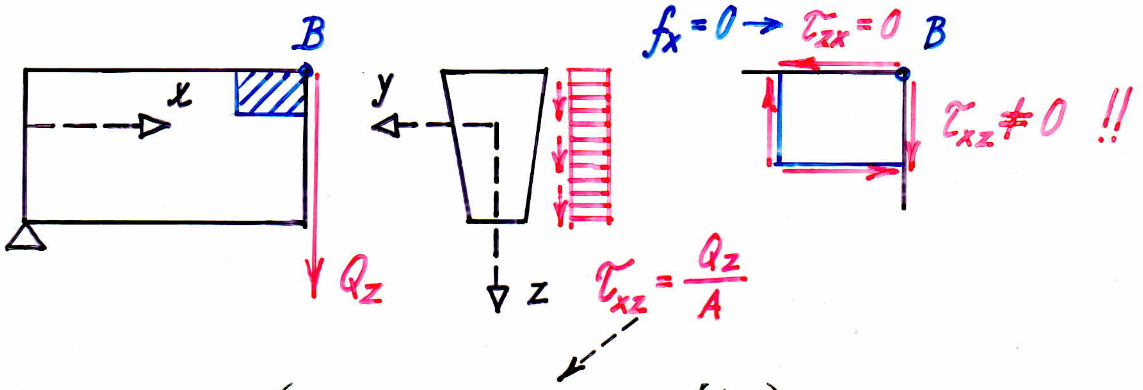


$$w'_a = \frac{10}{EI}$$

$$w_a = \frac{8{,}33}{EI}$$

Smykové napětí při ohybu

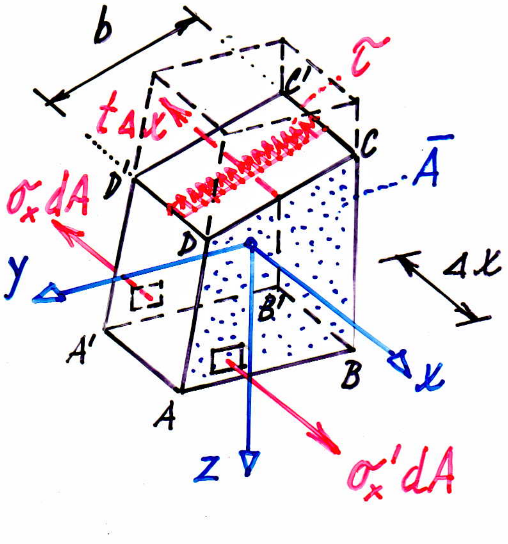
- Vliv posouvajících sil Q_y, Q_z * vsuvka V/1a, V/1b
- Rovnoměrné rozložení τ po průřezu nevyhovuje okrajovým podmínkám



(pouze svary , nýty)

- Podmínka rovnováhy na prutovém elementu $ABCDA'B'C'D'$

zjednodušení: τ rovnoměrně rozloženo podél úsečky CD



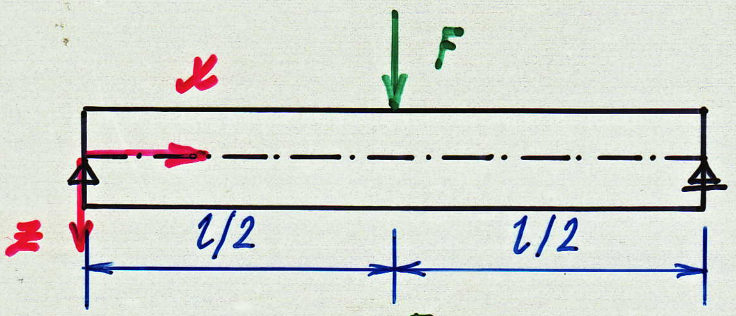
$$\underline{t = \tau \cdot b} \qquad \text{smykový tok}$$

[N/m]

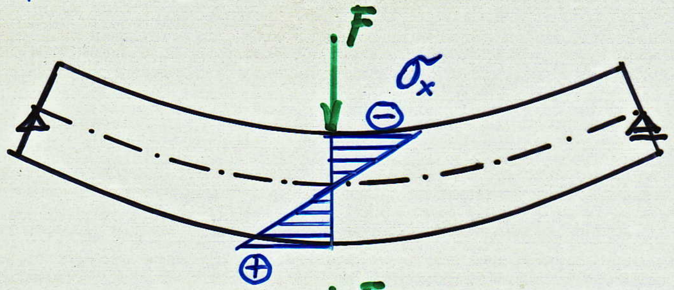
(výslednice smykových napětí podél úsečky CD)

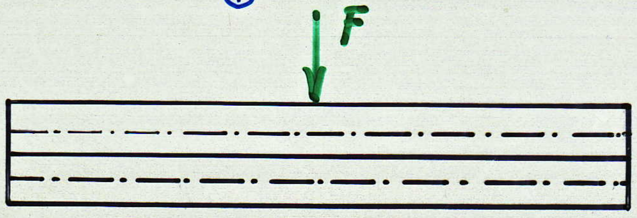
* V/1a

Ilustrace vzniku smykových napětí

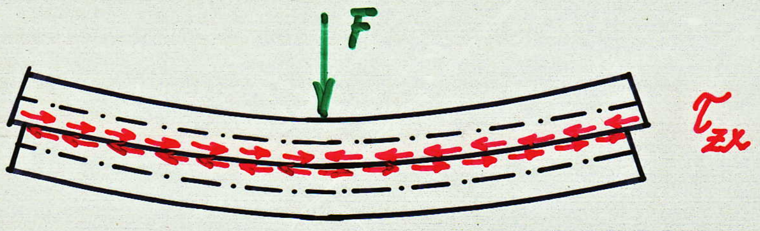


celistvý nosník



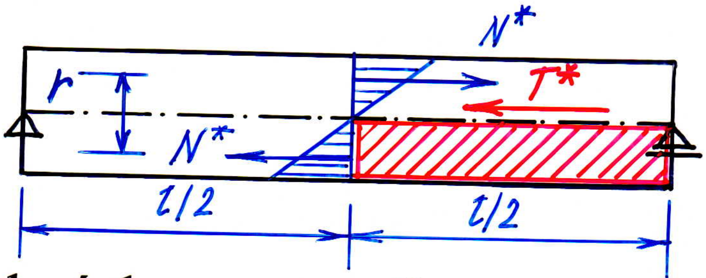


podélně rozříznutý nosník

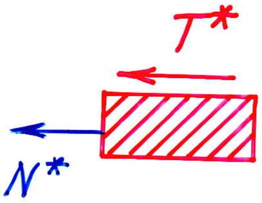


*V/1b

Smyková síla T^* (výslednice napětí τ_{zx})



Podmínka rovnováhy na vyjmuté části



$$N^* + T^* = 0$$

ohybový moment uprostřed nosníku

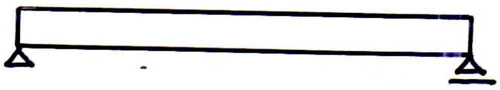
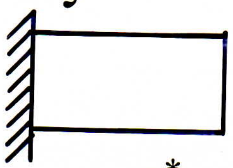
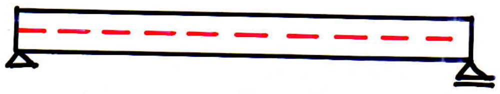
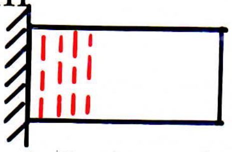
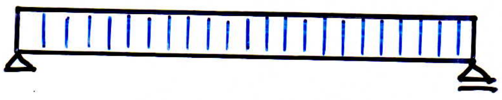
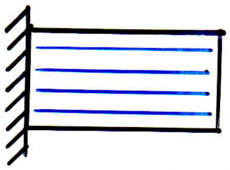
$$M_y = N^* r \quad \ldots\ldots \quad N^* = \frac{M_y}{r}$$

$\left(T^* = -N^* = -\frac{M_y}{r} \right.$ výslednice smyk. napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ je úměrná momentu $\left. M_y \right)$

$$M_y = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} \quad \ldots\ldots \quad N^* = \frac{F/2 \cdot l/2}{r} = -Q_z \cdot \frac{l}{2r}$$

$$\underline{\underline{T^*}} = -N^* = \underline{\underline{Q_z \cdot \frac{l}{2r}}}$$ ... vztah mezi T^* a Q_z

(případně: $r = \frac{2}{3}h \rightarrow T^* = \frac{3}{4} Q_z \frac{l}{h}$)

dlouhé nízké nosníky	krátké vysoké nosníky
	
$l >> 2r \quad \rightarrow \quad T^* > Q_z$	$l < 2r \quad \rightarrow \quad T^* < Q_z$
porušení	porušení
	
výztuž třmínky svislými	výztuž třmínky vodorovnými
	

odvození výrazu pro smykový tok t

$$\vec{x}: \quad \iint_A (\sigma_x' - \sigma_x)\,\mathrm{d}A - t \cdot \Delta x = 0$$

$$t = \iint_A \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sigma_x' - \sigma_x}{\Delta x}\,\mathrm{d}A \quad \Rightarrow \quad \underline{t = \iint_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,\mathrm{d}A}$$

Smykový tok vzniká jako důsledek změny normálových napětí po délce prutu.

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

(y, z ... hlavní osy!!)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{I_z}\boxed{\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x}} + \frac{z}{I_y}\boxed{\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}}$$

(pouze příčné zatížení... $f_x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x} = 0$)

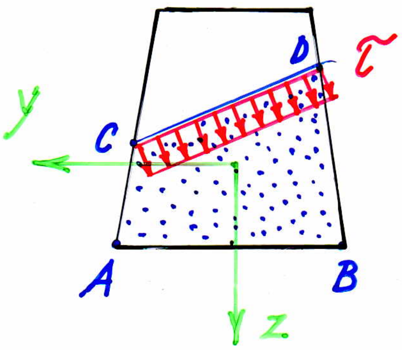
$$\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -Q_y; \quad \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = Q_z$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{y}{I_z} Q_y + \frac{z}{I_y} Q_z$$

$$t = \frac{Q_y}{I_z} \underbrace{\iint_A y\,\mathrm{d}A}_{\bar{S}_z} + \frac{Q_z}{I_y} \underbrace{\iint_A z\,\mathrm{d}A}_{\bar{S}_y}$$

$$\boxed{t = Q_y \frac{\overline{S}_z}{I_z} + Q_z \frac{\overline{S}_y}{I_y}}$$

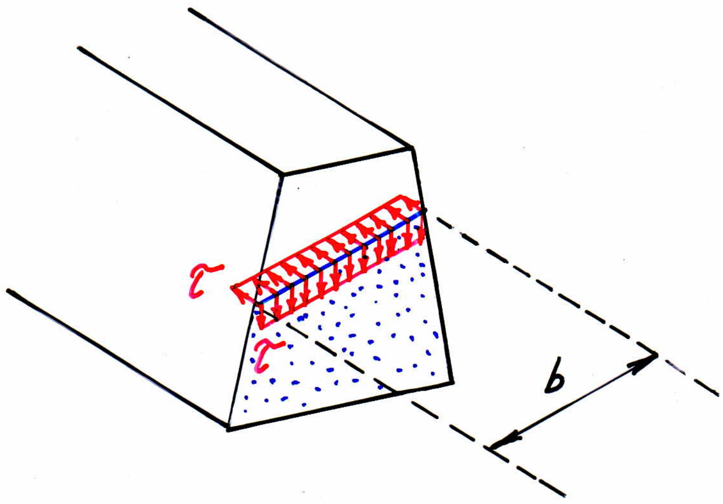
$$\boxed{\tau = \frac{Q_y \overline{S}_z}{b I_z} + \frac{Q_z \overline{S}_y}{b I_y}}$$



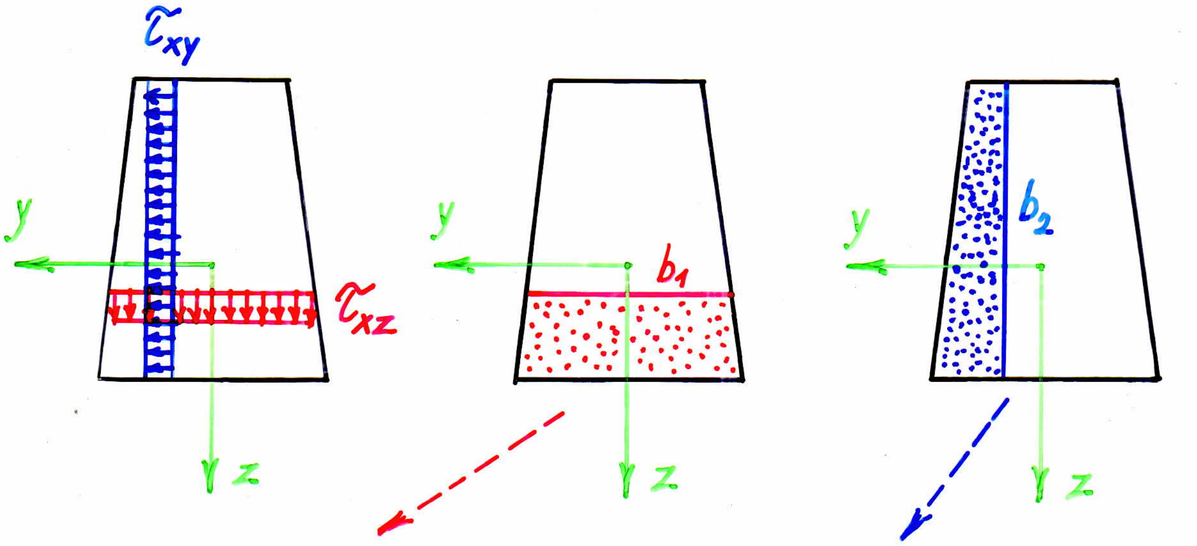
$\overline{S}_y, \overline{S}_z$ … statické momenty části průřezu ***ABCD*** (do které směřují zvolené směry τ) k hlavním centrálním osám

I_y, I_z … hlavní centrální momenty setrvačnosti celého průřezu

- Z věty o vzájemnosti plyne, že stejná smyková napětí vznikají i v rovině průřezu:

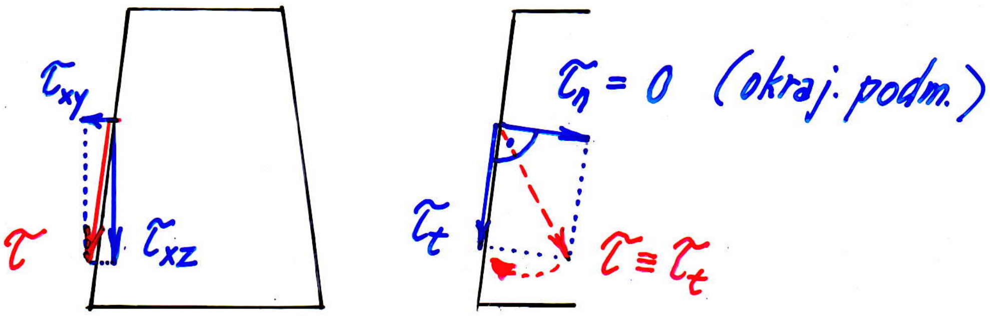


- Polohu vlákna šířky ***b*** volíme tak, abychom vystihli extrémní hodnoty $\boldsymbol{\tau}$ v průřezu:

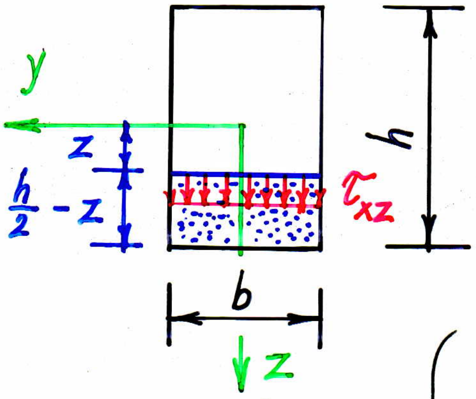


$$\tau_{xz} = \frac{Q_y \overline{S}_z}{b_1 I_z} + \frac{Q_z \overline{S}_y}{b_1 I_y} \qquad \tau_{xy} = \frac{Q_y \overline{S}_z}{b_2 I_z} + \frac{Q_z \overline{S}_y}{b_2 I_y}$$

- Výsledné smykové napětí na okraji průřezu má směr tečny k obrysu:



Příklad: *Určete průběh smykových napětí v obdélníkovém průřezu zatíženém posouvající silou* $\boldsymbol{Q_z}$.



a) $$\tau_{xz} = \frac{Q_z \bar{S}_y}{b I_y} \qquad (Q_y = 0)$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{S}_y = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\left(z + \frac{\frac{h}{2} - z}{2}\right) \quad \dots \quad \bar{S}_y = \frac{b}{8}\left(h^2 - 4z^2\right)$$

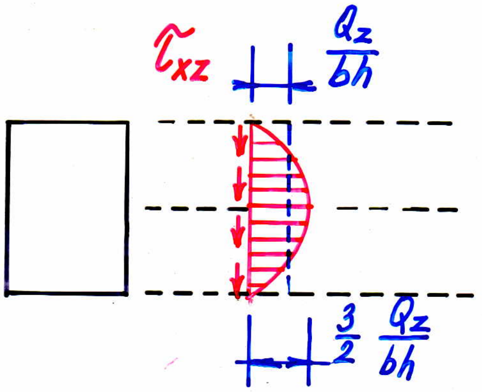
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \frac{b}{8}\left(h^2 - 4z^2\right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh^3}\left(h^2 - 4z^2\right)$$

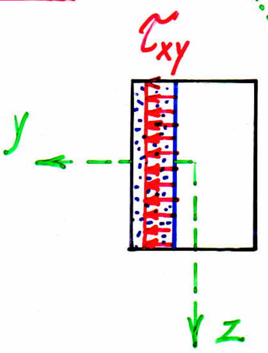
parabola 2 st.

$$z = \pm\frac{h}{2} \dots \tau_{xz} = 0 \qquad z = 0 \dots \max \tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh}$$

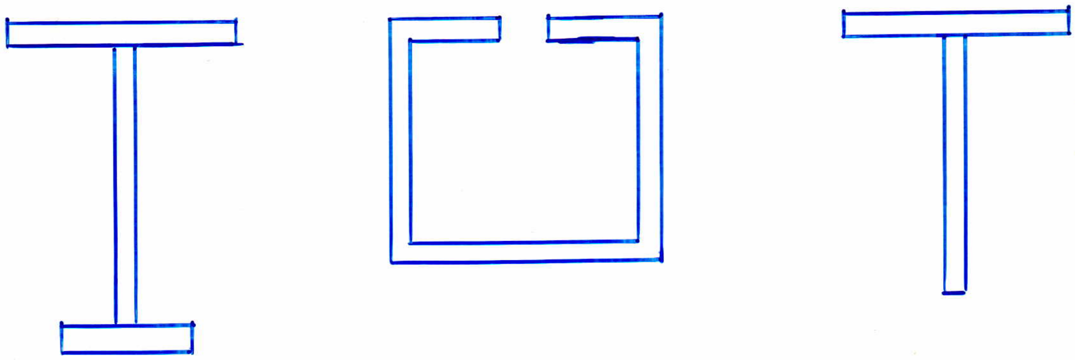
b) $$\tau_{xy} = \frac{Q_z \bar{S}_y}{h I_y} \qquad \bar{S}_y = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0$$

sym. podle y !

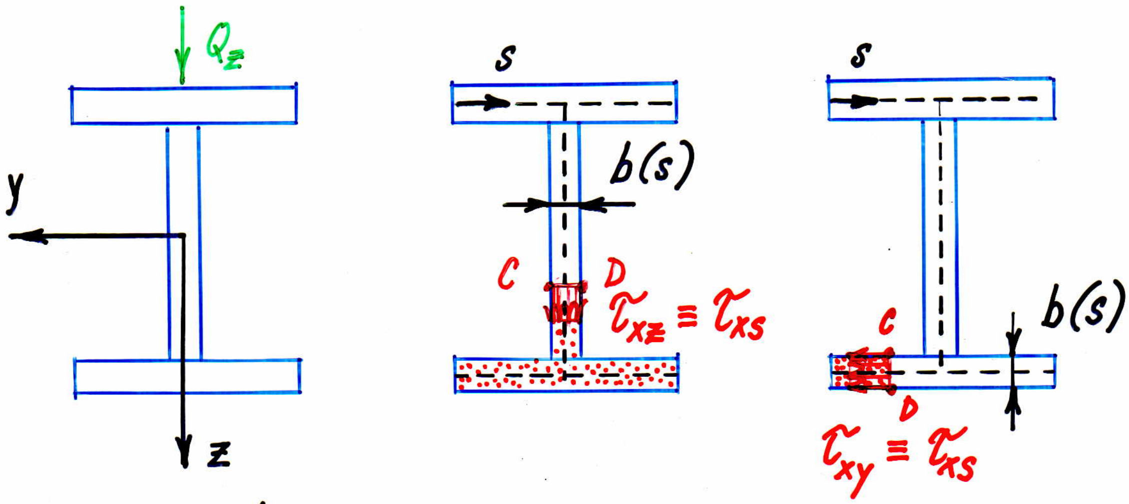


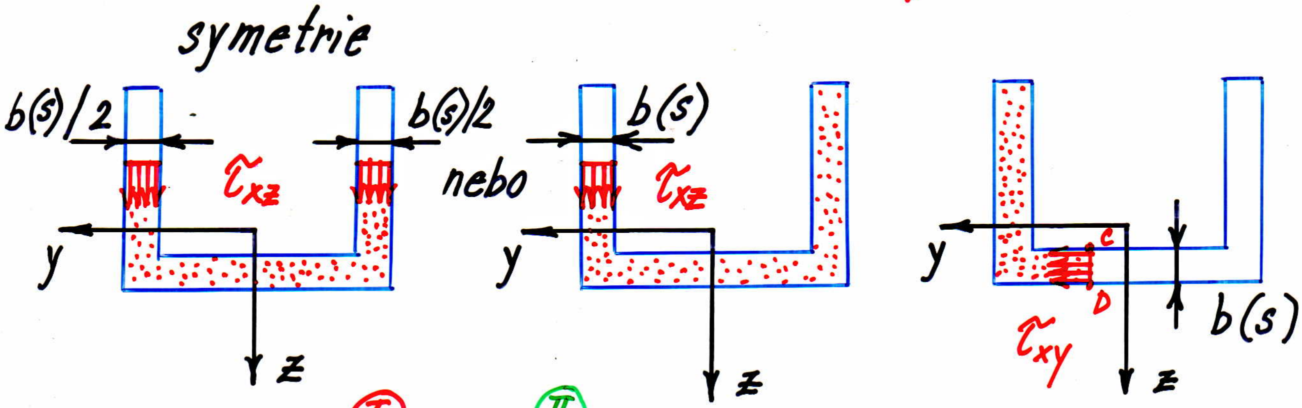


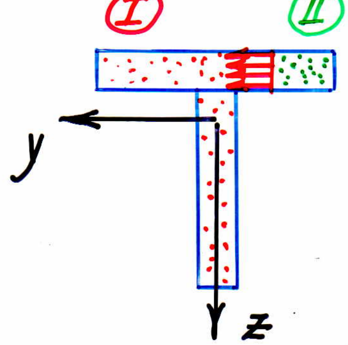
Smyková napětí v členěných průřezech



$$\tau_{xs} = \frac{Q_z \bar{S}_y(s)}{I_y b(s)}$$





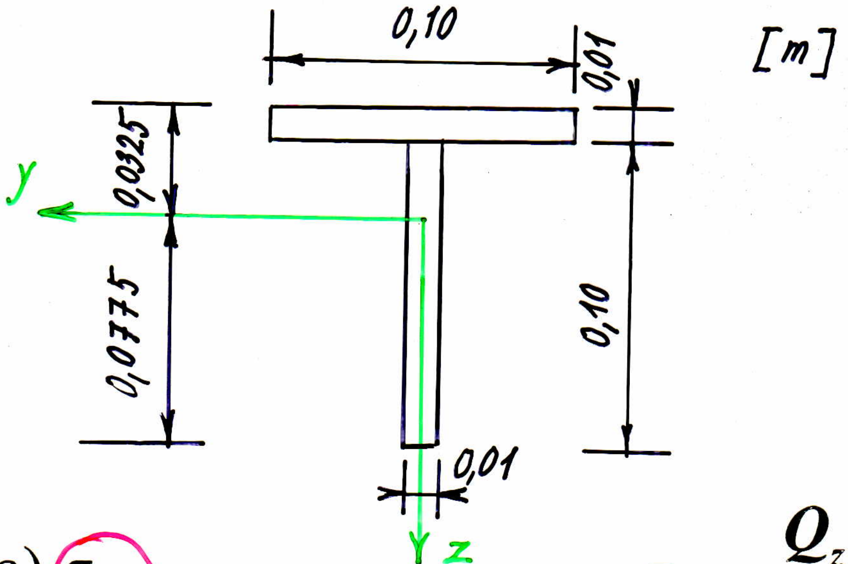


$$\bar{S}_y^{I} + \bar{S}_y^{II} = 0$$

$$\bar{S}_y^{I} = -\bar{S}_y^{II} \quad \ldots\ldots \quad \bar{S}_y^{II} < 0$$

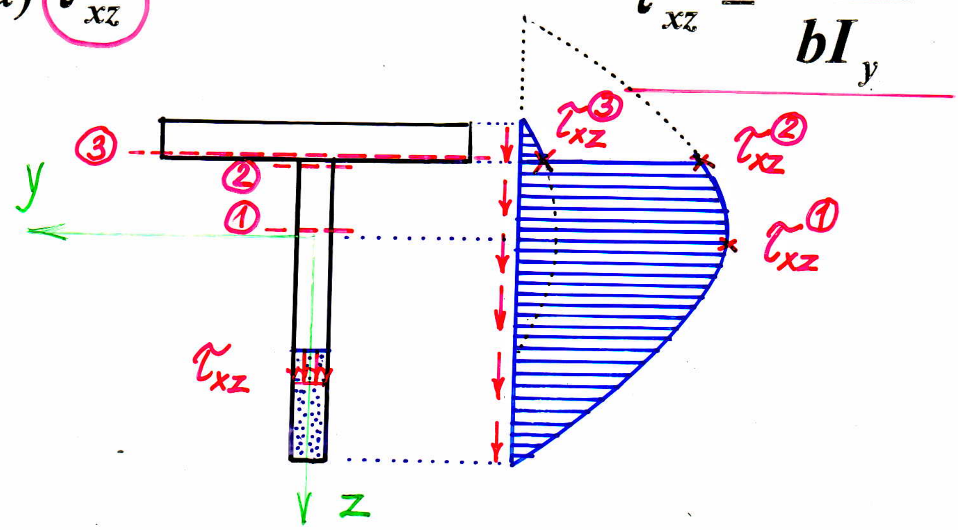
$$\bar{S}_y^{I} > 0$$

Příklad: *Určete průběhy smykových napětí v tenkostěnném průřezu zatíženém silou* $Q_z = 20\,\text{kN}$. $I_y = 2{,}354\cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$



a) τ_{xz}

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \bar{S}_y}{b I_y}$$



$$\bar{S}_y^{①} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}0775^2}{2} = 3\cdot 10^{-5}\,\text{m}^3$$

$$\bar{S}_y^{②} = \bar{S}_y^{③} = 0{,}01\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0275 = 2{,}75\cdot 10^{-5}\,\text{m}^3$$

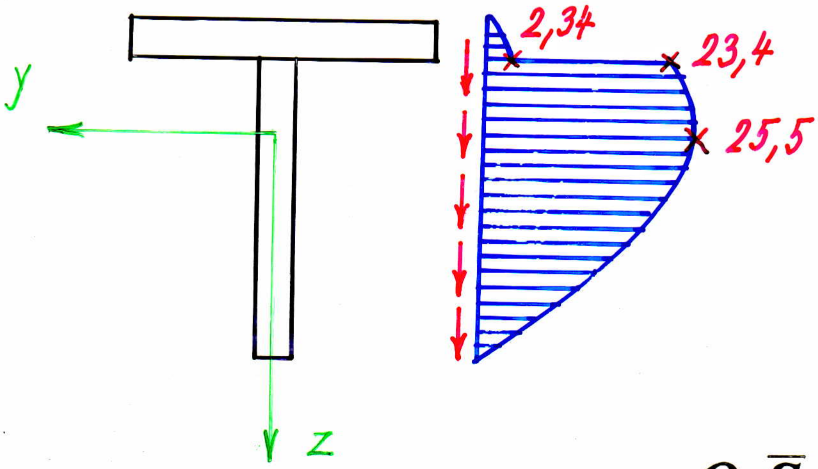
nebo $\bar{S}_y^{②\,\mathrm{I}} = -\bar{S}_y^{②\,-} = -(-0{,}1\cdot 0{,}01\cdot 0{,}0275) =$

$$= 2{,}75\cdot 10^{-5}\,\text{m}^3$$

$$\tau_{xz}^{①} = \frac{0{,}02 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{0{,}01 \cdot 2{,}354 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{25{,}5\,\text{MPa}}}$$

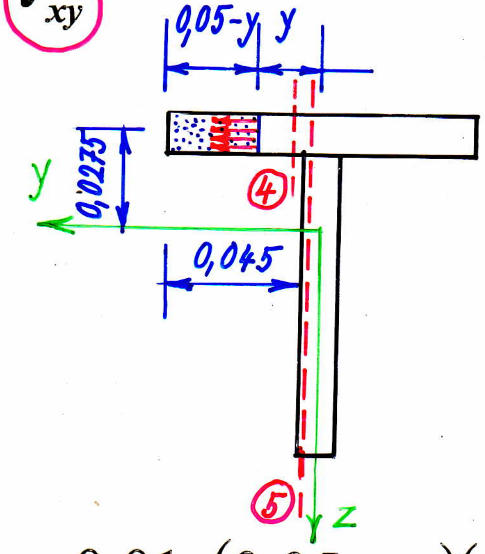
$$\tau_{xz}^{②} = \frac{0{,}02 \cdot 2{,}75 \cdot 10^{-5}}{0{,}01 \cdot 2{,}354 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{23{,}4\,\text{MPa}}}$$

$$\tau_{xz}^{③} = \frac{0{,}02 \cdot 2{,}75 \cdot 10^{-5}}{0{,}1 \cdot 2{,}354 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{2{,}34\,\text{MPa}}}$$



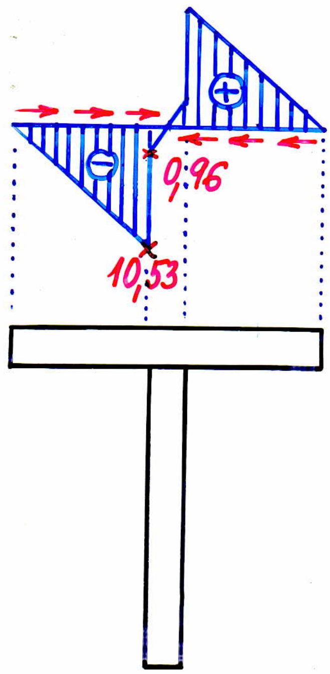
b) τ_{xy}

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z \bar{S}_y}{b I_y}$$



$\bar{S}_y = 0{,}01 \cdot (0{,}05 - y)(-0{,}0275)$ …lin. funkce!

$\bar{S}_y^{④} = -0{,}01 \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}0275 = -1{,}2375 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3$

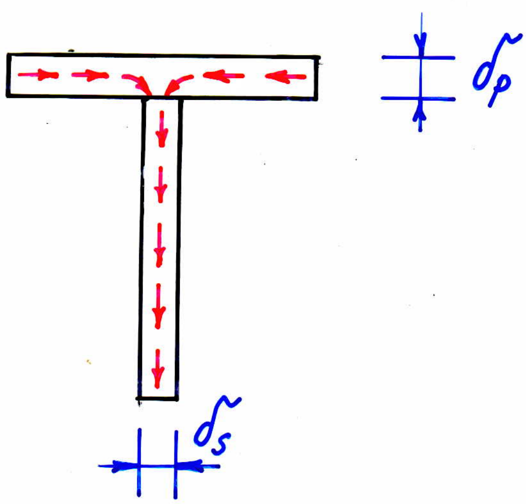


$$\tau_{xy}^{④} = \frac{0{,}02\cdot\left(-1{,}2375\cdot 10^{-5}\right)}{0{,}01\cdot 2{,}354\cdot 10^{-6}} = -10{,}53\,\mathrm{MPa}$$

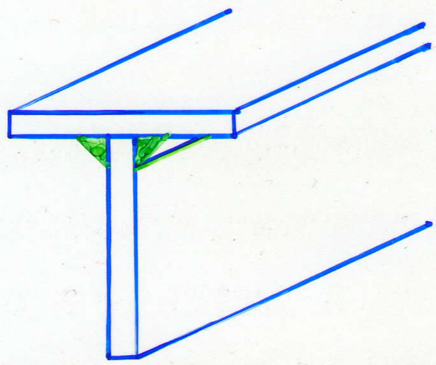
$$\tau_{xy}^{⑤} = \frac{0{,}02\cdot\left(-1{,}2375\cdot 10^{-5}\right)}{0{,}11\cdot 2{,}354\cdot 10^{-6}} = -0{,}96\,\mathrm{MPa}$$

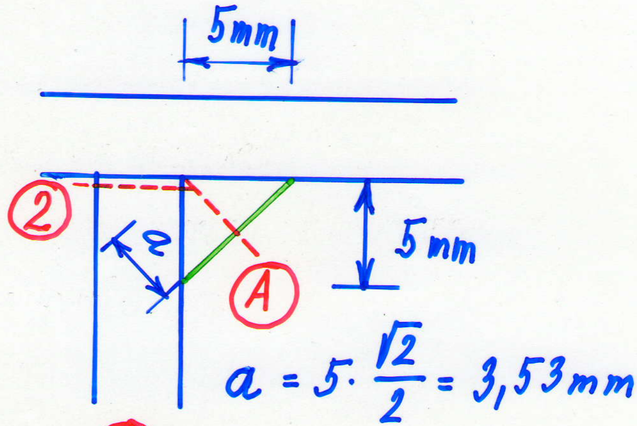
Poznámka: pro přibližně stejné hodnoty smykového napětí ve stojině a v pásnici je vhodný poměr $\delta_{pásnice} = \delta_{stojina}/2$.

Výsledný průběh smykového toku $t = \tau \cdot \delta$

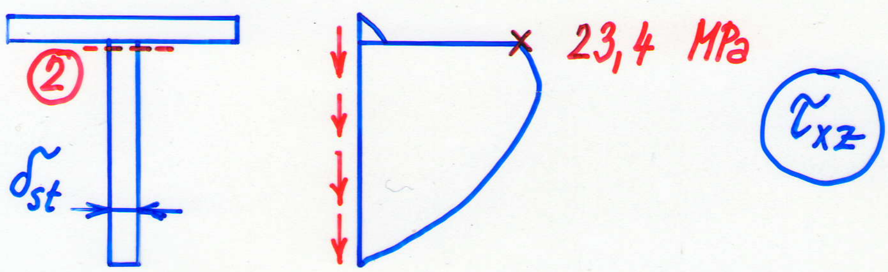


Příklad: *Vypočítejte smykové napětí v koutových svarech tloušťky 5mm, kterými je přivařena stěna k přírubě průřezu z předcházejícího příkladu.*





Určíme smykový tok v řezu 2 :



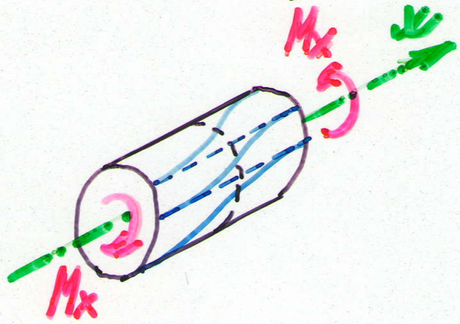
$$t^{2} = \tau_{xz}^{2} \cdot \delta_{st} = 23{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}234\,\mathrm{MN/m}$$

Smykový tok t^{2} přenášejí dva svary.
Nebezpečný řez A má šířku $a = 0{,}00353\mathrm{m}$.
Pro smykové napětí v řezu A platí:

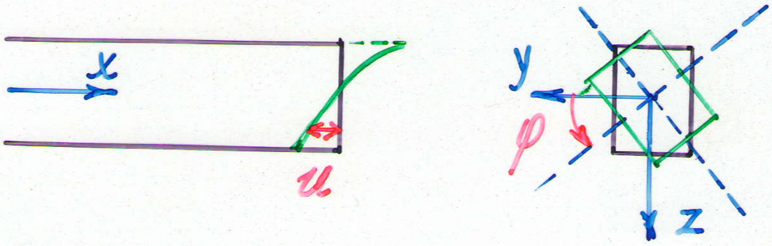
$$\tau^{A} = \frac{t^{2}}{2a} = \frac{0{,}234}{2 \cdot 0{,}00353} = \underline{\underline{33{,}144\,\mathrm{MPa}}}$$

VOLNÉ KROUCENÍ PRUTŮ

$M_x \neq 0 \Rightarrow$ kroucení
(jsou-li ostatní vnitř. síly nulové $\Rightarrow$ prosté kroucení)

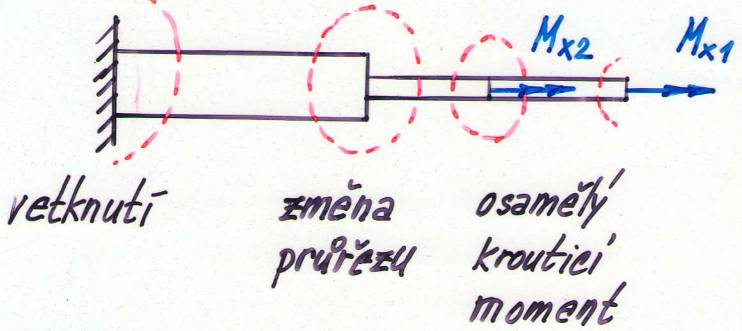


- Účinek M_x — pootočení průřezu φ kolem x
  — deplanace průřezu u

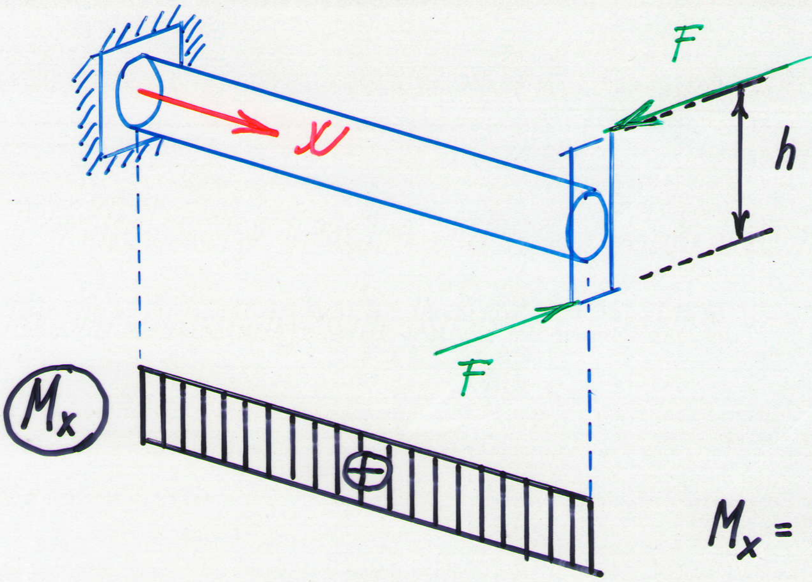


- Deplanace probíhá volně $\Rightarrow$ volné kroucení
  (St. Vénantovo)
  $\boxed{\tau_{xy}, \tau_{xz}}$

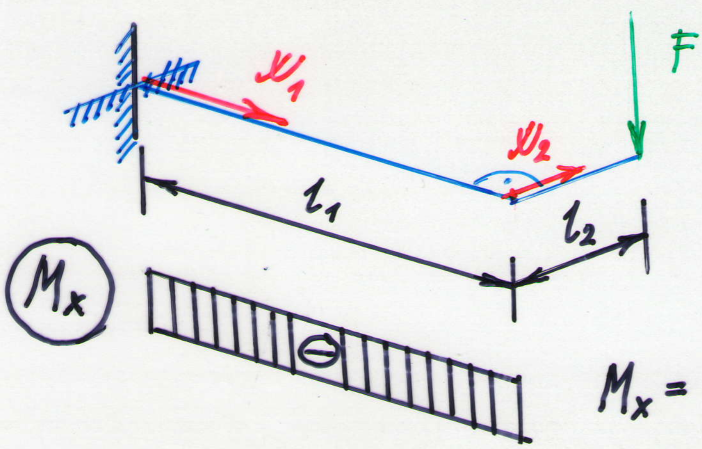
- Deplanace omezována $\Rightarrow$ ohybové kroucení
  $\boxed{\tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_x}$



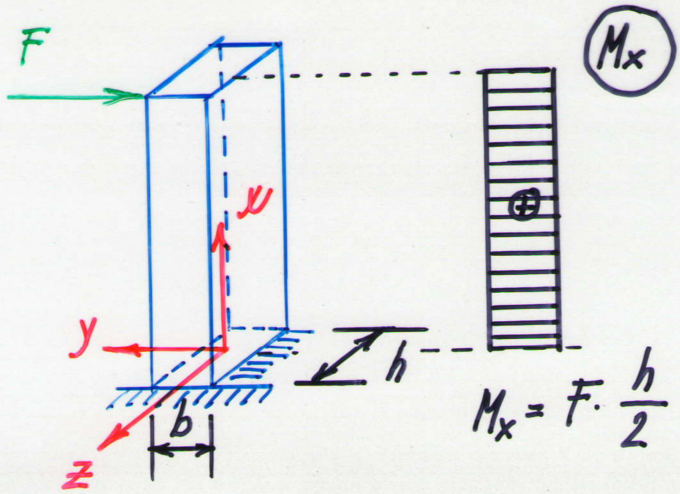
Příklady jednoduchých konstrukcí namáhaných kroucením:



$$M_x = F \cdot h$$



$$M_x = -F \cdot l_2$$



$$M_x = F \cdot \frac{h}{2}$$

- Rozdíl mezi masivními a tenkostěnnnými průřezy:

  masivní deplanují málo (nebo vůbec )
  σ_x lze zanedbat

  tenkostěnné (zejména otevřené) deplanují značně, omezení deplanace je výrazné $\Rightarrow$ σ_x je významné

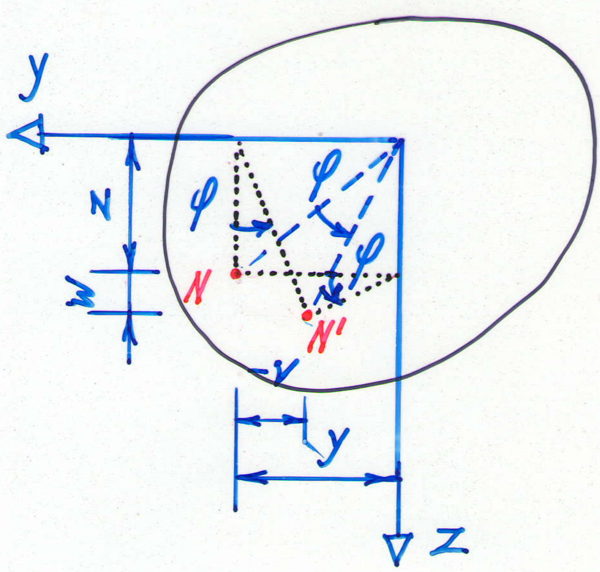
1. Volné kroucení prutů s průřezem masivním

- Předpoklady: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$

  a) $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ …průřez zachovává v rovině yz svůj tvar

  b) $\varepsilon_x = 0$

- Kinematika přemístění (jako tuhá deska v rovině)



$$u = u(x, y, z)$$
$$v = -\varphi(x) \cdot z$$
$$w = \varphi(x) \cdot y$$

- Geometrické rovnice

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}-\boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}}\cdot z$$

$$\boxed{\theta(x)=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}-\theta(x)\cdot z$$

relativní úhel

zkroucení

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\cdot y$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\theta(x)\cdot y$$

$u(x,y,z)$ … volí se jako součin dvou funkcí

$u(x,y,z)=\theta(x)\cdot\psi(y,z)$

$\psi(y,z)$ … deplanační funkce

Poznámka: předpoklad b) $\varepsilon_x=0$ je splněn pouze pro $\theta=$ konst. nebo $\psi(y,z)=0$ (tedy průřezy, které nedeplanují). ($\frac{\partial u}{\partial x}=\theta'\cdot\psi=0$

buď $\theta'=0\rightarrow\theta=$ konst.

nebo $\psi=0$)

- Fyzikální rovnice

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\theta\cdot z\right)=G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-z\right)$$

$$\tau_{xz}=G\gamma_{xz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\theta\cdot y\right)=G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+y\right)$$

- Statické rovnice (objemové síly jsou nulové)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \longrightarrow G\theta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0\right) \Big/ \cdot \frac{1}{G\theta}$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0\right) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0\right)$$

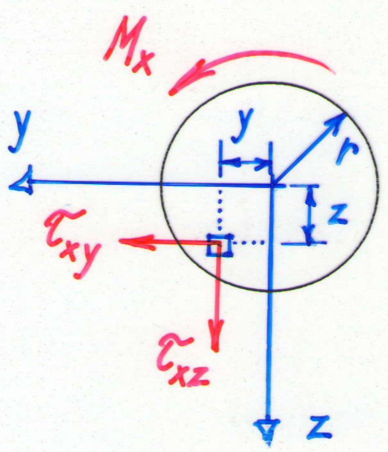
(+ okrajové podmínky)

a) Prut s konstantním kruhovým průřezem

Průřezy kruhové a mezikruhové **nedeplanují** (díky symetrii)

$$\psi(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = -G\theta z$$

$$\tau_{xz} = G\theta y$$



podmínka ekvivalence:

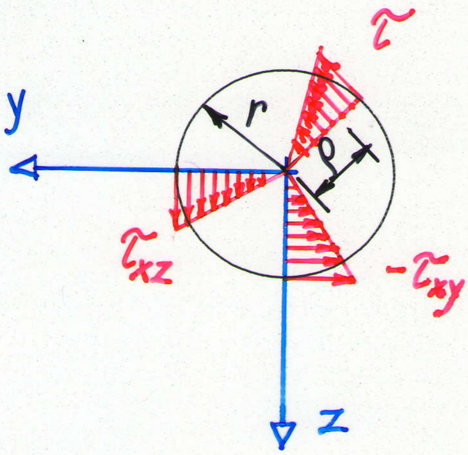
$$M_x = \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z)\,\mathrm{d}A =$$

$$= G\theta \iint_A (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A = GI_p\theta$$

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} \quad \ldots \text{ polární moment setrvačnosti}$$

$$\theta = \frac{M_x}{GI_p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{M_x}{GI_p}}$$

dif. rovnice volného kroucení



$$\tau_{xy} = -G\frac{M_x}{GI_p}z = -\frac{M_x}{I_p}z$$

$$\tau_{xz} = +G\frac{M_x}{GI_p}y = +\frac{M_x}{I_p}y$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^{\ 2} + \tau_{xz}^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho}$$

b) Prut s nekruhovým masivním průřezem

Elementární výpočet jako pro kruh nelze použít.

Výsledky přibližného řešení:

- **Přetvoření**

$$\boxed{\theta = \frac{M_x}{GI_k}}$$

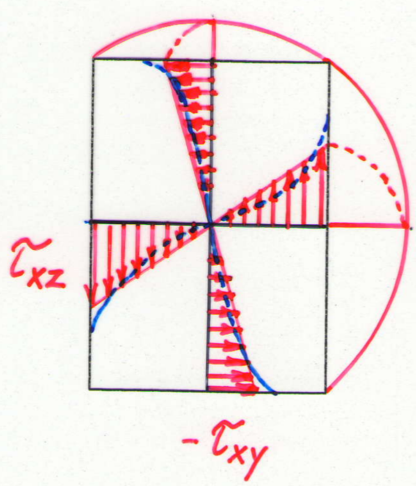
I_k …moment tuhosti ve volném kroucení
např. přibližný Saint Vénantův vzorec

$$\boxed{I_k \doteq \frac{A^4}{40 I_p}}$$

A…plocha průřezu

I_p…polární moment setrvačnosti

- **Napětí v obdélníkovém průřezu**



—— teorie
- - - - skutečnost

$$\max \tau_{xz} \doteq \frac{9}{2}\frac{M_x}{b^2 h}$$

$$I_k \doteq \frac{A^4}{36 I_p}$$

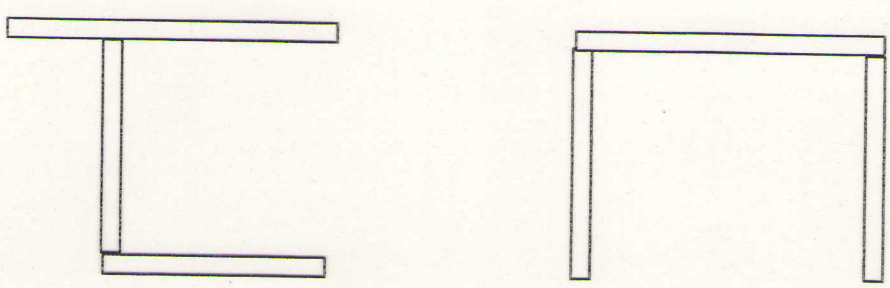
Úzký obdélník:

$$h >> b \Rightarrow \quad \frac{b}{h} << 1$$

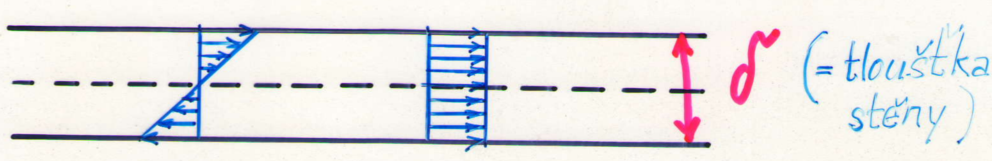
$$I_k \doteq \frac{(bh)^4}{36 \cdot \frac{1}{12}\left(bh^3 + b^3 h\right)} = \frac{b^3 h^3}{3\left(h^2 + b^2\right)} = \frac{b^3 h}{3\left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right)}$$

$$\boxed{I_k \doteq \frac{1}{3} b^3 h}$$

2. Volné kroucení prutů s tenkostěnným otevřeným průřezem



Volné kroucení vzniká jen jako **složka kroucení ohybového.**



${}^1\tau_{xs}$ + ${}^2\tau_{xs}$

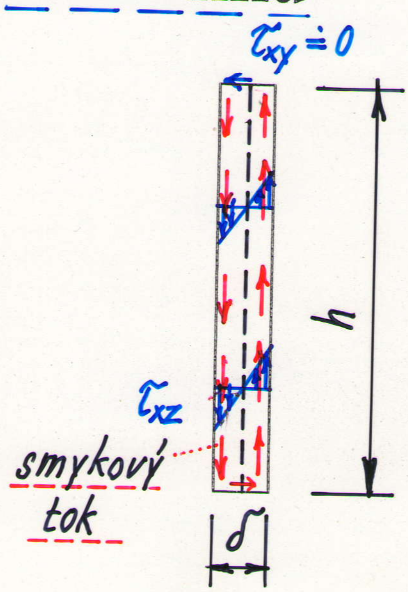
smyk. napětí: volného kroucení ohybového kroucení

- Napětí v úzkém obdélníku

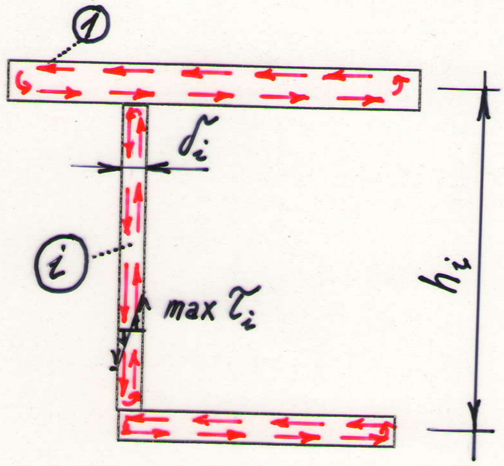
$\tau_{xy} \doteq 0$

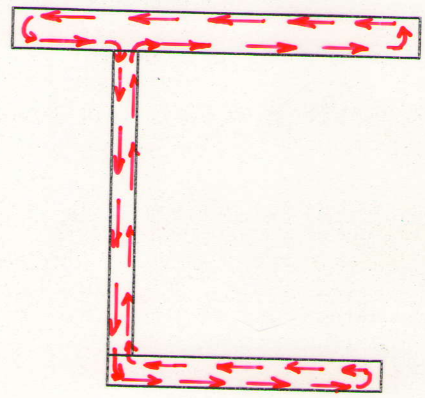
$$\max \tau_{xz} = \frac{M_x \delta}{I_k}$$

$$I_k \doteq \frac{1}{3} h \delta^3$$



- Napětí v průřezu složeném z úzkých obdélníků





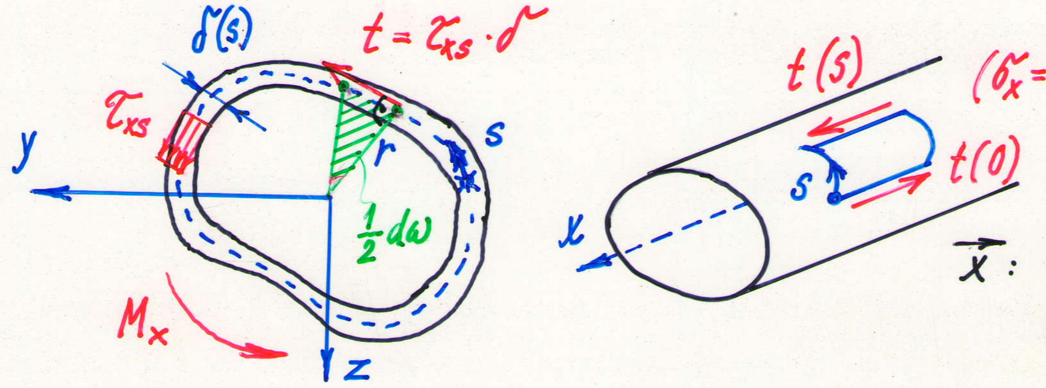
$$M_{x,i} = G\theta \frac{h_i \delta_i^3}{3}$$

celý průřez přenáší moment

$$\boxed{M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{x,i} = G\theta \cdot \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} h_i \delta_i^3}$$

$$\boxed{\max \tau_i = \frac{M_x}{I_k} \delta_i}$$

3. Volné kroucení prutů s tenkostěnnným průřezem uzavřeným



$\overrightarrow{x}$: $t(s) - t(0) = 0$

$t(s) - t(0) = konst.$

Smykový tok v průřezu je konstantní

$t = \tau_{xs} \cdot \delta(s)$

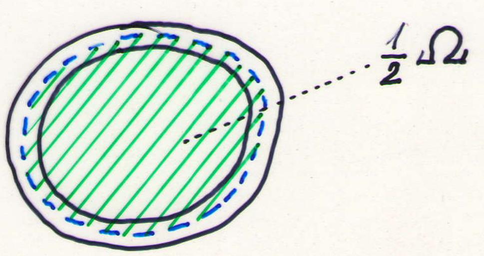
$\overset{\curvearrowleft}{x}$: $dM_x = t r ds = t d\omega$

$d\omega$ .... 2x diferenciál výsečové plochy (viz obr.)

1. Bredtův vzorec

$$\boxed{M_x = t \cdot \Omega}$$

$\Omega = \oint\limits^{(r)} \rho ds$ dvojnásobek plochy opsané střednicí



2. Bredtův vzorec

$$\boxed{\theta = \frac{M_x}{GI_k}}$$

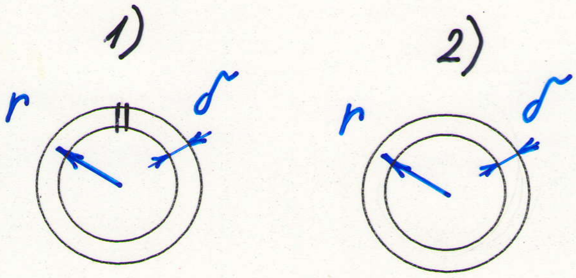
$$\boxed{I_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}}$$

moment tuhosti ve volném kroucení

Torzní tuhost GI_k je u uzavřených průřezů mnohonásobně vyšší nežli u průřezů otevřených.

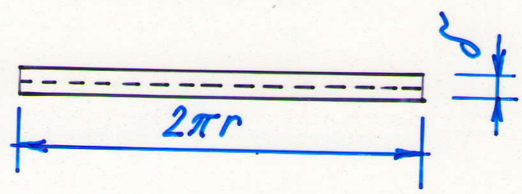
Příklad:

Porovnejte torzní tuhost duté trubky souvislé a rozříznuté.



1) otevřený průřez

$$I_k^{1)} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \delta^3 = \frac{2}{3}\pi r \delta^3$$



2) uzavřený průřez

$$I_k^{2)} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{\left(2 \cdot \pi r^2\right)^2}{\frac{2\pi r}{\delta}} = 2\pi r^3 \delta$$

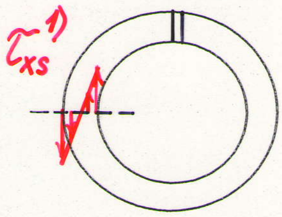
Pro tenkostěnné průřezy platí kritérium

$$\frac{2r}{\delta} > 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{\delta} > 5$$

$$\frac{I_k^{2)}}{I_k^{1)}} \geq \frac{2\pi r^3 \delta}{\frac{2}{3}\pi r \delta^3} = 3\frac{r^2}{\delta^2} = 3 \cdot 5^2 = 75$$

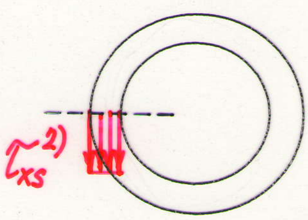
Porovnejte maximální smykové napětí obou typů průřezu.

1) otevřený



$$\max \tau_{xs}^{1)} = \frac{M_x \delta}{I_k} = \frac{M_x \delta}{\frac{2}{3}\pi r \delta^3} = \frac{3}{2}\frac{M_x}{\pi r \delta^2}$$

2) uzavřený

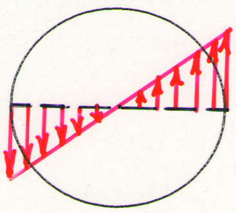


$$\max \tau_{xs}^{2)} = \frac{t}{\delta} = \frac{M_x}{\delta \Omega} = \frac{M_x}{\delta \cdot 2 \cdot \pi r^2} = \frac{1}{2}\frac{M_x}{\pi r^2 \delta}$$

$$\frac{\max \tau_{xs}^{2)}}{\max \tau_{xs}^{1)}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{M_x}{\pi r^2 \delta}}{\frac{3}{2}\frac{M_x}{\pi r \delta^2}} = \frac{1}{3}\frac{\delta}{r} \le \frac{1}{15} \qquad \left(\frac{r}{\delta}\right) \ge 5$$

$$\max \tau_{xs}^{1)} \ge 15 \cdot \max \tau_{xs}^{2)}$$

Pro porovnání určíme ještě $\max \tau_{xs}^{3)}$ *v masivním kruhovém průřezu:*



$$\max \tau_{xs}^{3)} = \frac{M_x r}{I_p} = \frac{M_x r}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2M_x}{\pi r^3}$$

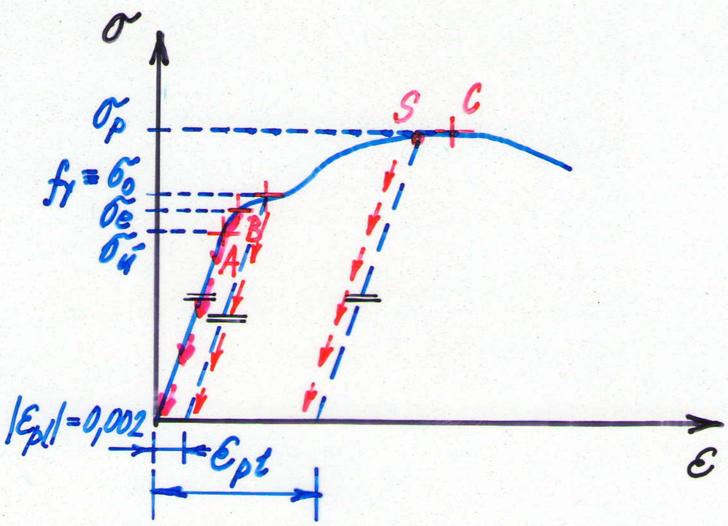
$$\frac{\max \tau_{xs}^{3)}}{\max \tau_{xs}^{2)}} = \frac{\frac{2M_x}{\pi r^3}}{\frac{1}{2}\frac{M_x}{\pi r^2 \delta}} = \frac{4\delta}{r} \leq \frac{4}{5}$$

Napětí v průřezu masivním a tenkostěnném uzavřeném jsou řádově srovnatelná, ale v průřezu tenkostěnném otevřeném jsou napětí o řád vyšší.

Pružnoplastický a plastický stav průřezů ohýbaných prutů

Využití plastických vlastností materiálu:

Skutečný pracovní diagram



σ_p ... mez pevnosti

$f_y = \sigma_0$ ... mez kluzu

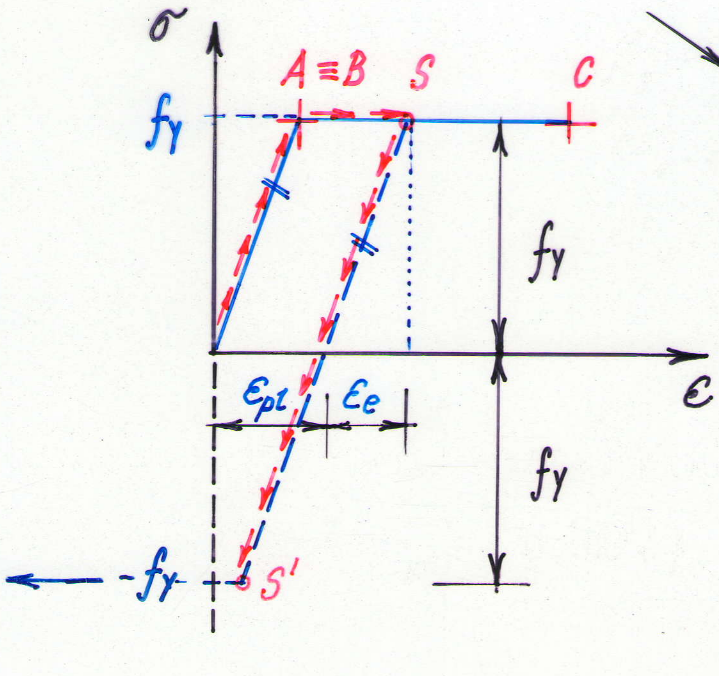
σ_e ... mez pružnosti

$\sigma_ú$ ... mez úměrnosti

(smluvní mez kluzu ... napětí odpovídající trvalé deformaci $|\varepsilon_{pl}| = 0{,}002$)

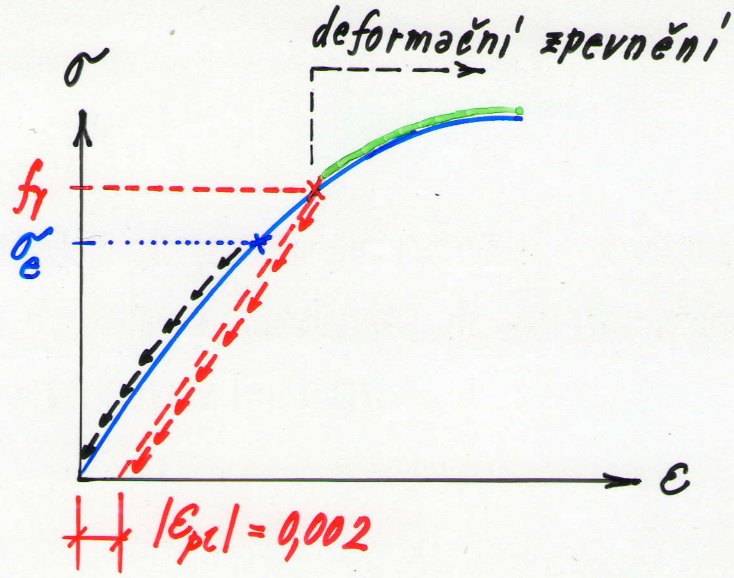
deformační zpevnění ... vzrůst napětí za mezí kluzu

Prandtlův diagram (ideální pružnoplastický)

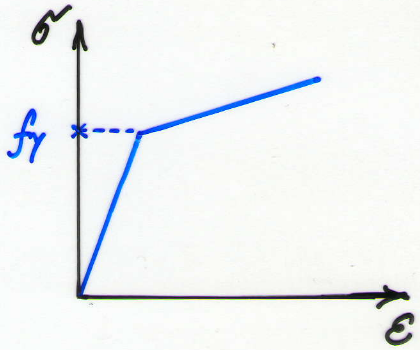


zjednodušení výpočtu

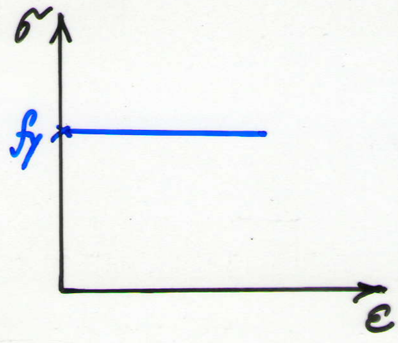
Pro materiály, které nemají vyznačenou mez kluzu (slitiny, beton…), se používá tzv. **smluvní mez kluzu**:



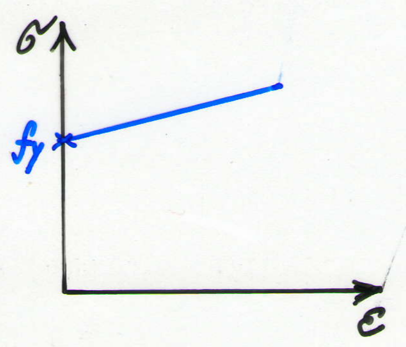
Další idealizace pracovního diagramu (kromě Prandtlova ideálně pružnoplastického)



bilineární (pružnoplast. mat. s lineárním zpevněním)



tuhoplast. mat. (ideální)



tuhoplast. s lineárním zpevněním

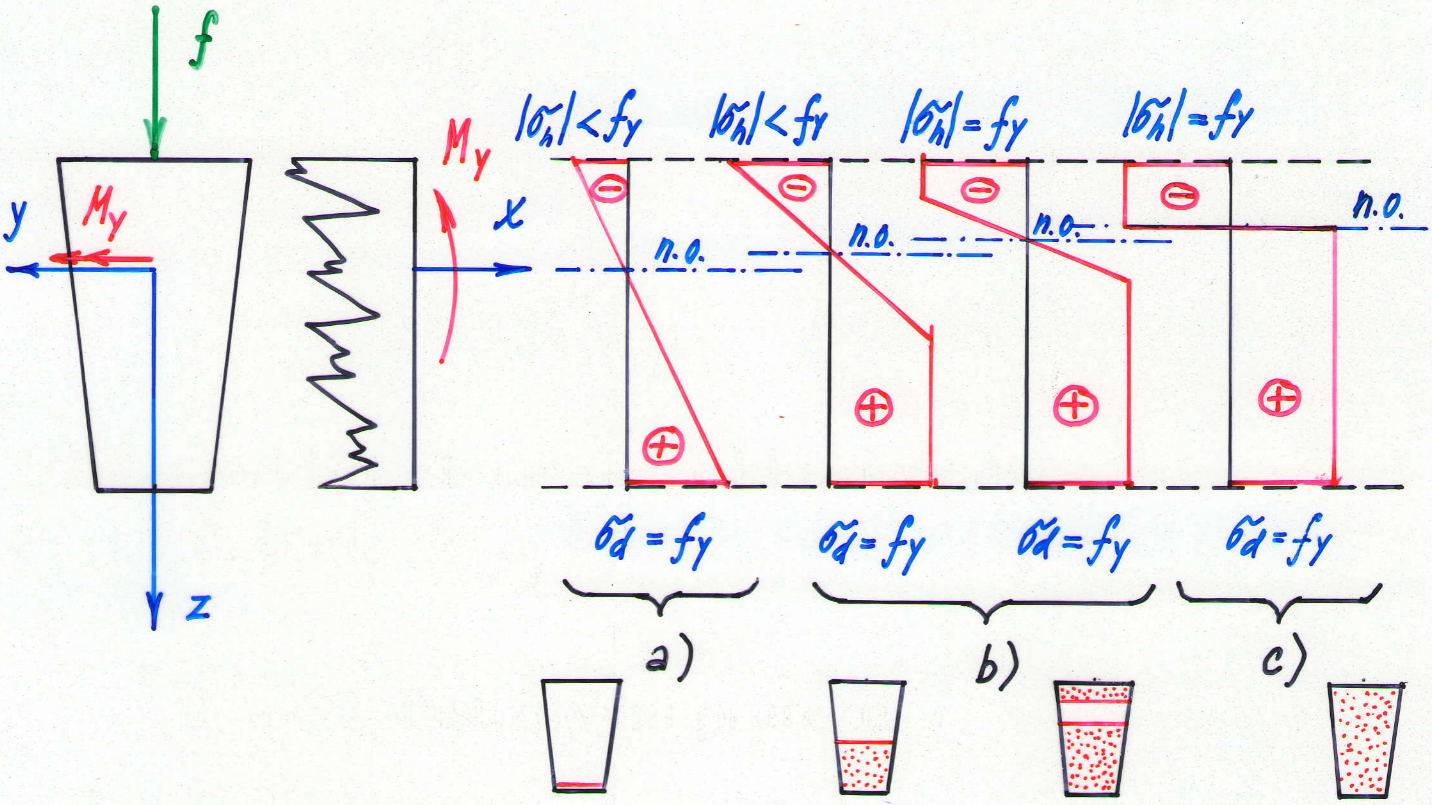
⇓

použití v teorii mezní únosnosti konstrukcí

Jednoduchý ohyb

Předpoklad: stejné meze kluzu v tahu a tlaku (např. ocel) … f_y

Postupné zplastizování průřezu:



a) mezní pružný stav

b) pružnoplastický stav

c) plastický stav

únosnost průřezu: $\boxed{M_{el}}$ $\boxed{M_{elpl}}$ $\boxed{M_{pl}}$

a) Mezní pružný stav

$$\boxed{M_{el} = W_{\min} \cdot f_y}$$

(s využitím vztahů

$$\sigma_d = \frac{M_y}{W_d}, M_y = M_{el}, \sigma_d = f_y)$$

$W_{\min}$ je průřezový modul ke vzdálenějším krajním vláknům (od osy y)

b) Pružnoplastický stav

Dvě podmínky ekvivalence sil v průřezu:

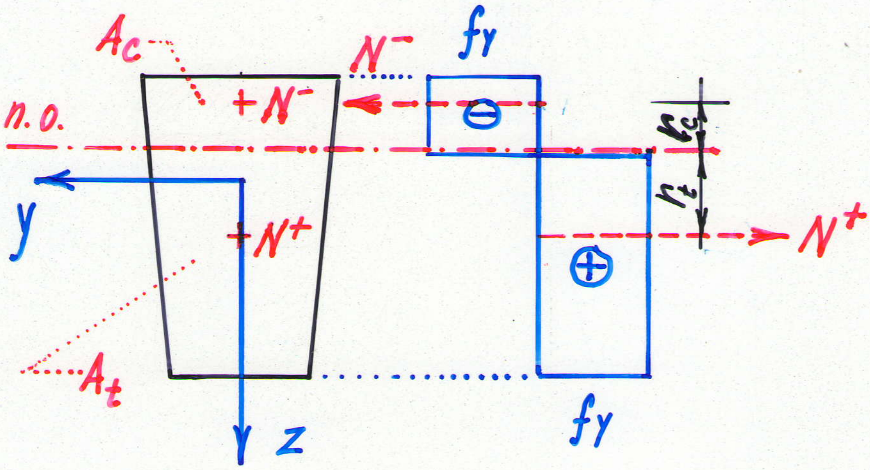
1) $N_x = 0 \ldots \boxed{\iint_A \sigma_x \mathrm{d}A = 0}$

2) $M_y = M_{elpl} \ldots \boxed{M_{elpl} = \iint_A \sigma_x z \mathrm{d}A}$

pro dvě neznámé:

- poloha neutrální osy
- moment únosnosti průřezu M_y

c) Plastický stav (průřez plně zplastizován)



Dvě podmínky ekvivalence:

1) $N^+ - N^- = 0$

$$f_y \cdot A_t - f_y \cdot A_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_t = A_c = \frac{A}{2}}$$

neutrální osa dělí průřez na dvě části o stejné ploše

2) $M_y = M_{pl}$

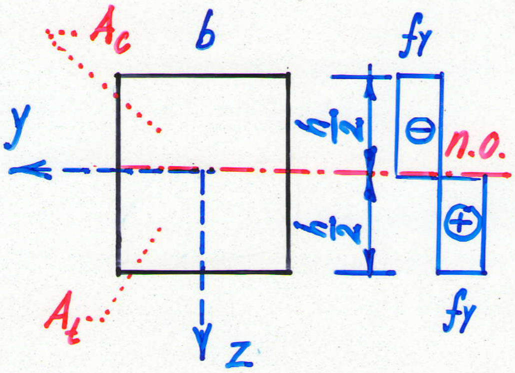
$$f_y \cdot A_t \cdot r_t + f_y \cdot A_c \cdot r_c = M_{pl}$$

$$f_y \left(S_{y,t} - S_{y,c} \right) = M_{pl}$$

$$\underline{W_{pl} = \left| S_{y,t} \right| + \left| S_{y,c} \right|}$$ ... průřezový modul v plastickém stavu

$$\boxed{M_{pl} = f_y \cdot W_{pl}}$$

Příklad: určete průřezový plastický modul obdélníkového průřezu



$$W_{pl} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} \cdot 2 = \frac{bh^2}{4}$$

$\left(W_{el} = \frac{bh^2}{6} \; ; \; \frac{W_{pl}}{W_{el}} = 1{,}5 \right)$

plastická rezerva

d) Odtížení z pružnoplastického (plastického) stavu

- při odtěžování se materiál chová **lineárně pružně**
- **reziduální (zbytková) napětí** se určí jako součet napětí v pružnoplastickém resp. plastickém stavu a napětí fiktivního odtěžujícího pružného stavu vyvozeného momentem M_{odt}

$M_{odt} = -M_{elpl}$ resp. $M_{odt} = -M_{pl}$

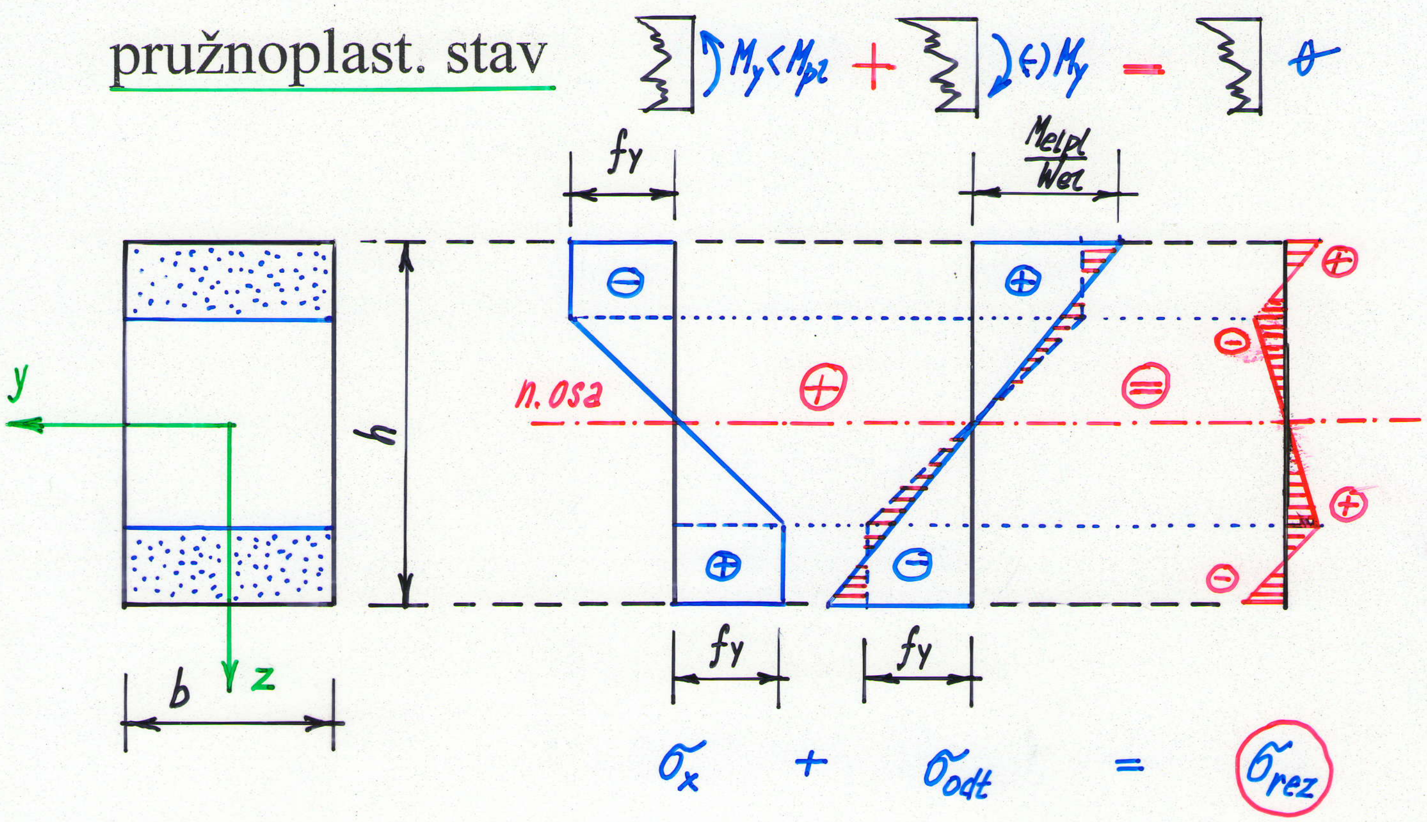
$$\boxed{\sigma_{rez} = \sigma_x + \frac{M_{odt}}{I_y} z}$$

$$|\sigma_{rez}| \le f_y$$

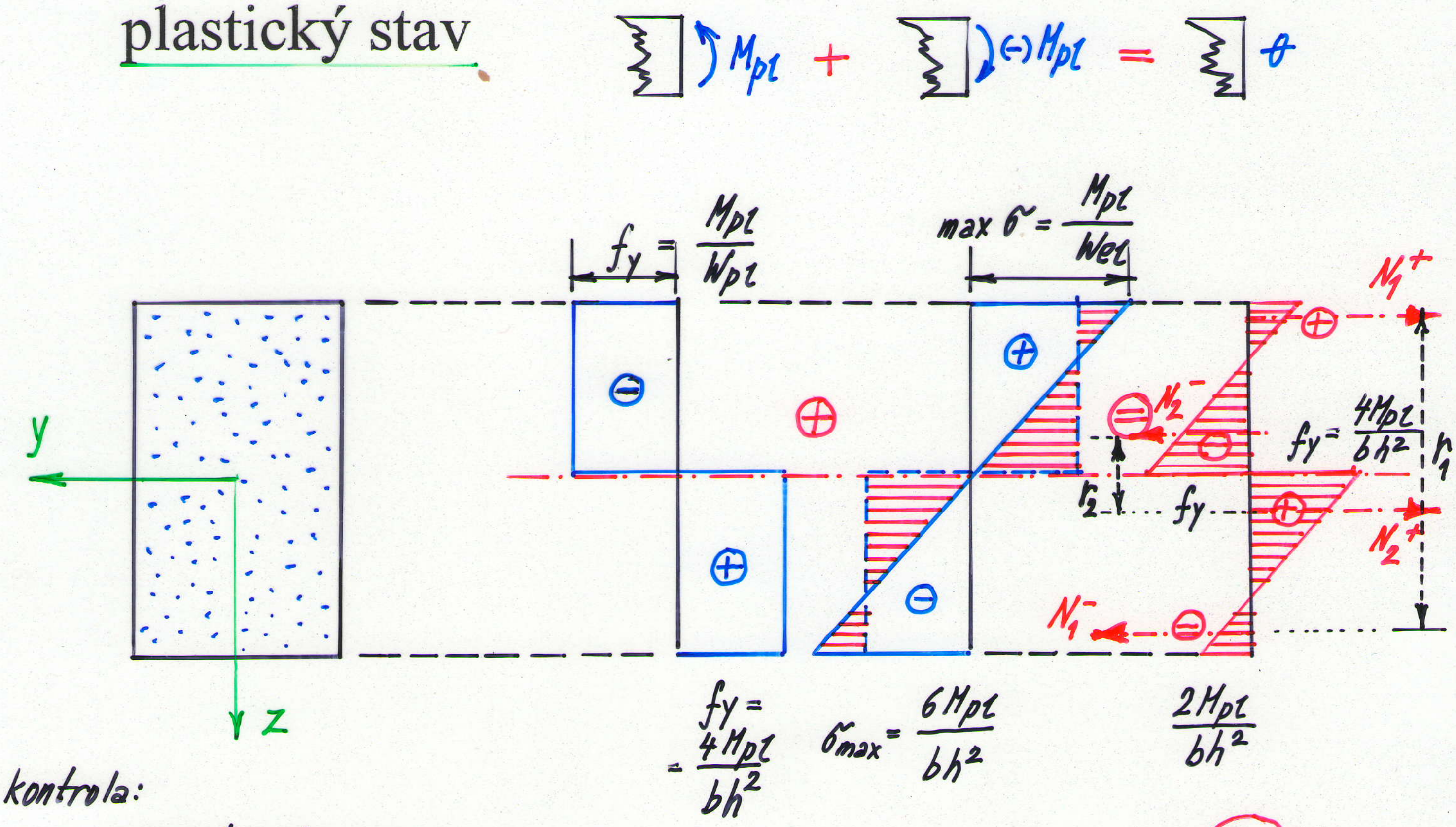
Reziduální napětí dávají nulový moment a nulovou normálovou sílu.

Reziduální napětí ve dvojose symetrickém průřezu (např. obdélník):

pružnoplast. stav



plastický stav



kontrola:

$$-N_1^- + N_1^+ + N_2^+ - N_2^- = 0$$

$$N_2^+ \cdot r_2 - N_1^- \cdot r_1 = 0$$

σ_x + σ_{odt} = σ_{rez}

(rez. napětí dávají nulový moment a nulovou norm. sílu)

Příklad:

Pro obdélníkový průřez určete

a) *mezní elastický moment* M_{el}

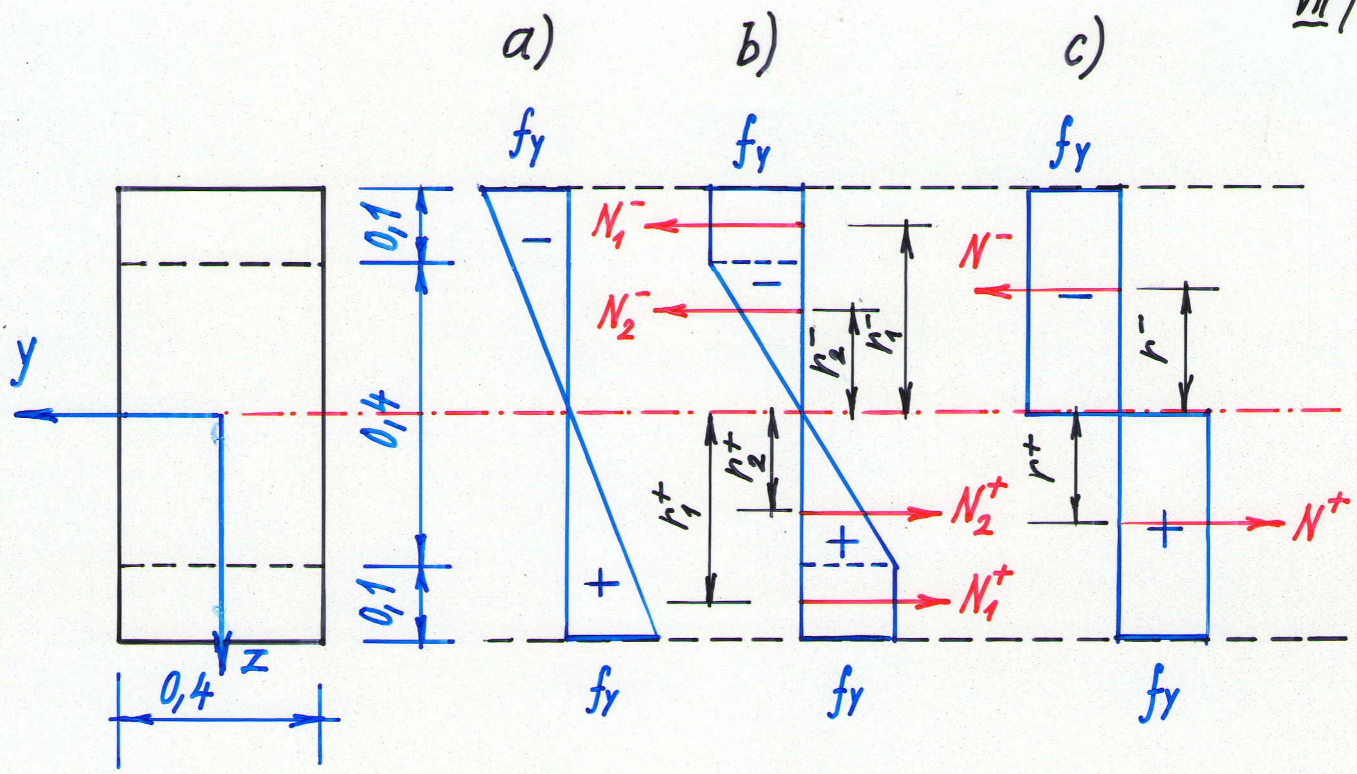
b) *elastoplastický moment* M_{elpl}, *je-li*

$h_{el} = 0{,}4\text{m}$

c) *mezní (plastický) moment* M_{pl}

d) *průběh reziduálních napětí po odtížení z elastoplastického stavu a z plastického stavu*

$f_y = 18\text{MPa}$ *(dřevo)*



a) $\underline{M_{el}} = f_y W_{el} = f_y \cdot \frac{1}{6} bh^2 = \underline{0{,}432\,\text{MNm}}$

b) $N_1^+ + N_2^+ - N_1^- - N_2^- = 0$ *splněno*
vzhledem k symetrii podle osy y

$\underline{M_{elpl}} = 2 \cdot \left(N_1^+ r_1^+ + N_2^+ r_2^+ \right) =$ $\quad (r_1^+ = r_1^-;\ r_2^+ = r_2^-)$

$$2\left(\underbrace{18 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1}_{N_1^+} \cdot \underbrace{0{,}25}_{r_1^+} + \underbrace{18 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{1}{2}}_{N_2^+} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot 0{,}2}_{r_2^+}\right) =$$

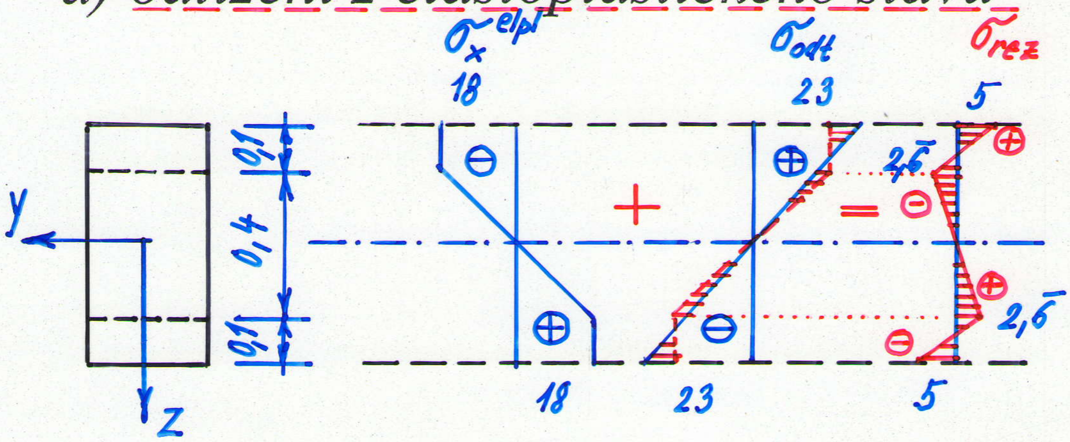
$$= \underline{0{,}552\,\text{MNm}}$$

c) $\underline{M_{pl}} = f_y W_{pl} = f_y \frac{bh^2}{4} = \underline{0{,}648\,\text{MNm}}$

$\left(M_{pl} = N^+ \cdot r^+ + N^- \cdot r^- = 2 \cdot N^+ \cdot r^+ = 2 \cdot f_y \cdot \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = f_y \cdot \frac{bh^2}{4} \right)$

$$\boxed{!\, M_{el} < M_{elpl} < M_{pl}\, !}$$

d) odtížení z elastoplastického stavu



$$M_{odt} = -M_{elpl} = -0{,}552\,\mathrm{MNm} \qquad I_y = 0{,}0072\,\mathrm{m}^4$$

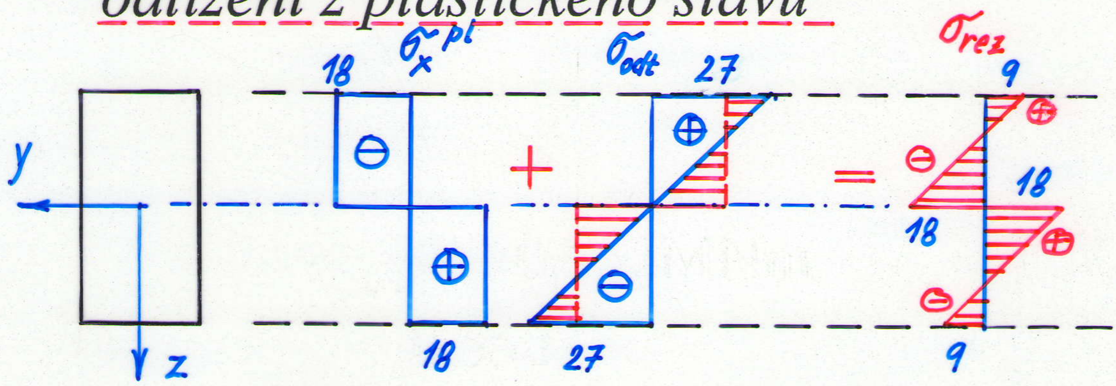
$$\sigma_{rez} = \sigma_x^{elpl} - \underbrace{\frac{0{,}552}{0{,}0072} z}$$

$$\left(\sigma_{odt}^{dol.} = -\frac{0{,}552}{0{,}0072} \cdot 0{,}3 = -23\ \mathrm{MPa}\right)$$

$$\sigma_{rez}(z = 0{,}3) = 18 - 76{,}\overline{6} \cdot 0{,}3 = -5\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{rez}(z = 0{,}2) = 18 - 76{,}\overline{6} \cdot 0{,}2 = 2{,}\overline{6}\,\mathrm{MPa}$$

odtížení z plastického stavu



$$M_{odt} = -M_{pl} = -0{,}648\,\mathrm{MNm}$$

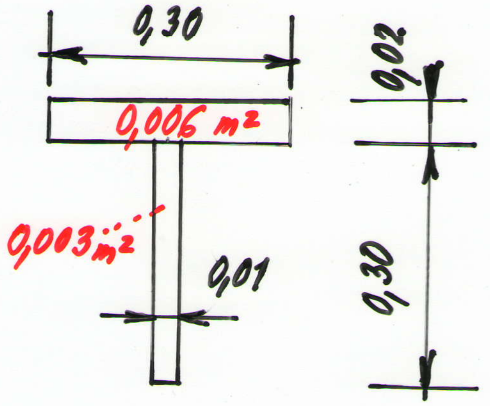
$$\sigma_{rez} = \sigma_x^{pl} - \frac{0{,}648}{0{,}0072} z = \pm 18 - 90z$$

$$\sigma_{rez}(z = 0) = \pm 18\,\mathrm{MPa} \qquad \sigma_{rez}(z = 0{,}3) = -9\,\mathrm{MPa}$$

Pozn.: odtížení z plastického stavu nemá praktický význam!

Příklad

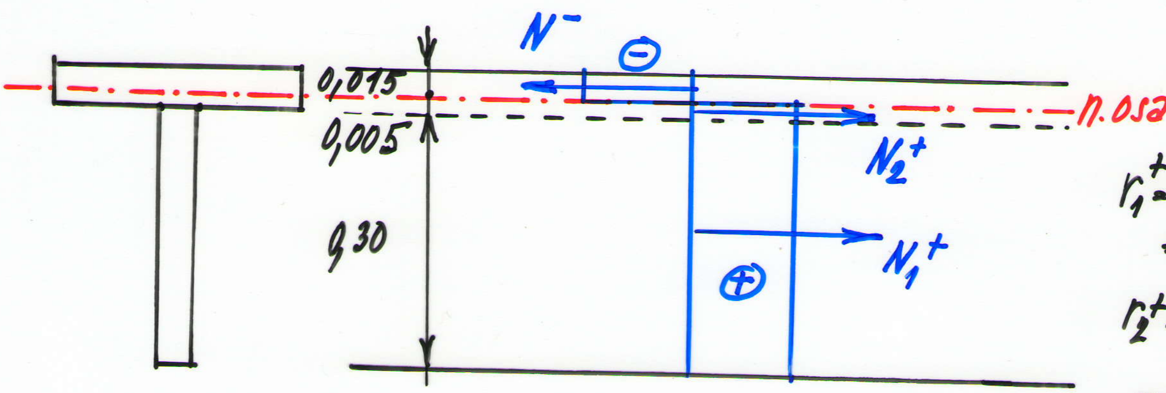
Určete mezní (plastický) moment M_{pl}. $f_y = 230$ MPa



1) poloha neutrální osy:

$$\vec{x}: \quad N^+ - N^- = 0$$

$$f_y \cdot A^+ - f_y \cdot A^- = 0 \quad \dots\dots \quad A^+ = A^- = \frac{A}{2} = \frac{0{,}006 + 0{,}003}{2} = $$
$$= 0{,}0045 \, m^2$$



$r_1^+ = 0{,}15 + 0{,}005 = \underline{0{,}155 \, m}$

$r_2^+ = \dfrac{0{,}005}{2} = \underline{0{,}0025 m}$

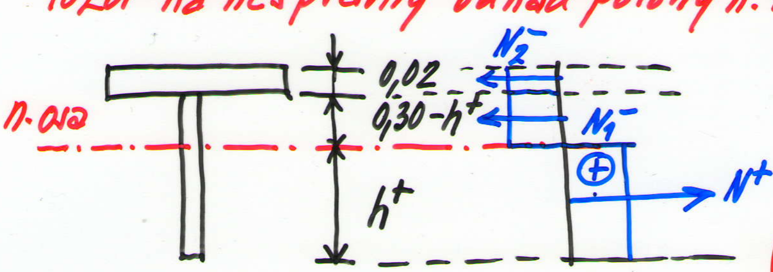
$r^- = \dfrac{0{,}015}{2} = \underline{0{,}0075 \, m}$

2) $\curvearrowleft$ n.o. :

$$M_{pl} = N_1^+ \cdot r_1^+ + N_2^+ \cdot r_2^+ + N^- \cdot r^-$$

$$M_{pl} = 230 \, (0{,}30 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}155 + 0{,}30 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}0025 +$$
$$+ 0{,}30 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}0075) = 0{,}115575 \text{ MNm} =$$
$$= \underline{\underline{115{,}575 \text{ kNm}}}$$

Pozor na nesprávný odhad polohy n. osy!



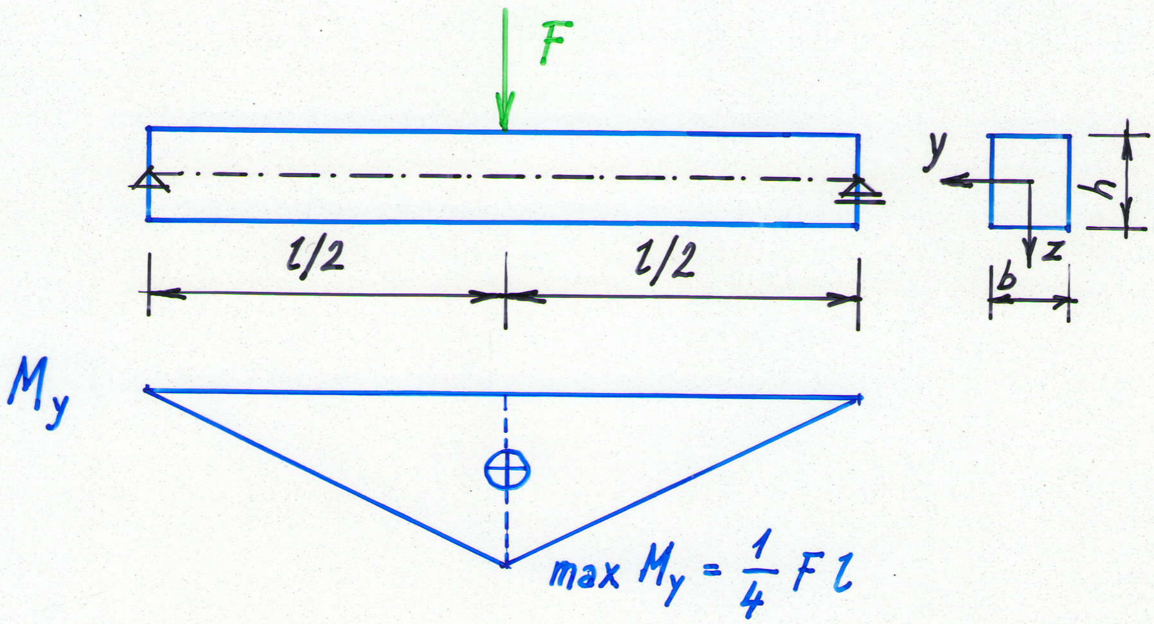
$$\vec{x}: \; 230 \left[0{,}01 \cdot h^+ - 0{,}01 \, (0{,}30 - h^+) - \right.$$
$$\left. - 0{,}30 \cdot 0{,}02 \right] = 0$$

$$\underline{h^+ = 0{,}45 \, m}$$

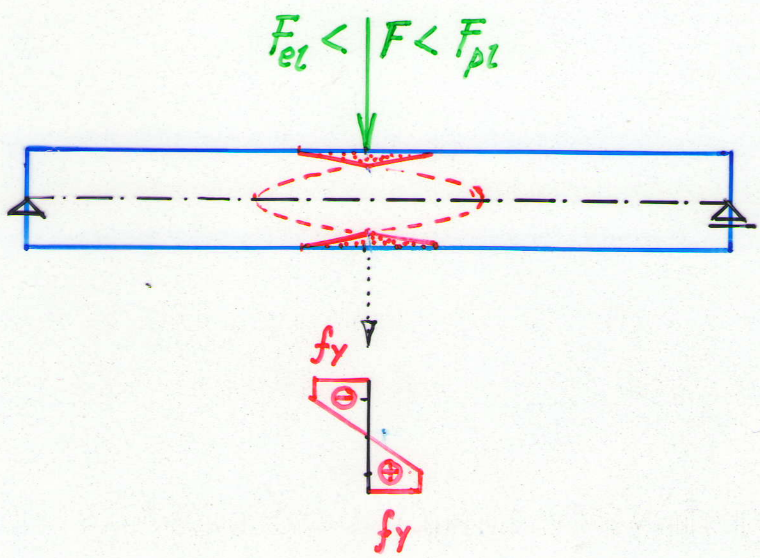
! (nereálné řešení ⇒ nutný nový odhad polohy neutr. osy) !

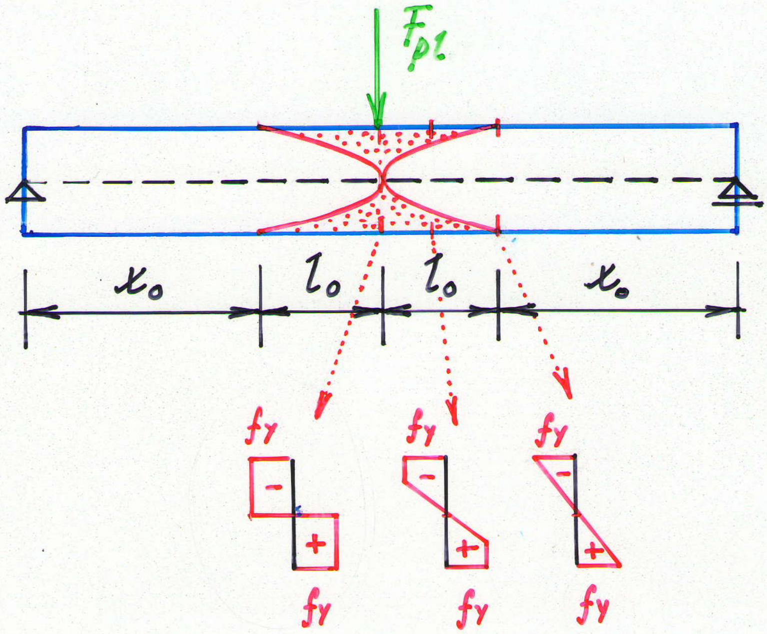
Plastický kloub

Rozložení plastických oblastí v nosníku při postupném zatěžování:



Plastické oblasti se začnou vytvářet při zatížení $\boldsymbol{F = F_{el}}$ a úplný plastický kloub vznikne při zatížení $\boldsymbol{F = F_{pl}}$.





Zatížení, při němž průřez pod břemenem úplně zplastizuje:

$$M_{pl} = \max M_{oh}$$

$$f_y \cdot \frac{1}{4} b h^2 = \frac{1}{4} F_{pl} l$$

$$F_{pl} = f_y \frac{bh^2}{l}$$

Délka plastického kloubu:

$$l_0 = \frac{l}{2} - x_0$$

ohybový moment v průřezu $x = x_0$

$$M_{oh}(x_0) = \frac{F_{pl}}{2} x_0 = f_y \frac{bh^2}{2l} x_0$$

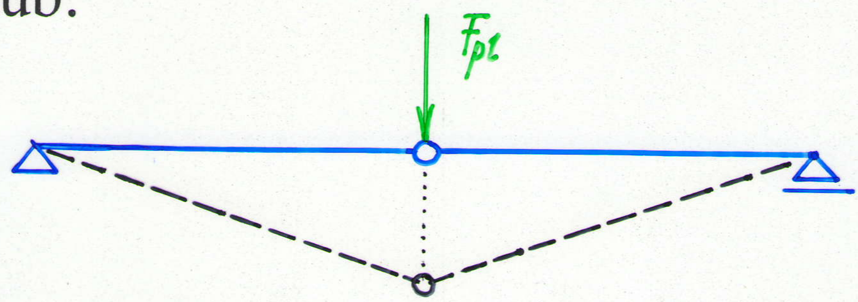
moment únosnosti průřezu $x = x_0$

$$M_{el} = f_y \cdot \frac{1}{6} bh^2$$

$$\underline{M_{oh}(x_0) = M_{el}} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{l}{3}$$

$$\underline{l_0 = \frac{l}{6}}$$

Plastický kloub funguje podobně jako vložený kloub:

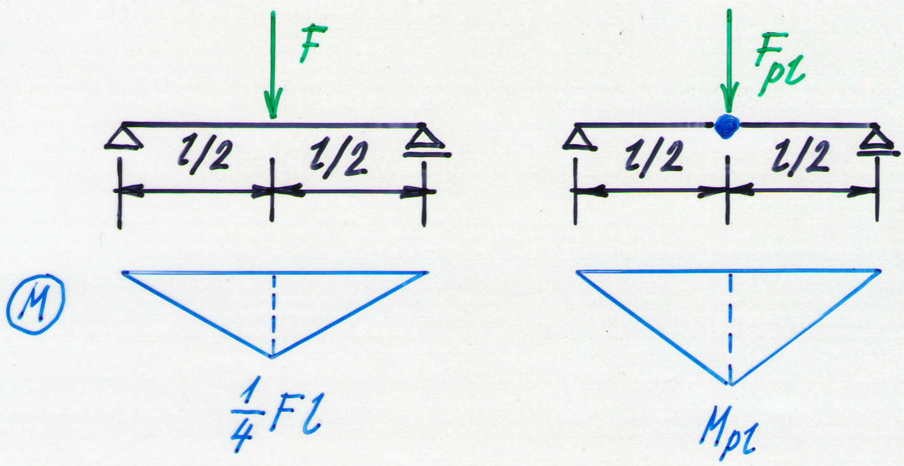


staticky přeurčitá konstrukce - pohyblivý mechanismus

Mezní plastický stav nosníku

(používá se pracovní diagram tuhoplastický σ, f_y, ε)

- staticky určitá konstrukce → kolaps při vzniku jednoho plastického kloubu
- plastické klouby vznikají v místech extrémních momentů



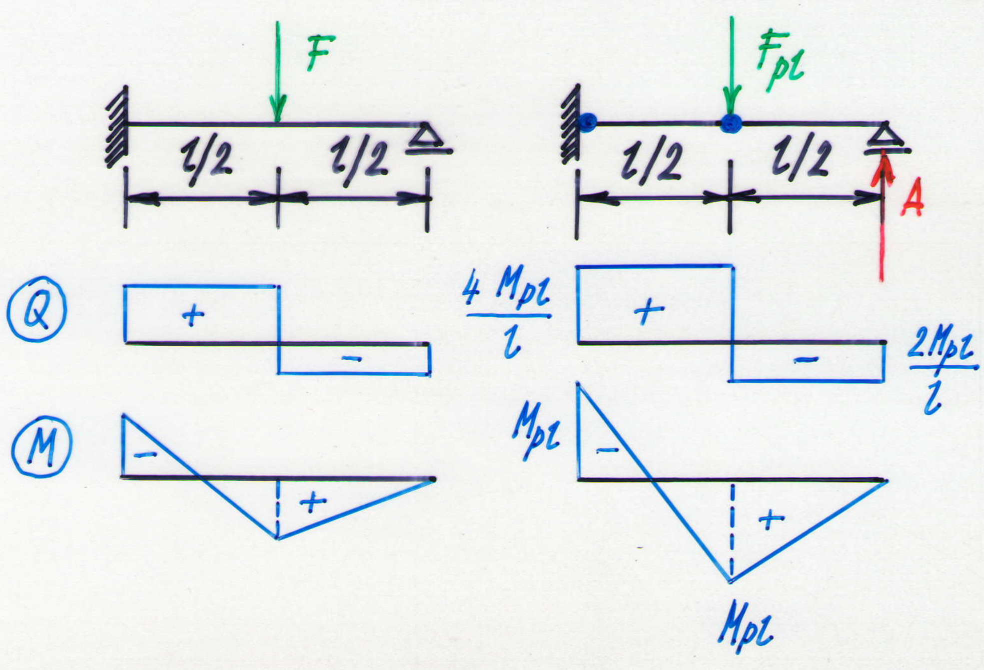
1 plast. kloub

kolaps nastane při:

$$M_{pl} = \frac{1}{4} F_{pl} \cdot l$$

$$F_{pl} = \frac{4 M_{pl}}{l}$$

- *n*-krát staticky neurčitá konstrukce → kolaps při vzniku *(n+1)* plastických kloubů (konstrukce tvarově neurčitá)



1x stat. neurč. konstr.

2 plast. klouby

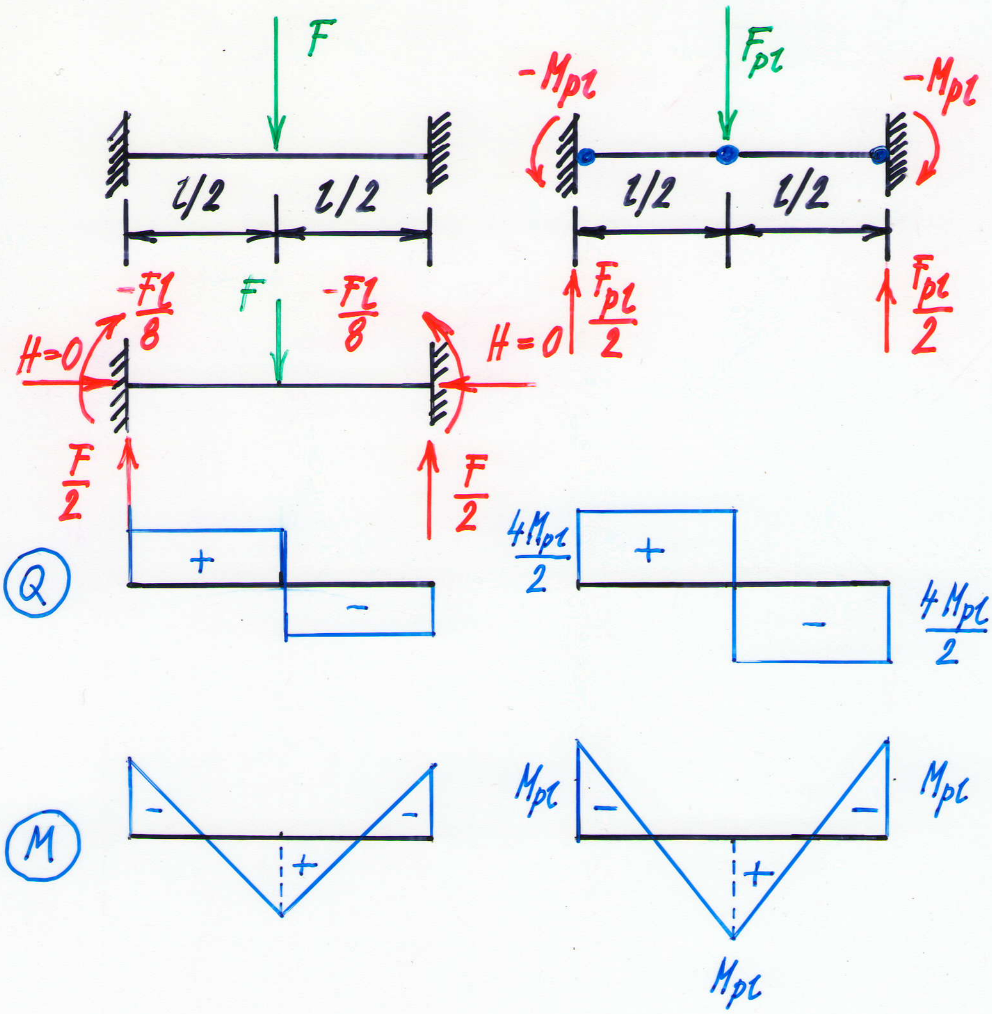
kolaps nastane při:

$$A \cdot \frac{l}{2} = M_{pl} \qquad (1)$$

$$A = \frac{2M_{pl}}{l}$$

$$A \cdot l - F_{pl} \cdot \frac{l}{2} = -M_{pl} \qquad (2)$$

$$F_{pl} = \frac{6 M_{pl}}{l}$$



3x stat. neurč. konstr.

ale při $H=0$

pouze 2x stat. neurč.

↓

3 plast. klouby

kolaps nastane při:

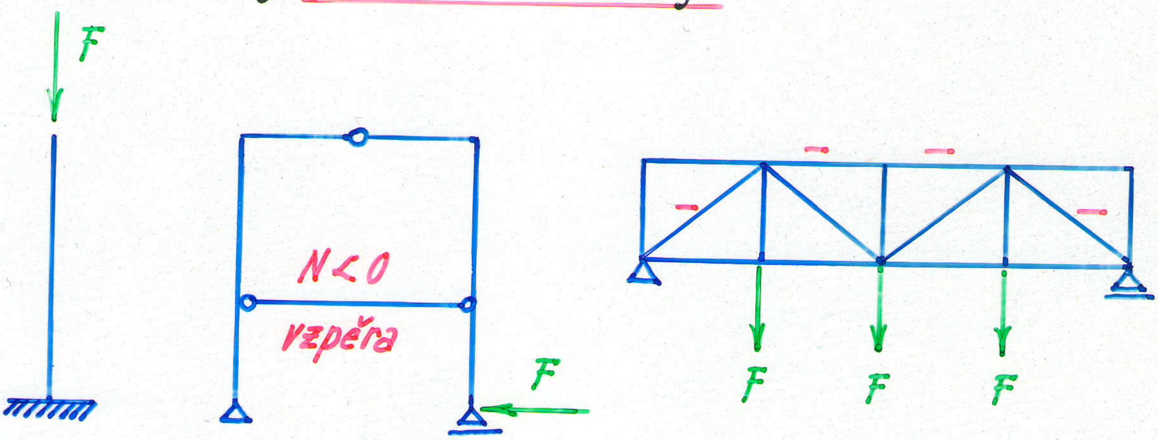
$$\frac{F_{pl}}{2}\cdot\frac{l}{2} - M_{pl} = M_{pl}$$

↓

$$F_{pl} = \frac{8M_{pl}}{l}$$

STABILITA PŘÍMÝCH PRUTŮ

Štíhlé pruty namáhané tlakovou osovou silou jsou ohroženy ztrátou stability.



Ztráta stability se projeví takto:

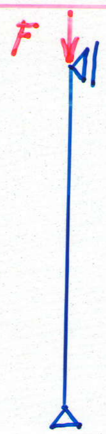
- Prut zůstává přímý, pokud osová tlaková síla je menší než určitá hodnota specifická pro prut.
- Po překročení této hodnoty se prut prohne (vybočí) a nakonec nastane kolaps.
- Významnou roli hraje čas.

Vybočení štíhlých prutů je jedna z nejčastějších příčin havárií mostních konstrukcí i konstrukcí pozemního stavitelství.

Problém namáhání štíhlých prutů tlakovou osovou silou se označuje jako **vzpěr**.

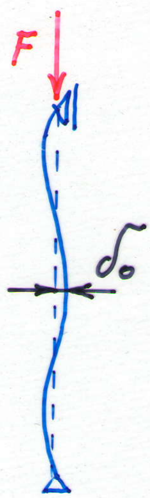
- Matematický model:

Ideální prut: - dokonale přímý, centricky zatížený a uložený



- výpočet **kritického břemene F_k**
- k vybočení je třeba příčného impulzu (příčná síla, nerovnoměrné ohřátí)

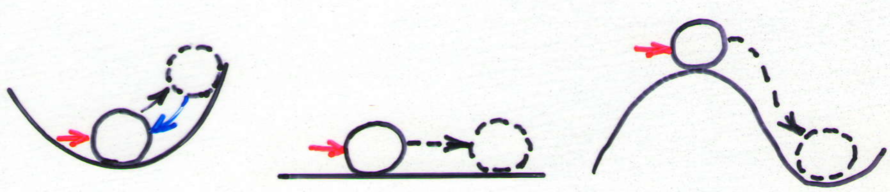
Skutečný prut - odchylky od přímého tvaru (imperfekce) mají náhodný charakter



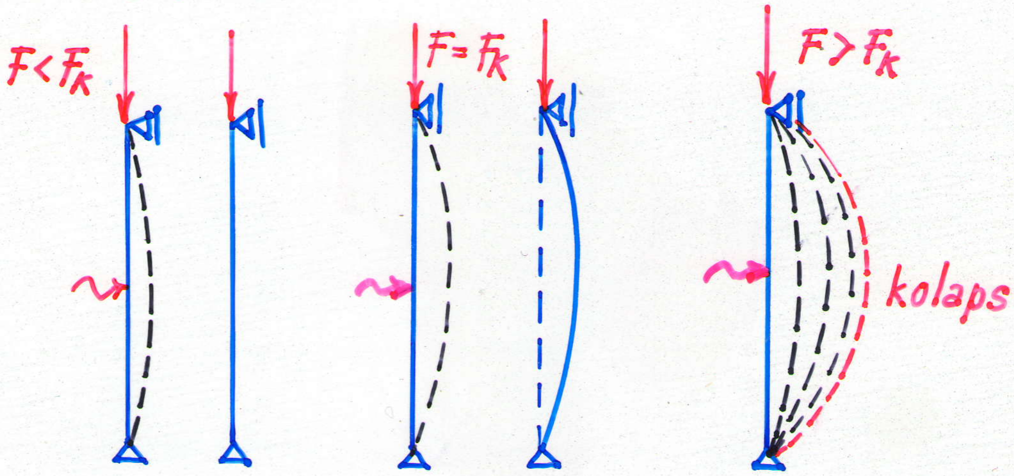
- odchylky δ_0 jsou malé $\left(\frac{1}{500}l \div \frac{1}{1000}l\right)$
- odlišná kvalita namáhání → kombinace tlaku s ohybem

- Pojem **stabilita** znamená kvalitu rovnováhy:

tuhá tělesa



rovnováha: stabilní indiferentní labilní pružné soustavy – **ideální prut**



rovnováha: stabilní indiferentní labilní

⇓

bifurkace rovnováhy
(rozdvojení)

⇓

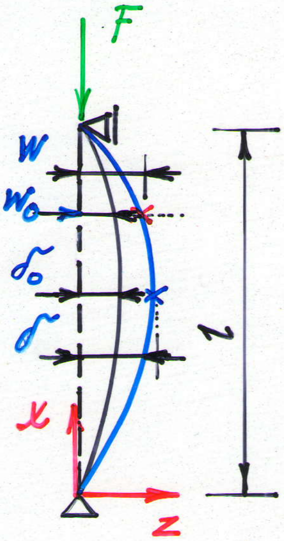
definice F_k

- Řešení stability **skutečného prutu**

Nutno rozlišovat mezi původní a deformovanou konstrukcí.

Teorie druhého řádu:

Posuny u ve směru střednice a rotace φ_y zůstávají malé, průhyby w jsou velké.
Podmínky rovnováhy je nutno sestavovat na **deformované konstrukci.**



$w_0\,(\delta_0)$ ... počáteční průhyb (amplituda průhybu)

$w\,(\delta)$ ... konečný průhyb (amplituda průhybu)

$\dfrac{1}{\rho_0}$ ... počáteční křivost (bez síly $\boldsymbol{F}$)

$\dfrac{1}{\rho}$ ... konečná křivost

$\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{\rho_0}$ ...změna křivosti vyvolaná ohybovým momentem $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}w$

Dif. rovnice ohybové čáry (bez poč. průhybu)

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y} \quad \text{neboli (přesněji)} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y}$$

Dif. rovnice ohybové čáry (s poč. průhybem)

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{Fw}{EI_y}$$

a) nelineární řešení $\Rightarrow$ velké deformace

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{\left(1 + w'^2\right)^{3/2}}$$

nutno použít pro zakřivené pruty (oblouky)

b) lineární řešení $\Rightarrow$ malé deformace
(tj. teorie druhého řádu)

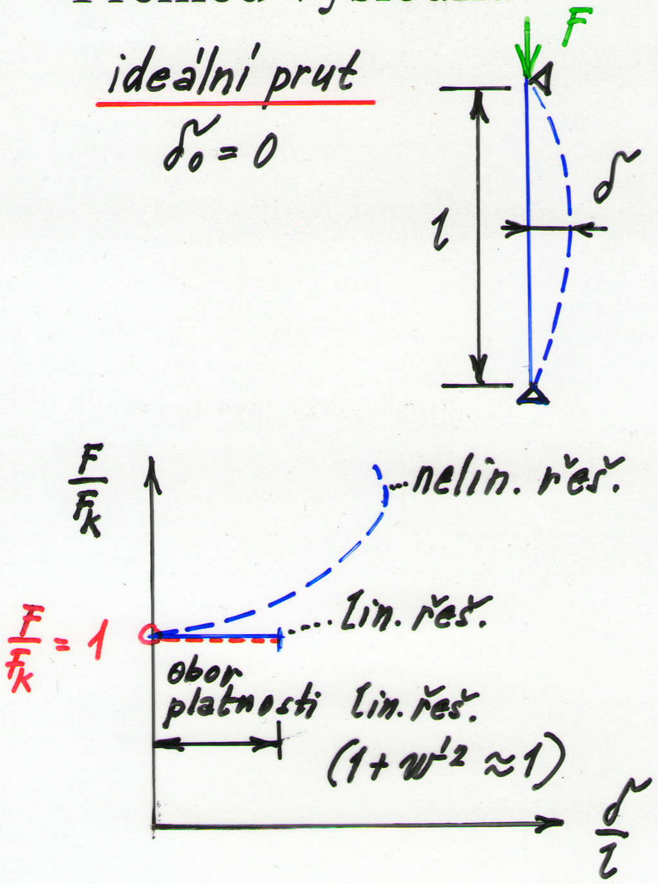
$$\frac{1}{\rho} \cong -w'' \quad \text{neboli} \quad 1 + w'^2 \cong 1$$

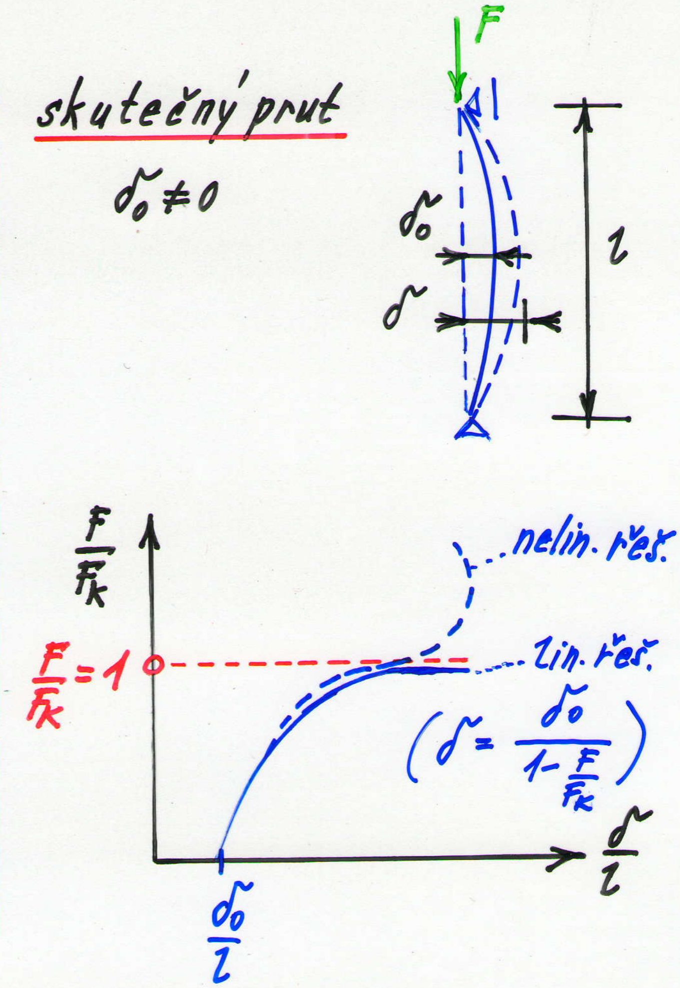
$$\left(w'' - w_0''\right) + \frac{F}{EI_y} w = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\delta_0}{1 - \dfrac{F}{F_k}}$$

Lze použít pro přímé pruty a prutové soustavy tvořící ortogonální systém (rámové konstrukce).

Poznámka:
Software FIN 3D obsahuje modul pro řešení lineární stability.

Přehled výsledků:





- Metody výpočtu kritických sil $\boldsymbol{F_k}$ (ideální prut)

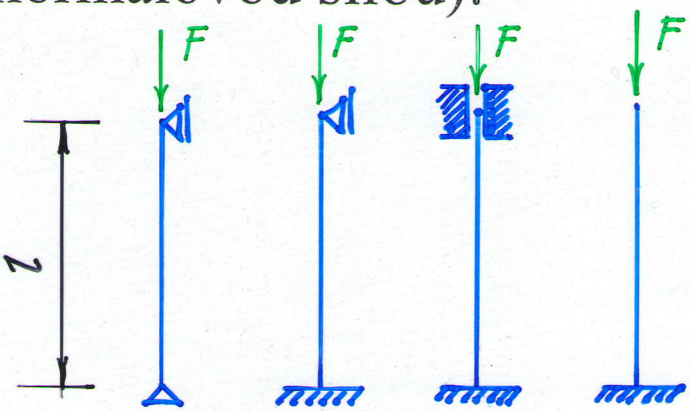
Předpoklady: lineárně pružný materiál
malé deformace
rovnováha na deformovaném prutu

a) Geometrická (Eulerova) metoda → přesná
Spočívá v řešení dif. rovnice ohybové čáry.

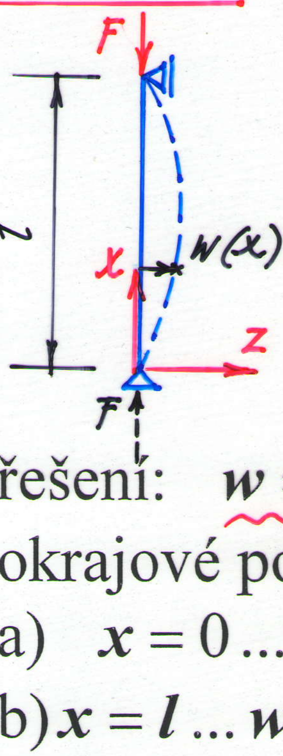
b) Energetická (Ritzova) metoda → přibližná
Spočívá v porovnání energie vnitřních a vnějších sil.

Geometrická (Eulerova) metoda

Euler odvodil výrazy pro kritické břemeno ve čtyřech tzv. základních Eulerových případech (tj. pruty s konstantním průřezem a konstantní normálovou silou):



1. případ



$$M_y = Fw$$

$$w'' = -\underbrace{\frac{F}{EI_y}}_{\alpha^2} w$$

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \qquad \alpha^2 = \frac{F}{EI_y}$$

řešení: $w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$

okrajové podmínky:

a) $x = 0 \ldots w = 0 \rightarrow C_2 = 0$

b) $x = l \ldots w = 0 \rightarrow C_1 \sin \alpha l = 0$

$C_1 = 0$ (průhyb nulový)

$\boxed{\sin \alpha l = 0}$ charakteristická rovnice

$\sin \alpha l = 0 \quad \ldots \quad \alpha l = \pi, 2\pi, \ldots$ atd.

minimální kořen: $\alpha_k l = \pi$

$$\alpha_k^{\,2} = \frac{\pi^2}{l^2} \qquad \alpha_k^{\,2} = \frac{F_k}{EI_y}$$

Eulerův vzorec

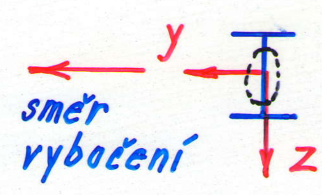
$$\boxed{F_k = EI_y \frac{\pi^2}{l^2}}$$

(Další Eulerovy případy viz skriptum PP20)

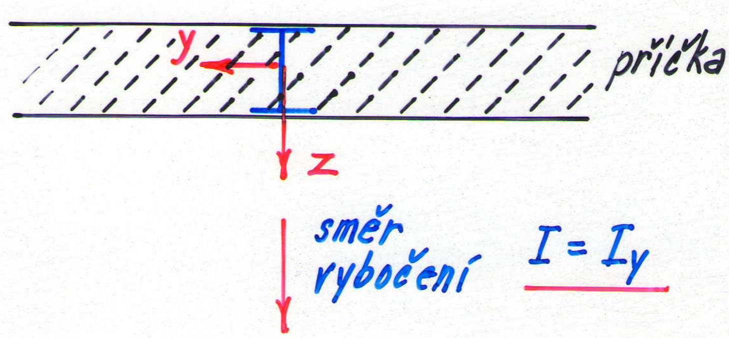
Obecně používaný vzorec pro F_k:

$$\boxed{F_k = EI \frac{\pi^2}{L^2}}$$

I … moment setrvačnosti k ose kolmé na směr vybočení (jsou-li podmínky vybočení stejné ve všech směrech, pak $I = I_{min}$)

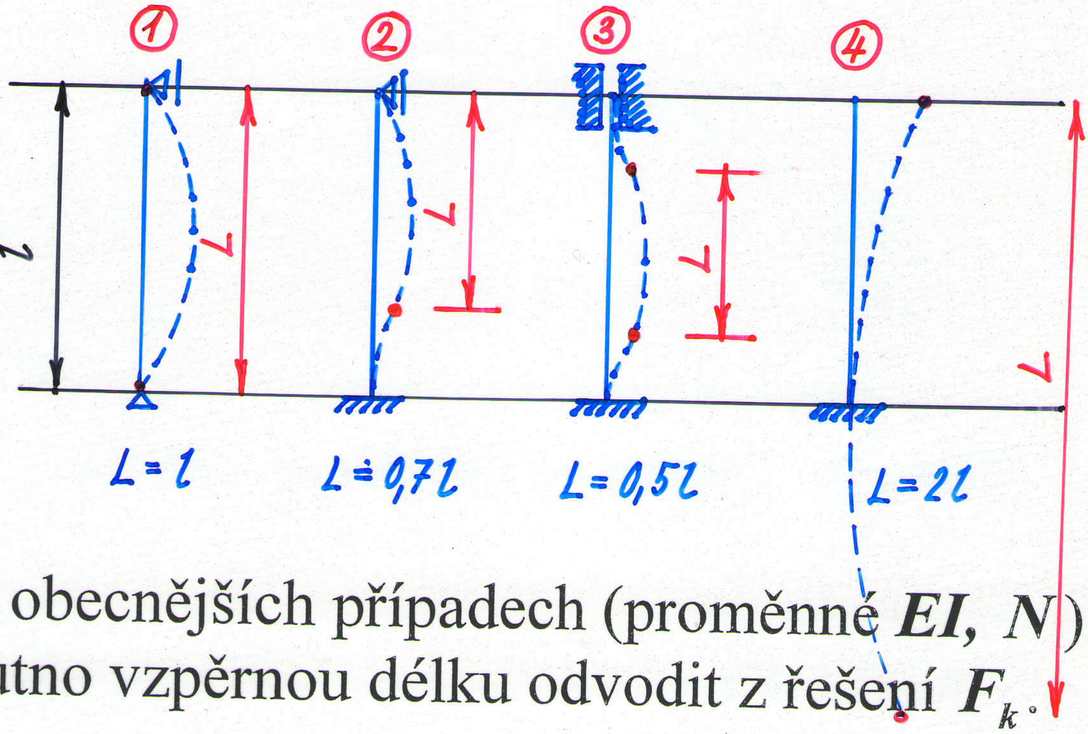


$I = I_z = I_{min}$



$I = I_y$

L ... **vzpěrná délka**
ve čtyřech základních Eulerových případech se určí ze vzorců :



V obecnějších případech (proměnné ***EI***, ***N***) je nutno vzpěrnou délku odvodit z řešení F_k.

Odraz teorie v normách pro navrhování tlačených štíhlých prutů

Kritické napětí, Eulerova hyperbola

Jak posuzovat štíhlost prutu?

a) Ideální prut

Napětí v centricky tlačeném (nevybočeném) prutu:

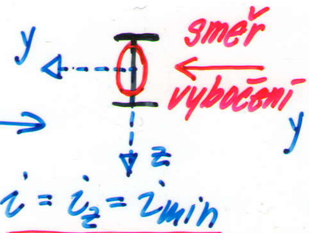
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

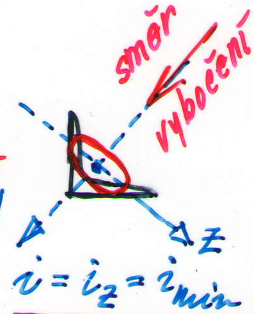
Při namáhání kritickou silou F_K vzniká v prutu tzv. kritické napětí σ_K

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} = \frac{EI\frac{\pi^2}{L^2}}{\frac{I}{i^2}} = \frac{E\pi^2}{\left(\frac{L}{i}\right)^2} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2}$$

- $\lambda = \frac{L}{i}$ ..... štíhlostní poměr prutu
- L ..... vzpěrná délka
- $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ .... poloměr setrvačnosti k ose kolmé na směr vybočení

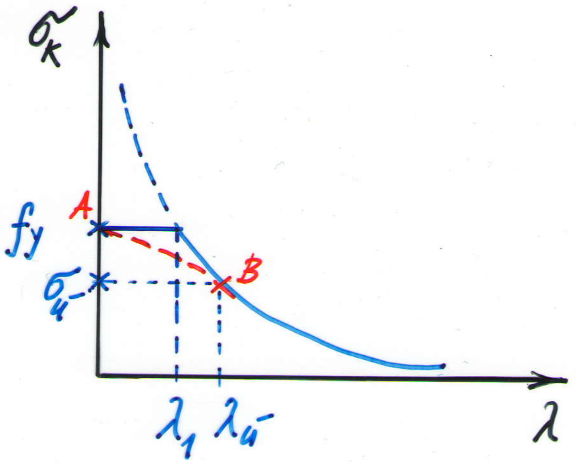
(Jsou-li podmínky uložení ve všech směrech stejné, pak vybočí ve směru kratší poloosy →

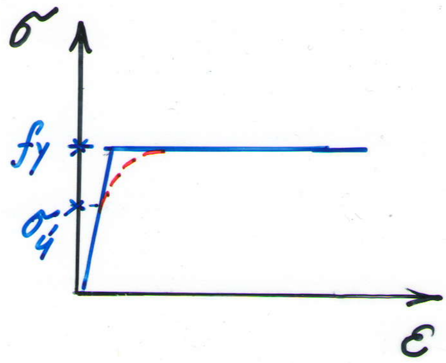




Závislost σ_k na štíhlostním poměru λ vyjadřuje
Eulerova hyperbola

$$\boxed{\sigma_k = \frac{E\pi^2}{\lambda^2}}$$





— ideálně pružnoplastický materiál

- - - reálný materiál

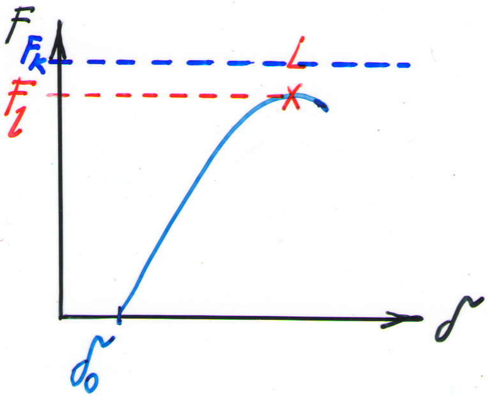
- Ideálně pružnoplastický materiál:

  V oboru $0 < \lambda < \lambda_1$ Eulerova hyperbola neplatí (protože $\sigma > f_y$), nahrazuje se hodnotou $\sigma_k = f_y$.

- Reálný materiál:

  V oboru $0 < \lambda < \lambda_u$ se Eul. hyperbola nahrazuje křivkou $\overset{\frown}{AB}$
  (λ_u je štíhlost odpovídající mezi úměrnosti σ_u)

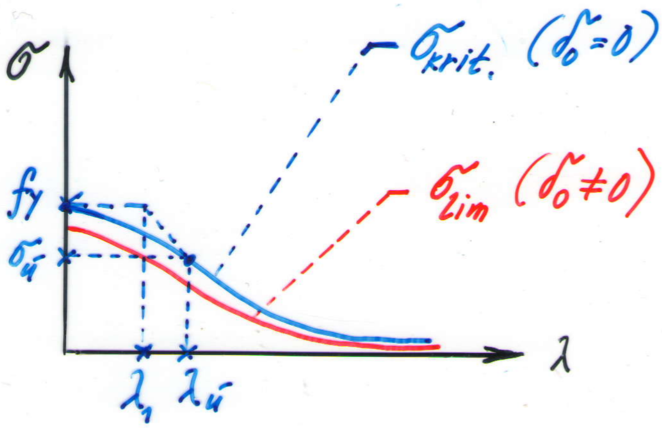
b) Skutečný (imperfektní) prut



F_l ... limitní síla ($F_l < F_k$)

$\sigma_{lim} = \frac{F_l}{A}$ ... limitní napětí, které je prut schopen přenést před zhroucením

$\sigma_{lim} < \sigma_k$!



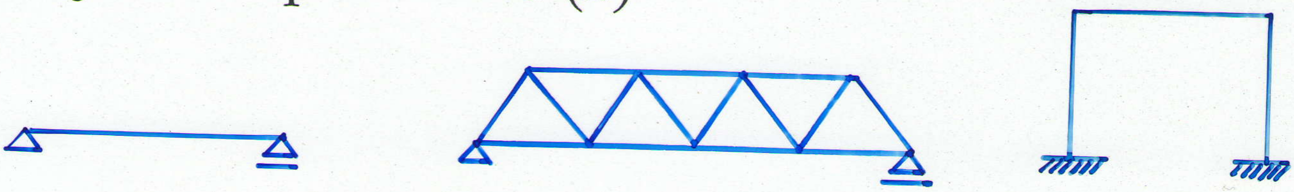
Využití v návrhových normách:

na základě štíhlostního poměru λ se určí z tabulek součinitel vzpěrnosti χ $(\lambda, E, f_y, \frac{\delta_0}{l})$, kterým se redukuje výpočtová únosnost průřezu.

(masivní pruty ... $\chi = 1$
štíhlé pruty ... $\chi < 1$)

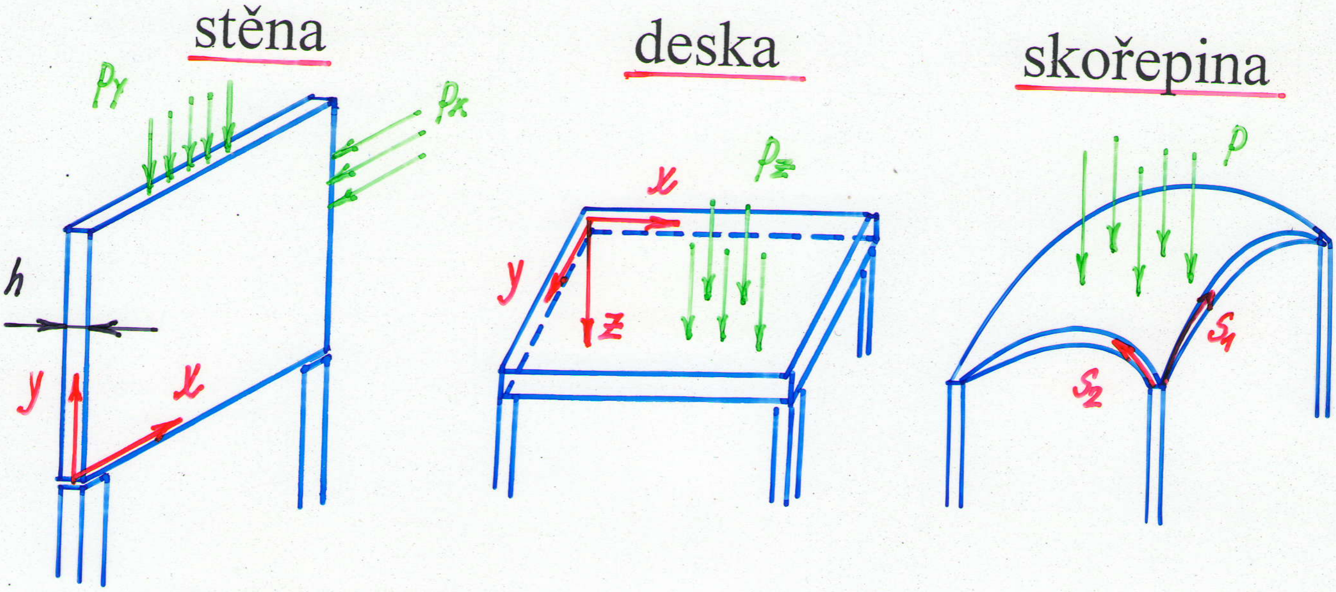
DVOJROZMĚRNÝ PROBLÉM (2D)

- Jednorozměrný problém (1D) – pruty
  Vnitřní síly a deformační faktory závisejí na jednom parametru (x)

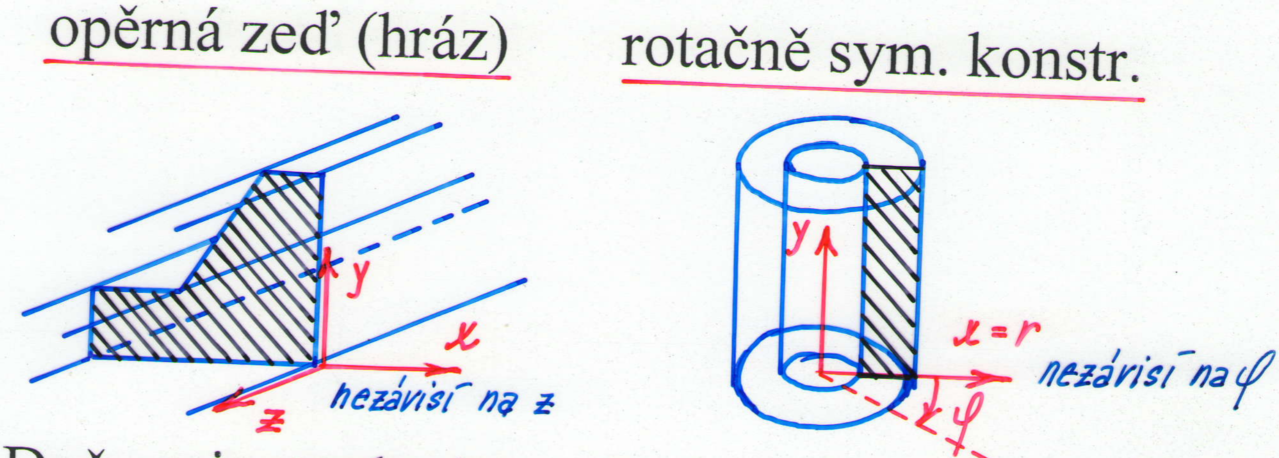


- Trojrozměrný problém (3D)
  Napětí, deformace závisejí na 3 parametrech (x,y,z)
  15 neznámých … $\{u\},\{\varepsilon\},\{\sigma\}$
  15 rovnic … 3statické, 6geom., 6fyzikálních

- Dvojrozměrný problém (2D)
  Napětí, deformace závisejí na 2 parametrech (např. x,y nebo s_1,s_2).
  Dva rozměry l_1,l_2 převládají nad třetím rozměrem – tloušťkou h.
  Střednicová plocha je buď rovinná (stěny, desky) nebo zakřivená (skořepiny).



Zvláštní případy symetrie prostorových konstrukcí:



Dvě varianty dvojrozměrného problému:

- Rovinná napjatost v rovině (x,y) (stěna)

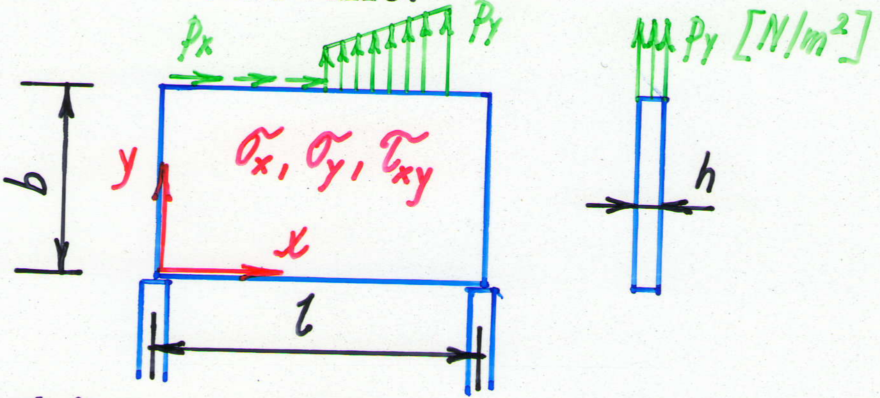
$\boxed{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}}$ $\boxed{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varepsilon_z \quad (\varepsilon_z \neq 0)!}$

- Rovinná deformace v rovině (x,y) (opěrná zeď)

$\boxed{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}}$ $\boxed{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z \quad (\sigma_z \neq 0)!}$

NOSNÉ STĚNY

Rovinné konstrukce zatížené pouze ve střednicové rovině.

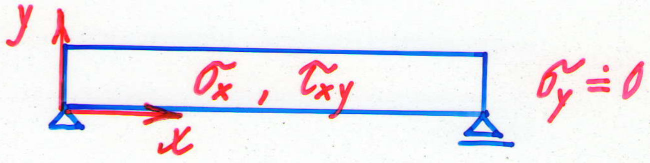


Kritérium pro vznik rovinné napjatosti:

$$\boldsymbol{h} \leq \frac{1}{10} \min(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{b} \geq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{4}\right) \boldsymbol{l}$$

(nízká stěna = nosník)



Řešení algoritmem silové metody

- Primární neznámá: funkce napětí $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
- výchozí rovnice kompatibility (zajišťují spojitost deformace)

Složky napětí vyjádřeny pomocí Airyho funkce napětí $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ [N]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{y}}$$

- Z rov. kompatibility vyplývá tzv.

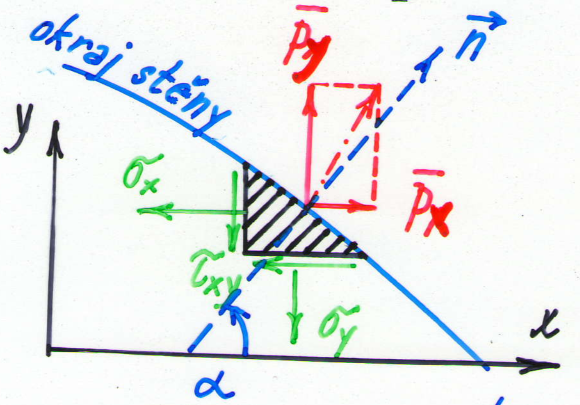
stěnová rovnice

$$\boxed{\Delta\Delta F = 0}$$

$\Delta\Delta = (\Delta)^2$ je biharmonický operátor

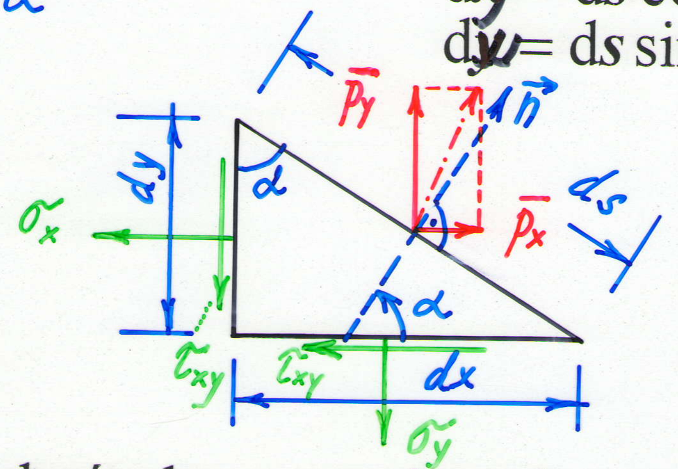
$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}$$

- Okrajové podmínky – statické



$\bar{p}_x, \bar{p}_y \ldots$složky zatížení [N/m^2]

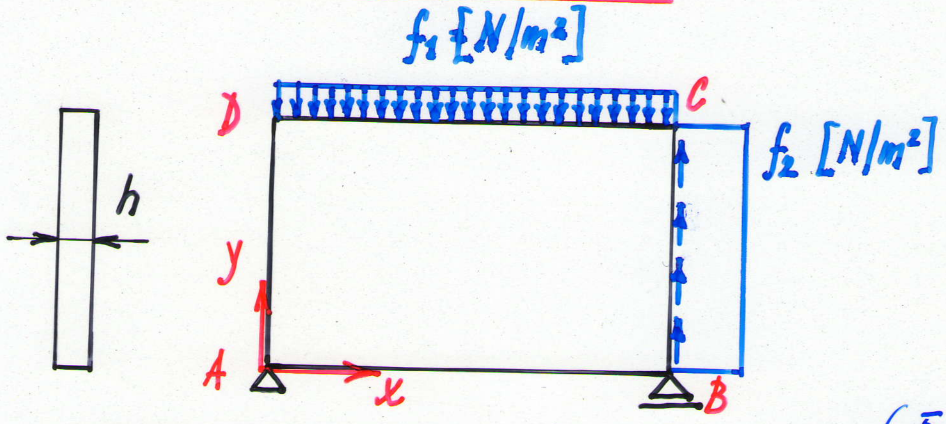
$dy = ds \cos\alpha$
$dx = ds \sin\alpha$



Z podmínek rovnováhy elementu:

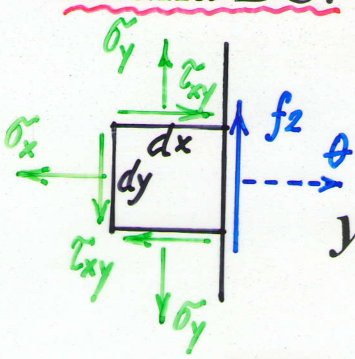
$$\bar{p}_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \sin\alpha$$
$$\bar{p}_y = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha$$

Příklad – obdélníková stěna



Hrana $\overline{BC}$:

$(\alpha = 0;\ \sin\alpha = 0;\ \cos\alpha = 1)$ $\begin{pmatrix} \bar{p}_y = f_2 \ldots f_2 = \tau_{xy} \\ \bar{p}_x = 0 \ldots 0 = \sigma_x \end{pmatrix}$



$$\vec{x}: -\sigma_x \mathrm{d}y \cdot h + (\tau_{xy} - \tau_{xy})\mathrm{d}x \cdot h = 0$$

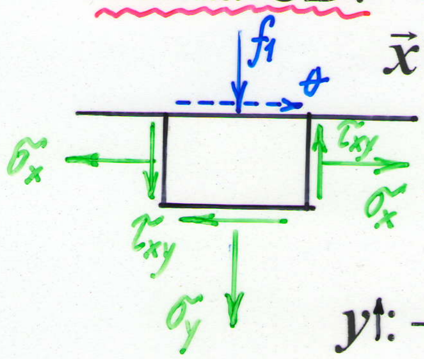
$$\sigma_x = 0$$

$$y\uparrow: -\tau_{xy}\mathrm{d}yh + f_2\mathrm{d}yh + (\sigma_y - \sigma_y)\mathrm{d}xh = 0$$

$$\tau_{xy} = f_2$$

Hrana $\overline{CD}$:

$(\alpha = \frac{\pi}{2};\ \sin\alpha = 1;\ \cos\alpha = 0)$ $\begin{pmatrix} \bar{p}_y = -f_1 \ldots -f_1 = \sigma_y \\ \bar{p}_x = 0 \ldots 0 = \tau_{xy} \end{pmatrix}$



$$\vec{x}: -\tau_{xy}\mathrm{d}xh + (\sigma_x - \sigma_x)\mathrm{d}yh = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

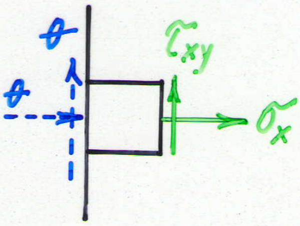
$$y\uparrow: -\sigma_y\mathrm{d}xh - f_1\mathrm{d}xh + (\tau_{xy} - \tau_{xy})\mathrm{d}yh = 0$$

$$\sigma_y = -f_1$$

Hrana $\overline{AD}$:

$$\sigma_x = 0$$

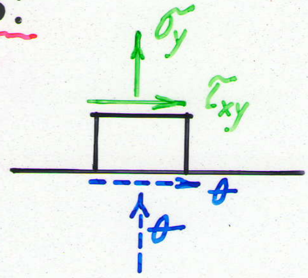
$$\tau_{xy} = 0$$



Hrana $\overline{AB}$:

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$



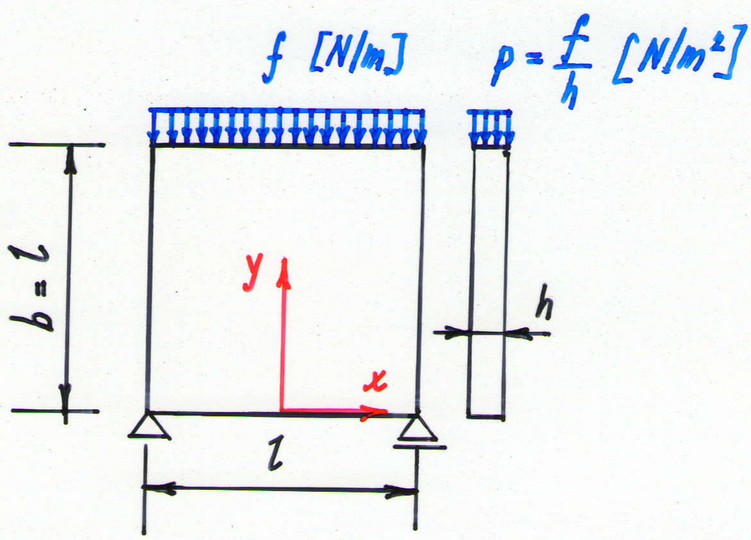
! Okraj. podm. lze použít jako kontrolu výpočtu !

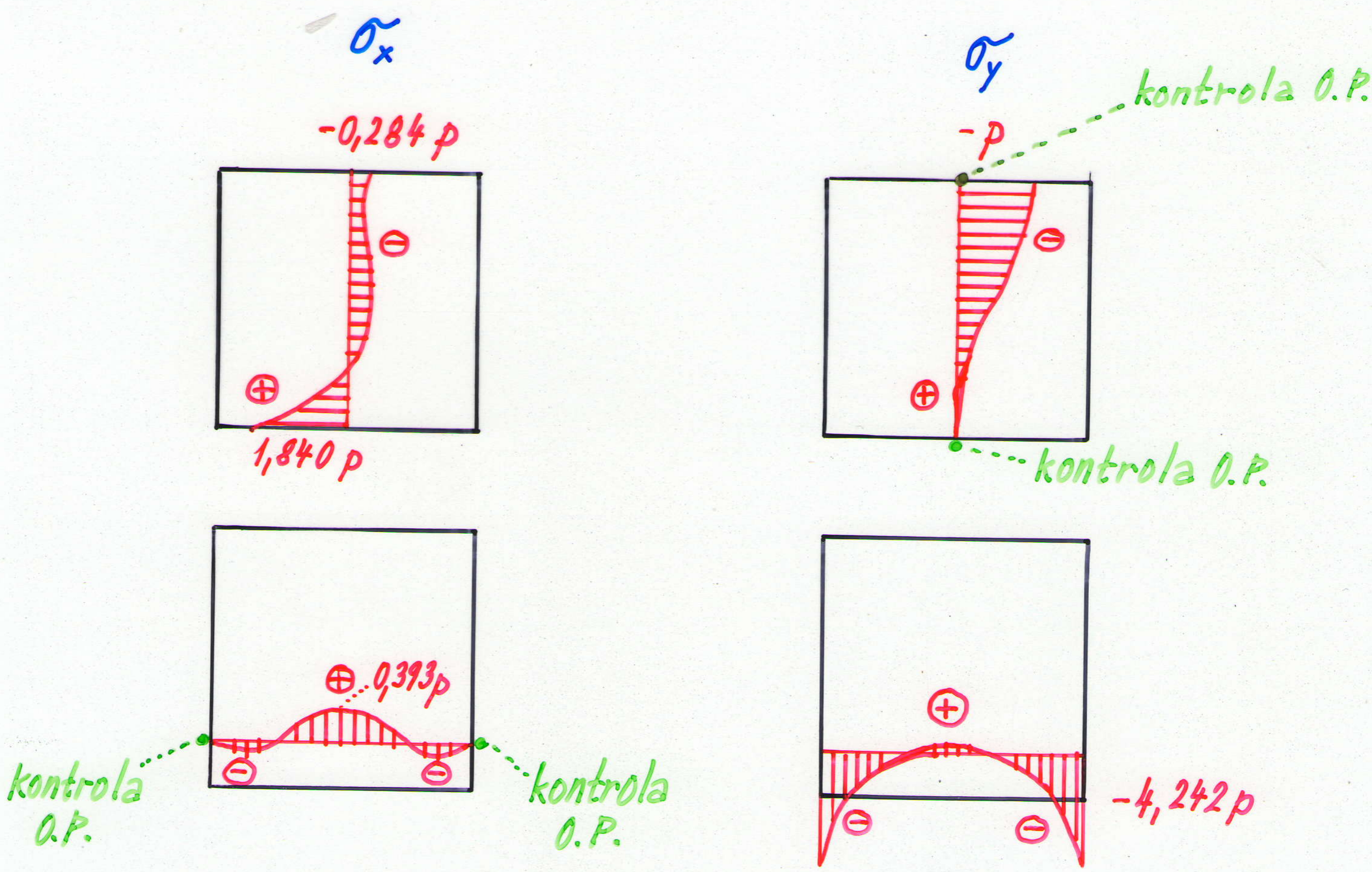
Metody řešení (viz předmět Analýza konstrukcí):

- Metoda sítí (diferenční metoda)
- Fourierova metoda (rozvoj zatížení a $F(x,y)$ ve Fourierovu řadu)
- Metoda konečných prvků (MKP)

Příklad:

[skriptum PP20, Šejnoha J., Bittnarová J. př. 64]



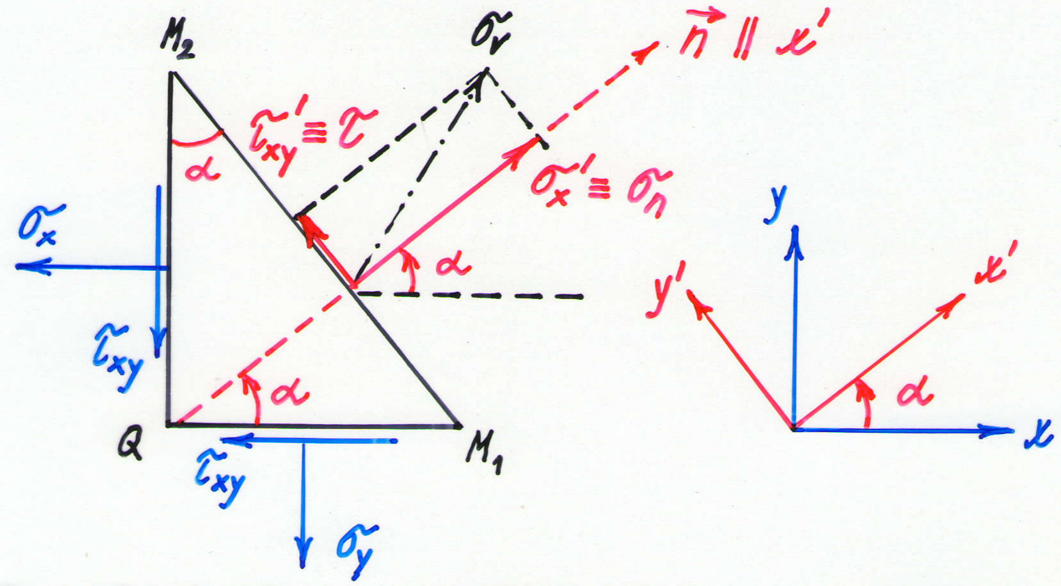


Hlavní napětí v bodě při rovinné napjatosti

Rov. napjatost v rovině x,y ... $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

- Transformační vzorce

(analogie s transformačními vzorci pro momenty setrvačnosti)



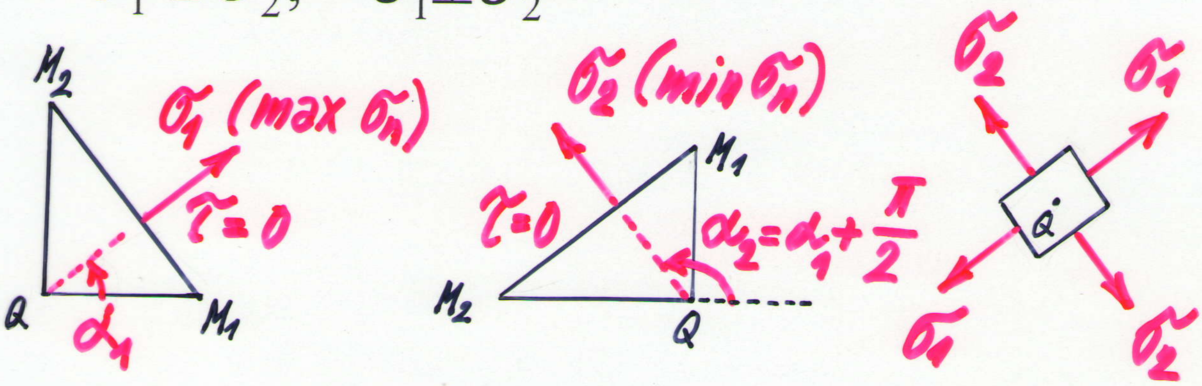
Z podmínek rovnováhy elementu plyne:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_x' &= \sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\
\sigma_y' &= \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\
\tau_{xy}' &= \tau = \frac{1}{2}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha
\end{aligned}}$$

- Hlavní normálová napětí

(analogie s hlavními momenty setrvačnosti)
Při otáčení elementu QM_1M_2 kolem Q se mění složky σ_n, τ. Je-li na plošce M_1M_2 $\tau = 0$, nabývá σ_n extrémní hodnoty. Takové plošky jsou v každém bodě dvě $\Rightarrow$ hlavní plochy, na nich vznikají hlavní normálová napětí σ_1, σ_2.

Platí: $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 \perp \sigma_2$

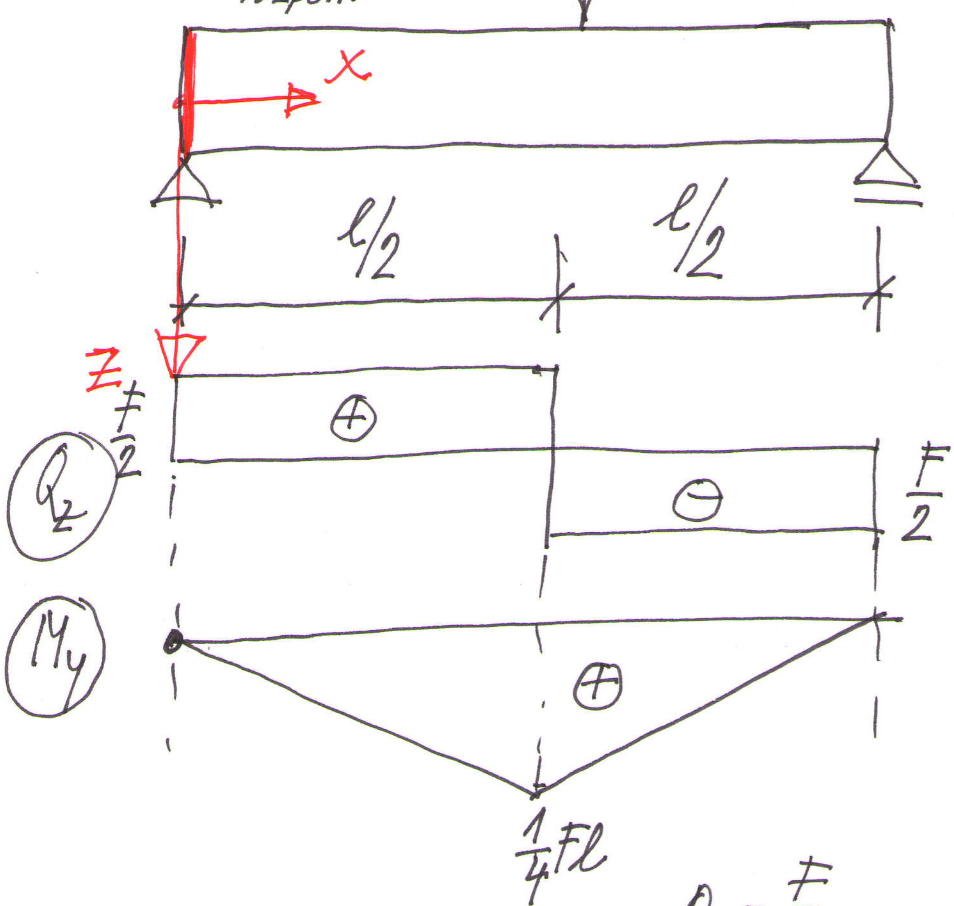


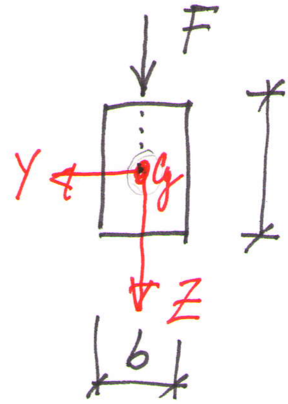
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan \alpha_i = \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_i - \sigma_y}, \quad i = 1,2$$

nebo $$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Příklad: Určit $\sigma_{1,2}$ v průřezech nad podporou a uprostřed rozpětí.





rovinná napjatost: v rovině XZ!

$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$

$\sigma_z = 0$ (nosník)

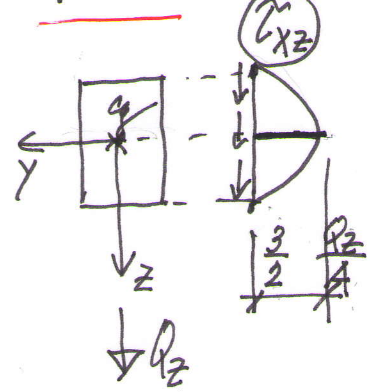
průř. nad podporou:

$Q_z = \frac{F}{2}$ ..... $\tau_{xz} = \cancel{\frac{Q_y \cdot S_z}{b \cdot I_z}} + \boxed{\frac{Q_z \cdot S_y}{b \cdot I_y}}$

$M_y = 0$ ..... $\sigma_x = 0$

v těžišti: $\sigma_x = 0$

$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{F}{2bh}$



$$\sigma_{1,2} = \cancel{\frac{\overset{0}{\sigma_x} + \overset{0}{\sigma_z}}{2}} \pm \sqrt{\cancel{\frac{(\overset{=0}{\sigma_x} - \overset{=0}{\sigma_z})^2}{4}} + \tau_{xz}^2} =$$

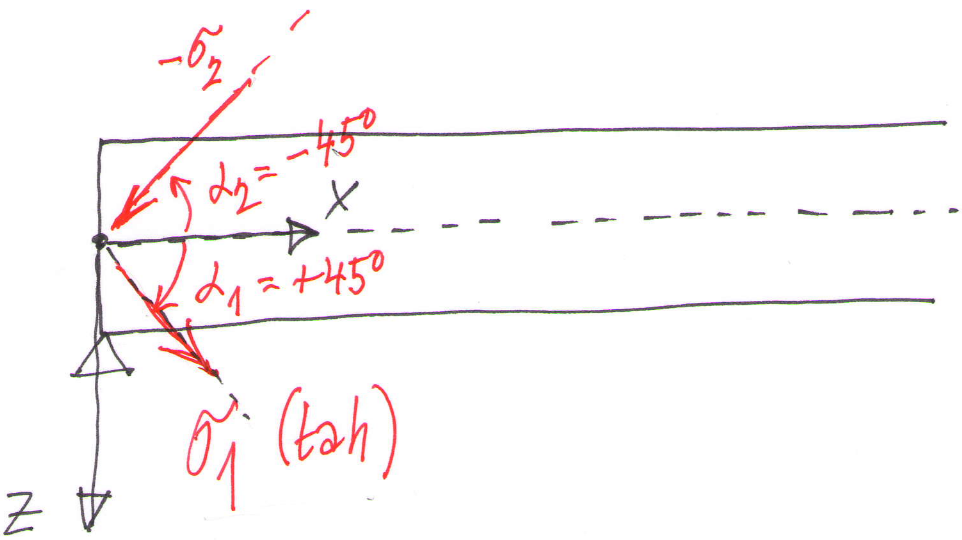
$$= \pm \tau_{xz} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = +\tau_{xz} \qquad \sigma_2 = -\tau_{xz}}$$

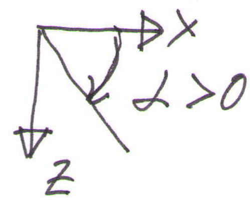
$\sigma_1 = +\frac{3}{4}\frac{F}{bh}$ $\qquad$ $\sigma_2 = -\frac{3}{4}\frac{F}{bh}$

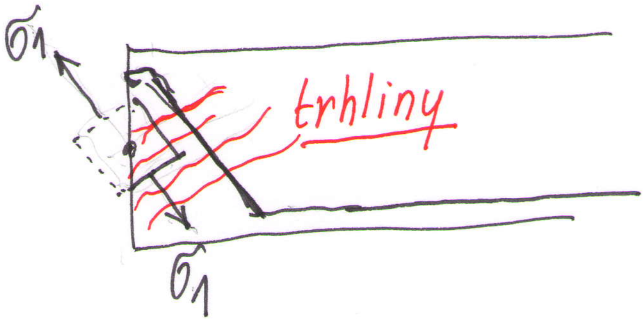
$\boxed{\sigma_1 \text{ ... tah}}$ $\qquad$ σ_2 ... tlak směry hlav. napětí σ_1, σ_2:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \cancel{\sigma_x}}{\tau_{xz}} = \frac{\frac{3}{4}\frac{F}{bh}}{\frac{3}{4}\frac{F}{bh}} = 1 \ldots \underline{\underline{\alpha_1 = 45^\circ}}$$

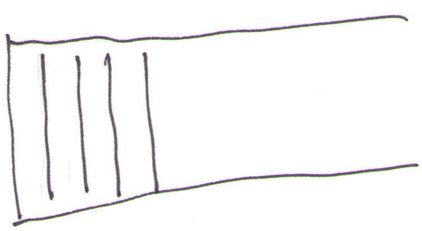
$$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xz}} = \frac{-\frac{3}{4}\frac{F}{bh}}{\frac{3}{4}\frac{F}{bh}} = -1 \ldots \underline{\underline{\alpha_2 = -45^\circ}}$$







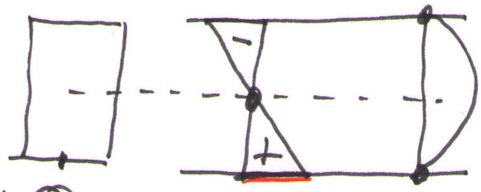
vzniku trhlin v betonu zabrání vhodná ocelová výztuž



průřez uprostřed rozpětí: σ_x

$M_y = \frac{1}{4} F l$

$Q_z^l = + \frac{F}{2}$

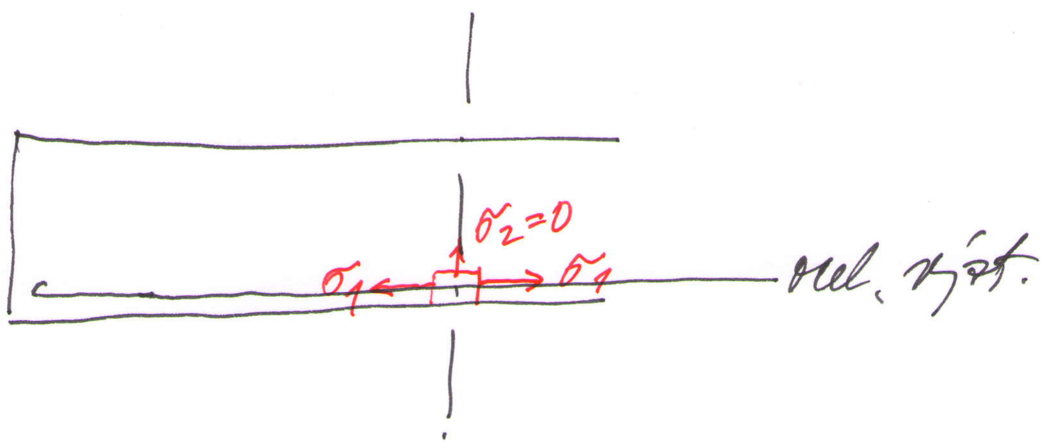


bod C

$$\sigma_x^C = \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{\frac{1}{4} F l}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3}{2} \frac{F l}{b h^2}$$

$\tau_{xz}^C = 0$

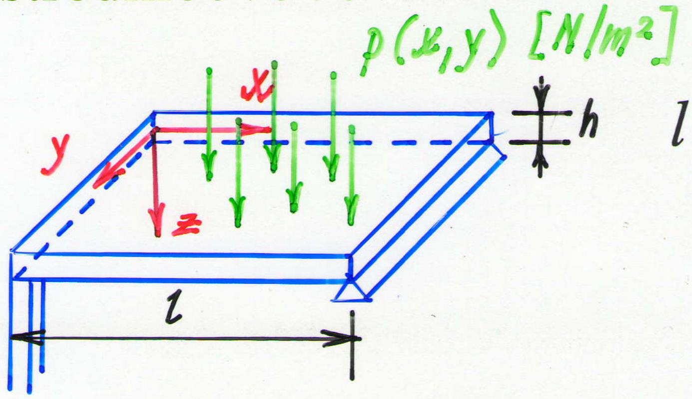
$$\sigma_{1/2} = \frac{\frac{3}{2} \frac{F l}{b h^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2} \frac{F l}{b h^2}}{2} \right)^2 + 0} = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{F l}{b h^2} = \sigma_1 \\ 0 = \sigma_2 \end{cases}$$



$\sigma_1^c = \sigma_x^c$

DESKY

Rovinné konstrukce zatížené kolmo ke střednicové rovině.



l…rozhodující půdorysný rozměr

Tenké desky – Kirchhoffova teorie

kritérium: $\frac{1}{100} \leq \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{l}} \leq \frac{1}{10}$

Pozn. tlusté desky $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{l}} \geq \frac{1}{10}$ *(Mindlinova teorie)*

membrány $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{l}} \leq \frac{1}{100}$ *(nepřenášejí ohybové účinky)*

Kirchhoffovy předpoklady:

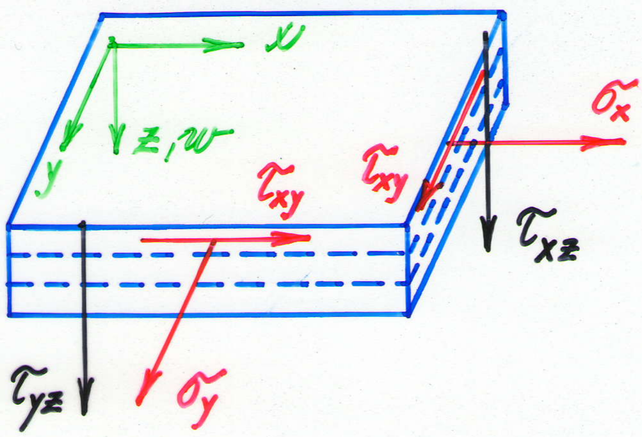
1) Normály ke střednicové rovině přejdou po deformaci opět v normály k deformované střednicové ploše. Vzdálenost bodů na normále se nemění.

2) $\sigma_z = 0$

Řeší se algoritmem deformační metody:

- neznámá…funkce průhybu $w(xy)$
- výchozí rovnice…podmínky rovnováhy

Vrstvičkový model



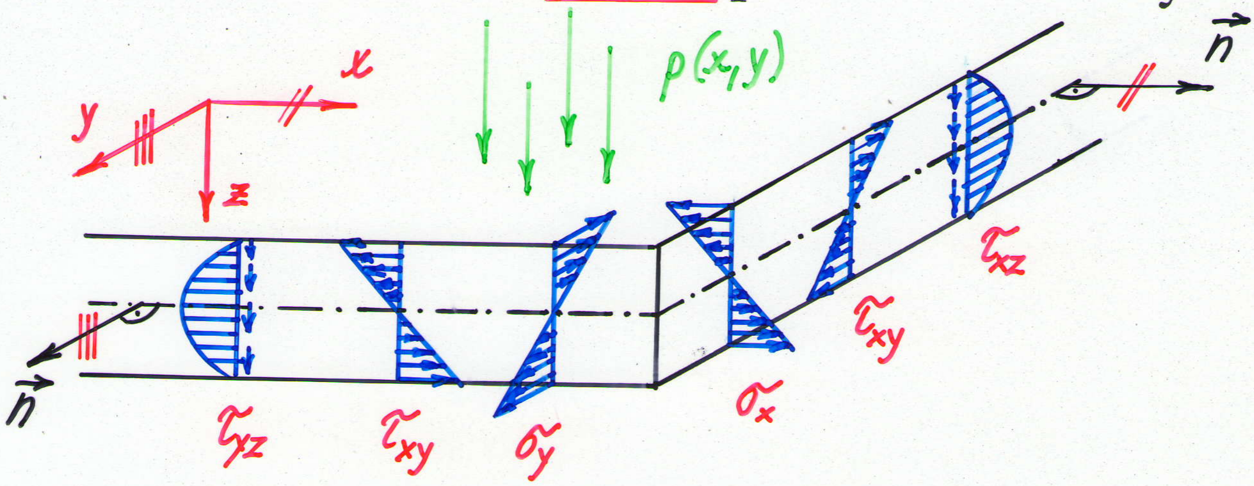
V každé vrstvě vzniká rovinná napjatost

$$\boxed{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}}$$

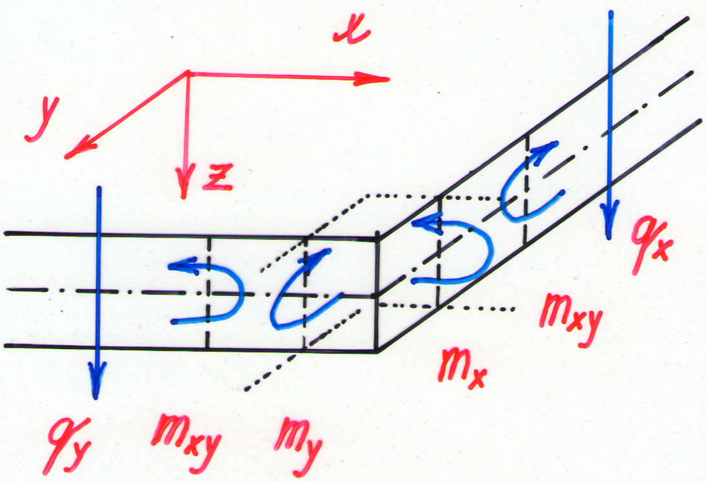
spolupůsobení vrstev zajistí

$$\boxed{\tau_{xz}, \tau_{yz}}$$

- Průběhy složek napětí po tloušťce desky



- Odpovídající měrné vnitřní síly (vztažené na 1m délky svislého řezu):



Význam indexů:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz \\ m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz \\ m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\,dz \end{aligned}\right\} \left[\frac{Nm}{m} = N\right]$$

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}\,dz \\ q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}\,dz \end{aligned}\right\} \left[\frac{N}{m}\right]$$

- Z podmínek rovnováhy deskového elementu vyplývá **desková rovnice**:

$$\boxed{\Delta\Delta w = \frac{p}{D}} \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ [Nm]}$$

$p(x,y)$… funkce zatížení D… desková tuhost

Vztah mezi měrnými vnitřními silami a funkcí průhybu *w(x,y)*:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

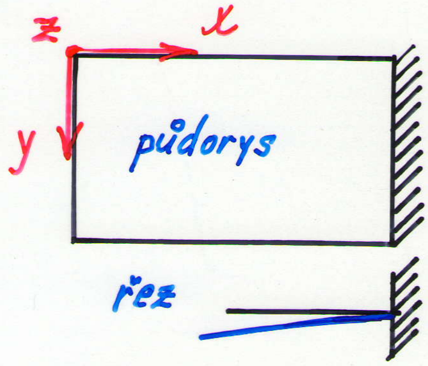
$$q_x = -D\,\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)$$

$$q_y = -D\,\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)$$

Okrajové podmínky

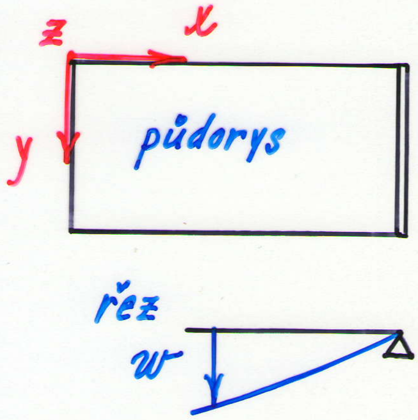
Na každém okraji lze splnit 2 podmínky (vzhledem ke 4. řádu diferenciální rovnice):

- vetknutí



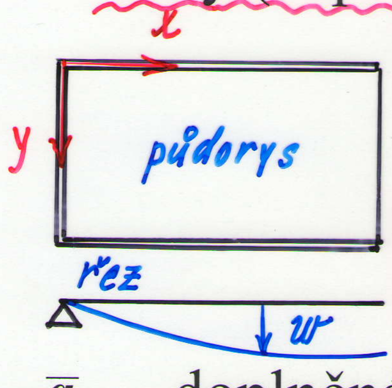
1. $w = 0$
2. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \left(\dfrac{\partial w}{\partial n} = 0\right)$

- prosté podepření (válcový kloub)



1. $w = 0$
2. $m_x = 0 \qquad (m_n = 0)$

- volný (nepodepřený) okraj



1. $m_x = 0$
2. $\left.\begin{aligned} q_x &= 0 \\ m_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \; \overline{q}_x = q_x + \dfrac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$

$\overline{q}_x$…doplněná (Kirchhoffova) posouvající síla

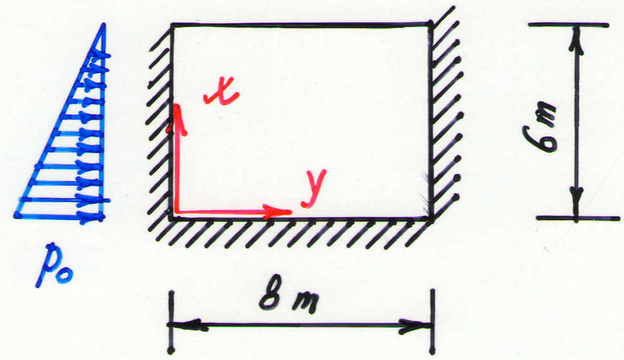
Příklad

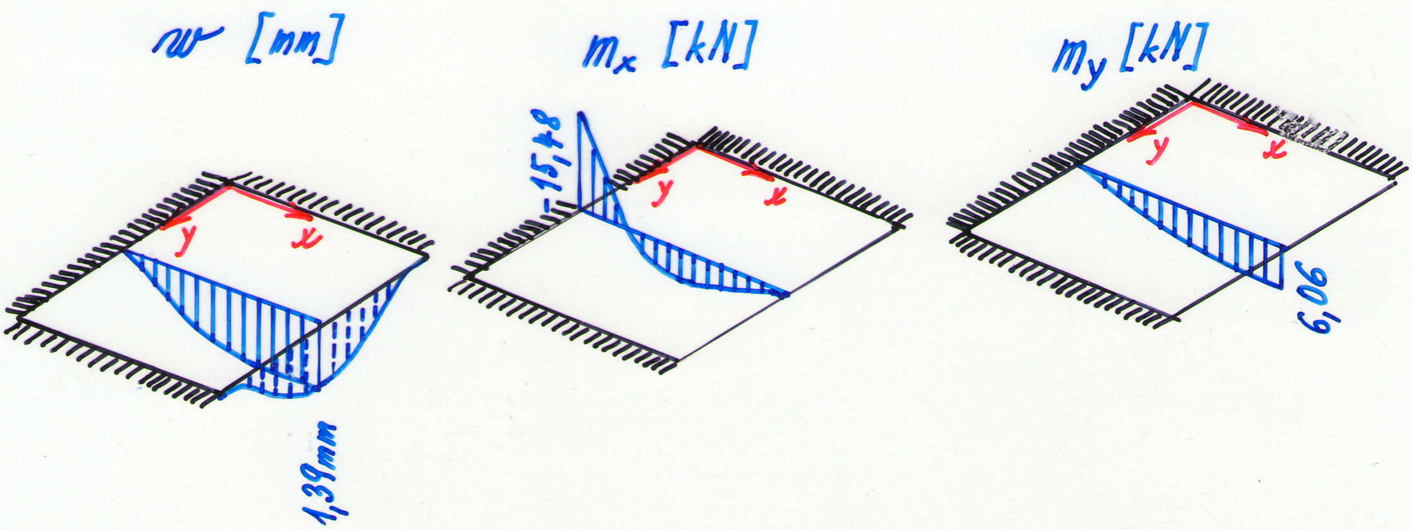
(skriptum PP20 – příklady, J. Bittnarová a kol.)

Obdélníková deska je po třech stranách vetknutá a na jedné straně volná. Zatížení je způsobeno hydrostatickým tlakem.

$\boldsymbol{p}_0 = 10\mathrm{kNm}^{-2}$, $\boldsymbol{E}_b = 26\mathrm{GPa}$, $\boldsymbol{\nu} \div 0$, $\boldsymbol{h} = 0{,}2\mathrm{m}$.

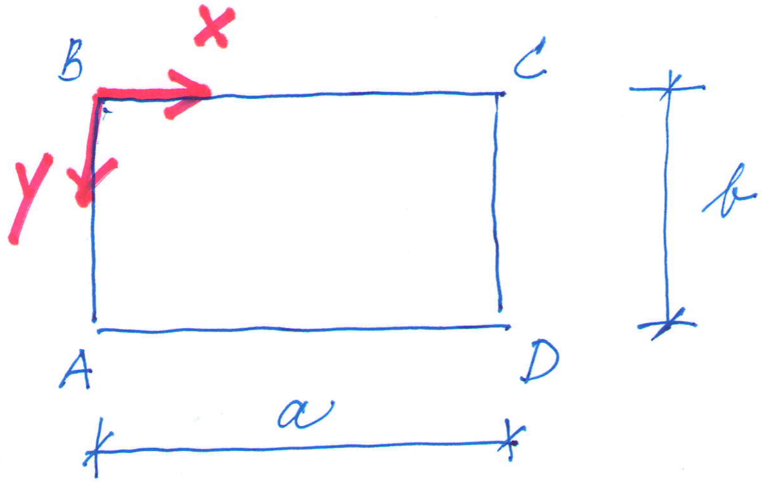
(Výpočet metodou konečných prvků pomocí programu FEAT 98.)





Příklad: Zjistěte způsob podepření desky, je-li známa funkce průhybu $w(x,y)$:

$$w(x,y) = A \sin\frac{\pi x}{a}\cdot \sin\frac{\pi y}{b}$$



okraj AB: $\underline{\underline{x=0}}$

$w = 0$?

$w(0;y) = A\sin(0)\cdot \sin\frac{\pi y}{b} = \underline{\underline{0}}$ ✓ je podepřen

jak? $(x=0)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = A\,\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cdot \sin\frac{\pi y}{b} = A\cdot\frac{\pi}{a}\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi y}{b} \neq 0$$

není vetknutý

je to kloub?

$$m_x = 0 \;? \qquad m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cancel{\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}\right) = -D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -A\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cancel{\sin\frac{\pi x}{a}}\cdot \sin\frac{\pi y}{b} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{\text{kloub}}}$$

$(x=0)$ $(x=0)$

okraj BC: $y=0$

$w=0$ ✓; $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ $\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ ✓ $\Rightarrow$ kloub okraj CD: $x = a$

$$w(a;y) = A \sin\frac{\pi \cancel{a}}{\cancel{a}} \sin\frac{\pi y}{b} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad ✓ \longrightarrow \text{kloub}$$

---

okraj AD: $y = b$

$$w(x;b) = A \sin\frac{\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\pi \cancel{b}}{\cancel{b}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad ✓ \longrightarrow \text{kloub}$$