

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Katedra mechaniky



Diplomová práce

Petr HAVLÁSEK

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Katedra mechaniky

Modely pro dotvarování
a smršťování betonu

Vedoucí diplomové práce:

prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Autor diplomové práce:

Petr Havlásek

Studijní obor:

Konstrukce a dopravní stavby

Forma studia:

prezenční

Diplomová práce dokončena:

prosinec 2009



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Thákurova 7, 166 29 Praha 6

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

studijní program: Stavební inženýrství
studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby
akademický rok: 2008/2009/2010

Jméno a příjmení diplomanta: Petr Havlásek
Zadávající katedra: K132 - Katedra mechaniky
Vedoucí diplomové práce: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.
Název diplomové práce: Modely pro dotvarování a smršťování betonu
Název diplomové práce
v anglickém jazyce: Modeling of Concrete Creep and Shrinkage


Rámcový obsah diplomové práce: Vývoj a ověření numerických algoritmů pro simulaci dotvarování a smršťování betonu metodou konečných prvků v rámci programu OOFEM. Porovnání výsledků získaných postupy podle norem s výsledky výpočtů pokročilými modely, např. modelem B3.

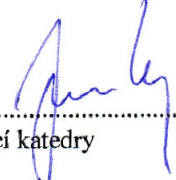
Datum zadání diplomové práce: 8.10.2009 Termín odevzdání: 18.12.2009
(vyplnit poslední den výuky příslušného semestru)

Diplomovou práci lze zapsat, kromě oboru A, v letním i zimním semestru.


Pokud student neodevzdal diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat diplomovou práci podruhé. Studentovi, který při opakovaném zápisu diplomovou práci neodevzdal v určeném termínu a tuto skutečnost řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, se ukončuje studium podle § 56 zákona o VŠ č.111/1998 (SZŘ ČVUT čl 21, odst. 4).

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.


.....
vedoucí diplomové práce


.....
vedoucí katedry

Zadání diplomové práce převzal dne: 9.10.2009


.....
diplomant

Formulář nutno vyhotovit ve 3 výtiscích – 1x katedra, 1x diplomant, 1x studijní odd. (zašle katedra)

Nejpozději do konce 2. týdne výuky v semestru odešle katedra 1 kopii zadání DP na studijní oddělení a provede zápis údajů týkajících se DP do databáze KOS.
(Směrnice děkana pro realizaci stud. programů a SZZ na FSv ČVUT čl. 5, odst. 7)

Čestné prohlášení:

prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Modely pro dotvarování a smršťování betonu* vypracoval samostatně pod odborným vedením Prof. Ing. Milana Jiráska, DrSc.

Petr Havlásek

Praha, prosinec 2009

Poděkování:

Děkuji prof. Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc., za cenné rady, podněty a připomínky při zpracování této diplomové práce.

Děkuji doc. Dr. Ing. Bořku Patzákovi a Ing. Tomáši Krejčímu, PhD., za poskytnutí cenných dat a odborných konzultací.

Anotace:

Vývoj a ověření numerických algoritmů pro simulaci dotvarování a smršťování betonu metodou konečných prvků v rámci programu OOFEM. Porovnání výsledků získaných postupy podle norem s výsledky výpočtů pokročilými modely, např. modelem B3.

Annotation:

Development and verification of numerical algorithms for simulation of concrete creep and shrinkage using finite element method implemented in program OOFEM. Comparison of results obtained from calculations according to design codes to results from sophisticated models, eg. model B3.

Klíčová slova:

Dotvarování, smršťování, beton, funkce poddajnosti, algoritmus, Dirichletova řada, Kelvinův řetězec, solidifikace, mikropředpětí, metoda konečných prvků.

Keywords:

Creep, shrinkage, concrete, compliance function, algorithm, Dirichlet series, Kelvin chain, solidification, microprestress, finite element method.

OBSAH DIPLOMOVÉ PRÁCE

Seznam použitých proměnných a označení	15
1. Motivace.....	17
2. Přetvárná chování betonu.....	19
2.1 Smršťování a dotvarování - charakteristika a rozdělení.....	19
2.2 Faktory ovlivňující smršťování a dotvarování.....	20
2.2.1 Smršťování.....	20
2.2.2 Dotvarování.....	21
3. (Pokročilé) modely pro popis dotvarování a smršťování betonu, modely z norem.....	23
3.1 Možnosti popisu dotvarování.....	23
3.2 Teorie zpožděné pružnosti	23
3.3 Teorie stárnutí - Dischingerova	24
3.4 Teorie zpožděné pružnosti se stárnutím.....	25
3.5 Double Power Law	26
3.6 Log Double Power Law	27
3.7 Model B3	27
3.7.1 Rozsah platnosti	28
3.7.2 Vzorce a vztahy.....	29
3.7.3 Výpočty.....	32
3.8 Zkrácená verze modelu B3	37
4. Simulace chování betonu použitím soustav reologických článků	39
4.1 Základní stavební prvky pro popis viskoelastivity	39
4.2 Nejjednodušší soustavy.....	40
4.2.1 Maxwellův model, funkce poddajnosti, relaxační funkce.....	40
4.2.2 Kelvinův model.....	41
4.3 Reologické řetězce	43
4.3.1 Nestárnoucí Kelvinův řetězec.....	43
4.3.2 Stárnoucí Kelvinův řetězec	44
4.3.3 Solidifikující Kelvinův řetězec	45
5. Numerické metody výpočtu dotvarování pro Kelvinův článek	49
5.1 Teoretické odvození numerických algoritmů.....	49
5.1.1 Algoritmus založený na integraci časově diskretizované úlohy	49
5.1.2 Algoritmy využívající zobecněné lichoběžníkové pravidlo	50

5.1.3	Exponenciální algoritmy	51
5.2	Srovnávací studie výpočetních algoritmů.....	55
5.2.1	Analytické řešení.....	55
5.2.2	Výsledky numerických výpočtů	56
5.2.1	Vyhodnocení.....	69
6.	Numerické metody výpočtu dotvarování pro Kelvinův řetězec	71
6.1	Algoritmus pro nestárnoucí Kelvinův řetězec	71
6.2	Algoritmus pro stárnoucí Kelvinův řetězec.....	73
6.3	Algoritmus pro solidifikující Kelvinův řetězec.....	75
6.4	Metody stanovení optimálních parametrů Kelvinova řetězce	78
6.4.1	Metoda nejmenších čtverců	78
6.4.2	Metoda analýzy retardačního spektra.....	81
6.4.3	Optimalizace volby retardačních časů a počtu Kelvinových jednotek	83
6.5	Numerické modelování a vyhodnocení	83
7.	Solidifikační teorie	91
8.	Microprestress-Solidification Theory	95
9.	Implementace do programu OOFEM	101
9.1	Popis programu OOFEM	103
9.2	Předchozí implementace modelu B3.....	104
9.3	Nová implementace modelu B3	105
9.4	Popis desorpční izotermy	109
10.	Srovnávací výpočty	111
10.1	Simulace v programu OOFEM.....	111
10.2	Vyhodnocení.....	118
10.3	Výpočet podle EC2.....	119
10.3.1	Výpočet dle článku 3.1.4 – Dotvarování a smršťování	119
10.3.2	Výpočet dle Přílohy B.....	121
10.3.3	Vyhodnocení.....	121
11.	Závěr	123
12.	Literatura	125
13.	Přílohy.....	127
13.1	Příloha 1 – Charakteristiky betonu	127
13.2	Příloha 2 – Výňatky z EC 2.....	129
13.3	Příloha 3 – Grafické výstupy z programu ParaView.....	135

SEZNAM POUŽITÝCH PROMĚNNÝCH A OZNAČENÍ

$\dot{x}(t)$	První derivace proměnné x podle času
$\ddot{x}(t)$	Druhá derivace proměnné x podle času

Malá písmena latinské abecedy

a	[kg·m ⁻³]	Hmotnostní obsah kameniva v betonové směsi
c	[kg·m ⁻³]	Hmotnostní obsah cementu v betonové směsi
c	[1/(MPa ² ·s)]	Konstanta (microprestress solidification theory)
c_0	[1/(MPa·s)]	Konstanta (microprestress solidification theory)
c_1	[1/MPa]	Konstanta (microprestress solidification theory)
e	[-]	Základ přirozeného logaritmu
\bar{f}_c	[Pa]	průměrná válcová tlaková pevnost betonu ve stáří 28 dní
h	[-]	Relativní vlhkost
k_h	[-]	Součinitel závisející na okolní vlhkosti (B3)
k_s	[-]	Tvarový součinitel (B3)
k_{sh}	[-]	Součinitel pro výpočet smrštění (microprestress solidification theory)
m	[-]	Empirická konstanta (0.5 pro model B3)
n	[-]	Empirická konstanta (0.1 pro model B3)
q_1 - q_5	[1/Pa]	Empirické konstanty (B3)
t	[s]	Čas
t	[s]	Stáří betonu v okamžiku ukončení ošetřování
t'	[s]	Čas vnesení zatížení
		Pomocná časová proměnná
t_{min}	[s]	Spodní hranice časového intervalu
t_{max}	[s]	Horní hranice časového intervalu
Δt_k	[s]	Délka k-tého časového kroku
$v(t)$	[-]	Funkce určující relativní podíl solidifikovaného materiálu
w	[kg·m ⁻³]	Hmotnostní obsah vody v betonové směsi
w	[kg/kg]	Hmotnostní vlhkost
w/c	[-]	Vodní součinitel

Velká písmena latinské abecedy

C	[1/Pa]	specific creep
C_v	[-]	Jednotková matice poddajnosti
C_S	[Pa]	Tuhost pružiny (microprestress solidification theory)
D	[m]	Efektivní tloušťka průřezu
$D(t)$	[Pa]	Pomocný časově závislý modul
D_v	[-]	Jednotková matice tuhosti
E	[Pa]	Youngův modul pružnosti
E_μ	[Pa]	Modul pružnosti μ -tého Kelvinova článku
E^∞	[Pa]	Hodnota modulu pružnosti při plné solidifikaci
\bar{E}_k	[Pa]	Přírůstkový modul
E_0	[Pa]	Asymptotický modul
E_{EM}	[Pa]	Efektivní modul
E_{28}	[Pa]	Konvenční modul pružnosti ve stáří betonu 28 dní
$H(t)$	[-]	Heavisideova funkce
$J(t)$	[1/Pa]	Funkce poddajnosti
$J_0(t)$	[1/Pa]	Funkce poddajnosti pro nestárnoucí materiál
$J_b(t, \dots)$	[1/Pa]	Funkce poddajnosti pro základní dotvarování
$J_a(t, \dots)$	[1/Pa]	Funkce poddajnosti pro dotvarování související s vysycháním

M	[-]	Počet Kelvinových jednotek v řetězci
$Q(t, t')$	[-]	Pomocná funkce (B3)
$R(t)$	[Pa]	Relaxační funkce
$R_0(t)$	[Pa]	Relaxační funkce pro nestárnoucí materiál
S	[Pa]	Mikropředpětí
$S(\hat{t})$	[-]	Funkce určující průběh smršťování
T	[K]	Absolutní teplota

Malá písmena řecké abecedy

α	[-]	Parametr zobecněného lichoběžníkového pravidla
α_1	[-]	Konstanta – vliv typu cementu
α_2	[-]	Konstanta – vliv typu ošetřování
β_μ	[-]	Pomocná proměnná (expon. algoritmy)
γ_μ	[-]	Vnitřní proměnná
ε	[-]	Relativní deformace
ε_e	[-]	Relativní deformace elastické pružiny, elastická deformace
ε_c	[-]	Relativní deformace – složka dotvarování
ε_{sh}^∞	[-]	Konečná hodnota smrštění při nulové okolní vlhkosti (B3)
ε_{sh}	[-]	Relativní deformace - smrštění
ε_v	[-]	Relativní deformace viskózního tlumiče
$\Delta\varepsilon''$	[-]	Přírůstek relativní deformace související s dotvarováním
η	[Pa·s]	Viskozita
η^∞	[Pa·s]	Hodnota viskozity při plné solidifikaci
η_μ	[Pa·s]	Viskozita μ -tého Kelvinova článku
λ_μ	[-]	Pomocná proměnná (expon. algoritmy)
λ_0	[den]	Empirická konstanta (B3)
ν	[-]	Poissonovo číslo
σ	[Pa]	Normálové napětí
σ_e	[Pa]	Napětí vznikající v elastické pružině
σ_v	[Pa]	Napětí vznikající ve viskózním tlumiči
$\hat{\sigma}$	[Pa]	Konstantní předepsané napětí
τ	[s]	Retardační čas (pro Kelvinův článek) Relaxační čas (pro Maxwellův článek)
τ_μ	[s]	Retardační čas μ -tého Kelvinova článku
τ_{sh}	[s]	Poločas smrštění (B3)
φ	[-]	Součinitel dotvarování
φ_∞	[-]	Hodnota součinitele dotvarování pro čas nekonečno
ψ_0	[-]	Materiálový parametr (log double power law)
ψ_1	[-]	Materiálový parametr (log double power law)

Velká písmena řecké abecedy

$\Phi(t - t')$	[1/Pa]	Nestárnoucí funkce poddajnosti
----------------	--------	--------------------------------

Význam dalších, zde neuvedených proměnných a konstant je uveden přímo v textu.

1. MOTIVACE

Stále rostoucí výpočetní výkon osobních počítačů i profesionálních výpočetních stanic pomalu odstraňuje nutnost uvažovat při výpočtech metodou konečných prvků zjednodušené chování materiálu popsané Hookeovým zákonem. Nastává čas nelineární analýzy, kdy je problém řešen v mnoha časových krocích a v každém z nich je rovnováha hledána iteracemi a materiály jsou popsány pokročilými teoriemi, například teorií plasticity, lomovou mechanikou a mnoha dalšími.

Díky tomuto trendu snad časem dojde k zefektivnění výpočtů a především konstrukčních návyků, kvůli kterým vznikají zbytečně předimenzované konstrukce, což v dnešní době – v době finanční krize a na prahu surovinové krize – jistě není žádoucí. Oproti tomu, vlivem přílišných zjednodušení a neznalosti skutečného chování materiálu byla v minulosti navržena celá řada staveb, které buď dobře neplní svou funkci, nebo již zkolabovaly. Co je horší – řada těchto staveb byla navržena *správně*, podle platných norem. Některé z nich jsou platné dodnes. Narážím na popis dotvarování, jehož hodnoty při výpočtu podle norem nemusí být na straně bezpečné.

Cílem této práce ale není srovnávat experimentálně změřená data a pomocí norem přepočítávat, zda by normy daly správný odhad. Prvním dílčím úkolem práce je prozkoumat modely dotvarování (a smršťování) a algoritmy, které je možné využít při jejich výpočtu s ohledem na chybu řešení. Předmětem zájmu je nejen velikost této chyby, nýbrž i faktory, které ji mohou ovlivnit (i ze strany uživatele programu). Dalším dílčím cílem je zmapovat současnou implementaci modelu pro výpočet dotvarování B3 v programu OOFEM, vyvíjeném na Fakultě stavební Bořkem Patzákem, a v případě potřeby ji rozšířit o další třídy nebo metody.

Cílem práce je také ověřit platnost *plné* verze modelu B3, modelu, který zohledňuje vliv geometrie průřezu, vlhkosti, teploty a podmínek ošetřování na výsledné smrštění a dotvarování. Jako srovnávací rovina poslouží současná nebo nová implementace tohoto modelu, která bude obsahovat stejné *jádro* jako výše zmíněný model, nicméně rozložení vlhkosti bude čerpat z přesného výpočtu získaného řešením difuzní rovnice metodou konečných prvků. Srovnáván tedy bude *průřezový* model s modelem *bodovým*.

Obsah této práce není soustředěn jen na tyto tři cíle, jsou zde shrnuty všechny poznatky, bez nichž by těchto cílů nemohlo být dosaženo, základy viskoelasticity počínaje a solidifikační teorií mikropředpětí konče. Účelem práce není představit dopodrobna všechna odvození, za cíl si spíše kladu uvést praktické důsledky plynoucí zejména pro implementaci v programu OOFEM.

2. PŘETVÁRNÁ CHOVÁNÍ BETONU

Základní vlastností přetvoření betonu je závislost jeho průběhu i velikosti na čase; týká se to zejména procesů, které jsou předmětem této práce – dotvarování a smršťování (popř. bobtnání). Poslední dva jevy závisejí pouze na vývoji vlhkosti, první zmíněný je podmíněn silovým působením, jeho charakter je ale také ovlivněn vlhkostí.

Přetvoření můžeme podle časové závislosti rozdělit podle odezvy na okamžitá (nezávislá na délce trvání příčiny přetvoření) a opožděná (závislá na délce trvání příčiny přetvoření). Opožděné přetvoření lze vypočítat jako rozdíl celkového přetvoření a okamžitého přetvoření. Ve škatulkování můžeme dále pokračovat – přetvoření lze rozlišit na závislá a nezávislá na silovém působení a také na přetvoření vratná a nevratná.

V případě betonu ale nelze většinu přetvoření takto přesně specifikovat, většinou jde o jistou kombinaci výše uvedených kategorií. Příkladem může být chování stárnuoucího viskoelastického materiálu, jehož přetvoření je *částečně* vratné.

Deformace způsobené dotvarováním i smršťováním betonu, které jsou předmětem této práce, lze zařadit do procesů opožděných. Smršťování betonu je proces na zatížení nezávislý, oproti tomu dotvarování na vnějším zatížení závisí.

2.1 SMRŠŤOVÁNÍ A DOTVAROVÁNÍ - CHARAKTERISTIKA A ROZDĚLENÍ

Smršťování (značit ho budeme ϵ_{sh} , pro znaménka platí stejná konvence jako pro klasické přetvoření) lze rozdělit do dvou hlavních skupin v závislosti na tom, zda došlo k transportu vlhkosti mezi vzorkem a jeho okolím či nikoliv. Pokud je vzorek izolován, dochází k tzv. autogennímu smrštění (též chemickému smrštění). To je způsobeno hydratační reakcí cementu a vody, jejichž produkt má menší objem než výchozí látky. U většiny normálních betonů jde o zanedbatelnou položku (5% smrštění způsobeného vysycháním), v případě vysokopevnostních betonů dosahuje stejné velikosti jako smrštění způsobené vysycháním a mělo by se proto uvažovat.

Druhou skupinu tvoří smršťování způsobené výměnou vlhkosti mezi betonem a okolím. Ve většině případů se beton nachází v sušším prostředí, než je jeho původní vlhkost, dochází tedy k vysychání, při němž se zvětšuje povrchové napětí v kapilárách, což má za následek jejich zúžení a tedy makroskopické zmenšení objemu. Oproti tomu, pokud se beton bude nacházet ve vyšší vlhkosti, dojde k opačnému jevu, tzv. bobtnání (zvětšování objemu). Bobtnání bývá výrazně menší než smršťování, a proto se ve většině případů zanedbává.

Kromě těchto dvou základních druhů existuje ještě *plastické smrštění*, které je způsobeno ztrátou vody z ještě neztvrdlého betonu. Posledním uváděným druhem smrštění je *smrštění způsobené karbonatací*. Při něm dochází k reakci cementové pasty s oxidem uhličitým za přítomnosti vlhkosti.

Pozn. Zajímavý jev nastane tehdy, pokud porovnáme smrštění na tlakem zatíženém vzorku a vzorku nezatíženém. Smrštění zatíženého vzorku bude větší. Z důvodu nerovnoměrného vysychání průřezu nejdříve vyschnou (a tedy se smrští) strany vzorku. Jádro průřezu zůstává vlhké, proto dojde na stranách ke vzniku mikrotrhlinek, v nichž samozřejmě nemůže působit žádné napětí. Oproti tomu na zatíženém vzorku k vzniku mikrotrhlinek nedojde a tedy napětí smršťující vzorek může působit

po celém objemu, z čehož plyne větší hodnota smrštění. K nerovnoměrné distribuci napětí v případě autogenního smrštění nedochází.

Dotvarování lze definovat jako opožděnou reakci deformace na napětí. Po zatížení se rychlost dotvarování s délkou trvání zatížení snižuje. Podobně jako smršťování lze i dotvarování rozdělit do dvou skupin: základní dotvarování a dotvarování spojené s vysycháním. O základním dotvarování (basic creep) betonu můžeme hovořit v případě, pokud je zamezeno výměně vlhkosti s okolím. Pokud není zamezeno výměně vlhkosti s okolím, beton dotvaruje více; rozdíl mezi celkovým dotvarováním a základním dotvarováním se označuje jako dotvarování spojené s vysycháním (drying creep). Hodnota základního dotvarování nezávisí na tvaru tělesa ani jeho velikosti; závisí pouze na vlastnostech betonu a vnějším zatížení. Základní dotvarování má menší velikost než dotvarování spojené s vysycháním. Dotvarování spojené se změnou vlhkosti je výrazně umocněno ještě tím, pokud v průběhu zatížení dojde k cyklickému vysoušení a vlhčení vzorků.

2.2 FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ SMRŠŤOVÁNÍ A DOTVAROVÁNÍ

Ačkoliv je tato práce svou povahou spíše teoretická, rád bych se v této kapitole zmínil o tématu ryze praktickém – o faktorech, které mají za následek odlišné chování betonu. Dopad těchto vlivů bude sledován jen pro dotvarování a smršťování. Náš zájem vymezíme na oblast, kde platí princip superpozice a kde lze hovořit o lineárním dotvarování. Tento obor platnosti je v případě betonu limitován horní hranicí zatížení, která je přibližně rovna polovině střední hodnoty tlakové pevnosti ve stáří 28 dní.

I když je proces dotvarování a smršťování zcela odlišný, oba mají jedno společné – téměř zcela závisí na chování cementového tmelu. Jeho objem se v betonu se běžně pohybuje mezi 25 – 30 %. Typ a vlastnosti kameniva mají při popisu dotvarování i smršťování roli druhořadou.

2.2.1 SMRŠŤOVÁNÍ

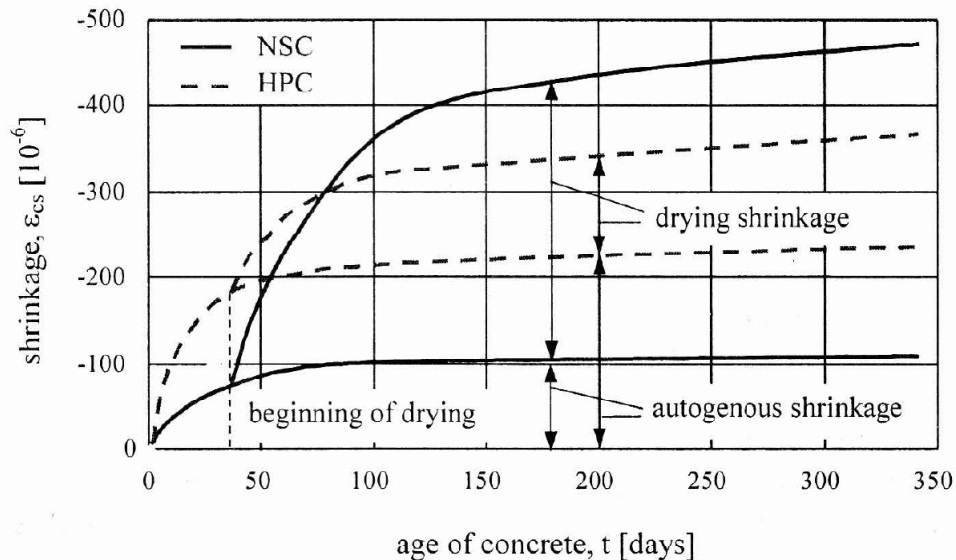
Celkové smrštění (součet autogenního a smrštění z vysychání) se pohybuje v rozmezí od 0.0001 do 0.001. Velikost smrštění je úměrná obsahu cementové pasty v betonu.

Hlavním faktorem ovlivňujícím magnitudu smrštění je objem vypařené vody. Proto se smrštění zvětšuje s rostoucím vodním součinitelem a klesající vlhkostí okolního prostředí. V případě vysokopevnostních betonů je tedy smrštění značně sníženo díky nižšímu vodnímu součiniteli a nižší kapilární porositě.

Smrštění také roste s jemností mletí cementu a s přítomností zásad. Smrštění klesá s rostoucím modulem pružnosti kameniva (poddajnější zrna kameniva méně zabrání smrštění). Finální hodnota smrštění je nezávislá na velikosti a tvaru prvku, nicméně prvky s větším poměrem plochy k objemu smršťují rychleji. Pro betony normálních pevností má doba ošetřování malý vliv na magnitudu smrštění; větší vliv má v případě vysokopevnostních betonů. U nich totiž dochází ke značnému autogennímu smrštění již během doby ošetřování a výsledné smrštění při vysychání tedy bude o to menší, čím déle budeme beton ošetřovat. Pro všechny druhy a třídy betonu ale platí, že ošetřování příznivě působí proti vzniku trhlin způsobených smrštěním, které bývají mnohdy způsobené nedostatečnou péčí o mladý beton. Přetvoření způsobené smrštěním je jen částečně vratné.

Je dobré poznamenat, že ačkoliv většina norem a doporučení má za jeden z hlavních parametrů pro výpočet (předpověď) smrštění tlakovou pevnost betonu, je skutečná závislost na této

veličině velmi malá; smrštění závisí více na parametrech spojených s mikrostrukturou betonu a jeho složením (např. vodní součinitel, stupeň hydratace, atd.). Na druhou stranu z inženýrského pohledu je při návrhu konstrukce mnohdy známa jen tlaková pevnost betonu, a proto je potřebné do norem tento parametr pro výpočet smrštění zařadit.



Obrázek 2.1 Průběh smrštění betonu v závislosti na čase. NSC = normal strength concrete, HPC = high performance concrete. (Převzato z [10]).

2.2.2 DOTVAROVÁNÍ

I v případě dotvarování je finální hodnota dotvarování přibližně přímo úměrná objemu cementového tmelu v betonu. (Klasické kamenivo se chová elasticky – nedotvaruje.) V případě betonu normální pevnosti a hodnoty zatížení nepřesahující polovinu pevnosti v tlaku je součinitel dotvarování většinou v intervalu $\langle 1; 4 \rangle$.

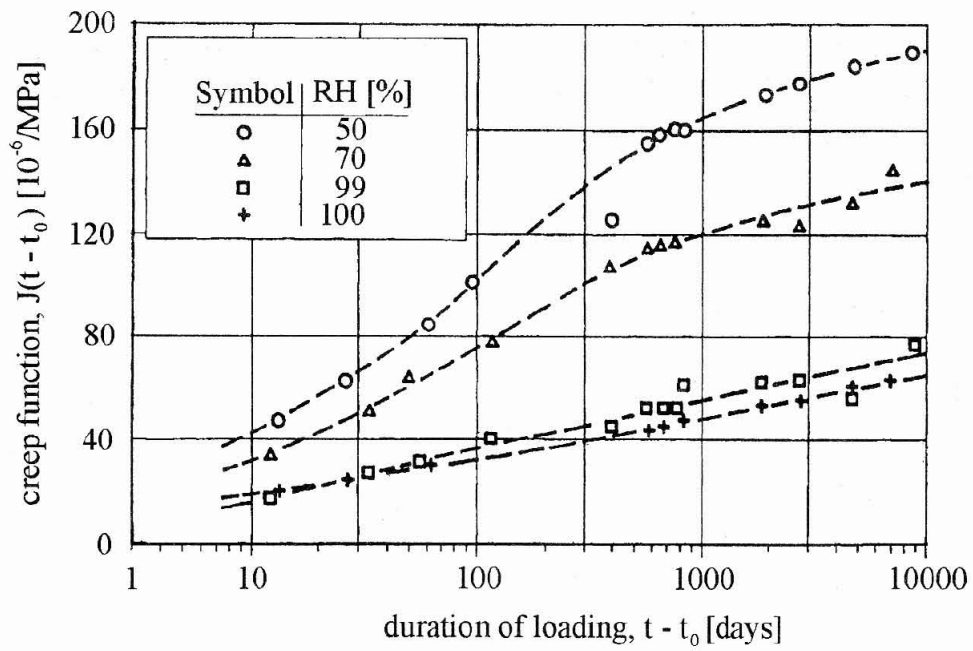
Faktory ovlivňující dotvarování jsou podobné jako v případě smršťování. Proto je zmíním jen ve zkratce. Dotvarování zvyšuje: objem cementové pasty, porozita, menší hutnost betonu, vyšší vodní součinitel, menší stupeň hydratace, menší modul pružnosti kameniva, nižší vlhkost okolního prostředí.

Dotvarování je velmi ovlivněno i způsobem ošetřování. Při ošetřování parou nebo při autoklávování dojde k urychlení tvrdnutí a dotvarování se zmenší. Například při ošetřování parou po dobu 13 hodin při teplotě $65\text{ }^{\circ}\text{C}$ dojde ke snížení dotvarování od 30 do 50 %.

Závislost průběhu dotvarování v čase na mocnosti prvku je podobná jako v případě smršťování, protože i zde závisí na rychlosti a průběhu vysychání. Dotvarování je částečně vratný proces. Lze jej proto rozdělit na část viskoelastickou, ϵ_v , (která je zcela vratná v případě nestárnoucího materiálu) a na část ϵ_f , která je nevratná.

Do posledního odstavce si nechávám závislost zcela zásadní – je jí okamžik zatížení a délka působení zatížení. Beton je stárnoucí materiál. Pokud je zatížen stejně dlouho trvajícím zatížením mladý a vyzrálý beton, více dotvaruje beton mladší. Definujeme tři charakteristické časy (z hlediska dotvarování). Jsou to (seřazeno vzestupně) okamžik ukončení ošetřování, který budeme označovat t_0 , okamžik vnesení zatížení t' a konečně aktuální čas, ve kterém zkoumáme výsledek dotvarování t .

Tyto časy představují stáří betonu, které je měřeno od jeho zatuhnutí, a většinou se tyto hodnoty uvádějí ve dnech.



Obrázek 2.2 Průběh dotvarování betonu v čase v závislosti vlhkosti okolního prostředí. (Převzato z [10]).

3. (POKROČILÉ) MODELÝ PRO POPIS DOTVAROVÁNÍ A SMRŠŤOVÁNÍ BETONU, MODELÝ Z NOREM

V této kapitole jsou první uvedeny nástroje, které nám poslouží ke snadnému a výstižnému popsání dotvarování. Dále jsou zde uvedeny teorie, které si zaslouží pozornost spíše z historického hlediska a které lze dnes považovat za překonané. Ve střední části této kapitoly je podrobně popsán model B3, který lze bez nadsázky označit za zatím nejpracovanější materiálový model pro popis dotvarování a smršťování betonu.

Předpokladem pro použití všech zde zmíněných modelů je platnost principu superpozice. Jeho obor platnosti je v případě betonu limitován horní hranicí zatížení, která je přibližně rovna polovině střední hodnoty tlakové pevnosti ve stáří 28 dní.

3.1 MOŽNOSTI POPISU DOTVAROVÁNÍ

V tomto oddílu zavedeme tři základní pojmy, které nám zjednoduší život při popisu dotvarování.

Pokud je beton zatížen konstantním napětím $\hat{\sigma}$ od času t' do času t , vyvodí toto napětí historii deformace popsanou funkcí $\varepsilon(t, t')$. Tuto deformaci lze rozdělit na dvě složky: složku vyjadřující okamžitou deformaci ε_e a složku popisující dotvarování ε_c . Druhou složku lze zapsat hned několika způsoby.

$$\varepsilon_c(t, t') = \varepsilon_e \cdot \varphi(t, t') = C(t, t') \cdot \hat{\sigma} \quad (3.1)$$

Ve výše uvedené rovnici jsme zavedli dvě pomocné funkce. První je *součinitel dotvarování* $\varphi(t, t')$. Tato funkce vyjadřuje poměr dotvarování k elastické deformaci. Druhá pomocná funkce se nazývá *specific creep* (specifické dotvarování). Tato funkce přebírá podobnou roli jako modul poddajnosti v Hookeově zákoně. Slouží k výpočtu velikosti dotvarování z konstantního napětí. Specific creep byl používán spíše v minulosti. Nyní bývá častěji používána *funkce poddajnosti* $J(t, t')$, která svazuje celkovou deformaci s konstantním napětím.

$$\varepsilon(t, t') = \varepsilon_e(t') + \varepsilon_c(t, t') = J(t, t') \cdot \hat{\sigma} \quad (3.2)$$

Fyzikální jednotky funkce poddajnosti i specifického dotvarování jsou určeny z výše uvedených rovnic: $1/\text{Pa}$.

Pro svou jednoduchost zůstává v běžné praxi jako nejpoužívanější nástroj pro popis dotvarování součinitel dotvarování. Ten bývá v normách nahrazen časově nezávislou konstantou, která by měla vystihovat násobek elastické deformace v čase životnosti konstrukce. Celkovou deformaci lze pak pomocí tohoto koeficientu vyjádřit takto:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_e \cdot \varphi = \varepsilon_e \cdot (1 + \varphi) = \frac{\hat{\sigma}}{E} (1 + \varphi) \quad (3.3)$$

3.2 TEORIE ZPOŽDĚNÉ PRUŽNOSTI

(The Theory of Delayed Elasticity)

V této teorii se předpokládá, že okamžik zatížení t' nemá vliv na konečnou hodnotu dotvarování, tj. beton se chová jako nestárnoucí materiál. Dotvarování závisí pouze na délce trvání zatížení, tj. hodnotě $t - t'$. Toto má za následek jev, který je v rozporu se skutečným chováním betonu. V teorii

zpožděné pružnosti totiž po odtižení dojde v průběhu času k úplnému vymizení deformací vyvolaných dotvarováním – teorie zanedbává nevratná přetvoření (viz obrázek 3.1). Teorie zpožděné pružnosti je zastaralá a zcela nevhodná pro mladý beton do stáří jednoho roku, protože v tomto období má stáří betonu značný vliv na finální hodnotu dotvarování a na nevratné deformace.

Součinitel dotvarování i specifické dotvarování lze vyjádřit stejným způsobem pomocí jejich finální hodnoty v čase $t = \infty$. Jak se v další kapitole ukáže, popisují následující rovnice chování Kelvinova článku.

$$\varphi(t - t') = \varphi_{\infty}(1 - e^{-a(t-t')}) \quad (3.4)$$

$$C(t - t') = C_{\infty}(1 - e^{-a(t-t')}) \quad (3.5)$$

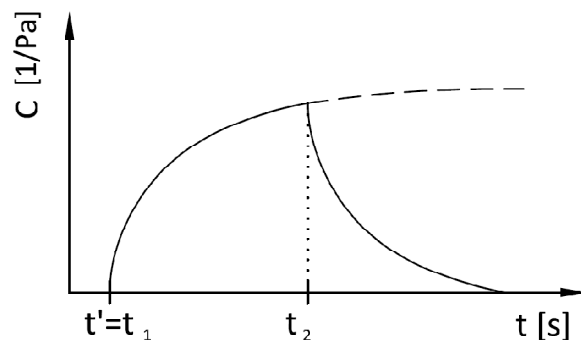
Pokud je beton zatížen konstantním napětím, lze jeho přetvoření v čase $t \rightarrow \infty$ vyjádřit následujícím vztahem:

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon_e + \varepsilon_c = \frac{\hat{\sigma}}{E} + \frac{\hat{\sigma}}{E} \cdot \varphi_{\infty} = \frac{\hat{\sigma}}{E_{EM}} \quad (3.6)$$

kde jsme zavedli pomocnou proměnnou, tzv. efektivní modul E_{EM} .

$$E_{EM} = \frac{E}{1 + \varphi_{\infty}} \quad (3.7)$$

Teorii zpožděné pružnosti lze použít při zjednodušených výpočtech, kdy je zatížen starší beton a kdy nedojde k odtižení.



Obrázek 3.1 Odtižení v případě teorie zpožděné pružnosti.

3.3 TEORIE STÁRNUTÍ - DISCHINGEROVA

(The rate-of-creep theory)

V porovnání s předchozí teorií tato teorie zohledňuje efekt stárnutí betonu – tj. finální hodnota přetvoření je závislá na okamžiku vnesení zatížení. Součinitel specifického dotvarování a součinitel dotvarování (podle Dischingera) jsou dány rovnicemi (za předpokladu konstantního modulu pružnosti E).

$$C(t, t') = \frac{\varphi(t) - \varphi(t')}{E} \quad (3.8)$$

$$\varphi(t, t') = \varphi(t) - \varphi(t') = \varphi_{\infty}(1 - e^{-a \cdot t}) - \varphi_{\infty}(1 - e^{-a \cdot t'}) = \varphi_{\infty}(e^{-a \cdot t'} - e^{-a \cdot t}) \quad (3.9)$$

$$\varphi(t, t') = \varphi_{\infty} e^{-a \cdot t'} (1 - e^{-a \cdot (t-t')})$$

Podobně jako v předchozí sekci popíšeme deformaci v čase pro $t \rightarrow \infty$.

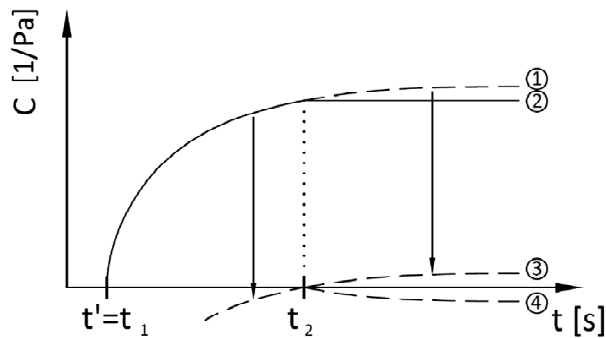
$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon_e + \varepsilon_c = \frac{\hat{\sigma}}{E_{EM}} \quad (3.10)$$

Tentokrát ale bude mít efektivní modul jiný tvar – jeho hodnota bude záviset i na okamžiku zatížení t' .

$$E_{EM} = \frac{E}{1 + \varphi_\infty e^{-a \cdot t'}} \quad (3.11)$$

I když tato teorie postihuje stárnutí, má dva velké nedostatky. První nedostatek přímo plyne z poslední rovnice. Pokud budeme zkoumat efektivní modul pro časy zatížení jdoucí k nekonečnu, zjistíme, že $E_{EM} = E$, tj. že beton se chová pružně, nedotvaruje. Pro tyto časy zatížení tedy teorii nelze použít.

Druhým nedostatkem je neschopnost této teorie popisovat vratnost dotvarování v případě odtížení. To je dokumentováno na následujícím obrázku.



Obrázek 3.2 Odtížení v případě teorie stárnutí. Zatížení působí od času t_1 , k odtížení došlo v čase t_2 . Křivka 1 odpovídá průběhu dotvarování v případě, že by nedošlo k odtížení. Křivka 3 představuje průběh specifického dotvarování, kdyby byl vzorek zatížen v čase t_2 . Tato křivka vznikne vertikálním posunem křivky 1. Podle principu superpozice získáme výsledný stav (2) sečtením záporně vzaté křivky 3 (4) a křivky původní (1).

3.4 TEORIE ZPOŽDĚNÉ PRUŽNOSTI SE STÁRNUTÍM

Tato teorie sice ve svém finálním vzorci používá o jednu konstantu více než teorie zmíněné v předchozích dvou kapitolách, nicméně odstraňuje jejich nedostatky. Vhodnou volbou koeficientů lze dosáhnout reálných výsledků jak pro rané období betonu, tak i pro beton velkého stáří.

Vyjdeme ze součinitele dotvarování definovaného v teorii zpožděné pružnosti (3.4), kde konstantu φ_∞ nahradíme funkcí záviselou na stáří betonu při aplikaci zatížení.

$$\varphi(t, t') = \varphi_\infty(t') \cdot (1 - e^{-a(t-t')}) \quad (3.12)$$

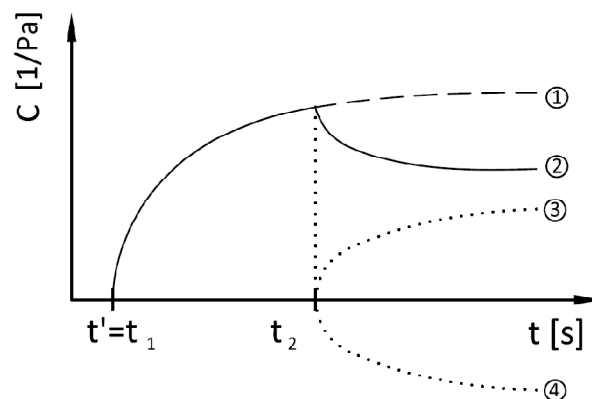
Za novou funkci $\varphi_\infty(t')$ dosadíme výraz ve tvaru

$$\varphi_\infty(t') = \varphi_1^\infty + \varphi_2^\infty e^{-at'} \quad (3.13)$$

a po úpravách dostaneme

$$\varphi(t, t') = \varphi_1^\infty \cdot (1 - e^{-a(t-t')}) + \varphi_2^\infty (e^{-at'} - e^{-at}) \quad (3.14)$$

Porovnáním charakteru členů s předchozími teoriemi zjistíme, že první člen popisuje teorii zpožděné pružnosti a druhý člen teorii stárnutí. Z tohoto principu vycházelo rovněž doporučení CEB-FIP (nyní nahrazené jiným vztahem).



Obrázek 3.3 Odtížení v případě teorie zpožděné pružnosti se stárnutím. Zatížení působí od času t_1 , k odtížení došlo v čase t_2 . Křivka 1 odpovídá průběhu dotvarování v případě, že by nedošlo k odtížení. Křivka 3 představuje průběh specifického dotvarování, kdyby byl vzorek zatížen v čase t_2 . Podle principu superpozice získáme výsledný stav (2) sečtením záporně vzaté křivky 3 (4) a křivky původní (1).

3.5 DOUBLE POWER LAW

Tento model byl navržen v roce 1976 Z. P. Bažantem a E. Osmanem. Jak název napovídá, jejím jádrem je mocninná funkce, která, jak se ukázalo, nejlépe vystihuje tvar křivek znázorňujících dotvarování. Argumentem této mocninné funkce je délka trvání zatížení: $t - t'$. Funkce poddajnosti měla původně tvar:

$$J(t, t') = \frac{1}{E_0} + \frac{\varphi_1}{E_0} (t')^{-m} (t - t')^n \quad (3.15)$$

Toto vyjádření bylo následně doplněno ještě o parametr α , protože původní vyjádření nepostihovalo dotvarování při zatížení velmi starého betonu.

$$J(t, t') = \frac{1}{E_0} + \frac{\varphi_1}{E_0} (t'^{-m} + \alpha) (t - t')^n \quad (3.16)$$

kde E_0 je (časově nezávislý) asymptotický modul pro časy $(t - t') \rightarrow 0$. Lze jej vyjádřit pomocí modulu pružnosti ve 28 dnech: $E_0 = 1.5E_{28}$. Zbýlé proměnné jsou materiálové parametry. Jejich typické hodnoty jsou: $\varphi_1 = 3 - 6$, $n = 1/8$, $m = 1/3$, $\alpha = 0.05$.

Statický modul lze vypočítat ze vztahu $E = 1/J(t' + \Delta, t')$, kde $\Delta = 0.1$ dne. Dynamický modul bychom získali ze stejného vzorce pro hodnotu $\Delta = 10^{-7}$ dne.

V logaritmickém měřítku $\log(t - t')$ má průběh funkce poddajnosti v závislosti na délce zatížení tvar exponenciály. To lze dokázat přepsáním vztahu $(t - t')^n = e^{n \cdot \ln(t - t')}$.

Pomocí Double Power Law se podařilo nafitovat mnoho experimentálních dat, časem se však ukázalo, že pro dlouhé doby zatížení dává takto vyjádřená funkce poddajnosti systematickou chybu – její odhad je vyšší, než experimentálně změřené hodnoty.

3.6 LOG DOUBLE POWER LAW

Významného vylepšení funkce poddajnosti dané rovnicí (3.16) bylo dosaženo až v roce 1985, kdy Zdeněk P. Bažant ve spolupráci s Jenn-Chuan Chernem vyvinuli Log Double Power Law. Tento model odstraňuje zmíněnou chybu špatných předpovědí pro dlouhé trvání zatížení. Cílem tohoto modelu bylo nahradit pro toto období exponenciální průběh funkce poddajnosti (při logaritmickeém časovém měřítku) průběhem s konstantním sklonem. Mezi těmito dvěma úseky by měl být plynulý přechod. Okamžik přechodu z jedné části do druhé by měl záviset na stáří betonu v okamžiku zatížení t' . Tj. čím starší beton je zatížen, tím později dojde k přechodu na lineární větev a naopak. Pro všechny okamžiky zatížení t' je ale sklon lineární části funkce poddajnosti stejný.

Předpis funkce poddajnosti podle Log Double Power Law je dán rovnicí

$$J(t, t') = \frac{1}{E_0} + \frac{\psi_0}{E_0} \ln(1 + \psi_1(t'^{-m} + \alpha)(t - t')^n) \quad (3.17)$$

Pokud nastavíme materiálové parametry ψ_0 a ψ_1 tak, aby platila rovnost $\psi_0 \psi_1 = \varphi_1$ a současně je délka zatížení krátká, je výše uvedená rovnice identická s Double Power Law. Naopak pro dlouhé doby zatížení dostává funkce poddajnosti tvar

$$J(t, t') = a(t') + b \cdot \ln(t - t') \quad (3.18)$$

který, znázorněn v logaritmickeém měřítku, je lineární se sklonem b . Ve výše uvedené rovnici jsme zavedli pomocné proměnné

$$a(t') = \frac{1 + \psi_0 \ln(1 + \psi_1(t'^{-m} + \alpha))}{E_0} \quad b = \frac{n \cdot \psi_0}{E_0} \quad (3.19)$$

Charakteristický čas, kdy dochází k přechodu z exponenciální části do lineární, je popsán podmínkou

$$\psi_1(t'^{-m} + \alpha)(t - t')^n = 1 \quad (3.20)$$

Kromě lepšího popisu experimentálních dat má tato metoda další dva příznivé důsledky. Prvním pozitivním důsledkem je snížení divergence křivek poddajnosti. Druhým přínosem je omezení záporných hodnot relaxační funkce pro dlouhé časy. Tato formulace Log Double Power Law posloužila i jako stavební kámen pro tzv. zkrácenou verzi modelu B3.

Pro úplnost uvádím i vzorec, který byl prezentován ve stejném roce (1985) a který podobným způsobem pomohl odstranit špatné odhady pro dlouhé doby zatížení betonu simulované modelem Double Power Law. Funkce poddajnosti je v něm definovaná pomocí své první časové derivace. Model nese název Triple Power Law for Creep Rate.

$$\dot{J}(t, t') = \frac{\psi_1}{E_0} \frac{t'^{-m} + \alpha}{(t - t')^{1-n} \left(\frac{t}{t'}\right)^n} \quad (3.21)$$

3.7 MODEL B3

V tomto oddílu bych chtěl představit materiálový model, který je jádrem této práce. Je jím model B3. Tento materiálový model je schopen popsat základní dotvarování (basic creep), dotvarování spojené s vysycháním (drying creep) a smršťování (shrinkage), popřípadě bobtnání (swelling). Velkou výhodou tohoto modelu je schopnost simulovat a předpovídat výše zmíněné jevy pouze ze znalosti pevnosti

betonu v tlaku a z poměru složek kameniva, vody a cementu (samozřejmě při znalosti působícího zatížení). V průběhu této kapitoly budou uvedeny vzorce s vysvětlujícím komentářem. V závěru tohoto oddílu jsou uvedeny srovnávací grafy, které na typickém případě porovnávají podíl jednotlivých složek deformace.

3.7.1 ROZSAH PLATNOSTI

Platnost modelu B3 se vztahuje pouze na betony normální pevnosti z portlandského cementu s minimální dobou ošetřování jeden den. Současně musí být splněny následující vztahy.

$$0.35 \leq w/c \leq 0.85 \quad (3.22)$$

$$2.5 \leq a/c \leq 13.5 \quad (3.23)$$

$$17 \text{ MPa} \leq \bar{f}_c \leq 70 \text{ MPa} \quad (3.24)$$

$$160 \text{ kg/m}^3 \leq c \leq 720 \text{ kg/m}^3 \quad (3.25)$$

V těchto vztazích je:

a ... hmotnostní obsah kameniva v betonové směsi

w ... hmotnostní obsah vody v betonové směsi

c ... hmotnostní obsah cementu v betonové směsi

\bar{f}_c ... průměrná válcová tlaková pevnost betonu ve stáří 28 dní

Kromě betonů klasického složení a normální pevnosti je model B3 schopen popsat i vysokopevnostní betony a malty, drátkobetony, betony s různými příměsemi apod.; koeficienty ($q_1 - q_5$) závislé na složení a pevnosti ale nesmí být určeny ze vzorce, nýbrž fitováním experimentálních měření.

Model B3 je oproti modelům z norem popisujícím dotvarování výrazně složitější. Proto jeho autor, Z. P. Bažant, rozdělil stavby do pěti kategorií podle náročnosti a významnosti.

- 1) Železobetonové nosníky, rámy a desky s rozponem do 20 m a výškou do 30 m. Patky z prostého betonu, opěrné a zárubní stěny.
- 2) Předepnuté nosníky a desky s rozpětím do 20 m. Rámy výškových budov do výšky 100 m.
- 3) Komerové nosníky středního rozpětí, zavěšené a obloukové mosty s rozpětím do 80 m. Sila a tanky.
- 4) Předepnuté komerové nosníky velkého rozpětí, zavěšené a obloukové mosty, mosty stavěné letmou montáží, velké přehrady, chladicí věže, velké střešní skořepiny, velmi vysoké budovy.
- 5) Mosty rekordního rozpětí, kontejnery v jaderných elektrárnách, velké stavby stojící mimo pevninu, velké chladicí věže, tenké skořepiny rekordního rozpětí, štíhlé obloukové mosty rekordního rozpětí.

Pro tyto kategorie uvádí autor modelu B3 následující doporučení: model B3 je nutné použít pro stavby z kategorie 4 a 5, je možné, nikoliv nutné jej použít také pro kategorii 3. Pro skupinu 2 a 3 lze použít normy (ACI 209). Časově upravený efektivní modul (AAEM – Age Adjusted Effective Modulus) je doporučeno použít pro budovy z kategorií obtížnosti 3 a 4. Pro kategorii 2 postačí efektivní modul (EM). U staveb z kategorie 5 se předpokládá výpočet nejrealističtějším

a nejpřesnějším možným způsobem, výpočtem založeným na obecném konstitutivním zákonu a sdružené úloze, ve které stav deformace a napětí záleží na řešení získaném z úlohy vedení tepla a vlhkosti. Analýza vlivu teploty a cyklického zatížení přírodními vlivy by měla být provedena pro úroveň 5 a alespoň přibližně pro úroveň 4. Kromě vlivu hydratačního tepla nemusí být tyto jevy zkoumány u nižších, méně náročných kategorií.

Vzhledem k tomu, že deformace způsobené smrštěním a dotvarováním vykazují velký statistický rozptyl, je pro stavby z úrovně obtížnosti 5 nutné řešit úlohy se zohledněním pravděpodobnosti (95% kvantil). Pro stavby z nižších kategorií postačuje posouzení na účinek vypočítaný podle vzorce:

$$X = \bar{X} \cdot (1 \pm 1.96 \omega) \quad (3.26)$$

kde

\bar{X} ... průměrná hodnota

ω ...0.23 pro výpočet dotvarování (basic creep i drying creep)

ω ...0.34 pro výpočet smrštění

ω představuje velikost variačního koeficientu chyby vzniklé při předpovědi dotvarování a smršťování. Pro srovnání uvádím tyto hodnoty i pro model podle normy ACI 209: basic creep 0.58, drying creep 0.45 a smrštění 0.55. Jak je z těchto čísel vidět, jsou předpovědi užitím modelu B3 výrazně přesnější.

3.7.2 VZORCE A VZTAHY

Jak bylo v předchozí kapitole vidět, model B3 je schopen popsat chování betonů nejružnějšího složení a to i tehdy, pokud to nebude složení standardní (vzorce (3.22)-(3.25)).

Celkové přetvoření je dáno součtem příspěvku od dotvarování popsaného funkcí poddajnosti $J(t, t')$, příspěvku od smrštění ε_{sh} a příspěvku od změny teploty ε_T . V průběhu této kapitoly rozebereme jednotlivé členy; začneme tím prvním – dotvarováním popsaným funkcí poddajnosti.

Funkce poddajnosti je dána součtem dílčích poddajností:

$$J(t, t') = q_1 + J_b(t, t') + J_d(t, t', t_0) \quad (3.27)$$

První člen na pravé straně popisuje okamžitou deformaci. Z experimentů bylo zjištěno, že tato hodnota je nezávislá na okamžiku zatížení betonu t' , a je možné ji pro jeden beton považovat za konstantu. Druhý člen popisuje basic creep a poslední drying creep. Připomínám, že basic creep popisuje dotvarování za předpokladu, že vlhkost v betonu a v okolním prostředí je stejná. Drying creep představuje podíl dotvarování související se změnou vlhkosti v okolním prostředí.

V případě *plné* verze modelu B3 je člen popisující **basic creep** přesně vyjádřen pomocí své první časové derivace:

$$\dot{J}_b(t, t') = \frac{n(q_2 \cdot t^{-m} + q_3)}{(t - t') + (t - t')^{1-n}} + \frac{q_4}{t} \quad (3.28)$$

V tomto i následujících vztazích jsou

$q_1 - q_5$... empirické koeficienty závislé na složení betonové směsi

n ... konstanta (typická hodnota 0.1)

m ... konstanta (typická hodnota 0.5)

t_0 ... stáří betonu v okamžiku odbednění (ukončení ošetřování) [den]

t' ... stáří betonu v okamžiku vnesení zatížení [den]

t ... aktuální stáří betonu [den]

Integrací (3.28) získáme vzorec pro basic creep

$$J_b(t, t') = q_2 Q(t, t') + q_3 \ln(1 + (t - t')^n) + q_4 \ln\left(\frac{t}{t'}\right) \quad (3.29)$$

Protože vztah (3.28) nelze integrovat přímo, je zavedena pomocná proměnná $Q(t, t')$, kterou lze určit přibližně ze vzorce (3.30) s chybou do 1%. Popřípadě ji lze vypočítat numerickou integrací nebo lineární interpolací z tabulky 1.

$$Q(t, t') = Q_f(t') \left[1 + \left(\frac{Q_f(t')}{Z_f(t, t')} \right)^{r(t')} \right]^{-\frac{1}{r(t')}} \quad (3.30)$$

kde

$$Q_f(t') = \left[0.086 \cdot (t')^{\frac{2}{9}} + 1.21 \cdot (t')^{\frac{4}{9}} \right]^{-1} \quad (3.31)$$

$$Z_f(t, t') = (t')^{-m} \ln(1 + (t - t')^n) \quad (3.32)$$

$$r(t') = 1.7 \cdot (t')^{0.12} + 8 \quad (3.33)$$

Konečně vztahy pro výpočet empirických parametrů popisujících basic creep

$$q_1 = 127 \cdot \bar{f}_c^{-0.5} \quad (3.34)$$

$$q_2 = 185.4 \cdot c^{0.5} \bar{f}_c^{-0.9} \quad (3.35)$$

$$q_3 = 0.29 \cdot q_2 \cdot \left(\frac{W}{c}\right)^4 \quad (3.36)$$

$$q_4 = 20.3 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{-0.7} \quad (3.37)$$

Vypočtené konstanty $q_1 - q_4$ jsou v jednotkách $10^{-6}/\text{MPa}$. Tyto vzorce byly získány na základě fitování velkého množství experimentálně zjištěných dat z dlouhodobých dotvarovacích zkoušek pro betony různého složení a pevnosti. Pokud dojde k realizaci simulované konstrukce, je dobré porovnat teoretické výpočty s experimentálním měřením a popřípadě parametry pozměnit tak, aby věrně popisovaly skutečnost. Jen tak je možné předpovědět chování konstrukce i v budoucnosti.

Drying creep a smrštění závisí kromě časů t_0 , t' a t především na relativní vlhkosti okolí h . Aby nebylo nutné řešit diferenciální difuzní rovnici popisující rozložení vlhkosti po průřezu v čase, uvádí model B3 možnost, jak se s tímto problémem jednoduše vypořádat. Zavádějí se konstanty a proměnné popisující tvar a tloušťku průřezu. Tím se velmi komplikovaná úloha podstatně zjednoduší; drying creep i smrštění bude nabývat v jednom okamžiku jen jedné průměrné hodnoty. Tyto zjednodušující vzorce lze ale bezpečně použít pouze pro stavby ze skupin 1-3 uvedené v předchozí kapitole.

Tabulka 1 Vypočtené hodnoty $Q(t, t')$. Převzato z [6]

	log t'								
log (t-t')	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
-2.0	0.4890	0.2750	0.1547	0.08677	0.04892	0.02751	0.01547	0.008699	0.004892
-1.5	0.5347	0.3009	0.1693	0.09519	0.05353	0.03010	0.01693	0.009519	0.005353
-1.0	0.5586	0.3284	0.1848	0.1040	0.05846	0.03288	0.01849	0.01040	0.005846
-0.5	0.6309	0.3571	0.2013	0.1133	0.06372	0.03583	0.02015	0.01133	0.006372
0.0	0.6754	0.3860	0.2185	0.1231	0.06929	0.03897	0.02192	0.01233	0.006931
0.5	0.7108	0.4125	0.2357	0.1334	0.07516	0.04229	0.02379	0.01338	0.007524
1.0	0.7352	0.4335	0.2514	0.1436	0.08123	0.04578	0.02576	0.01449	0.008149
1.5	0.7505	0.4480	0.2638	0.1529	0.08727	0.04397	0.02782	0.01566	0.008806
2.0	0.7597	0.4570	0.2724	0.1602	0.09276	0.05239	0.02994	0.01687	0.009494
2.5	0.7652	0.4624	0.2777	0.1652	0.09708	0.05616	0.03284	0.01812	0.01021
3.0	0.7684	0.4656	0.2808	0.1683	0.1000	0.05869	0.03393	0.01935	0.01094
3.5	0.7703	0.4675	0.2827	0.1702	0.1018	0.06041	0.03541	0.02045	0.01166
4.0	0.7714	0.4686	0.2838	0.1713	0.1029	0.06147	0.03641	0.02131	0.01230
4.5	0.7720	0.4692	0.2844	0.1719	0.1036	0.06210	0.03702	0.02190	0.01280
5.0	0.7724	0.4696	0.2848	0.1723	0.1038	0.06247	0.03739	0.02225	0.01314

Průměrné podélné smrštění lze zjednodušeně určit ze vztahu

$$\varepsilon_{sh}(t) = -\varepsilon_{sh}^{\infty} \cdot k_h \cdot S(t - t_0) \quad (3.38)$$

kde $\varepsilon_{sh}^{\infty}$ představuje konečnou hodnotu smrštění, k_h je součinitel závěsující na vlhkosti okolního prostředí a $S(\hat{t})$ je funkce určující průběh smrštění. Definovány jsou takto:

$$\varepsilon_{sh}^{\infty} = \varepsilon_s^{\infty} \cdot \frac{E(607)}{E(t_0 + \tau_{sh})} \quad (3.39)$$

kde $E(t)$ je modul pružnosti betonu ve stáří t :

$$E(t) = E_{28} \cdot \sqrt{\frac{t}{4 + 0.85t}} \quad (3.40)$$

$$E_{28} = 4.733 \sqrt{\frac{\bar{f}_c}{1 \text{ MPa}}} \quad [\text{GPa}] \quad (3.41)$$

E_{28} je konvenční modul pružnosti ve stáří 28 dnů. Takto je definován v normě ACI.

ε_s^{∞} závisí na způsobu ošetřování, typu cementu, pevnosti a složení betonu

$$\varepsilon_s^{\infty} = \alpha_1 \alpha_2 (0.019 \cdot w^{2.1} \bar{f}_c^{-0.28} + 270) \quad [10^{-6}] \quad (3.42)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1.00 \dots \text{cement typu I} \\ 0.85 \dots \text{cement typu II} \\ 1.10 \dots \text{cement typu III} \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0.75 \dots \text{ošetřování párou} \\ 1.20 \dots \text{ochrana proti vysychání} \\ 1.10 \dots \text{ošetřování ve vodě nebo 100\% vlhkosti} \end{cases} \quad (3.44)$$

τ_{sh} představuje tzv. *poločas smrštění* (\neq čas kdy smrštění dosáhne poloviny finální hodnoty). Závisí postupně na součiniteli k_t , jehož hodnota je ovlivněna pevností betonu a stářím betonu v okamžiku ukončení ošetřování, na tvarovém součiniteli k_s a na efektivní tloušťce průřezu D .

$$\tau_{sh} = k_t(k_s D)^2 \quad (3.45)$$

$$k_t = 8500 \cdot t_0^{-0.08} \bar{f}_c^{-0.25} \quad (3.46)$$

$$k_s = \begin{array}{l} 1.00 \dots \text{nekonečná deska} \\ 1.15 \dots \text{nekonečný válec} \\ 1.25 \dots \text{nekonečný čtvercový hranol} \\ 1.30 \dots \text{koule} \\ 1.55 \dots \text{krychle} \end{array} \quad (3.47)$$

$$D = 2v/s \quad (3.48)$$

V posledním vztahu je

v ... objem tělesa

s ... kontaktní plocha průřezu s okolním prostředím

Tím jsme vyhodnotili ε_{sh}^∞ . Nyní rozebereme další člen z výrazu (3.38), k_h . Jak index h napovídá, bude jistě záviset na relativní vlhkosti okolního prostředí.

$$k_h = \begin{array}{l} 1 - h^3 \dots \text{pro } h \leq 0.98 \\ -0.2 \dots \text{pro } h = 1 \end{array} \quad (3.49)$$

Poslední člen výrazu (3.38) určuje časový průběh smršťování:

$$S(\hat{t}) = \tanh \sqrt{\frac{\hat{t}}{\tau_{sh}}} \quad (3.50)$$

Nyní výraz popisující **drying creep**:

$$J_d(t_0, t, t') = q_5 \sqrt{e^{-g(t-t_0)} - e^{-g(t'-t_0)}} \quad (3.51)$$

Právě uvedený vztah platí za předpokladu $t \geq t' \geq t_0$. Vztahy potřebné k jeho vyhodnocení z větší části využívají výrazy použité pro výpočet smrštění.

$$g(\hat{t}) = 8(1 - (1 - h)S(\hat{t})) \quad (3.52)$$

$$q_5 = 7.75 \cdot 10^5 \bar{f}_c^{-1} (\varepsilon_{sh}^\infty)^{-0.6} \quad [10^{-6}/\text{MPa}] \quad (3.53)$$

Tímto jsou definovány všechny vztahy potřebné pro zjednodušený výpočet dotvarování a smršťování. Zjednodušení spočívalo v zavedení průměrných hodnot popisujících homogenně celý průřez. Pokud je skutečně potřeba analyzovat konstrukci zařazenou do kategorie 4 nebo 5, definované v předchozí kapitole, je možné použít konstitutivní vztahy pro materiálový bod definované v kapitole věnované solidifikační teorii a teorii mikropředpětí.

3.7.3 VÝPOČTY

V této části jsou uvedeny výsledky výpočtů, při nichž byl použit model B3 průměrující smrštění a drying creep po průřezu. Nechci zde zkoumat vliv všech parametrů, které ovlivňují chování betonu – to by bylo na další diplomovou práci – přesto bych rád uvedl čtyři krátké studie demonstrující funkčnost tohoto modelu.

- 1) Přetvoření betonu (elastická deformace + dotvarování + smrštění) v typické konstrukci (charakteristické zatížení).
- 2) Vliv délky ošetřování na průběh a amplitudu smrštění.
- 3) Vliv efektivní tloušťky průřezu na průběh smrštění.
- 4) Vliv vlhkosti okolního prostředí na průběh a amplitudu smrštění.

1) Přetvoření betonu (elastická deformace + dotvarování + smrštění) v typické konstrukci (charakteristické zatížení).

Byl uvažován beton typického složení a pevnosti, který je umístěn v běžné konstrukci. Účelem této studie je ukázat poměr složek jednotlivých součástí deformace tak, jak jsou určeny modelem B3.

Zadání úlohy:

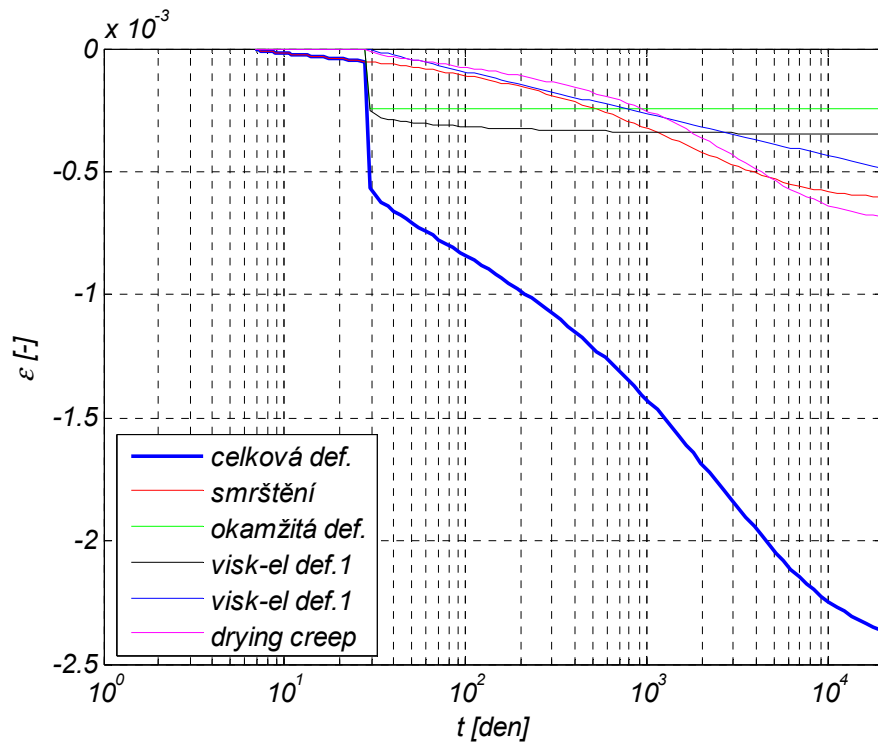
$t_0 = 7$ dní	$c = 400$ kg/m ³	$\alpha_1 = 1$	$k_s = 1$
$t' = 28$ dní	$w/c = 0.4$	$\alpha_2 = 1.2$	$D = 0.3$ m
$\bar{f}_c = 30$ MPa	$a/c = 4.5$	$h = 0.5$ (50%)	zatížení = $0.35 \bar{f}_c$ (tlak)

Na následujících dvou obrázcích je vykreslený průběh přetvoření v čase. Na prvním je okamžik zatížení ve stáří betonu 28 dní, na druhém 3 dny po ukončení ošetřování, tj. 10 dní. Na obrázcích je zakreslena celková deformace i dílčí deformace: deformace od smrštění (počátek v okamžiku ukončení ošetřování, kdy je zahájeno vysychání), basic creep a drying creep.

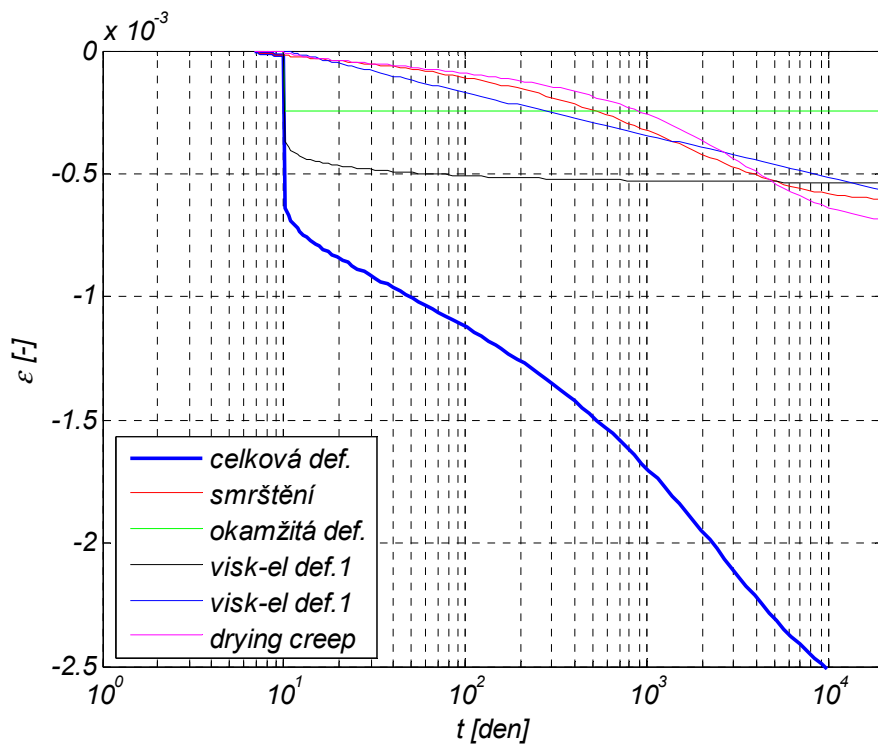
Basic creep je navíc rozdělen do tří podčástí. První část vystihuje okamžitou deformaci (v grafech zelenou barvou) a ve vzorci (3.29) je charakterizována členem q_1 . Jak je vidět, tato deformace se skutečně od okamžiku zatížení nemění. V případě odtížení by její hodnota okamžitě klesla na nulu.

Druhou ze tří částí je viskoelastický člen, který obsahuje konstanty q_2 a q_3 . V grafu je označen tenkou černou čarou. Dále v této práci bude tento člen nahrazen viskoelastickým stárnoucím Kelvinovým řetězcem. Deformace tohoto členu je plynulejší než v předcházejícím případě. Tento člen tvoří dominantní část deformace jen do cca 1000 dní, kdy je téměř dosaženo jeho konečné hodnoty. Na tomto členu je na první pohled vidět rozdíl způsobený stárnutím. Při zatížení o 18 dní dříve (místo v 28 dnech v 10 dnech) vzroste konečná hodnota deformace tohoto členu o téměř 50 %

Je to poslední logaritmická část obsahující konstantu q_4 , která dominuje přetvoření při dlouhodobém působení zatížení. V grafu je znázorněna tenkou modrou čarou.



Obrázek 3.4 Průběh deformace v čase. Stáří betonu při zatížení 28 dní.



Obrázek 3.5 Průběh deformace v čase. Stáří betonu při zatížení 10 dní.

2) Vliv délky ošetřování na průběh a amplitudu smrštění.

Zadání úlohy:

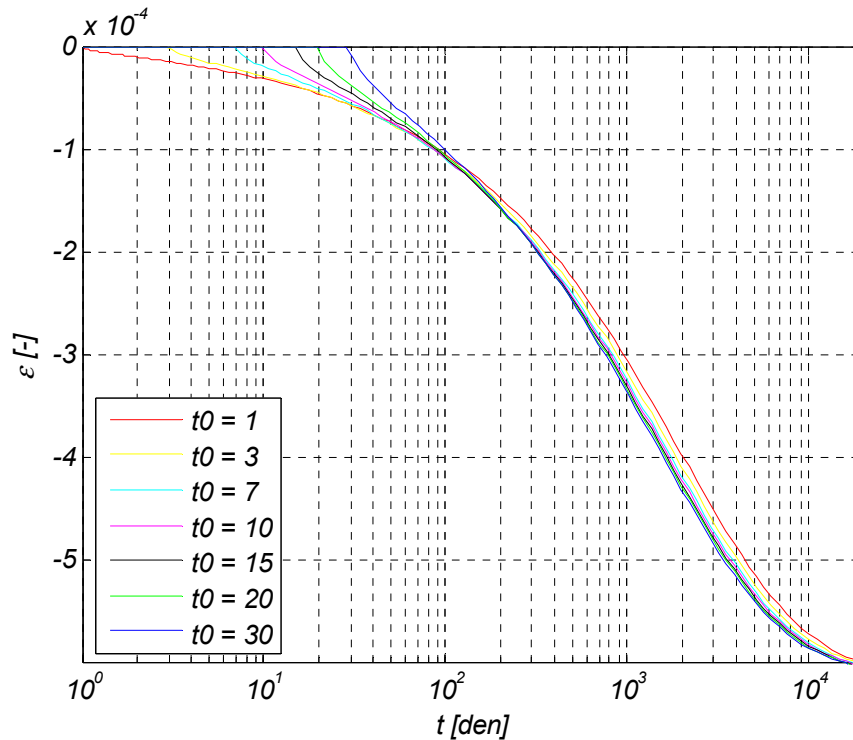
$$t_0 = 1 - 30 \text{ dní}$$
$$\alpha_1 = 1$$

$$h = 0.5 \text{ (50\%)}$$
$$\alpha_2 = 1.2$$

$$k_s = 1$$

$$D = 0.3 \text{ m}$$

Je použit beton stejného složení a průřezu jako v předchozím příkladu



Obrázek 3.6 Průběh smrštění v čase – závislost na délce ošetřování t_0 .

Závěr této úlohy je poněkud rozpačitý, z výše uvedeného grafu totiž vyplývá, že délka ošetřování má negativní vliv na smrštění (zvyšuje jeho finální hodnotu). Tak to alespoň model B3 interpretuje.

3) Vliv efektivní tloušťky průřezu na průběh smrštění.

Zadání úlohy:

$$t_0 = 3$$
$$\alpha_1 = 1$$

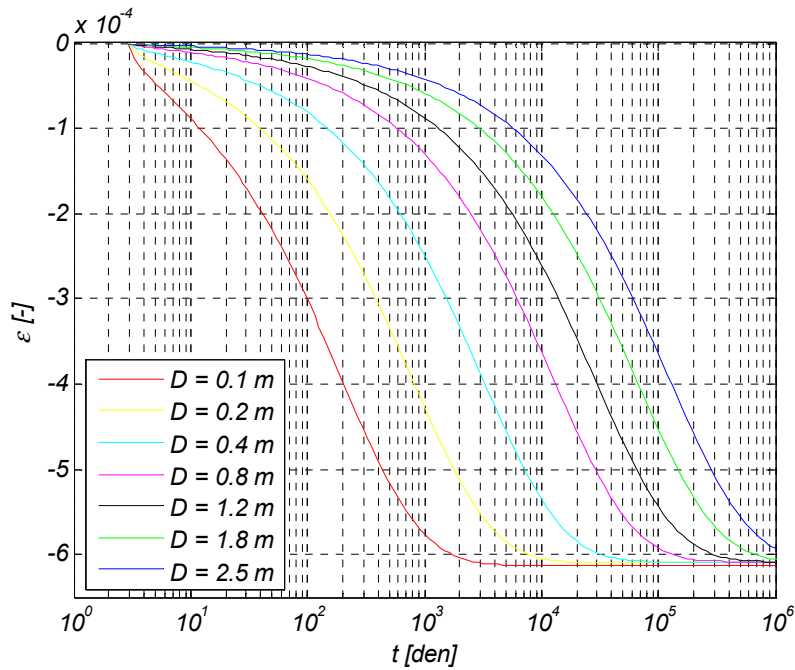
$$h = 0.5 \text{ (50\%)}$$
$$\alpha_2 = 1.2$$

$$k_s = 1$$

$$D = 0.1 - 2.5 \text{ m}$$

Opět stejný beton jako v předchozích úlohách.

Pořadí výsledných křivek na obrázku 3.7 je z názoru správné, hodnoty času, kdy dojde k dosažení finální hodnoty smrštění, jsou u některých křivek zarážející – pro tloušťku 2.5 m je této hodnoty dosaženo až někdy kolem času 10^6 dní, tedy přibližně 2750 let. Nicméně i prvky s efektivní tloušťkou 0.4 m vysychají velmi pomalu - $3 \cdot 10^4$ dní – tj. cca 80 let.



Obrázek 3.7 Průběh smrštění v čase – závislost na efektivní tloušťce D.

4) Vliv vlhkosti okolního prostředí na průběh a amplitudu smrštění.

Zadání úlohy:

$$t_0 = 3$$

$$\alpha_1 = 1$$

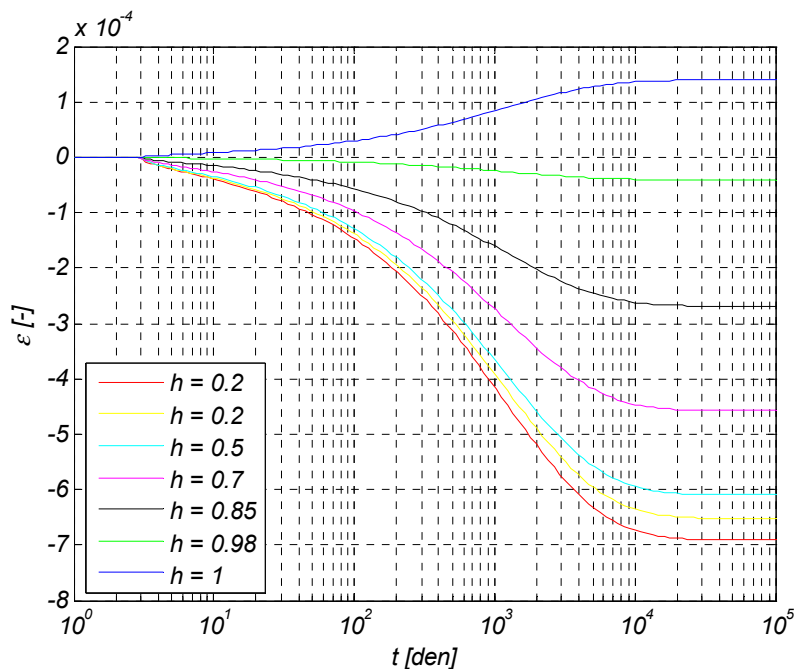
$$h = 0.5 \text{ (50\%)}$$

$$\alpha_2 = 1.2$$

$$k_s = 1$$

$$D = 0.25 \text{ m}$$

Opět stejný beton jako v předchozích úlohách.



Obrázek 3.8 Průběh smrštění v čase – závislost na okolní vlhkosti h.

Výsledky jsou opět očekávatelné, největšího smrštění je dosaženo při nejnižší vlhkosti. Při ponoření nebo 100% okolní vlhkosti dochází k tzv. bobtnání (swelling).

3.8 ZKRÁCENÁ VERZE MODELU B3

(Model B3 – Short Form)

Zkrácená verze modelu B3 prezentovaná v roce 2000 zjednodušuje stávající model B3 a stává se tak dosažitelnějším modelem, svým rozsahem podobným modelům ze současných norem pro navrhování betonových konstrukcí. Zkrácená verze modelu B3 by měla posloužit jako nástroj pro navrhování betonových konstrukcí s výjimkou vysoce citlivých konstrukcí na dotvarování, pro které by měla být použita nezkrácená verze modelu B3.

Jádro modelu tvoří Log Double Power Law uvedené v kapitole 3.6. Zjednodušení oproti plné verzi modelu B3 spočívá v odstranění parametrů závislých na složení betonu. Jediné dva faktory jsou pevnost betonu a vodní součinitel.

Funkce poddajnosti má tvar (3.27), liší se ale vyjádření jeho složek. Funkce popisující **základní dotvarování** má tvar

$$J_b(t, t') = q_1 \ln(1 + \psi(t'^{-m} + \alpha)(t - t')^n) \quad (3.54)$$

kde $m = 0.5$, $n = 0.1$ (stejně s B3), ale navíc $\alpha = 0.001$, $\psi = 0.3$.

Výpočet **smršťování** je podobný - platí vzorec (3.38), jen je změněn vztah pro poločas vysychání (3.45).

$$\tau_{sh} = 4.9D^2 \quad (3.55)$$

kde D má stejný význam jako v předchozí kapitole, v tomto vzorci je ale v cm.

Drying creep má podobný tvar jako v plné verzi – srovnání s (3.51)

$$J_d(t_0, t, t') = q_5 \sqrt{e^{-3H(t-t_0)} - e^{-3H(t'-t_0)}} \quad (3.56)$$

kde funkce H má podobný tvar jako měla funkce g (3.52). Význam funkce S zůstává stejný.

$$H(\hat{t}) = 1 - (1 - h)S(\hat{t}) \quad (3.57)$$

Materiálové parametry modelu B3SF:

$$q_0 = 2408 \bar{f}_c^{-0.5} \quad [1/\text{MPa}] \quad (3.58)$$

$$q_1 = 0.6 \cdot 10^6 / E_{28} \quad [1/\text{MPa}] \quad (3.59)$$

$$E_{28} = 4733 \sqrt{\frac{\bar{f}_c}{1 \text{MPa}}} \quad [\text{MPa}] \quad (3.60)$$

$$\varepsilon_{sh}^\infty = \alpha_1 \alpha_2 (0.019 \cdot w^{2.1} \bar{f}_c^{-0.28} + 270) \quad [10^{-6}] \quad (3.61)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1.00 \dots \text{cement typu I} \\ 0.85 \dots \text{cement typu II} \\ 1.10 \dots \text{cement typu III} \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0.75 \dots \text{ošetřování párou} \\ 1.00 \dots \text{ochrana proti vysychání} \\ 1.20 \dots \text{ošetřování ve vodě nebo 100\% vlhkosti} \end{cases} \quad (3.63)$$

$$q_5 = 6000 \bar{f}_c^{-1} \quad [1/\text{MPa}] \quad (3.64)$$

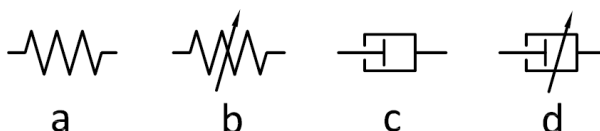
Přesnost předpovědí je horší než u plné verze modelu B3, nicméně je stále lepší než modely z norem (variační koeficient chyby: 26.9 základní dotvarování, 40.8 smršťování, 30.8 drying creep).

4. SIMULACE CHOVÁNÍ BETONU POUŽITÍM SOUSTAV REOLOGICKÝCH ČLÁNKŮ

Oproti předcházející kapitole, kde byla funkce poddajnosti popisující základní dotvarování definována jen svým předpisem bez dalšího vysvětlení, bude v této a následujících kapitolách charakter a původ těchto funkcí vysvětlen. Poslouží k tomu soustavy reologických článků.

4.1 ZÁKLADNÍ STAVEBNÍ PRVKY PRO POPIS VISKOELASTICITY

Typickým znakem všech přetvoření betonu je, že jeho velikost a průběh je závislý na čase. Jak je zřejmé, pro tento popis asi již nebude stačit nejjednodušší, ač ve stavební praxi nejčastěji používaný materiálový model: lineárně pružný materiál popsáný Hookeovým zákonem. Pro popis deformací zkoumaných v této práci si nicméně vystačíme s kombinací základních čtyř skladebných prvků. Jsou uvedeny na následujícím obrázku.



Obrázek 4.1 Základní reologické články.

Jako první je vyobrazena pružina. Charakteristikou pružiny je (pružinová) tuhost, která bývá nejčastěji označována k [N/m]. V této práci, stejně jako v celé kapitole mechaniky – viskoelasticitě je ale písmeno k nahrazeno písmenem E , Youngovým modulem pružnosti [Pa]. Pod písmenem „b“ se ukrývá pružina, jejíž tuhost je časově závislou veličinou. Lze přepokládat, že tuhost bude se stářím růst. Dalším symbolem je tlumič. Pro tlumič charakteristickou veličinou je viskozita η , s jednotkami [Pa·s]. Analogicky ke stárnoucí pružině je na posledním obrázku znázorněn stárnoucí tlumič.

Důvodem k výstižnosti popisu přetvárného chování betonu pomocí soustav složených z těchto čtyř základních prvků je předpoklad, že namáhání, kterému bude betonová konstrukce vystavena, nepřekročí 40-50 % jeho pevnosti, bude se tedy jednat o analýzu chování materiálu na úrovni zatížení odpovídajícího meznímu stavu použitelnosti. V opačném případě by bylo potřeba zařadit další články popisující nelineární dotvarování, plasticitu, lomovou mechaniku a mechaniku poškození.

Dalším zjednodušujícím předpokladem je platnost (Boltzmannova) principu superpozice. Ten platí, pokud průběh napětí $\sigma_1(t)$ vede na vývoj deformace $\varepsilon_1(t)$, průběh $\sigma_2(t)$ vede na $\varepsilon_2(t)$ a současně platí, že lineární kombinace součtu napětí $c_1\sigma_1(t) + c_2\sigma_2(t)$ vyvodí průběh deformace ve formě $c_1\varepsilon_1(t) + c_2\varepsilon_2(t)$.

Konstitutivní vztahy pro popis chování prvků z obrázku 9 v pořadí a, b, c, d.

$$\sigma_e(t) = E \varepsilon_e(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{\sigma}_e(t) = E(t) \dot{\varepsilon}_e(t) \quad (4.2)$$

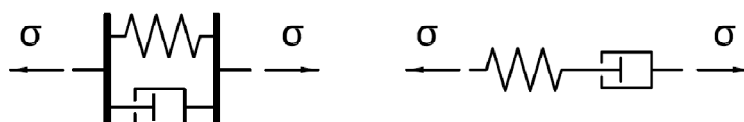
$$\sigma_v(t) = \eta \dot{\varepsilon}_v(t) \quad (4.3)$$

$$\sigma_v(t) = \eta(t) \dot{\varepsilon}_v(t) \quad (4.4)$$

Oproti klasickému Hookeovu zákonu nezávisí napětí v posledních třech rovnicích na absolutní hodnotě deformace, ale na její časové derivaci.

4.2 NEJEDNODUŠŠÍ SOUSTAVY

Kombinací pružiny a tlumiče vzniknou v závislosti na druhu zapojení dva nejjednodušší články - při paralelním zapojení články Kelvinův, v případě sériového zapojení články Maxwellův. Schémata jsou zobrazena na následujícím obrázku.



Obrázek 4.2 Kelvinův článek a Maxwellův článek.

V Kelvinově článku platí rovnost deformace pružiny a tlumiče, koncové napětí σ se mezi prvky rozloží. V Maxwellově článku naopak každý prvek přenáší stejné napětí, celková deformace vzniká součtem dílčích deformace pružiny a tlumiče. Z právě uvedených rovností můžeme odvodit rovnice popisující vývoj deformace a napětí v čase.

4.2.1 MAXWELLŮV MODEL, FUNKCE PODDAJNOSTI, RELAXAČNÍ FUNKCE

Začneme pro popis jednodušším článkem – Maxwellovým. V čase $t = 0$ je článek zatížen konstantním napětím $\hat{\sigma}$. Vydeme z rovnic (4.1) a (4.3) a dále z počáteční podmínky – tedy z nulové deformace tlumiče v čase $t = 0$. Dostáváme:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} + \frac{\hat{\sigma}}{\eta} \cdot t \quad (4.5)$$

Pro popis napětí ani nemusíme nic odvozovat, stačí psát:

$$\sigma(t) = \sigma_v(t) = \sigma_e(t) = \hat{\sigma} \quad (4.6)$$

Pro popis viskoelastického materiálu se velmi často používá tzv. *funkce poddajnosti* $J(t)$ a také *relaxační funkce* $R(t)$. Při popisu nestárnoucího materiálu se navíc přidávají dolní indexy „0“. Funkce poddajnosti jednoznačně charakterizuje časové chování materiálu. Vznikne vydělením vývoje deformace $\varepsilon(t)$ velikostí konstantního napětí $\hat{\sigma}$, při kterém bylo tohoto vývoje dosaženo. Vydělením rovnice (4.5) velikostí napětí získáváme:

$$J_0(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \cdot H(t) \quad (4.7)$$

kde $H(t)$ je tzv. Heavisideova funkce, která je pro záporné hodnoty jejího argumentu rovná nule a v ostatních případech rovná jedné. Význam této funkce je v právě uvedené rovnici klíčový; pokud by totiž do vzorce zahrnuta nebyla, byla by funkce poddajnosti nenulová pro časy dřívější, než je okamžik zatížení. Funkce poddajnosti je vzhledem k sériovému zapojení tlumiče a pružiny prostým součtem poddajností.

Podobně jako funkce poddajnosti představovala vývoj deformace pro jednotkové napětí, představuje relaxační funkce vývoj napětí, pokud je materiál zatížen jednotkovou poměrnou deformací.

4.2.2 KELVINŮV MODEL

Popis časového vývoje deformace Kelvinova modelu je řádově složitější; řešení je potřeba určit z lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a s konstantní pravou stranou. Tato diferenciální rovnice (4.9) vznikne dosazením vztahů (4.1) a (4.3) do rovnice (4.8) popisující rozdělení celkového napětí mezi tlumič a pružinu.

$$\sigma_e(t) + \sigma_v(t) = \sigma(t) = \hat{\sigma} \quad (4.8)$$

$$E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \hat{\sigma} \quad (4.9)$$

Využitím stejné počáteční podmínky $\varepsilon(0) = 0$ nacházíme řešení ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \quad (4.10)$$

Zavedením tzv. retardačního času

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (4.11)$$

můžeme právě odvozenou rovnici upravit na tvar

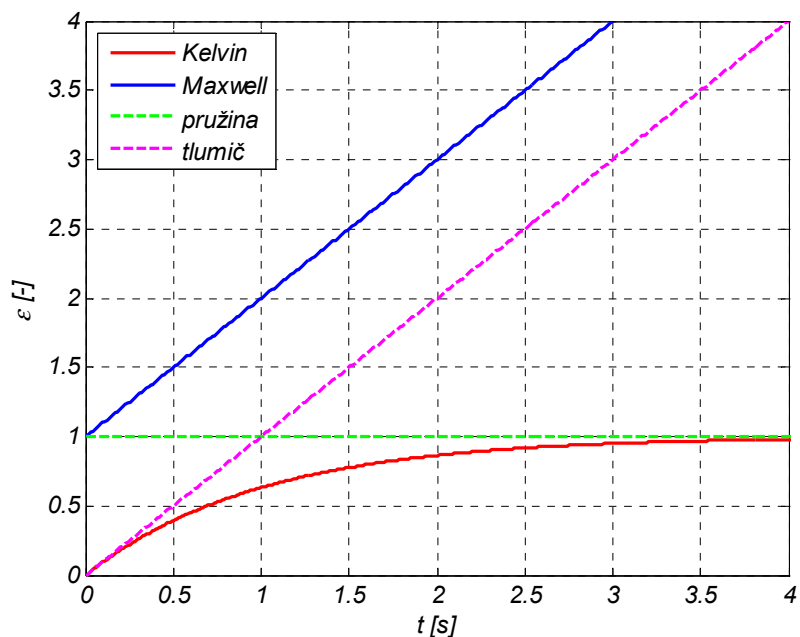
$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4.12)$$

Vydělením velikostí celkového napětí $\hat{\sigma}$ dostáváme relaxační funkci pro Kelvinův článek

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot H(t) \quad (4.13)$$

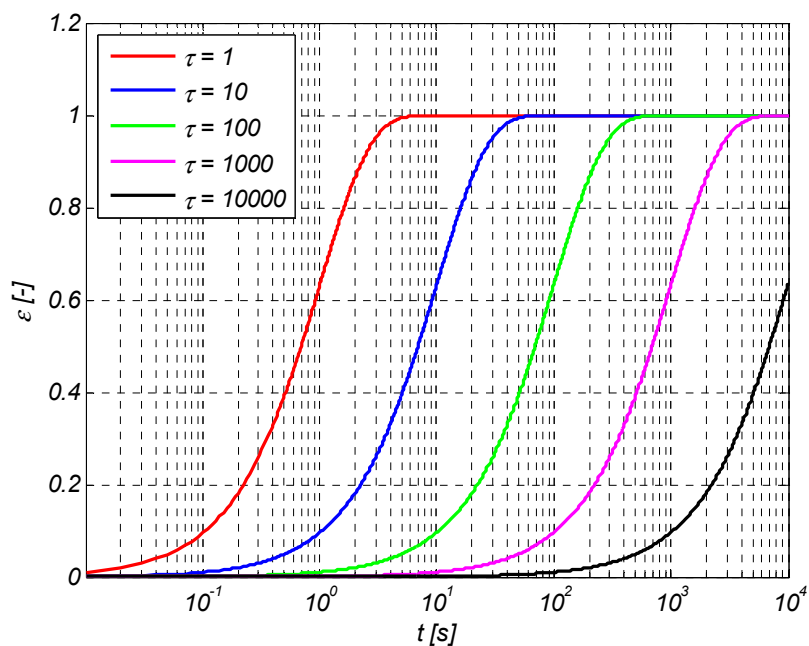
Na obrázku 4.3 je vykreslen vývoj deformace pro Kelvinův model, Maxwellův model, pružinu a tlumič. Retardační čas τ , modul pružnosti E a napětí σ byly zvoleny jednotkové. Obrázek věrně vystihuje charakter obou dvou článků: deformace Maxwellova modelu vznikne sloučením protažení pružiny ($1/E$) a deformace tlumiče. V čase $t = 0$ vzniká okamžitá elastická deformace rovná převrácené hodnotě modulu pružnosti E , deformace tlumiče je nulová. V čase $t = \tau = 1$ s, který je pro tento model označován jako čas *relaxační*, jsou si poddajnosti tlumiče a pružiny rovny. Při konstantním nenulovém zatížení je deformace popsána lineární funkcí se směrnici rovnou převrácené hodnotě viskozity. Deformace není shora omezena.

V případě Kelvinova článku je v čase $t = 0$ deformace rovna nule; napětí je zcela přenášeno tlumičem. V případě nenulové deformace by v tlumiči vzniklo nekonečné napětí. Zpočátku je vývoj deformace zcela řízen viskozitou tlumiče. S postupem času deformace roste a její rychlost klesá, zmenšuje se podíl napětí přenášeného tlumičem a roste ve prospěch pružiny. Křivka průběhu deformace se asymptoticky blíží k převrácené hodnotě modulu pružnosti. Procesy, které proběhnou za čas mnohem menší, než je charakteristický čas τ , nevyvolávají v Kelvinově článku téměř žádnou deformační odezvu; oproti tomu procesy delší než τ vyvolají deformaci, na jejíž hodnotě není téměř znát, že se nejedná o elastickou pružinu, ale o Kelvinův článek.



Obrázek 4.3 Vývoj deformace základních modelů v čase.

Ať už se jedná o Kelvinův nebo Maxwellův člunek – ani jeden není realisticky schopen vystihnout chování betonu. Maxwellův člunek sice je schopen modelovat okamžitou elastickou deformaci, při konstantním zatížení ale nedochází ke snižování rychlosti deformace. Snižování rychlosti deformace při konstantním zatížení sice Kelvinův člunek modeluje věrně, okamžité deformace ale u něj dosáhnout nelze. Oproti Maxwellovu članku má Kelvinův další nevýhodu – nemodeluje relaxaci napětí při konstantní deformaci.



Obrázek 4.4 Vývoj deformace Kelvinových članků s různými retardačními časy.

4.3 REOLOGICKÉ ŘETĚZCE

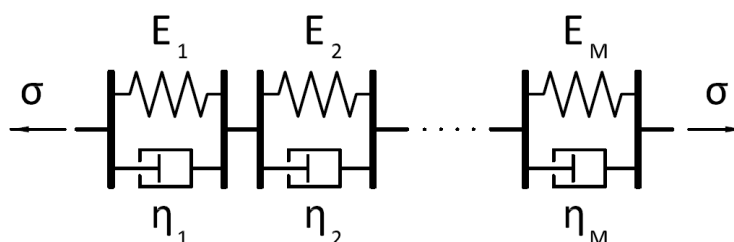
Samotný Kelvinův článek má ale jednu velkou nevýhodu, nedá se jím totiž dobře popsat přetvárné chování betonu v časech, které nejsou blízké τ .

Obrázek 4.4 ukazuje časový vývoj deformace Kelvinových článků s různými retardačními časy odstupňovanými v násobcích deseti a se stejným, jednotkovým modulem pružnosti. Časová škála je v semilogaritmickém měřítku. Jak je vidět, u všech článků se téměř celá deformace odehraje v čase blízkém retardačnímu. Proto se nabízí myšlenka – spojit jednotlivé články do řetězce tak, aby svým chováním postihly celé časové spektrum, které nás zajímá. Vhodné spojení článků s různými retardačními časy a moduly pružnosti navíc odstraní nevýhody zmíněné v posledním odstavci předchozí kapitoly.

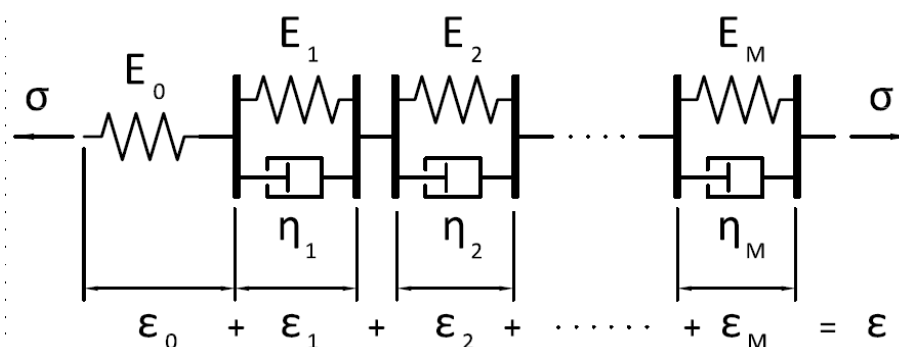
Maxwellův řetězec vznikne paralelním spojením Maxwellových článků. Ve zbytku diplomové práce je použit Kelvinův řetězec, proto zde vztahy pro Maxwellův řetězec neuvádím.

4.3.1 NESTÁRNOUCÍ KELVINŮV ŘETĚZEC

Námi použitý Kelvinův řetězec se skládá ze sériově zapojených Kelvinových jednotek, viz obrázek 4.5. Aby řetězec postihoval i okamžité deformace, je dobré odstranit z první Kelvinovy jednotky tlumič (nebo položit jeho viskozitu rovnou nule) a následně čistě z formálních důvodů označit tento článek indexem 0, obrázek 4.6. Retardační časy je dobré odstupňovat, nejlépe tak, aby s rostoucím indexem článku retardační čas rostl a byl desetinásobkem retardačního času předcházející jednotky.



Obrázek 4.5 Schéma nestárnoucího Kelvinova řetězce.



Obrázek 4.6 Schéma nestárnoucího Kelvinova řetězce doplněného o pružinu.

Funkce poddajnosti je součtem poddajností jednotlivých článků řetězce. Lze ji zapsat ve tvaru Dirichletovy řady:

$$J_0(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{E_{\mu}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\mu}}} \right) \right] \cdot H(t) \quad (4.14)$$

První člen na pravé straně rovnice představuje poddajnost elastické pružiny, zbytek závorky součet poddajností prvního až M-tého Kelvinova článku. Opět nesmíme zapomenout do vzorce zahrnout Heavisideovu funkci.

Nestárnoucí Kelvinův model lze použít pouze pro popis nestárnoucího materiálu; to znamená materiálu, u kterého průběh deformace nezáleží na okamžiku vnesení zatížení. Beton je ale stárnoucí materiál, proto je tento řetězec nutné dále modifikovat.

4.3.2 STÁRNOUCÍ KELVINŮV ŘETĚZEC

Stárnoucí Kelvinův řetězec je tvořen články, jejichž charakteristiky jsou funkcí času. Nyní je dobré se vrátit na začátek této kapitoly a objasnit vztah (4.2). Demonstrace se provede nejlépe tak, že se zamyslíme, proč nelze použít vztah (4.1), ve kterém by se konstantní modul pružnosti nahradil časově závislým (rostoucím). Pokud by se totiž vzorek zatížil konstantní deformací, vzniklé napětí by v průběhu času rostlo, což je nepřijatelné. Proto je potřeba rovnici zapsat v přírůstkové formě.

Než se dostaneme k řešení funkce poddajnosti řetězce, je potřeba vyřešit funkci poddajnosti jednoho článku. Její řešení vychází z rovnice (4.8), kterou je z výše uvedených důvodů nutné zderivovat. Dostáváme tak

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}_e(t) + \dot{\sigma}_v(t) \quad (4.15)$$

Po dosazení vztahu (4.2) a zderivovaného vztahu (4.4) získáme vztah

$$\dot{\sigma}(t) = E(t) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{d}{dt}(\eta(t) \cdot \dot{\varepsilon}(t)) \quad (4.16)$$

který lze dále upravit:

$$\dot{\sigma}(t) = E(t)\dot{\varepsilon}(t) + \dot{\eta}(t) \cdot \dot{\varepsilon}(t) + \eta(t) \cdot \ddot{\varepsilon}(t) \quad (4.17)$$

Po zavedení substituce:

$$D(t) = E(t) + \dot{\eta}(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{\sigma}(t) = D(t)\dot{\varepsilon}(t) + \eta(t) \cdot \ddot{\varepsilon}(t) \quad (4.19)$$

Při dotvarovací zkoušce je vzorek zatížen konstantním napětím, tedy jeho derivace je nulová. Řešení rovnice (4.19) se zjednoduší, když se nám podaří ji upravit na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Vydělením celé rovnice výrazem $D(t)$ a současným předpokládáním, že poměr $\frac{\eta(t)}{D(t)} = \tau = \text{konst}$, dostaneme

$$\dot{\varepsilon}(t) + \tau \cdot \ddot{\varepsilon}(t) = 0 \quad (4.20)$$

ε hledáme ve tvaru

$$\varepsilon(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.21)$$

Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek; pokud aplikujeme napětí $\hat{\sigma}$ v čase t' , musí platit $\varepsilon(t') = 0$ (pokud by se článek náhle deformoval, vzniklo by v tlumiči nekonečně velké napětí). Tato podmínka rovnou implikuje podmínku druhou – vzhledem k nulové deformaci nemůže být

v pružině Kelvinova článku žádné napětí; veškeré napětí tedy musí přenášet tlumič. Po dosazení $\eta(t) = \tau \cdot D(t)$ do vztahu (4.3) dostáváme druhou počáteční podmínku: $\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\tau D(t')}$. Po dosazení počátečních podmínek získáváme partikulární řešení.

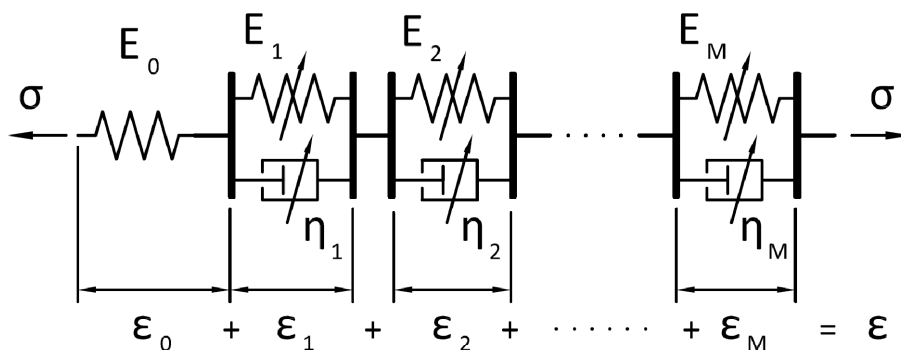
$$\varepsilon(t) = \hat{\sigma} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau}}}{D(t')} \quad (4.22)$$

Vydělením $\hat{\sigma}$ a vynásobením Heavisideovou funkcí získáváme funkci poddajnosti. Tentokrát už bez indexu „0“ a záviselí na dvou parametrech: okamžiku vnesení zatížení t a délce zatížení $t - t'$.

$$J(t, t') = \frac{1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau}}}{D(t')} \cdot H(t - t') \quad (4.23)$$

Odstraněním tlumiče z první Kelvinovy jednotky (index „0“) a sumací dílčích poddajností obdržíme funkci poddajnosti stárnoucího Kelvinova řetězce.

$$J_0(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{D(t')} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_\mu}} \right) \right] \cdot H(t - t') \quad (4.24)$$



Obrázek 4.7 Schéma stárnoucího Kelvinova řetězce doplněného o pružinu.

Experimentální měření ukazují, že asymptotický modul v okamžiku zatížení není funkcí času (nestárne). Proto nultý článek řetězce tvoří „obyčejná“ pružina.

Zkušené oko na první pohled pozná nedostatek tohoto řetězce. Je jím závislost tuhosti D na okamžiku zatížení t' . Při implementaci stárnoucího Kelvinova řetězce je v každém časovém kroku jistou numerickou metodou nutné tyto tuhosti vyhodnotit. Při vysokém počtu výpočetních kroků a dlouhém časovém období (vedoucího k potřebě do řetězu zahrnout větší počet Kelvinových jednotek) pak drasticky stoupá počet operací a tím i výpočetní čas. Tento problém odstraňuje modifikovaný Kelvinův stárnoucí řetězec – řetězec *solidifikující*.

4.3.3 SOLIDIFIKUJÍCÍ KELVINŮV ŘETĚZEC

Solidifikační teorie předpokládá (podrobnější popis solidifikační teorie je uveden v kapitole 7), že změny v reologickém chování způsobeném stárnutím materiálu lze popsat pomocí *solidifikace* nestárnoucích součástí. V případě betonu solidifikace popisuje časový vývoj objemu cementového gelu, který vniká hydratací cementu. Tento objem roste z nulové hodnoty v čase $t = 0$ až do finální

hodnoty v čase $t = \infty$. Vývoj relativního objemu cementového gelu v čase vůči své finální hodnotě je popsán funkcí $v(t)$.

V předchozí kapitole jsme nepřírozeně předpokládali, že poměr $\frac{\eta(t)}{D(t)}$ zůstává v čase konstantní. Pakliže $\eta(t)$ i $E(t)$ lineárně závisí na $v(t)$, je v této kapitole důvod pro konstantní poměr $\frac{\eta(t)}{E(t)}$ zřejmý. Funkci modulu pružnosti $E(t)$ i viskozity $\eta(t)$ můžeme zapsat pomocí konečných hodnot:

$$E(t) = E^\infty \cdot v(t) \quad (4.25)$$

$$\eta(t) = \eta^\infty \cdot v(t) \quad (4.26)$$

Dosazením do konstitutivních vztahů (4.2) a (4.4) získáme popis napětí v závislosti na $v(t)$

$$\dot{\sigma}_e(t) = E^\infty \cdot v(t) \dot{\varepsilon}(t) \quad (4.27)$$

$$\sigma_v(t) = \eta^\infty \cdot v(t) \dot{\varepsilon}(t) \quad (4.28)$$

Napětí v pružině můžeme navíc vyjádřit pomocí napětí v tlumiči

$$\dot{\sigma}_e(t) = \frac{E^\infty \sigma_v(t)}{\eta^\infty} \quad (4.29)$$

Odvození funkce poddajnosti je založeno, podobně jako v minulém případě, na rovnici (4.15) a předpokladu konstantního napětí. Pokud do ní dosadíme vztah (4.29), získáme lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou.

$$\frac{\sigma_v(t)}{\tau} + \dot{\sigma}_v(t) = 0 \quad (4.30)$$

Uplatněním počáteční podmínky pro čas vnesení zatížení $t = t'$: $\sigma_v(t') = \hat{\sigma}$ získáme partikulární řešení

$$\sigma_v(t) = \hat{\sigma} \cdot e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \quad (4.31)$$

Relativní deformaci $\varepsilon(t)$ získáme integrací vztahu $\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_v(t)}{\eta(t)} = \frac{\hat{\sigma} \cdot e^{-\frac{t-t'}{\tau}}}{E^\infty \cdot \tau \cdot v(t)}$

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E^\infty \cdot \tau} \cdot \int_{t'}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} v(t) \quad (4.32)$$

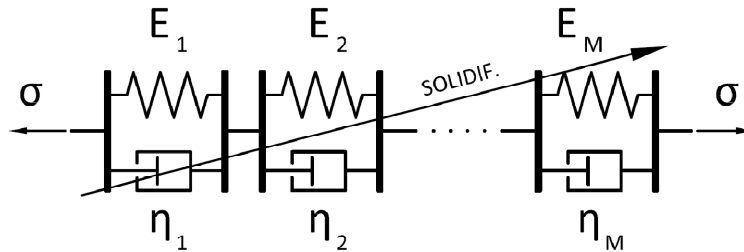
Funkci poddajnosti pro jeden Kelvinův článek v tomto případě nejsme schopni vyjádřit přímo. Musíme se smířit s předpisem pro její první časovou derivaci.

$$\dot{j}(t, t') = \frac{1}{E^\infty \cdot \tau} \cdot \frac{e^{-\frac{t-t'}{\tau}}}{v(t)} \quad (4.33)$$

Časová derivace funkce poddajnosti pro solidifikující Kelvinův řetězec vznikne součtem $\dot{j}(t, t')$ všech článků. Ač jsou parametry článků E^∞ a η^∞ různé, funkce popisující solidifikovaný objem

je pro všechny stejná. To se snaží vyjádřit obrázek 4.8. Časová derivace funkce poddajnosti je dána předpisem:

$$j(t, t') = \frac{1}{v(t)} \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{e^{-\frac{t-t'}{\tau_{\mu}}}}{E_{\mu}^{\infty} \tau_{\mu}} \quad (4.34)$$



Obrázek 4.8 Schéma solidifikujícího Kelvinova řetězce.

Poslední rovnici můžeme ještě upravit zavedením tzv. nestárnoucí funkce poddajnosti $\Phi(t - t')$, jejíž derivací získáme předchozí rovnici vyhodnocenou pro čas $t = \infty$, tedy s plně solidifikovaným materiálem. Funkce Φ je nestárnoucí, proto její hodnota závisí pouze na rozdílu aktuálního času a času, kdy bylo aplikováno zatížení, nikoliv na obou hodnotách.

$$\Phi(t - t') = \sum_{\mu=1}^M \frac{1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_{\mu}}}}{E_{\mu}^{\infty}} \cdot H(t - t') \quad (4.35)$$

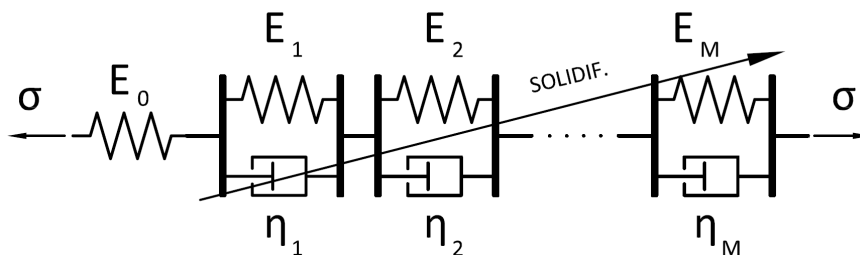
Dosažením zpět do (4.34):

$$j(t, t') = \frac{\dot{\Phi}(t - t')}{v(t)} \quad (4.36)$$

Integrací podle času t

$$J(t, t') = \frac{1}{E_0} + \int_{t'}^t \frac{\Phi(s - t')}{v(s)} ds \quad (4.37)$$

Jako integrační konstantu jsme zvolili poddajnost elastické pružiny v čase $t = t'$, kde $E_0(t')$ je tzv. *asymptotický modul* závisící jen na okamžiku aplikace zatížení t' . Z experimentů ale vyplývá, že tato hodnota je na čase nezávislá, a proto jsme ji nahradili konstantou E_0 .



Obrázek 4.9 Schéma solidifikujícího Kelvinova řetězce doplněného o nesolidifikující pružinu.

Solidifikující Kelvinův řetězec doplněný o nestárnoucí tlumič již věrně popisuje přetvárné chování betonu (basic creep), proto tvoří jádro nové implementace modelu B3, která je hlavním předmětem této práce.

5. NUMERICKÉ METODY VÝPOČTU DOTVAROVÁNÍ PRO KELVINŮV ČLÁNEK

V předcházející kapitole byly odvozeny funkce poddajnosti různých soustav reologických článků. Při implementaci do programu využívajícího metodu konečných prvků si ale s tímto analytickým předpisem nevystačíme; pro výpočet je potřeba vyvinout numerické algoritmy. V první polovině této kapitoly jsou prezentovány algoritmy pro výpočet odezvy viskoelastického materiálu charakterizovaného jedním Kelvinovým článkem na zatížení. V zbylé části jsou porovnány výsledky získané implementací těchto algoritmů. Jako vztažná rovina pro objektivní hodnocení bylo odvozeno přesné analytické řešení.

5.1 TEORETICKÉ ODVOZENÍ NUMERICKÝCH ALGORITMŮ

V této části jsou odvozeny tři typy numerických algoritmů pro výpočet odezvy nestárnoucího Kelvinova článku na zatížení s předepsanou historií napětí. Odvozen byl algoritmus založený na integraci časově diskretizované úlohy, dále pak algoritmy odvozené přímo z diferenciální rovnice pro Kelvinův článek: algoritmy využívající zobecněné lichoběžníkové pravidlo a exponenciální algoritmy.

5.1.1 ALGORITMUS ZALOŽENÝ NA INTEGRACI ČASOVĚ DISKRETIZOVANÉ ÚLOHY

Tomuto algoritmu nebude věnována příliš velká pozornost. Důvodem je vysoká výpočetní náročnost a neefektivnost. Algoritmy uvedené v následujících dvou kapitolách tuto metodu překonávají. Nicméně je dobré se o tomto algoritmu alespoň stručně zmínit.

Důvodem k použití tohoto algoritmu může být analogie s přesným analytickým řešením, kdy neznámou deformaci vypočteme z rovnice

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, t') d\sigma(t') \quad (5.1)$$

Toho jsme schopni pouze v některých případech, kdy je předepsána jednoduchá historie zatížení a funkce poddajnosti. Abychom mohli vypočítat deformaci i pro komplexnější historie napětí a funkce poddajnosti, rozdělíme časovou škálu na diskrétní intervaly. Pokud označíme $\varepsilon_k = \varepsilon(t_k)$, $\Delta\sigma_i = \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)$ a $J_{k,i} = J\left(t_k, \frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right)$, můžeme výše uvedenou rovnici přepsat:

$$\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{k-1} J_{k,i} \cdot \Delta\sigma_i \quad (5.2)$$

Vyjádříme přírůstek deformace v závislosti na změně funkce poddajnosti v jednom časovém kroku, $\Delta J_{k,i} = J_{k+1,i} - J_{k,i}$:

$$\Delta\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = J_{k+1,k} \cdot \Delta\sigma_k + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta J_{k,i} \cdot \Delta\sigma_i \quad (5.3)$$

První část tohoto výrazu popisuje okamžitou změnu deformace, která nastala během posledního kroku. Druhý člen se sumou představuje dotvarování – posčítávají se přírůstky deformace

způsobené změnami napětí v jednotlivých časových krocích přes celou historii zatížení. Je to tento člen, který způsobuje výpočetní náročnost.

5.1.2 ALGORITMY VYUŽÍVAJÍCÍ ZOBECNĚNÉ LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Algoritmy uvedené v této kapitole se svým charakterem zcela odlišují od postupu, který byl uveden výše. Stejně jako v předcházejícím oddílu, i nyní se úloha rozdělí na určitý počet časových intervalů, které budou vhodně popisovat charakter zatížení. (Předpokládáme, že historie zatížení je známá a neznámou veličinou je průběh napětí v čase.)

Co ale tyto postupy odlišuje, je způsob, jakým se vypočítávají hodnoty deformace v jednotlivých krocích. V předchozím algoritmu k tomu bylo potřeba znát celou historii zatížení konstrukce, nyní nám k výpočtu jednoho kroku budou postačovat (v závislosti na nastavení parametrů) hodnoty napětí a deformace v předchozím kroku a hodnota napětí v kroku následujícím.

Řešení spočívá v integraci diferenciální rovnice popisující chování Kelvinova článku (5.4). Předpokládáme, že modul pružnosti ani viskozita se v čase nemění.

$$E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t) \quad (5.4)$$

Z rovnice vyjádříme $\dot{\varepsilon}$ a poměr η/E nahradíme tzv. retardačním časem τ [s].

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\sigma(t)}{E} - \varepsilon(t) \right) \quad (5.5)$$

Integrací přes časový krok od t_k do t_{k+1} obdržíme

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\sigma(t)}{E} - \varepsilon(t) \right) dt \quad (5.6)$$

kde $\varepsilon_k = \varepsilon(t_k)$ je deformace na počátku kroku, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon(t_{k+1})$ je deformace na konci kroku.

Výpočet používá v závislosti na nastavení buď jednu z krajních hodnot napětí, nebo obě hodnoty napětí v jistém poměru. Toho docílíme aproximací rovnice (5.6) tzv. lichoběžníkovým pravidlem a zavedením vah pro krajní hodnoty. Pro počátek intervalu v čase t_k nabývá váha hodnoty $(1-\alpha)$ a pro koncový bod t_{k+1} hodnoty α , kde α je parametr v rozmezí $(0; 1)$. Po této úpravě dostaneme:

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = \frac{\Delta t_k}{\tau} \left(\left(\frac{\sigma_k}{E} - \varepsilon_k \right) (1 - \alpha) + \left(\frac{\sigma_{k+1}}{E} - \varepsilon_{k+1} \right) \cdot \alpha \right) \quad (5.7)$$

kde $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ je délka kroku, $\sigma_k = \sigma(t_k)$ a $\sigma_{k+1} = \sigma(t_{k+1})$. Z této rovnice vyjádříme deformaci na konci kroku.

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \frac{\tau - (1 - \alpha) \cdot \Delta t_k}{\tau + \alpha \Delta t_k} + \sigma_k \frac{(1 - \alpha) \cdot \Delta t_k}{(\tau + \alpha \Delta t_k) \cdot E} + \sigma_{k+1} \frac{\alpha \cdot \Delta t_k}{(\tau + \alpha \Delta t_k) \cdot E} \quad (5.8)$$

Pro hodnotu parametru $\alpha = 0$ dostáváme tzv. *Eulerovu metodu*, u které hodnota v koncovém kroku závisí jen na počáteční funkční hodnotě ε_k , délce kroku Δt_k a derivaci v čase t_k . Výsledný vztah pro Eulerovu metodu je popsán vztahem (5.9).

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{\Delta t_k}{\tau} \left(\frac{\sigma_k}{E} - \varepsilon_k \right) \quad (5.9)$$

Při hodnotě $\alpha = 1$ dostáváme tzv. zpětnou Eulerovu metodu:

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{\tau + \Delta t_k} \left(\varepsilon_k \tau + \sigma_{k+1} \left(\frac{\Delta t_k}{E} \right) \right) \quad (5.10)$$

Pokud je $\alpha = 0.5$, vede rovnice (5.8) na tzv. lichoběžníkové pravidlo (Standard Trapezoidal Rule):

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \cdot \frac{\tau - 0.5\Delta t_k}{\tau + 0.5\Delta t_k} + \frac{\Delta t_k}{E \cdot (2\tau + \Delta t_k)} \cdot (\sigma_k + \sigma_{k+1}) \quad (5.11)$$

Numerická stabilita závisí v obecném případě (5.8) na faktoru, kterým je násobena předchozí hodnota relativní deformace ε_k , tj. $\frac{\tau - (1-\alpha)\Delta t_k}{\tau + \alpha\Delta t_k}$. V případě, že je tento výraz menší než jedna, je úloha stabilní; chyba, která vznikne při výpočtu jednoho kroku, je v průběhu dalších intervalů násobena číslem menším než jedna a v průběhu výpočtu se zcela utlumí. Pokud je ale větší, dojde k zesílení chyby a úloha se stává nestabilní. Navíc, pokud je hodnota násobící ε_k záporná, dochází k oscilacím okolo správné hodnoty (v každém kroku se mění znaménko chyby). Aby byla v obecném řešení (5.8) úloha stabilní, musí platit podmínka:

$$|\tau - (1 - \alpha) \cdot \Delta t_k| \leq \tau + \alpha \Delta t_k \quad (5.12)$$

kterou lze zjednodušit na výraz:

$$(1 - 2\alpha) \cdot \Delta t_k \leq 2\tau \quad (5.13)$$

Metoda je nepodmíněně stabilní pro $\alpha \geq 0.5$ a nestabilní pro $\alpha < 0.5$. Pro lichoběžníkové pravidlo i pro zpětnou Eulerovu metodu je tedy metoda nepodmíněně stabilní. Pro Eulerovu metodu však musí být splněna podmínka poměru $\Delta t_k/\tau \leq 2$.

Tento poznatek nás pro lichoběžníkové pravidlo a pro zpětnou Eulerovu metodu opravňuje použít pro časy blízké okamžiku zatížení, kdy dochází k velkým změnám, jemnější dělení a v průběhu výpočtu délku kroků prodlužovat, aniž by hrozila ztráta numerické stability. Takového rozdělení časů je možné docílit například jednoduchou geometrickou posloupností

$$t_{k+1} = q \cdot t_k \quad (5.14)$$

kde parametr q je dobré volit mírně větší než jedna, např. 1.1. Další možností je vytvoření časové škály tak, aby v logaritmickém měřítku byly časové intervaly stejně dlouhé.

5.1.3 EXPONENCIÁLNÍ ALGORITMY

V této části jsou uvedeny postupy výpočtu podle *prvního* a *druhého exponenciálního* algoritmu. Oba algoritmy mají společného jmenovatele; v obou případech dojde v každém kroku k přesnému analytickému vyjádření řešení diferenciální rovnice vzniklé drobnou úpravou rovnice (5.4). Hodnota vypočtené relativní deformace na konci kroku je použita jako počáteční podmínka pro následující krok.

Exponenciální algoritmus 1. řádu

(First-Order Exponential Algorithm)

Podobně jako v předchozí kapitole použijeme váhy k vyjádření aproximovaného průběhu napětí v rámci jednoho časového kroku: $\sigma_{k+\alpha} = (1 - \alpha) \cdot \sigma_k + \alpha \cdot \sigma_{k+1}$. Pokud nahradíme pravou stranu rovnice (5.4) tímto konstantním napětím a rovnici mírně upravíme, obdržíme:

$$\varepsilon(t) + \tau \cdot \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_{k+\alpha}}{E} \quad (5.15)$$

K této diferenciální rovnici existuje obecné řešení ve tvaru:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{k+\alpha}}{E} + C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.16)$$

Jako počáteční podmínka nám poslouží hodnota deformace vypočtená na konci předchozího časového kroku: $\varepsilon(t_k) = \varepsilon_k$. Po dosazení obecného řešení do diferenciální rovnice a po uplatnění počáteční podmínky dostáváme partikulární řešení:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{k+\alpha}}{E} + \left(\varepsilon_k - \frac{\sigma_{k+\alpha}}{E} \right) \cdot e^{-\frac{t-t_k}{\tau}} \quad (5.17)$$

Pokud zavedeme pomocnou proměnnou,

$$\beta_k = e^{-\frac{t_{k+1}-t_k}{\tau}} = e^{-\frac{\Delta t_k}{\tau}} \quad (5.18)$$

zjednoduší se vyjádření hodnoty deformace na konci kroku, i hodnoty přírůstku deformace.

$$\varepsilon_{k+1} = \beta_k \cdot \varepsilon_k + (1 - \beta_k) \cdot \left(\frac{\sigma_{k+\alpha}}{E} \right) \quad (5.19)$$

$$\Delta \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = (1 - \beta_k) \cdot \left(\frac{\sigma_{k+\alpha}}{E} - \varepsilon_k \right) \quad (5.20)$$

Exponenciální algoritmus 2. řádu

(Second-Order Exponential Algorithm)

Exponenciální algoritmus druhého řádu ideově navazuje na exponenciální algoritmus prvního řádu a dále jej rozvíjí. Řešení vychází opět z diferenciální rovnice (5.4), která má po časové derivaci tvar:

$$E \dot{\varepsilon}(t) + \eta \ddot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t) \quad (5.21)$$

Opět se předpokládá, že viskozita ani modul pružnosti nejsou časově závislé proměnné. Zavedením proměnné vyjadřující napětí přenášené viskózním tlumičem,

$$\sigma_v(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t) \quad (5.22)$$

a dosazením tohoto vztahu do (5.21), dostáváme s využitím (4.11) diferenciální rovnici (5.23), ve které již není působící napětí v rámci jednoho kroku aproximováno konstantou jako u předchozího algoritmu, nýbrž lineárně.

$$\frac{\sigma_v(t)}{\tau} + \dot{\sigma}_v(t) = \frac{\Delta\sigma_k}{\Delta t_k} \quad (5.23)$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici s konstantní pravou stranou. Po zavedení počáteční podmínky $\sigma_v(t_k) = \sigma_{vk}$ dostáváme partikulární řešení podobným postupem jako u prvního exponenciálního algoritmu.

$$\sigma_v(t) = \tau \cdot \frac{\Delta\sigma_k}{\Delta t_k} + \left(\sigma_{vk} - \tau \cdot \frac{\Delta\sigma_k}{\Delta t_k} \right) \cdot e^{-\frac{t-t_k}{\tau}} \quad (5.24)$$

Abychom získali deformaci, je potřeba zintegrovat výraz

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{\varepsilon}(t) dt = \varepsilon(t_k) + \int_{t_k}^t \frac{\sigma_v(t)}{E \cdot \tau} dt \quad (5.25)$$

Při uvážení počáteční podmínky: $\varepsilon(t_k) = \varepsilon_k$ dostáváme partikulární řešení

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_k + \frac{\Delta\sigma_k}{E} \cdot \frac{t-t_k}{\Delta t_k} - \frac{1}{E} \left(\sigma_{vk} - \tau \cdot \frac{\Delta\sigma_k}{\Delta t_k} \right) \left(e^{-\frac{t-t_k}{\tau}} - 1 \right) \quad (5.26)$$

Po zavedení proměnné

$$\lambda_k = (1 - \beta_k) \frac{\tau}{\Delta t_k} \quad (5.27)$$

můžeme vyjádřit přírůstek deformace jako:

$$\Delta\varepsilon_k = \varepsilon(t_{k+1}) - \varepsilon(t_k) = (1 - \lambda_k) \frac{\Delta\sigma_k}{E} + (1 - \beta_k) \frac{\sigma_{vk}}{E} \quad (5.28)$$

Přírůstek deformace lze chápat jako součet dvou dílčích částí: části „okamžité“ $(1 - \lambda_k) \frac{\Delta\sigma_k}{E}$, charakterizované modulem $\bar{E} = E/(1 - \lambda_k)$, a části související s dotvarováním $\varepsilon'' = (1 - \beta_k) \frac{\sigma_{vk}}{E}$.

Platí rovnost $\sigma_v(t) = \sigma(t) - E \cdot \varepsilon(t)$. Vztah (5.28) se tím zjednoduší na rovnici:

$$\Delta\varepsilon_k = \varepsilon(t_{k+1}) - \varepsilon(t_k) = (1 - \lambda_k) \frac{\Delta\sigma_k}{E} + (1 - \beta_k) \left(\frac{\sigma_k}{E} - \varepsilon_k \right) \quad (5.29)$$

Zhodnocení exponenciálních algoritmů

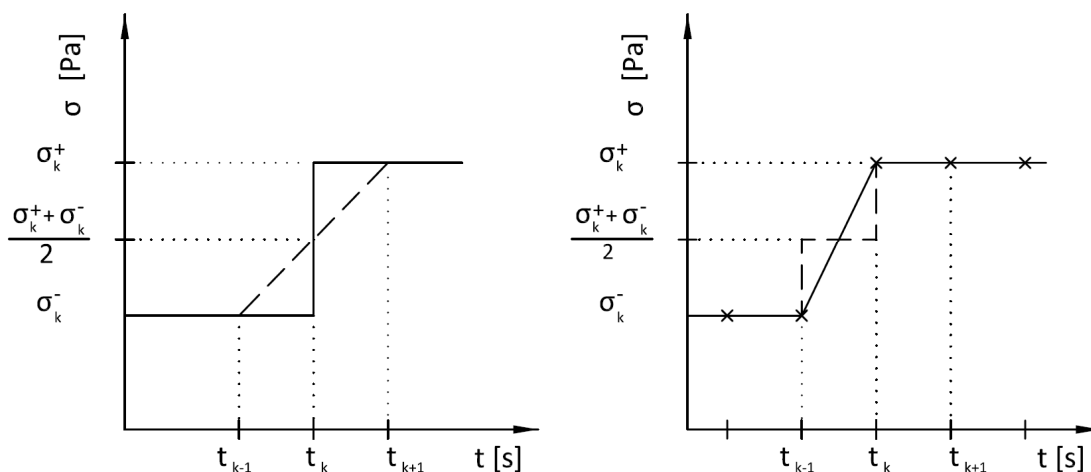
Exponenciální algoritmy nabízejí efektivní a přesný způsob řešení diferenciální rovnice popisující chování Kelvinova článku, a jak se v dalších kapitole ukáže, i řetězce z nich složeného. Tyto algoritmy dávají přesné řešení, pokud je v případě prvního exponenciálního algoritmu popsána historie zatížení konstantní funkcí. Druhý exponenciální algoritmus je přesný, i pokud je průběh zatížení lineární. Oba algoritmy dávají (za výše zmíněných podmínek zatížení) přesné výsledky a to bez ohledu na délku výpočetního kroku.

Při studiu numerické stability sledujeme, že oba algoritmy jsou nepodmíněně stabilní. V obou případech je výraz násobící konečnou hodnotu deformace předchozího kroku ε_k roven proměnné β_k dané výrazem (5.18), která nejen že je menší než jedna, dokonce je i kladná.

To znamená, že by se v průběhu výpočtu neměly ani při složitější historii zatížení (pro kterou se deformace nevyřeší přesně) objevovat oscilace.

V případě numerické implementace těchto algoritmů je potřeba některé výrazy ještě mírně modifikovat. Týká se to výrazu (5.18) pro výpočet proměnné β_k a také výrazu (5.27) pro určení λ_k . Při extrémních kombinacích délky výpočetního kroku Δt_k a retardačního času τ přestávají tyto výrazy dávat správné výsledky. Tyto kombinace, jak se později ukáže, se mohou vyskytnout v Kelvinově řetězci, kde se retardační časy volí úmyslně v širokém spektru tak, aby jednotlivé články svým chováním vhodně pokryly celou námi vybranou časovou oblast.

Pro větší poměry $\Delta t_k/\tau$ (cca 30) je vhodné položit $\beta_k = 0$ a pro vyjádření λ_k použít několik prvních členů Taylorova rozvoje. $\lambda_k = 1 - \frac{1}{2}\Delta t_k/\tau + \frac{1}{6}(\Delta t_k/\tau)^2 - \frac{1}{24}(\Delta t_k/\tau)^3 \dots$ V opačném případě by totiž hrozilo, že β_k vyjde velmi malé záporné číslo a λ_k proto větší než jedna.



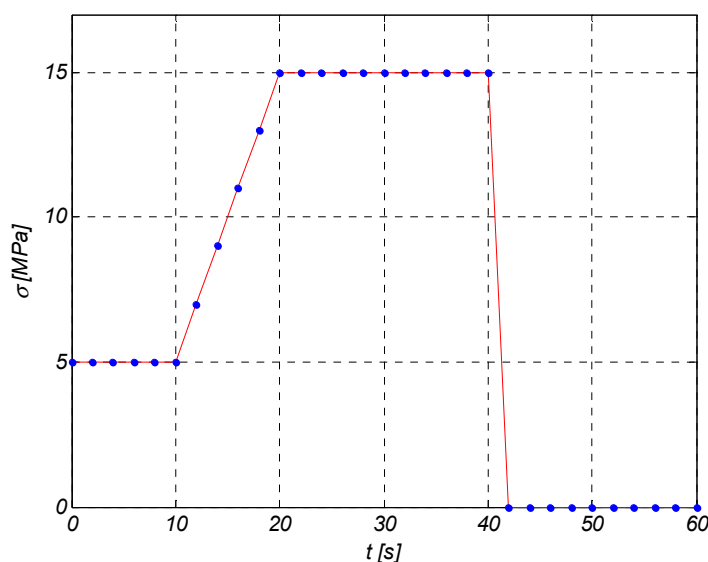
Obrázek 5.1 Skokovitě se měnící průběh zatížení.

Neméně důležitou úpravou finálního algoritmu je zajištění vhodné časové škály v případě skokovitě se měnícího zatížení. Na obrázku 5.1 vlevo je plnou čarou nakreslen skutečný průběh napětí. Napětí se v čase $t = t_k$ skokovitě mění z hodnoty σ_k^- na hodnotu σ_k^+ . Správné by bylo časový krok $(t_{k-1}; t_k)$ řešit s koncovou hodnotou σ_k^- a krok $(t_k; t_{k+1})$ s počáteční hodnotou σ_k^+ , nikoliv hodnotu v čase t_k aproximovat průměrem z obou hodnot. Na stejném obrázku vpravo je naznačeno, jak časově diskretizované napětí chápou exponenciální algoritmy. První exponenciální algoritmus aproximuje napětí konstantní hodnotou vypočtenou v závislosti na parametru α , pro $\alpha = 0.5$ střední hodnotou. Výsledek je naznačen čárkovanou čarou. Silnou čarou je označen průběh interpretovaný druhým exponenciálním algoritmem. Vývoj napětí je interpretován jako lineární; určen krajními hodnotami. Při nemožnosti specifikovat pro jeden časový okamžik, v našem případě t_k , dvě funkční hodnoty napětí, je dobré zmenšit časový interval $(t_{k-1}; t_k)$ na minimum. Jak je tato chyba významná se ukáže v následujícím oddílu věnovaném porovnání numerických algoritmů s přesným řešením.

5.2 SROVNÁVACÍ STUDIE VÝPOČETNÍCH ALGORITMŮ

V této kapitole jsou uvedeny výsledky výpočtů získané z výše zmíněných algoritmů, které byly implementovány ve výpočetním prostředí programu Matlab. Tato studie si klade za cíl prozkoumat faktory, které mají významný vliv na přesnost výsledků. Zkoumán bude především vliv délky kroku Δt v porovnání s retardačním časem τ , dále pak vliv charakteru předepsaného zatížení na přesnost výpočtu relativní deformace. Důraz bude kladen především na prozkoumání chyby vzniklé vnesením náhlého zatížení. Délka kroku Δt bude ve všech případech volena tak, aby se algoritmus choval stabilně.

Všechny simulace byly prováděny pro případ jednoho Kelvinova článku vzniklého paralelním zapojením pružiny o tuhosti $E = 1$ MPa s tlumičem o viskozitě $\eta = 5$ MPa·s. Záměrem této části nebylo určit parametry Kelvinova článku tak, aby odpovídaly nějakému stavebnímu materiálu; parametry byly zvoleny tak, aby vhodně vystihovaly viskoelastické chování konstrukce na zadaný časový průběh zatížení, tj. aby se článek nedeformoval okamžitě (elasticky) a současně, aby v něm v daném časovém úseku vůbec nějaké deformace vznikly.



Obrázek 5.2 Průběh napětí v čase.

Na obrázku 5.2 je znázorněn průběh (tahového) napětí v čase. Průběh je po částech lineární; první úsek v intervalu od $t_0 = 0$ s do $t_1 = 10$ s je konstantní s hodnotou napětí $\sigma = 5$ MPa. Po něm následuje do času $t_2 = 20$ s úsek s lineární závislostí na čase: $\sigma = (t - 5 \text{ s})$ MPa. Od času t_2 do času $t_3 = 40$ s je průběh funkce napětí opět konstantní s hodnotou 15 MPa. Pro časy větší než t_3 nabývá napětí nulové hodnoty. V čase t_3 dochází ke skokovité změně napětí. Na obrázku 5.2 není tato změna přesně zachycena, vykresleny jsou zde hodnoty napětí v časovém kroku $\Delta t = 1$ s.

5.2.1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

Aby bylo možné učinit srovnání numerických metod, je nejprve potřeba určit přesné řešení. Toho je možné dosáhnout řešením diferenciální rovnice, která popisuje chování Kelvinova článku. Obecný tvar této rovnice má tvar daný vztahem (5.30). V našem případě má tato rovnice pro všechny intervaly speciální tvar. Pro intervaly $t_0 - t_1$, $t_2 - t_3$ a $t_3 - t_4$ se jedná o lineární diferenciální rovnici

1. řádu s konstantními koeficienty. V intervalu $t_1 - t_2$ je na pravé straně funkce lineárně závislá na čase t .

$$E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t) \quad (5.30)$$

V prvním intervalu tedy hledáme řešení rovnice ve tvaru:

$$E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \hat{\sigma} = \sigma_{01} \quad (5.31)$$

Při řešení časového průběhu relativní deformace v prvním intervalu $t_0 - t_1$ využijeme počáteční podmínky nulové deformace v čase t_0 . Řešení má tedy tvar:

$$\varepsilon_{01}(t) = \frac{\sigma_{01}}{E} \left(1 - e^{\left(-\frac{E t}{\eta}\right)} \right) \quad (5.32)$$

kde σ_{01} je napětí v intervalu mezi časy t_0 a t_1 . Relativní deformace ε_1 vypočtená v čase $t = t_1$ poslouží jako počáteční podmínka pro řešení druhého časového úseku. V následujícím intervalu není pravá strana konstantní, jak tomu bylo v předchozím případě, ale řešení lze stále bez obtíží nalézt.

Diferenciální rovnice má tvar:

$$E \varepsilon(t') + \eta \dot{\varepsilon}(t') = \sigma(t') = \sigma_{12} + t' \quad (5.33)$$

Kde t' je pomocná časová proměnná $t' = t - t_1$, jejímž zavedením jsme posunuli řešený interval do počátku. Průběh deformace je po uvážení okrajových podmínek dán předpisem:

$$\varepsilon_{12}(t') = \frac{\sigma_{01}}{E} - \frac{\eta}{E^2} + \frac{t'}{E} + \left(\varepsilon_1 - \frac{\sigma_{01}}{E} + \frac{\eta}{E^2} \right) e^{\left(-\frac{E t'}{\eta}\right)} \quad (5.34)$$

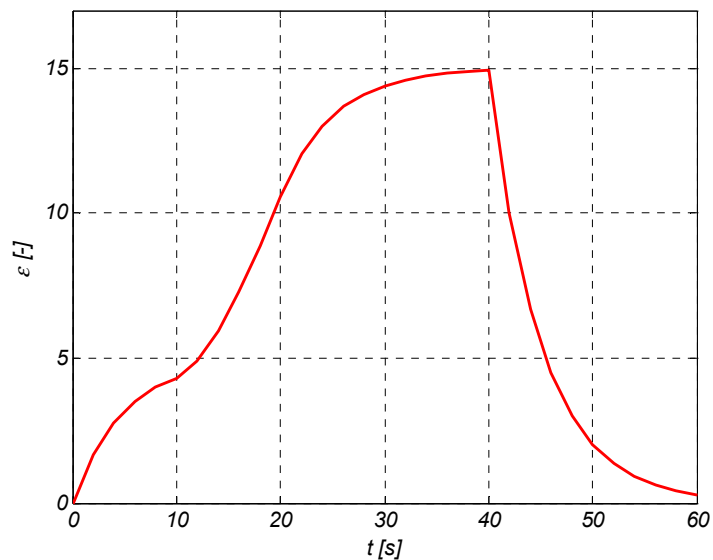
Podobným způsobem lze nalézt řešení i v následujících časových intervalech. Průběh přesného, analytického řešení je zachycen na obrázku 5.3. Správnost řešení lze zběžně zkontrolovat podle hodnot deformace vypočtených z Hookeova zákona, ke kterým se křivka v případě konstantního zatížení při relaxaci napětí v tlumiči blíží (např. pro časový úsek $t_2 - t_3$ $\varepsilon = \sigma/E = 15$).

5.2.2 VÝSLEDKY NUMERICKÝCH VÝPOČTŮ

Na následujících stranách jsou uvedeny grafy, které srovnávají výsledky z výše uvedených numerických algoritmů v porovnání s přesným řešením označeným červenou křivkou. Rovněž je v každém kroku vypočtena chyba řešení, která je stanovena podle vztahu:

$$chyba = \frac{hodnota_{\text{algoritmus}} - hodnota_{\text{přesná}}}{hodnota_{\text{přesná}}} \cdot 100 [\%] \quad (5.35)$$

Takto vyjádřená chyba není schopna vyjádřit přesnost algoritmu jako celku, přesto velmi dobře slouží k utvoření představy o silných a slabých místech jednotlivých numerických metod. Slabým místem takto vyjádřené chyby je fakt, že i malý rozdíl ve funkčních hodnotách numerického a přesného řešení se může mnohonásobně umocnit tím, že tyto funkční hodnoty jsou malé.

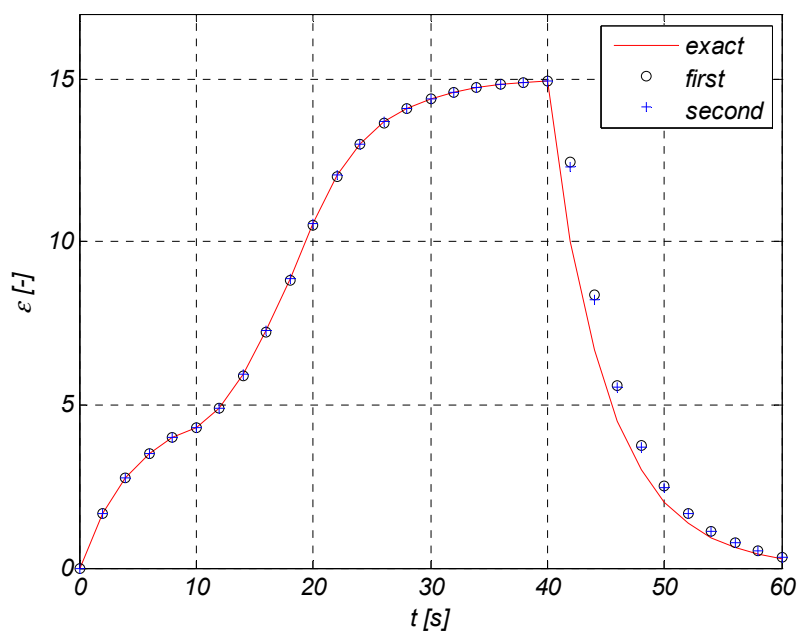


Obrázek 5.3 Průběh analyticky vypočtené deformace v čase.

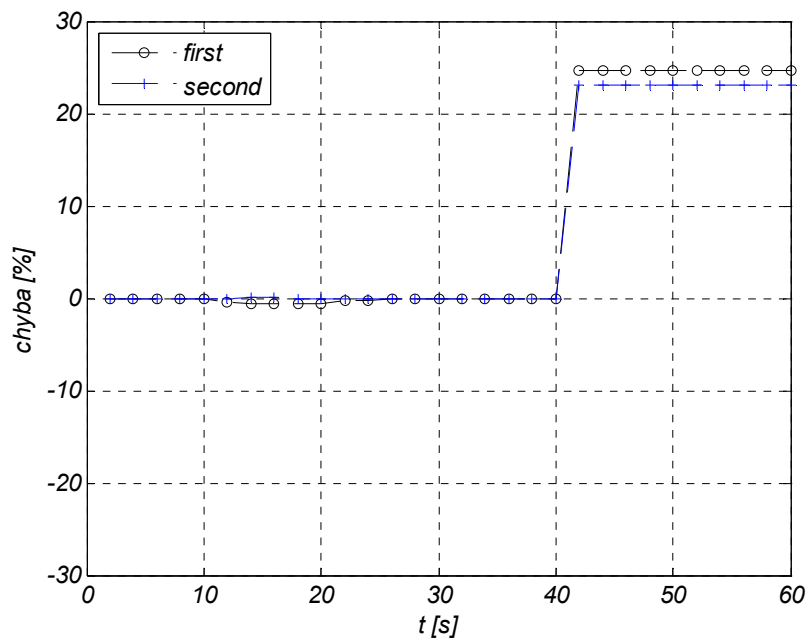
Jako nástroj k celkovému zhodnocení chyby může být použita tzv. efektivní hodnota (Root mean square, také RMS). Efektivní hodnota je určena vzorcem:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad (5.36)$$

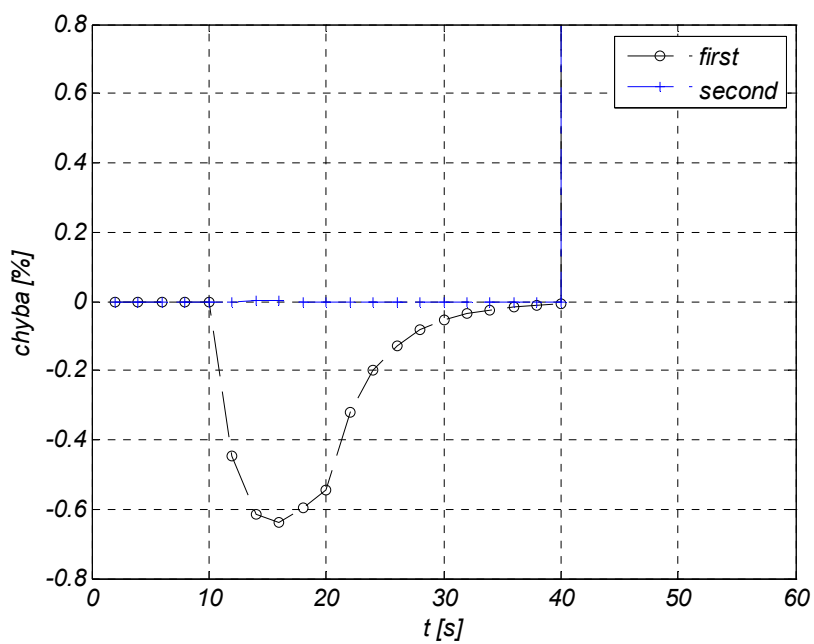
Kde x_i označuje rozdíl hodnot, v našem případě rozdíl přesné hodnoty a hodnoty stanovené numerickou metodou a n označuje celkový počet srovnávaných hodnot (v našem případě počet kroků).



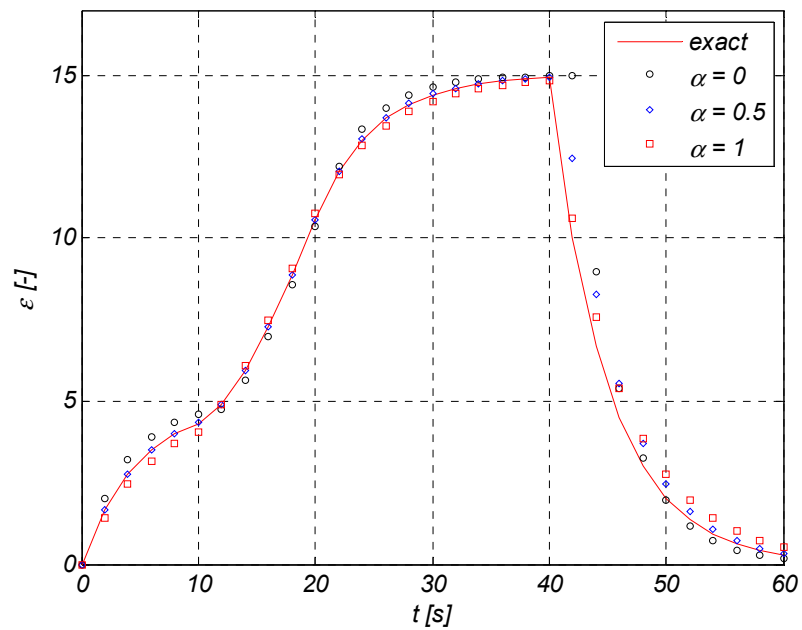
Obrázek 5.4 Časový průběh deformace přesného řešení, prvního a druhého expon. algoritmu. $\Delta t = 2$ s, $\Delta t/\tau = 0.4$.



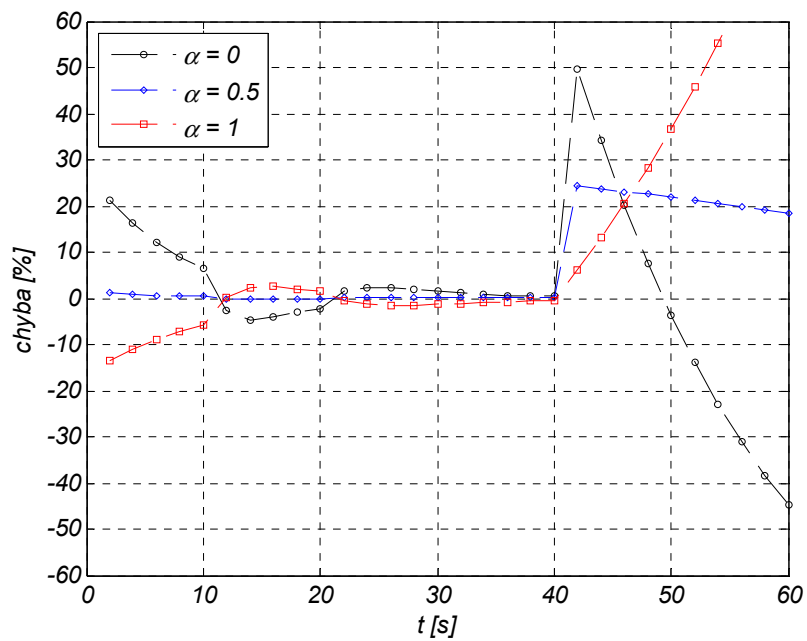
Obrázek 5.5 Časový průběh chyby prvního a druhého expon algoritmu vůči přesnému řešení. $\Delta t = 2$ s, $\Delta t/\tau = 0.4$.



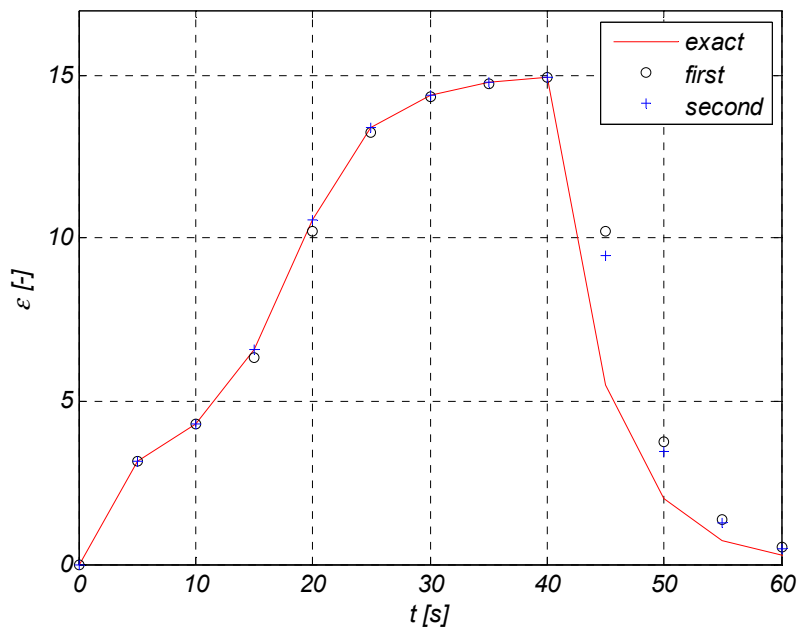
Obrázek 5.6 Detail.



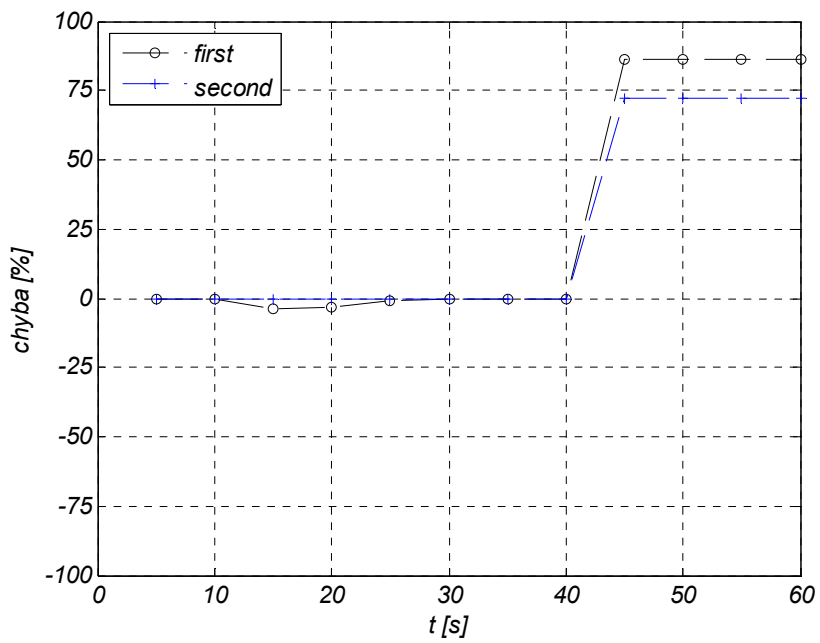
Obrázek 5.7 Časový průběh deformace přesného řešení a algoritmů s lichoběžníkovým pravidlem. $\Delta t = 2$ s, $\Delta t/\tau = 0.4$.



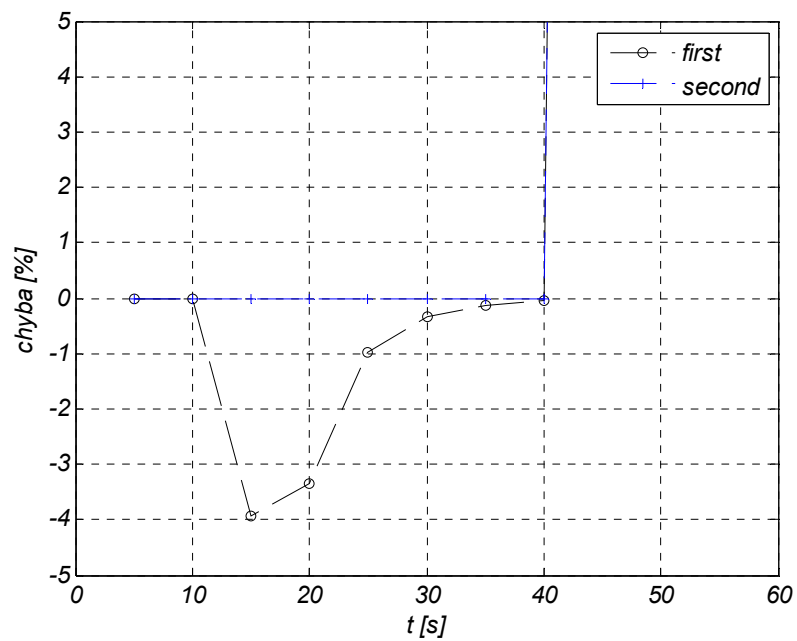
Obrázek 5.8 Časový průběh chyby algoritmů s lichoběžníkovým pravidlem vůči přesnému řešení. $\Delta t = 2$ s, $\Delta t/\tau = 0.4$.



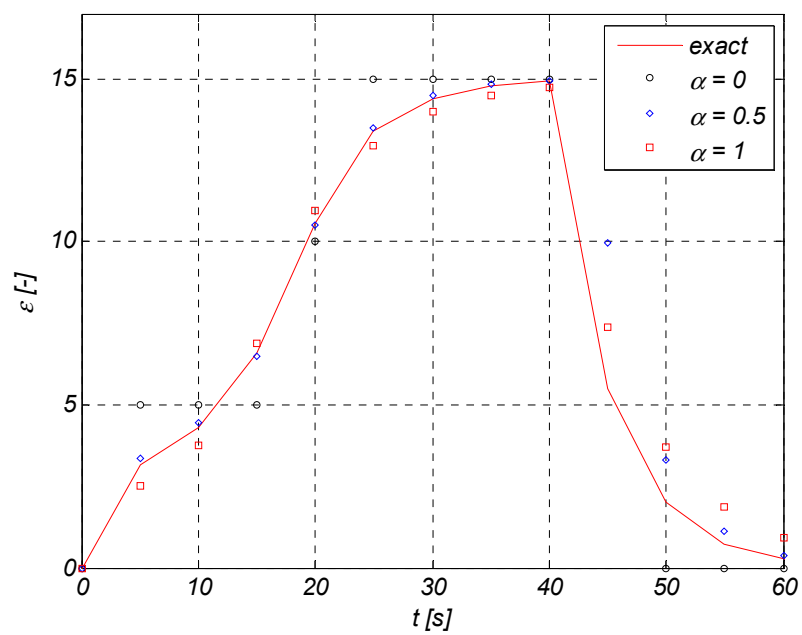
Obrázek 5.9 Časový průběh deformace přesného řešení, prvního a druhého expon. algoritmu. $\Delta t = 5$ s, $\Delta t/\tau = 1$.



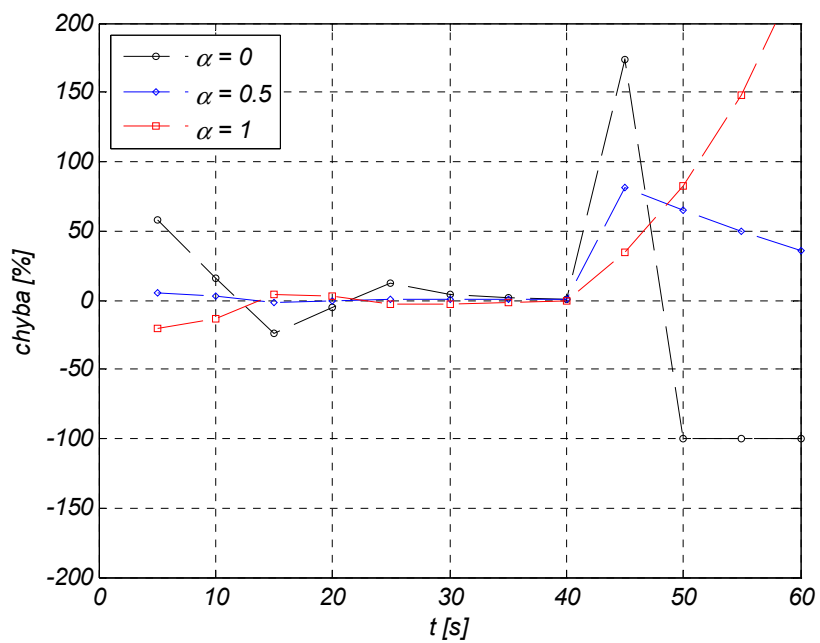
Obrázek 5.10 Časový průběh chyby prvního a druhého expon algoritmu vůči přesnému řešení. $\Delta t = 5$ s, $\Delta t/\tau = 1$.



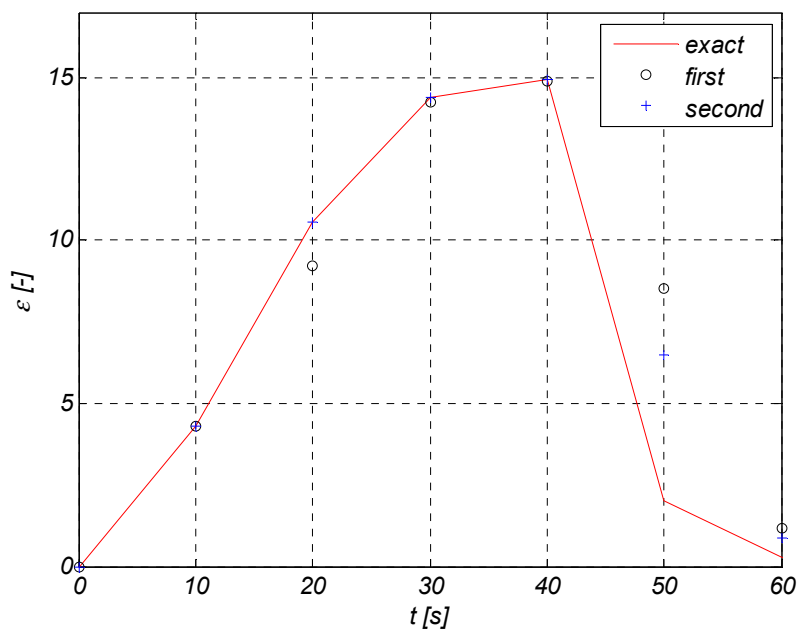
Obrázek 5.11 Detail.



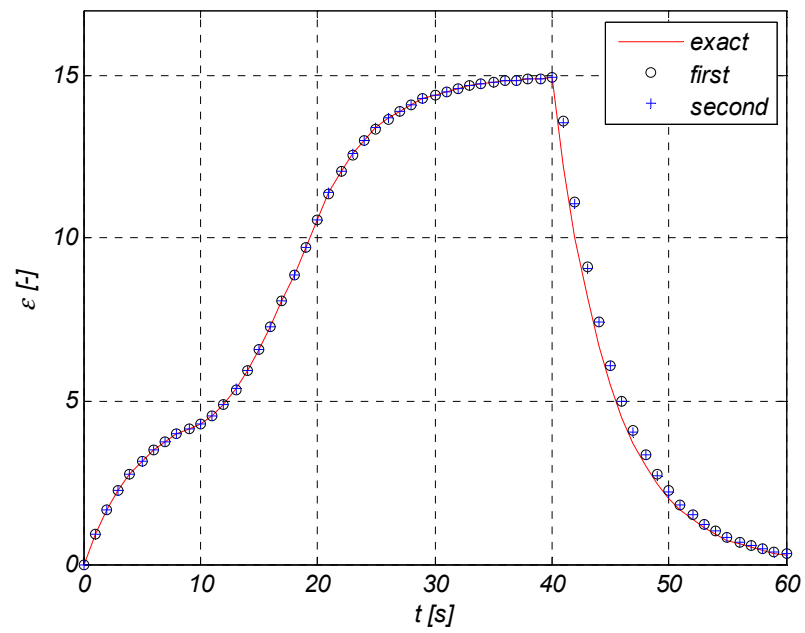
Obrázek 5.12 Časový průběh deformace přesného řešení a algoritmů s lichoběžníkovým pravidlem. $\Delta t = 5$ s, $\Delta t/\tau = 1$.



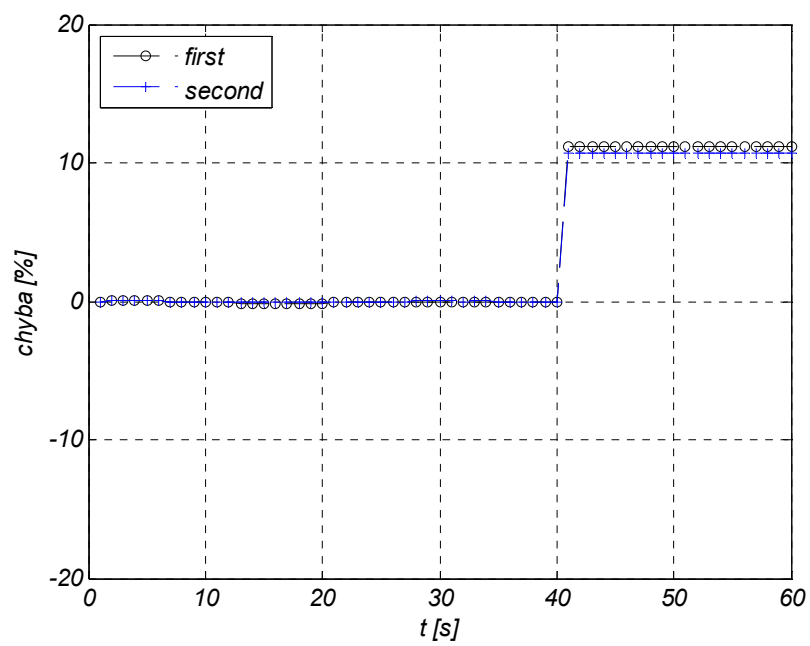
Obrázek 5.13 Časový průběh chyby algoritmů s lichoběžníkovým pravidlem vůči přesnému řešení. $\Delta t = 5$ s, $\Delta t/\tau = 1$.



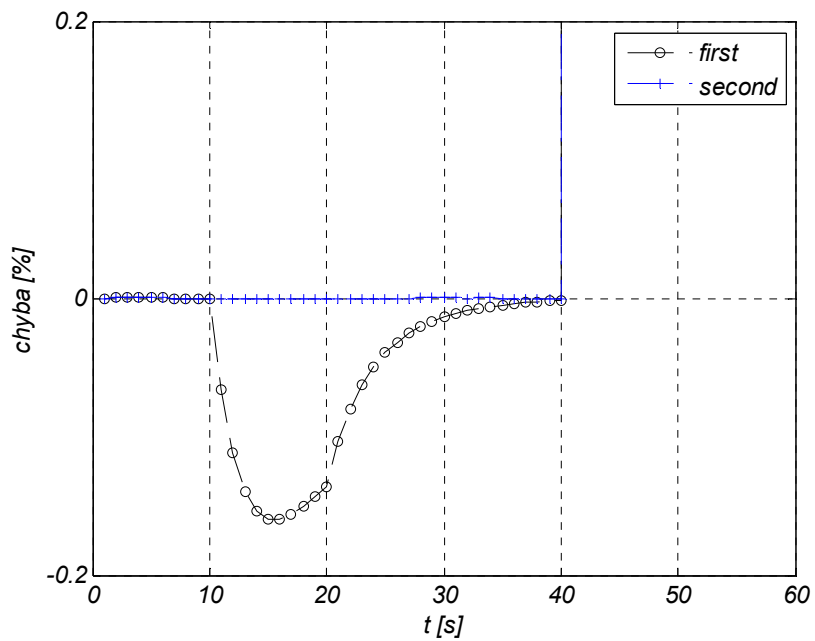
Obrázek 5.14 Časový průběh deformace přesného řešení, prvního a druhého expon. algoritmu. $\Delta t = 10$ s, $\Delta t/\tau = 2$.



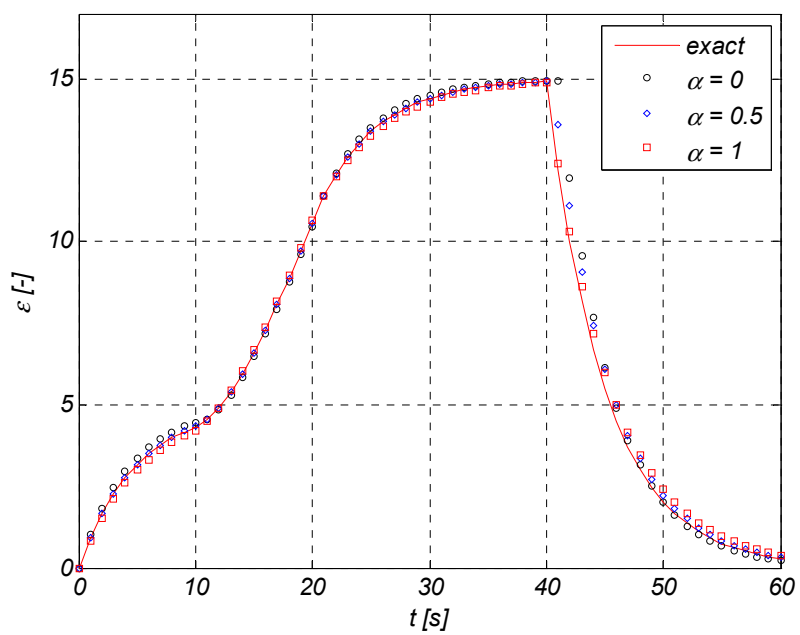
Obrázek 5.15 Časový průběh deformace přesného řešení, prvního a druhého expon. algoritmu. $\Delta t = 1$ s, $\Delta t/\tau = 0.2$.



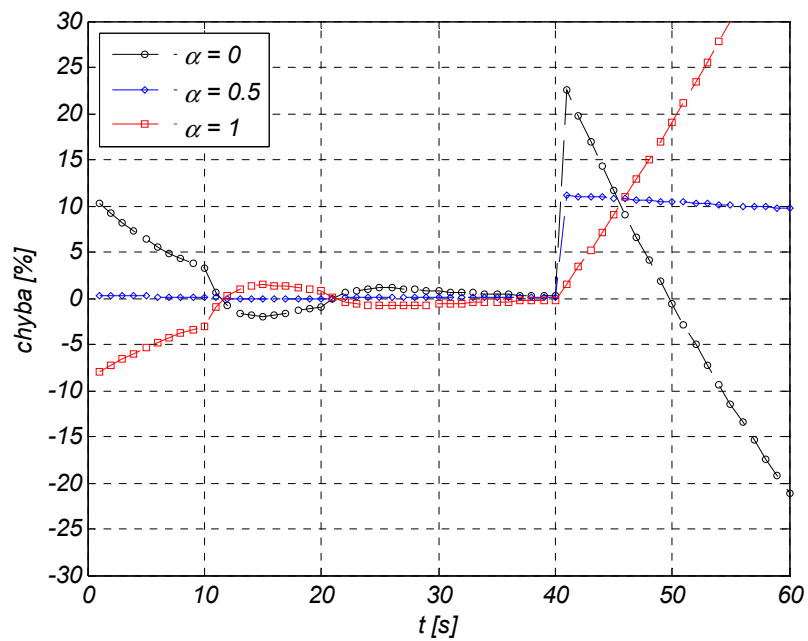
Obrázek 5.16 Časový průběh chyby prvního a druhého expon. algoritmu vůči přesnému řešení. $\Delta t = 1$ s, $\Delta t/\tau = 0.2$.



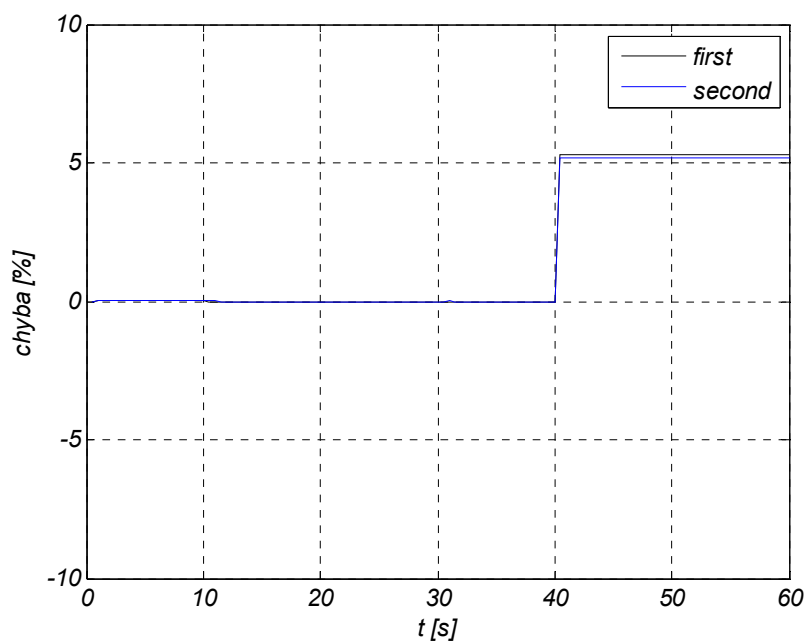
Obrázek 5.17 Detail



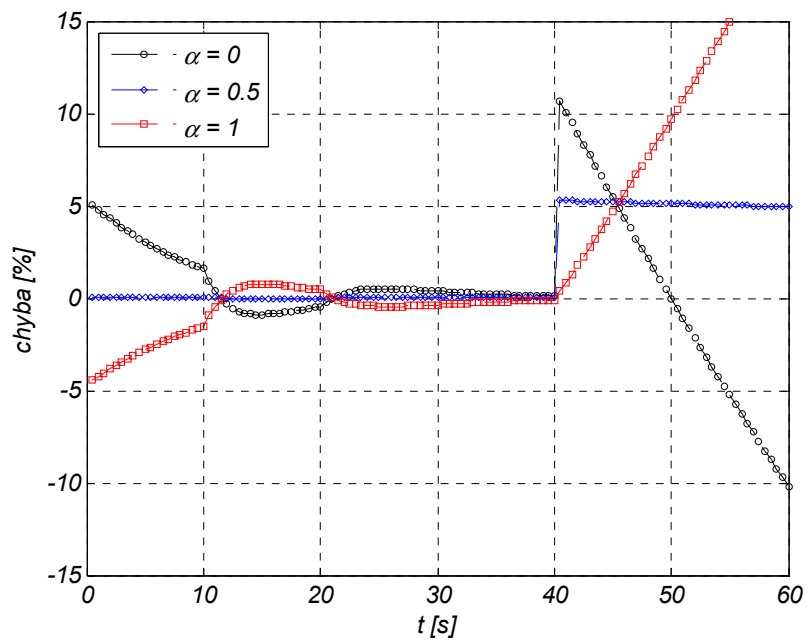
Obrázek 5.18 Časový průběh deformace přesného řešení a algoritmů s lichoběžníkovým pravidlem. $\Delta t = 1$ s, $\Delta t/\tau = 0.2$.



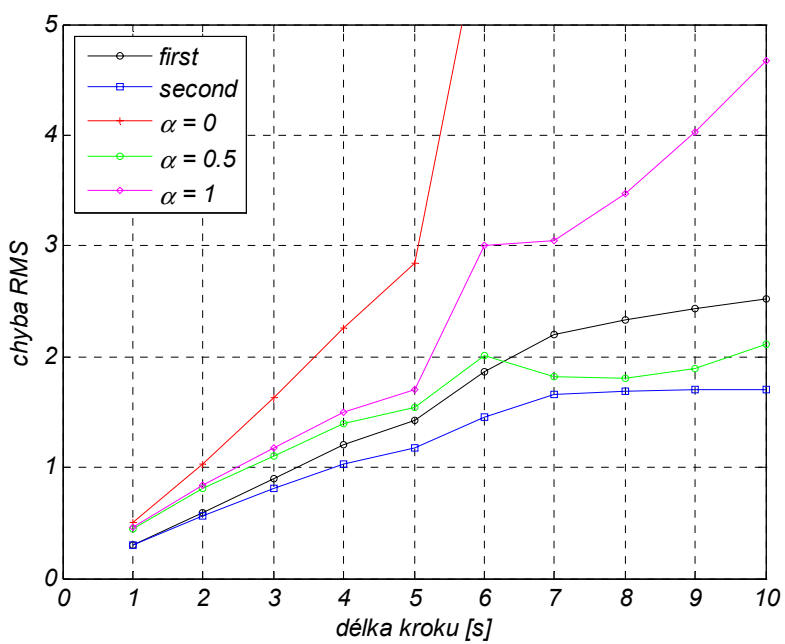
Obrázek 5.19 Časový průběh chyby algoritmů s lichoběžníkovým pravidlem vůči přesnému řešení. $\Delta t = 1$ s, $\Delta t/\tau = 0.2$.



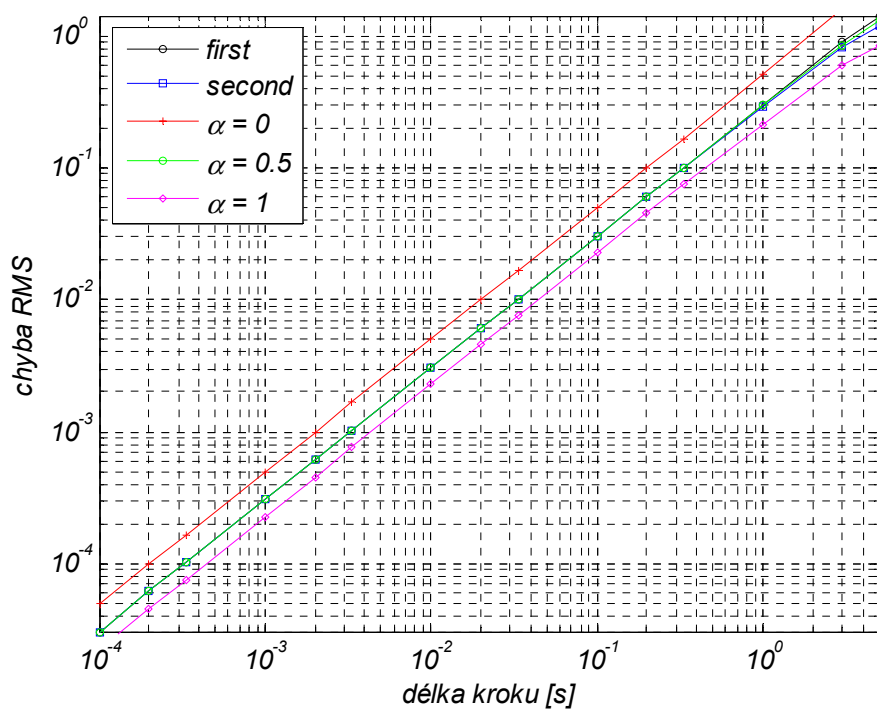
Obrázek 5.20 Časový průběh chyby prvního a druhého expon. algoritmu vůči přesnému řešení. $\Delta t = 0.5$ s, $\Delta t/\tau = 0.1$.



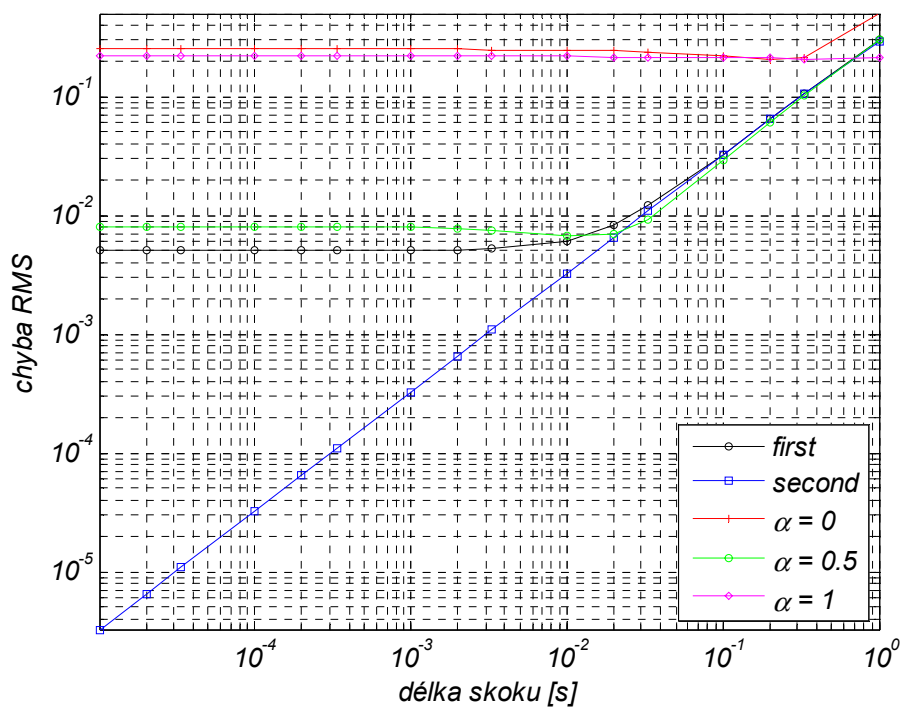
Obrázek 5.21 Časový průběh chyby algoritmů s lichoběž. pravidlem vůči přesnému řešení. $\Delta t = 0.5$ s, $\Delta t/\tau = 0.1$.



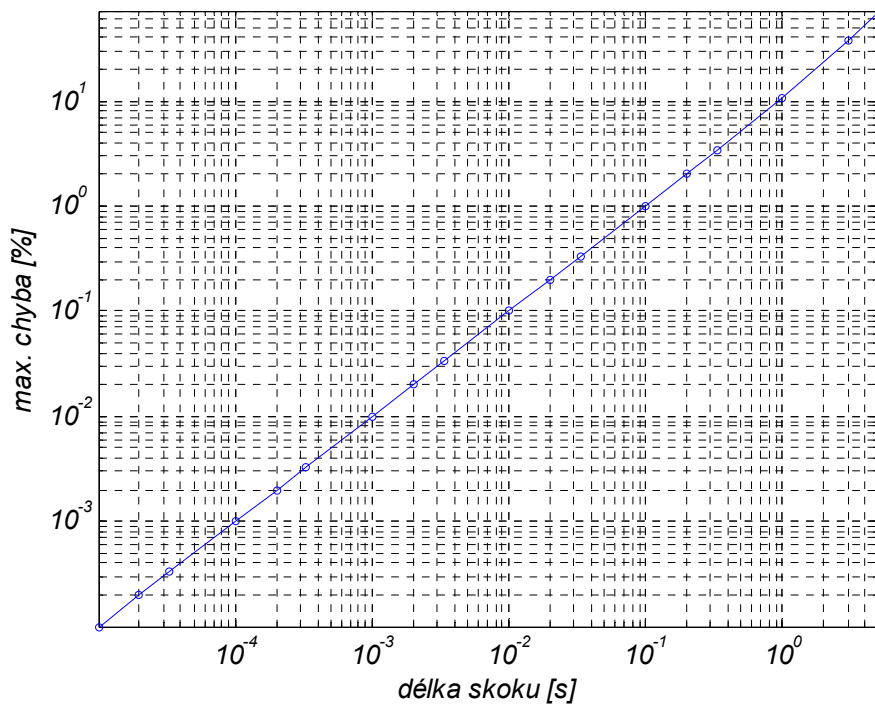
Obrázek 5.22 Časový průběh chyby vyjádřené pomocí RMS v závislosti na délce kroku Δt .



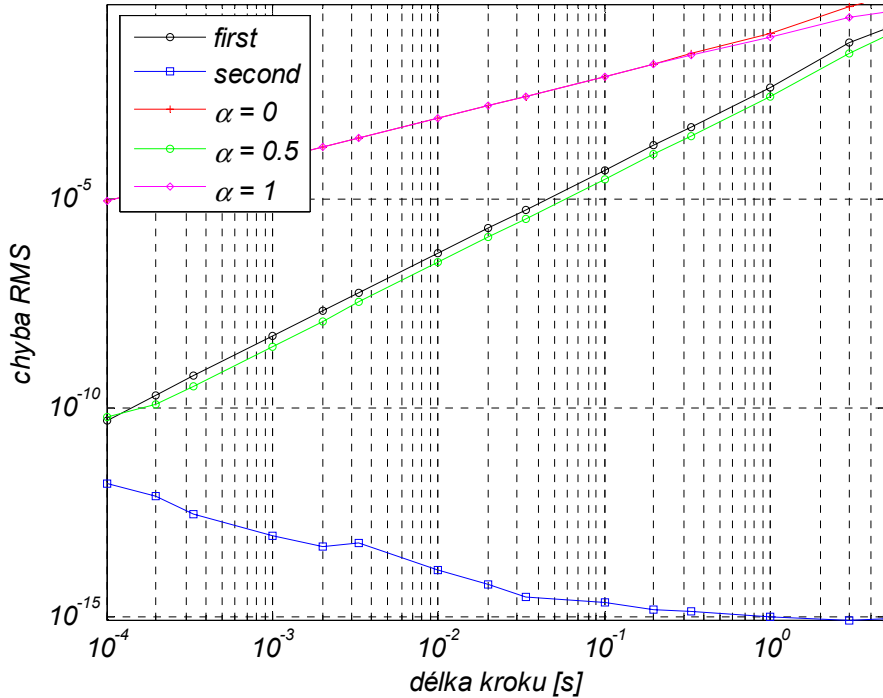
Obrázek 5.23 Časový průběh chyby vyjádřené pomocí RMS v závislosti na délce kroku Δt .



Obrázek 5.24 Časový průběh chyby vyjádřené pomocí RMS v závislosti na délce skoku následujícího ihned za časem t_3 . Základní délka kroku $\Delta t = 1$ s.



Obrázek 5.25 Časový průběh chyby vyjádřené formou maximální velikosti chyby v % (vzorec (5.35)) v závislosti na délce skoku následujícího ihned za časem t_3 . Základní délka kroku $\Delta t = 1$ s.



Obrázek 5.26 Časový průběh chyby vyjádřené pomocí RMS v závislosti na délce kroku Δt . Napětí v posledním časovém intervalu zůstává stejné jako v předposledním, tj. $\sigma = 15$ MPa. Zhoršující konvergenci druhého exponenciálního algoritmu vysvětlují zaokrouhlovacími chybami.

5.2.1 VYHODNOCENÍ

Podle očekávání nejlépe z algoritmů využívajících lichoběžníkové pravidlo dopadla nejsložitější metoda, která bere v úvahu napětí jak na začátku, tak i na konci výpočetního kroku. Dobře je rozdílné chování těchto tří algoritmů dokumentováno na obrázku 5.7, chyba v [%] je zobrazena na obrázku 5.8.

Chování Eulerovy dopředné metody výborně demonstuje situace, kdy náhle přestane působit zatížení (čas $t = 40$ s). Vzhledem k tomu, že tento algoritmus využívá pro výpočet hodnotu a derivaci v předcházejícím kroku, je první hodnota po odtížení stejná, jako kdyby k němu nedošlo. I další hodnoty se počítají s hodnotou derivace z předchozího kroku (která je větší, než v bodě, který se počítá), proto záhy dojde k překročení křivky analytického řešení a chyba získává opačné znaménko. Toto chování je dobře patrné i v samém počátku, kdy je nejvyšší rychlost deformace. Tato metoda v porovnání s ostatními metodami určitě nedominuje přesností. Její silná stránka je ale jednoduchost předpisu.

Eulerova zpětná metoda dává menší chybu než Eulerova dopředná metoda. Do času $t = 40$ s je chyba přibližně poloviční (pro časový krok $\Delta t = 2$ s) a opačného znaménka. Lze konstatovat, že čím hrubší je dělení (čím větší časový krok Δt), tím více je znát nadřazenost Eulerovy zpětné metody. Při jemném dělení je rozdíl v přesnosti mezi Eulerovou zpětnou a dopřednou metodou téměř nezatelný. Výborně tento fakt dokumentuje graf na obrázku 5.26, kde pro délku kroku menší než $\Delta t = 0.3$ s dochází ke splynutí obou křivek (červená a purpurová (magenta)) a rychlost konvergence je pro obě metody stejná. Je potřeba poznamenat, že to platí pouze, když byl z průběhu napětí odstraněn skok v napětí. Při původním průběhu napětí a konstantním kroku totiž Eulerova zpětná metoda kraluje všem uvedeným metodám, viz obrázek 5.23.

Lichoběžníkové pravidlo dává téměř přesné výsledky, pokud nedochází k náhlým skokům v napětí; za těchto podmínek je diametrálně lepší než obě předešlé metody. Konvergence je společně s prvním exponenciálním algoritmem pro zkracující se kroky dvojnásobná, viz obrázek 5.26. Pro delší časové kroky je metoda zpravidla přesnější než první exponenciální algoritmus, viz obrázek 5.22. Co do charakteru i velikosti chyby je lichoběžníkové pravidlo exponenciálním algoritmům velmi blízké, viz srovnání obrázek 5.20 s obrázkem 5.21.

Rozdíl ve výsledcích mezi prvním a druhým exponenciálním algoritmem je nejlépe vidět na obrázku 5.6, obrázku 5.11 nebo obrázku 5.17: I při lineárním zatížení dává druhý exponenciální algoritmus přesné řešení.

Zcela dominantní role druhého exponenciálního algoritmu je evidentní z obrázku 5.24, na kterém je vyjádřená přesnost měřená RMS v závislosti na délce kroku, ve kterém je vneseno skokovité zatížení. Po určité délce se konvergence všech ostatních metod zastavuje, zatímco u druhého exponenciálního algoritmu se její průběh nemění.

Pro všechny algoritmy s výjimkou zpětné Eulerovy metody je role délky kroku, ve kterém se odehraje skok v zatížení, zcela zásadní. Za „normální“ délku kroku bych pro tuto historii zatížení považoval hodnotu $\Delta t = 2$ s. Při té i pro druhý exponenciální algoritmus chyba vzniklá tímto skokem přesahuje 20 %, což je nepřijatelné.

Vzhledem k nejlepším vlastnostem bude pro novou implementaci modelu B3 použit druhý exponenciální algoritmus; podmínkou k tomu je ale uživatelem dobře definovaná historie zatížení a vhodná časová škála.

6. NUMERICKÉ METODY VÝPOČTU DOTVAROVÁNÍ PRO KELVINŮV ŘETĚZEC

Podobně jako v předchozí kapitole, i v této se budeme zabývat numerickými algoritmy; problém bude ale složitější, čekají nás výpočetní algoritmy pro řetězce, nikoliv jednotlivé články. Úkol bude komplikován navíc tím, že se ve dvou ze tří případů bude jednat o popis materiálu, jehož vlastnosti se s časem mění.

Budou vyvinuty algoritmy pro popis chování nestárnoucího Kelvinova řetězce, Kelvinova řetězce se stárnutím a solidifikujícího Kelvinova řetězce; jejich funkce poddajnosti byly odvozeny v kapitole 4.3.1, 4.3.2 a 4.3.3. Navíc jedna část bude věnována metodám pro stanovení optimálních tuhostních parametrů a retardačních časů.

6.1 ALGORITMUS PRO NESTÁRNOUCÍ KELVINŮV ŘETĚZEC

V této části bude rozšířen algoritmus pro výpočet chování nestárnoucího Kelvinova článku na celý řetězec. V zásadě se nejedná o velký problém; vzhledem k sériovému zapojení Kelvinových článků je v každém z nich stejné napětí, proto stačí při výpočtu celkové deformace posčítat příspěvky jednotlivých jednotek. Pro výpočet dílčích deformací použijeme rovnici (5.29), do které se dosadí parametry charakterizující jednotlivé jednotky. Pro aproximaci okamžitých deformací k řetězci přidáme „nultý“ článek, jehož tlumič má nulovou viskozitou. S nultým článkem řetězce se lépe zachází, pokud je interpretován ryze jako pružina, než jako Kelvinův článek s nulovou viskozitou. Odpadají pak problémy s vyhodnocením β_{0k} a λ_{0k} pro nulový retardační čas.

Sumací dílčích deformací (5.29) získáme

$$\Delta\varepsilon_k = \sum_{\mu=0}^M \Delta\varepsilon_{\mu k} = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^M (1 - \lambda_{\mu k}) \frac{1}{E_{\mu}} \right) \Delta\sigma_k + \sum_{\mu=1}^M (1 - \beta_{\mu k}) \left(\frac{\sigma_k}{E_{\mu}} - \varepsilon_{\mu k} \right) \quad (6.1)$$

Výraz násobící změnu napětí je vlastně převrácená hodnota přírůstkového modulu \bar{E}_k

$$\bar{E}_k = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^M (1 - \lambda_{\mu k}) \frac{1}{E_{\mu}} \right)^{-1} \quad (6.2)$$

Tento člen popisuje okamžitou deformaci. Druhá suma popisuje dotvarování; pokud tento člen označíme $\Delta\varepsilon_k''$, můžeme rovnici (6.1) přepsat v jednoduchém tvaru

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{\Delta\sigma_k}{\bar{E}_k} + \Delta\varepsilon_k'' \quad (6.3)$$

Z této rovnice pak vyjádříme přírůstek napětí:

$$\Delta\sigma_k = (\Delta\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k'') \bar{E}_k \quad (6.4)$$

Aby tyto vztahy popisovaly víceosou napjatost a ne pouze jednoosý tah-tlak, je nutné do výše uvedených vzorců zahrnout jednotkové matice poddajnosti a tuhosti. Jednotková matice poddajnosti je definovaná:

$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Jednotková matice tuhosti vznikne inverzí \mathbf{C}_v

$$\mathbf{D}_v = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Vztah pro přírůstek deformace tak dostane tvar

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{1}{E_k} \mathbf{C}_v \Delta\sigma_k + \sum_{\mu=1}^M (1 - \beta_{\mu k}) \left(\frac{1}{E_\mu} \mathbf{C}_v \sigma_k - \varepsilon_{\mu k} \right) \quad (6.7)$$

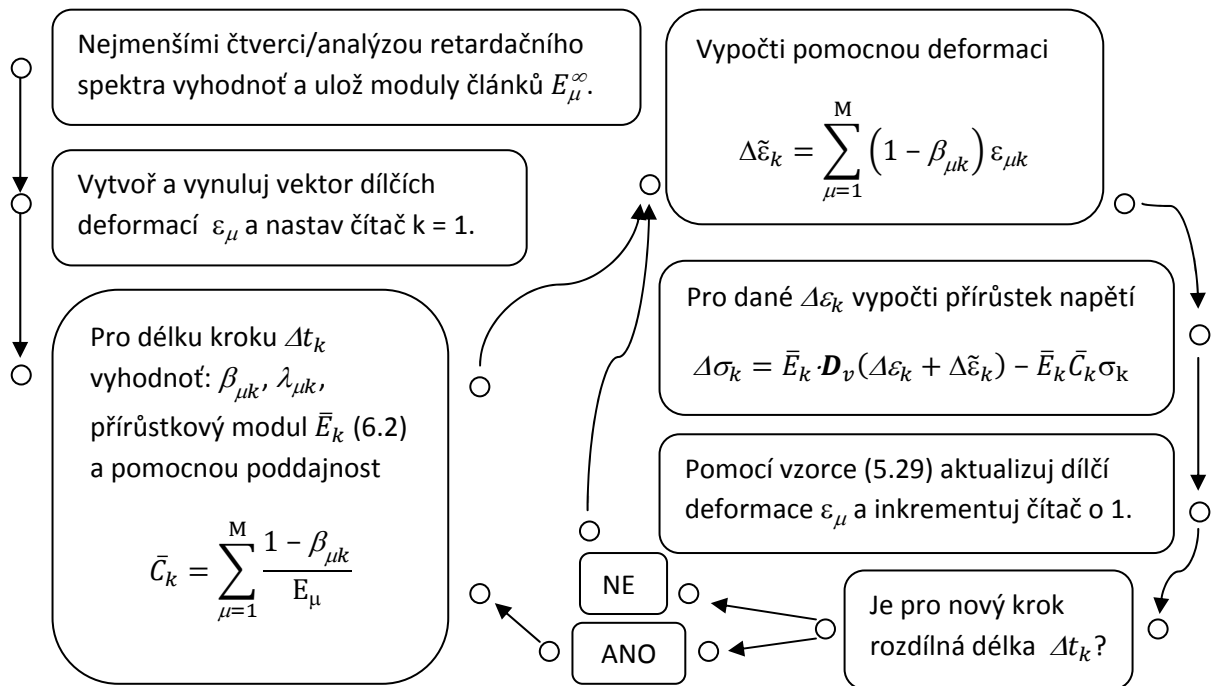
A přírůstek napětí:

$$\Delta\sigma_k = \bar{E}_k \mathbf{D}_v \left(\Delta\varepsilon_k + \sum_{\mu=1}^M (1 - \beta_{\mu k}) \varepsilon_{\mu k} - \mathbf{C}_v \sigma_k \cdot \frac{1 - \beta_{\mu k}}{E_\mu} \right) \quad (6.8)$$

je pak upraven na efektivnější formu (6.9), kdy eliminujeme neúčelné násobení maticí poddajnosti a vzápětí anulující násobení maticí tuhosti

$$\Delta\sigma_k = \bar{E}_k \mathbf{D}_v \left(\Delta\varepsilon_k + \sum_{\mu=1}^M (1 - \beta_{\mu k}) \varepsilon_{\mu k} \right) - \bar{E}_k \sigma_k \sum_{\mu=1}^M \frac{1 - \beta_{\mu k}}{E_\mu} \quad (6.9)$$

Algoritmus:



6.2 ALGORITMUS PRO STÁRNOUCÍ KELVINŮV ŘETĚZEC

V této kapitole odvodíme numerický algoritmus pro popis chování stárnoucího Kelvinova řetězce; nejprve ale budeme muset získat tento algoritmus pro jeho jednu jednotku. Použijeme stejné předpoklady jako v kapitole 4.3.2, ve které byla odvozena funkce poddajnosti pro stárnoucí Kelvinův řetězec. Předpokládali jsme, že platí rovnost: $\frac{\eta(t)}{D(t)} = \tau = \text{konst.}$

Začneme úpravou diferenciální rovnice (4.19) popisující chování jedné Kelvinovy jednotky. Při výpočtu funkce poddajnosti jsme předpokládali, že je na levé straně této rovnice nula (časová derivace konstantního napětí). Nyní nahradíme v rámci jednoho (k-tého) integračního kroku $\dot{\sigma}(t)$ výrazem $\frac{\Delta\sigma_k}{\Delta t_k}$ a $D(t)$ nahradíme hodnotou ve středu intervalu, tj. $D_{k+1/2}$. Těmito úpravami jsme dostali diferenciální rovnici druhého řádu s konstantou na pravé straně.

$$\dot{\varepsilon}(t) + \tau \ddot{\varepsilon}(t) = \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2} \Delta t_k} \quad (6.10)$$

Tato diferenciální rovnice má obecné řešení ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2} \Delta t_k} t + C_1 + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.11)$$

Integrační konstanty vypočteme z počátečních podmínek. Mezi integračními kroky musí být zachována spojitost relativních deformací i jejich prvních derivací. Počáteční podmínky pro čas $t = t_k$ jsou: $\varepsilon(t_k) = \varepsilon_k$ a $\dot{\varepsilon}(t_k) = \dot{\varepsilon}_k$. Po určení integračních konstant a jejich zpětném dosazení do obecného řešení:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_k + \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}\Delta t_k} (t - t_k) + \tau \cdot \left(\dot{\varepsilon}_k - \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}\Delta t_k} \right) \left(1 - e^{-\frac{t-t_k}{\tau}} \right) \quad (6.12)$$

Vyhodnocením tohoto výrazu pro časy $t = t_{k+1}$ a $t = t_k$ a vzájemným odečtením obdržíme přírůstek za čas Δt_k , rovnice (6.13). Užitím definice pomocné proměnné λ_k (5.27) dostaneme finální vztah (6.14).

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}} + \tau \cdot \left(\dot{\varepsilon}_k - \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}\Delta t_k} \right) (1 - \beta_k) \quad (6.13)$$

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}} (1 - \lambda_k) + \tau \cdot \dot{\varepsilon}_k (1 - \beta_k) \quad (6.14)$$

Časovou derivací výrazu (6.12) získáme předpis pro rychlost relativní deformace $\dot{\varepsilon}(t)$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}\Delta t_k} + \left(\dot{\varepsilon}_k - \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}\Delta t_k} \right) \left(e^{-\frac{t-t_k}{\tau}} \right) \quad (6.15)$$

Stejným postupem jako pro přírůstek deformace vyjádříme i přírůstek její rychlosti

$$\Delta\dot{\varepsilon}(t) = \left(-\dot{\varepsilon}_k + \frac{\Delta\sigma_k}{D_{k+1/2}\Delta t_k} \right) (1 - \beta_k) \quad (6.16)$$

Tímto jsme završili algoritmus popisující chování jednoho stárnoucího Kelvinova článku. Přejít k řetězci je podobný jako v minulé kapitole; celková deformace vznikne sečtením příspěvků z jednotlivých jednotek. Co se ale významně liší, je nutnost skládat rychlosti deformace ve formě vnitřní proměnné. Aby se skladovala bezrozměrná hodnota, přenásobí se $\dot{\varepsilon}_k$ retardačním časem τ a výsledná vnitřní proměnná se označí γ .

Zavedeme přírůstkový modul \bar{E}_k , který na rozdíl od nestárnoucího řetězce závisí na aktuální hodnotě $D_{\mu k+1/2}$.

$$\bar{E}_k = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^M (1 - \lambda_{\mu k}) \frac{1}{D_{\mu k+1/2}} \right)^{-1} \quad (6.17)$$

Pokud definujeme přírůstek creepu za časový krok Δt_k ,

$$\Delta\varepsilon_k'' = \sum_{\mu=1}^M (1 - \beta_{\mu k}) \gamma_{\mu k} \quad (6.18)$$

zjednoduší se formule (6.14) na stejný tvar jako v případě nestárnoucího řetězce.

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{\Delta\sigma_k}{\bar{E}_k} + \Delta\varepsilon_k'' \quad (6.19)$$

Zbývá definovat vztah pro aktualizaci vnitřní proměnné γ . Toho dosáhneme vyhodnocením výrazu $\gamma_{\mu k+1} = (\dot{\varepsilon}_k + \Delta\dot{\varepsilon}_k) \cdot \tau$.

$$\gamma_{\mu k+1} = \gamma_{\mu}(t_{k+1}) = \Delta\gamma_{\mu k} + \gamma_{\mu k} = \frac{\lambda_{\mu k}}{D_{\mu k+1/2}} \mathbf{C}_v \Delta\sigma_k + \beta_{\mu k} \gamma_{\mu k} \quad (6.20)$$

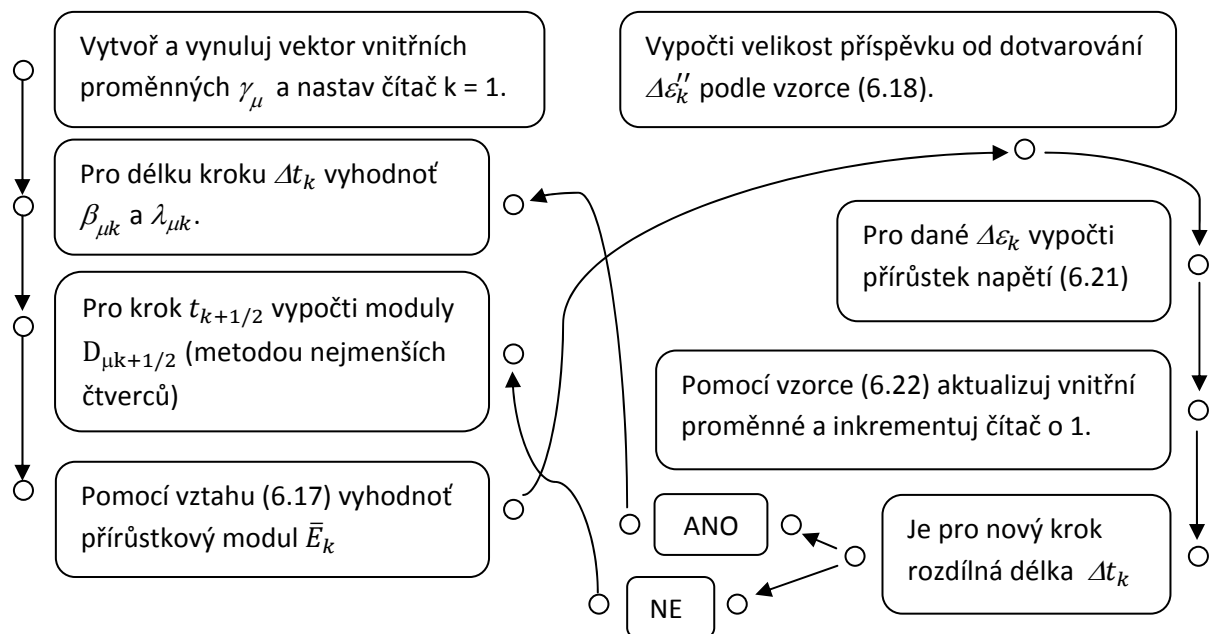
Tento výraz lze ještě zjednodušit. Pokud se přírůstek napětí vyhodnotí výrazem (6.21), dojde k anulování násobení $\mathbf{C}_v \cdot \mathbf{D}_v$

$$\Delta\sigma_k = \bar{E}_k \cdot \mathbf{D}_v (\Delta\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k'') \quad (6.21)$$

$$\gamma_{\mu k+1} = \frac{\lambda_{\mu k}}{D_{\mu k+1/2}} \bar{E}_k (\Delta\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k'') + \beta_{\mu k} \gamma_{\mu k} \quad (6.22)$$

Je zajímavé, že na tento algoritmus, ač je řádově složitější než metoda pro nestárnoucí Kelvinův řetězec, nejsou z hlediska ukládání vnitřních proměnných kladeny vyšší nároky na paměť. U tohoto algoritmu totiž není potřeba uchovávat deformace jednotlivých článků ε_{μ} .

Algoritmus:



6.3 ALGORITMUS PRO SOLIDIFIKUJÍCÍ KELVINŮV ŘETĚZEC

V této kapitole využijeme poznatků z části 4.3.3, kde byla definována funkce poddajnosti solidifikujícího Kelvinova řetězce $J(t, t')$, (4.37), funkce popisující vývoj objemu solidifikované části v čase $v(t)$ a nestárnoucí funkce poddajnosti formou Dirichletovy řady $\Phi(t - t')$, (4.35).

Řešení vychází z rovnice (4.15) popisující rovnost celkové rychlosti napětí a dílčích rychlostí napětí v jednom Kelvinově článku. Rychlost napětí v pružině vyjádříme pomocí funkce $v(t)$ a E^∞ (vztah (4.27)) a využitím vztahu (4.28) vyjádříme rychlost $\dot{\sigma}_e(t)$ v závislosti na $\sigma_v(t)$ - vztah (4.29). Po dosazení (4.29) a (4.28) do (4.15) dostáváme rovnici rychlosti napětí pro μ -tý Kelvinův článek:

$$\dot{\sigma}(t) = E_{\mu}^{\infty} v(t) \cdot \dot{\varepsilon}_{\mu}(t) + \frac{d}{dt} \eta_{\mu}^{\infty} v(t) \cdot \dot{\varepsilon}_{\mu}(t) \quad (6.23)$$

Zderivováním součinu podle času a vydělením E_{μ}^{∞}

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E_{\mu}^{\infty}} = v(t) \cdot \dot{\varepsilon}_{\mu}(t) + \tau_{\mu} \cdot \left(\dot{v}(t) \cdot \dot{\varepsilon}_{\mu}(t) + v(t) \cdot \ddot{\varepsilon}_{\mu}(t) \right) \quad (6.24)$$

Seskupením derivací stejného řádu

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E_{\mu}^{\infty}} = \tau_{\mu} \cdot v(t) \cdot \ddot{\varepsilon}_{\mu}(t) + \left(v(t) + \tau_{\mu} \dot{v}(t) \right) \dot{\varepsilon}_{\mu}(t) \quad (6.25)$$

Při dobře zvolené vnitřní proměnné (6.26) a jejím dosazením do rovnice (6.25) získáme nehomogenní lineární diferenciální rovnici (6.27).

$$\gamma_{\mu}(t) = \tau_{\mu} \cdot v(t) \cdot \dot{\varepsilon}_{\mu}(t) \quad (6.26)$$

$$\dot{\gamma}_{\mu}(t) + \frac{\gamma_{\mu}(t)}{\tau_{\mu}} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_{\mu}^{\infty}} \quad (6.27)$$

Rovnici (6.27) přepíšeme ve tvaru

$$\dot{\gamma}_{\mu}(t) + \frac{\gamma_{\mu}(t)}{\tau_{\mu}} = \frac{\Delta\sigma_k}{\Delta t_k E_{\mu}^{\infty}} \quad (6.28)$$

Tato diferenciální rovnice má obecné řešení

$$\gamma_{\mu}(t) = \frac{\Delta\sigma_k \tau_{\mu}}{\Delta t_k E_{\mu}^{\infty}} + C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.29)$$

Zvolíme-li za počáteční podmínku $\gamma_{\mu}(t_k) = \gamma_{\mu k}$, najdeme partikulární řešení

$$\gamma_{\mu}(t) = \frac{\Delta\sigma_k \tau_{\mu}}{\Delta t_k E_{\mu}^{\infty}} + \left(\gamma_{\mu k} - \frac{\Delta\sigma_k \tau_{\mu}}{\Delta t_k E_{\mu}^{\infty}} \right) \cdot e^{-\frac{t-t_k}{\tau}} \quad (6.30)$$

Vypočteme přírůstek této proměnné za čas Δt_k , vzorec zjednodušíme použitím proměnných definovaných v (5.18) a (5.27)

$$\Delta\gamma_{\mu k} = \gamma_{\mu}(t_{k+1}) - \gamma_{\mu}(t_k) = \lambda_{\mu k} \frac{\Delta\sigma_k}{E_{\mu}^{\infty}} - (1 - \beta_{\mu k}) \gamma_{\mu k} \quad (6.31)$$

Zbývá vypočítat přírůstek deformace

$$\Delta\varepsilon_{\mu k} = \frac{1}{\tau_{\mu}} \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\gamma_{\mu}(t)}{v(t)} \quad (6.32)$$

Pokud budeme aproximovat solidifikovaný objem v čase $v\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) = v_{k+1/2}$, zůstane pod integrálem jen $\gamma_{\mu}(t)$. Přírůstek deformace μ -tého článku v intervalu Δt_k je pak určen vzorcem

$$\Delta\varepsilon_{\mu k} = \frac{\Delta\sigma_k}{E_{\mu}^{\infty} v_{k+1/2}} \cdot (1 - \lambda_{\mu k}) + \frac{\gamma_{\mu k}}{v_{k+1/2}} \cdot (1 - \lambda_{\mu k}) \quad (6.33)$$

Ve vzorci (6.33) souvisí první člen na pravé straně s okamžitou deformací a druhý člen s dotvarováním. Přidáním nestárnoucí pružiny (nultý článek) a sečtením příspěvků ze všech jednotek můžeme napsat vzorec pro celkovou deformaci související s dotvarováním (6.34) a přírůstkový modul (6.35) popisující deformaci celého řetězce.

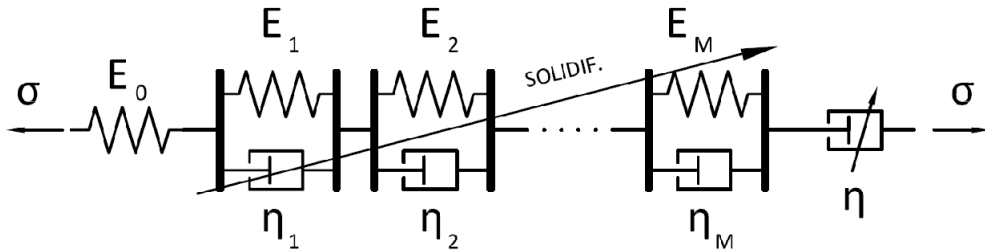
$$\Delta \varepsilon_k'' = \frac{1}{v_{k+1/2}} \cdot \sum_{\mu=1}^M (1 - \beta_{\mu k}) \gamma_{\mu k} \quad (6.34)$$

$$\bar{E}_k = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{v_{k+1/2}} \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{(1 - \lambda_{\mu k})}{E_{\mu}^{\infty}} \right)^{-1} \quad (6.35)$$

Ještě je potřeba vyjádřit hodnotu proměnné γ_{μ} na konci kroku.

$$\gamma_{\mu k+1} = \gamma_{\mu}(t_{k+1}) = \Delta \gamma_{\mu k} + \gamma_{\mu k} = \frac{\lambda_{\mu k}}{E_{\mu}^{\infty}} \mathbf{C}_v \Delta \sigma_k + \beta_{\mu k} \gamma_{\mu k} \quad (6.36)$$

Aby výsledný výraz popisoval celý výraz pro *basic creep* modelu B3, je nutné dodat člen související s dlouhodobými neelastickými účinky. Tento člen je zastoupen jedním stárnoucím tlumičem sériově zapojeným za celý řetězec. Výsledný řetězec má tedy podobu zachycenou na schématu na obrázku 6.1.



Obrázek 6.1 Schéma solidifikujícího Kelvinova řetězce doplněného o nestárnoucí pružinu a stárnoucí tlumič.

$$\Delta \varepsilon_{fk} = \frac{\Delta t_k}{\eta_{k+1/2}} \cdot \mathbf{C}_v \cdot \sigma_{k+1/2} \quad (6.37)$$

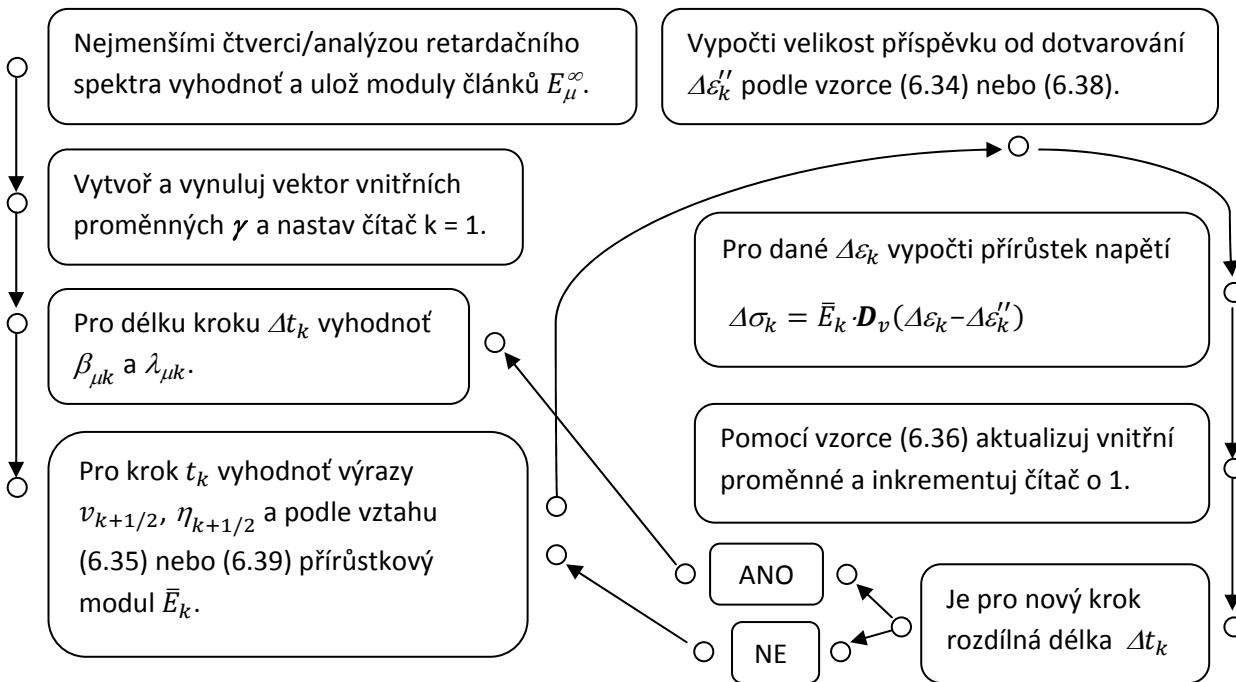
Dotvarování v jednom kroku bude o tento příspěvek větší:

$$\Delta \varepsilon_k'' = \frac{1}{v_{k+1/2}} \cdot \sum_{\mu=1}^M (1 - \beta_{\mu k}) \gamma_{\mu k} + \frac{\Delta t_k}{\eta_{k+1/2}} \cdot \mathbf{C}_v \cdot \sigma_k \quad (6.38)$$

Rovněž je nutné zmenšit přírůstkový modul:

$$\bar{E}_k = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{v_{k+1/2}} \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{(1 - \lambda_{\mu k})}{E_{\mu}^{\infty}} + \frac{\Delta t_k}{2 \cdot \eta_{k+1/2}} \right)^{-1} \quad (6.39)$$

Algoritmus:



6.4 METODY STANOVENÍ OPTIMÁLNÍCH PARAMETRŮ KELVINOVA ŘETĚZCE

Tato kapitola je zasvěcena optimalizaci parametrů Kelvinova řetězce. Předmětem optimalizace je jednak volba správných tuhostí E_{μ} , počtu jednotek M a retardačních časů τ_{μ} . Cílem bylo určit tyto parametry tak, aby byla minimalizována chyba vypočtená z rozdílu mezi správným řešením a řešením aproximovaným. Jako správné řešení je považována nestárnoucí funkce poddajnosti modelu B3 a jako aproximované řešení exponenciální algoritmus pro nestárnoucí Kelvinův řetězec.

6.4.1 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ Least Squares Method

První uvedenou metodou pro určení optimálních hodnot tuhostí pružin Kelvinových jednotek je metoda nejmenších čtverců. Jedná se o robustní metodu, která minimalizuje chybu aproximace vhodnou normou generovanou skalárním součinem, tedy $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Matematické odvození převzato z [18]

Nechť V je vektorový prostor, $f \in V$ a $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ nechť jsou lineárně nezávislé prvky z V . Chceme určit lineární kombinaci prvků $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ takovou, že norma

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k \right\| \quad (6.40)$$

bude nejmenší možná. Označme

$$v(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k \right\|^2 \quad (6.41)$$

Jelikož funkce v je spojitá na \mathbb{R}^n a $\lim_{|a| \rightarrow \infty} v(a) = \infty$, má \mathbb{R}^n globální minimum. Jelikož v má derivaci pro všechny n -tice $a = a_1, a_2, \dots, a_n$, je minimum v bodě, kde

$$\frac{\partial v(a)}{\partial a_k} = 0 \quad (6.42)$$

pro všechna $k = 1, 2, \dots, n$. Vyhodnocení (6.42):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(a)}{\partial a_k} &= \frac{\partial}{\partial a_k} \left(f - \sum_{j=1}^n a_j \phi_j, f - \sum_{m=1}^n a_m \phi_m \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial a_k} (f, f) - 2 \frac{\partial}{\partial a_k} \left(f, \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right) + \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\sum_{j=1}^n a_j \phi_j, \sum_{m=1}^n a_m \phi_m \right) = \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{j=1}^n a_j (f, \phi_j) + \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n a_j a_m (\phi_j, \phi_m) = \\ &= -2(f, \phi_k) + 2 \sum_{j=1}^n a_j (\phi_k, \phi_j) \end{aligned}$$

Tedy koeficienty a_k najdeme jako řešení soustavy rovnic, která má právě jedno řešení. To plyne z lineární nezávislosti prvků ϕ_k .

$$\begin{aligned} a_1(\phi_1, \phi_1) + a_2(\phi_1, \phi_2) + \dots + a_n(\phi_1, \phi_n) &= (f, \phi_1) \\ a_1(\phi_2, \phi_1) + a_2(\phi_2, \phi_2) + \dots + a_n(\phi_2, \phi_n) &= (f, \phi_2) \\ &\dots \\ a_1(\phi_n, \phi_1) + a_2(\phi_n, \phi_2) + \dots + a_n(\phi_n, \phi_n) &= (f, \phi_n) \end{aligned}$$

Zde matematické odvození končí. Pro naši potřebu je výhodné výše uvedenou soustavu přepsat v maticovém zápisu. Zavedeme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & \dots & (\phi_1, \phi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n, \phi_1) & \dots & (\phi_n, \phi_n) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} (f, \phi_1) \\ \vdots \\ (f, \phi_n) \end{Bmatrix} \quad (6.45)$$

Soustavu tak můžeme zapsat ve formě

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.46)$$

ze které vyjádříme vektor neznámých

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (6.47)$$

V naší inženýrské úloze se snažíme vhodnou kombinací koeficientů – tuhostí jednotlivých Kelvinových článků E_μ (kde $\mu = 1 \dots M$) – nalézt takovou funkci poddajnosti, která se na vymezeném intervalu bude co nejvíce blížit přesnému analytickému řešení. Úlohu ještě mírně transformujeme: abychom si ulehčili hledání, budeme se snažit najít převrácenou hodnotu tuhosti – poddajnost C_μ . Analytické řešení představuje *nestárnoucí funkce poddajnosti* pro popis základního dotvarování modelu B3 daná předpisem:

$$\Phi(t - t') = q_2 \ln \left(1 + \left(\frac{t - t'}{\lambda_0} \right)^n \right) \quad (6.48)$$

kde q_2 ... materiálový parametr závisející na obsahu cementu a pevnosti v tlaku

$t - t'$... délka trvání zatížení (t je aktuální čas a t' je čas vnesení zatížení)

λ_0 ... empirická konstanta, nejčastěji rovná jednomu dni

n ... empirická konstanta, nejčastěji 0.1

po dosazení a za předpokladu, že $t'=0$ (Φ představuje nestárnoucí funkci poddajnosti, jejíž hodnota nezávisí na okamžiku vnesení zatížení) se vztah zjednoduší:

$$\Phi(t) = q_2 \ln(1 + (t)^{0.1}) \quad (6.49)$$

Funkce poddajnosti Kelvinova řetězce tvořeného sériově zapojenými Kelvinovými články vznikne součtem dílčích poddajností. Pro ilustraci dobře poslouží obrázek 4.4 na samém začátku této práce. Převrácenou hodnotou modulu E_μ μ -té Kelvinovy jednotky jsme schopni nastavit hladinu, ke které se bude limitně blížit hodnota deformace pro časy řádově vyšší, než je retardační čas (na obrázku jsou všechny stejné a rovny jedné). Pokud vhodně zvolíme tyto tuhosti pro retardační časy, které jsou schopny popsat chování na námi vymezené oblasti, a dílčí poddajnosti sečteme, dostaneme křivku, která se bude velmi podobat funkci poddajnosti Φ . Pokud se retardační časy nepřekrývají a jsou voleny například v mocninách deseti, jistě by bylo možné určit vhodné koeficienty i ručně. Pro různé vstupní hodnoty a počítačovou implementaci je ale tento problém lepší svěřit metodě nejmenších čtverců.

Je potřeba sestavit matici A násobící vektor neznámých (poddajností C_μ) a vektor pravých stran b . Zvolíme diskrétní časy, pro které budeme minimalizovat chybu mezi analytickým a numerickým řešením; je dobré tyto časy volit v logaritmickém měřítku. Tyto časy zapíšeme do vektoru t , počet těchto časů označíme T . Je nutné tyto časy volit uvnitř intervalu, na kterém požadujeme dobrou shodu – v opačném případě by sice došlo k zlepšení aproximace v širším časovém intervalu, ale přesnost na oblasti, která nás zajímá, by se diametrálně zhoršila. Dále *vhodně* zvolíme retardační časy τ_μ , jejich počet označíme M .

Výsledná funkce poddajnosti má tvar

$$J_0(t) = \sum_{\mu=1}^M C_\mu \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\mu}} \right) \quad (6.50)$$

Prvky matice A vypočteme ze vztahu

$$A[i, j] = \sum_{k=1}^T \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_i}} \right) \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) \quad (6.51)$$

který představuje sumaci součinu poddajností dvou Kelvinových článků s retardačními časy τ_i a τ_j a s jednotkovými tuhostmi přes všechny časy, ve kterých minimalizujeme chybu. Vektor pravých stran soustavy (6.46) získáme obdobně. Jednu z poddajností nahradí funkce Φ .

$$b[i] = \sum_{k=1}^T \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_i}}\right) \Phi(t_k) \quad (6.52)$$

Nyní zbývá pouze matici \mathbf{A} invertovat a vyhodnotit součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$, kterým dostaneme vektor poddajností C_μ . Tyto poddajnosti stačí invertovat a získáme hledané moduly E_μ .

Velká výhoda této metody spočívá v tom, že stejným postupem je možné najít popis i stárnoucí funkce poddajnosti. Bohužel je pak nutné moduly určovat v každém výpočetním kroku. Mezi nevýhody patří vysoká výpočetní náročnost; s rostoucím počtem jednotek rychle roste počet operací potřebný pro sestavení úlohy a k jejímu vyřešení.

6.4.2 METODA ANALÝZY RETARDAČNÍHO SPEKTRA

Podobně jako metoda nejmenších čtverců, tak i metoda analýzy retardačního spektra vede k získání hodnot členů Dirichletovy řady ve tvaru (4.14). Pro použití této metody musí být ale splněn jeden předpoklad - nestárnoucí funkce poddajnosti pro popis základního dotvarování modelu B3, kterou hodláme aproximovat touto Dirichletovou řadou, musí mít vhodný tvar, kterým (6.49) je. Pro výpočet hodnot tuhostí členů Dirichletovy řady pak existuje přímý vzorec. Matematické odvození je možné nalézt v [1].

Retardační časy jednotlivých jednotek je v případě použití následujících vzorců nutné volit v násobcích deseti. Optimalizaci volby krajních hodnot je věnována následující kapitola. Poddajnost nultého členu má tvar:

$$\frac{1}{E_0} = q_2 \ln(1 + \tilde{\tau}_0) - \frac{q_2 \tilde{\tau}_0}{10(1 + \tilde{\tau}_0)} \quad (6.53)$$

kde

$$\tilde{\tau}_0 = \left(\frac{2\tau_1}{\sqrt{10}}\right)^{0.1} \quad (6.54)$$

a poddajnosti prvního až μ -tého členu:

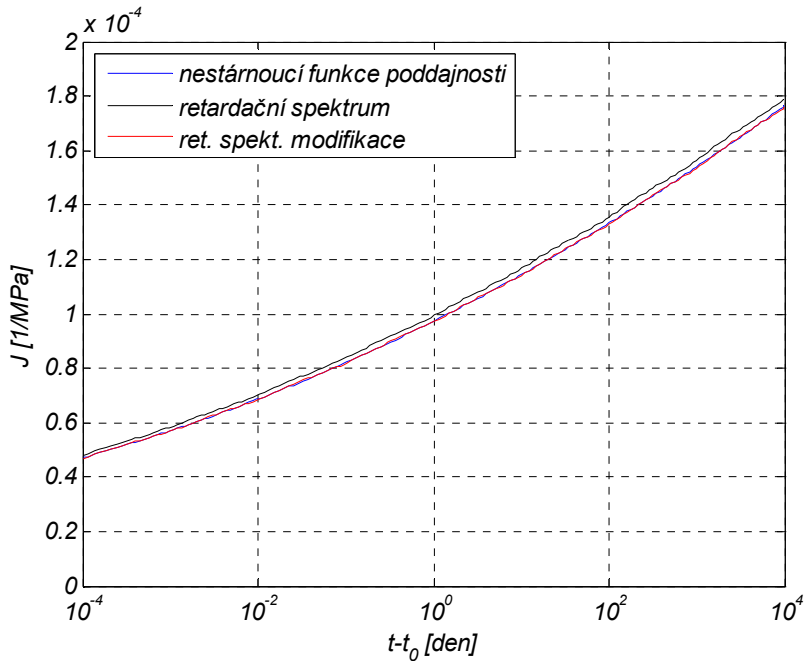
$$\frac{1}{E_\mu} = \ln(10) \frac{q_2 \tilde{\tau}_\mu (0.9 + \tilde{\tau}_\mu)}{10(1 + \tilde{\tau}_\mu)^2} \quad (6.55)$$

kde

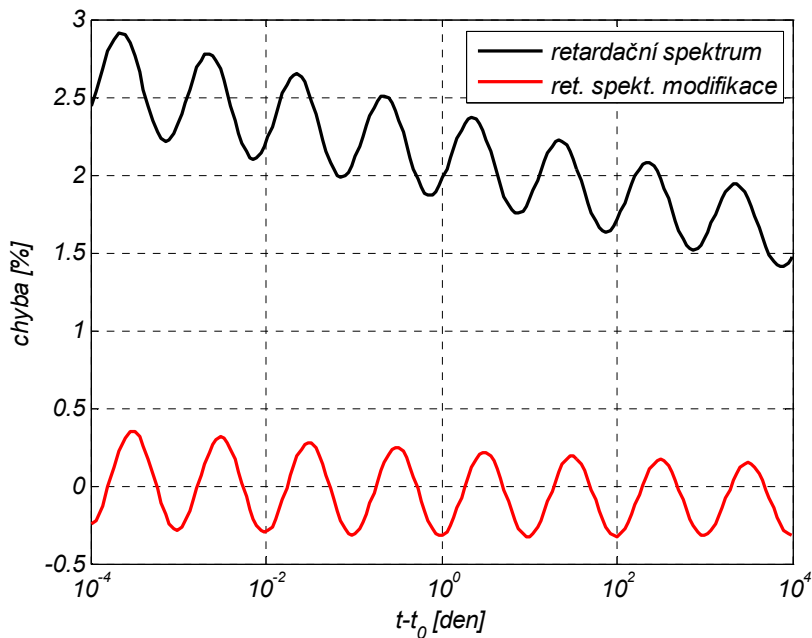
$$\tilde{\tau}_\mu = (2\tau_\mu)^{0.1} \quad (6.56)$$

Pokud použijeme tyto vzorce, naše řešení se bude od správného lišit o relativní chybu 1.5-3.0%. Toto řešení je na následujícím obrázku znázorněno černou křivkou. Jak je vidět, rozdíl tohoto a správného (analytického) řešení je v čase téměř konstantní a nabízí se tedy myšlenka výše uvedené vztahy upravit. Empiricky bylo zjištěno, že ke zlepšení přesnosti přispějeme, pokud vynásobíme retardační časy konstantou 1.35 a poddajnost posledního členu konstantou 1.2. Upravené řešení je vyznačeno červenou křivkou na následujícím obrázku. Relativní chyby upraveného

i neupraveného řešení jsou znázorněny na obrázku 6.3. Chyby mají přibližně sinusový charakter s amplitudou do 0.3 %. Relativní chyba neupraveného řešení klesá pouze zdánlivě; je to způsobeno tím, že se v čase zvyšuje hodnota, vůči které rozdíl hodnot normujeme.



Obrázek 6.2 Průběh funkce poddajnosti v čase. Hodnoty získané upravenou metodou analýzy retardačního spektra a hodnoty přesného řešení splývají.



Obrázek 6.3 Porovnání chyby upravené a neupravené analýzy retardačního spektra.

Tato metoda může vystihnout i chování funkce poddajnosti, jejíž vlastnosti se budou měnit v závislosti na okamžiku zatížení. Musí být ale popsána pomocí solidifikační teorie (viz kapitola 7), ve které je efekt stárnutí představován pouze jedním součinitelem násobícím jinak nestárnoucí funkci poddajnosti. Oproti tomu metoda nejmenších čtverců je schopna určit tuhosti členů Dirichletovy řady

bez tohoto omezení pouze s tím nedostatkem, že tuhosti bude nutné v případě obecného stárnutím vyhodnocovat v každém výpočetním kroku.

6.4.3 OPTIMALIZACE VOLBY RETARDAČNÍCH ČASŮ A POČTU KELVINOVÝCH JEDNOTEK

Pro Kelvinův článek platí, že v časovém intervalu vztaženém k retardačnímu času $\langle 0.05\tau; 3\tau \rangle$ se odehraje 5-95% konečné hodnoty deformace. Proto je potřeba volit krajní (nejkratší a nejdelší) retardační časy blízké hraničním hodnotám intervalu, pro který chceme dosáhnout dobré aproximace. Bývají doporučovány tyto hodnoty:

$$\tau_1 \leq 0.3t_{min} \quad (6.57)$$

$$\tau_M \geq 0.5t_{max} \quad (6.58)$$

kde τ_1 ... nejkratší retardační čas v řetězci

τ_M ... nejdelší retardační čas v řetězci

t_{min} a t_{max} spodní a horní hranice aproximované oblasti

Mezi těmito hodnotami by měly být retardační časy rovnoměrně rozděleny; bývá zvykem je volit v mocninách deseti tak, aby každý retardační čas vystihoval chování v jednom řádu; viz obrázek 4.4. Rovnoměrně je zde myšleno v logaritmickém měřítku.

Počet jednotek závisí samozřejmě na délce intervalu, na kterém chceme dosáhnout dobré aproximace funkce poddajnosti. Podle výše uvedených doporučení by například pro popis intervalu $\langle 100; 1000 \rangle$ dní měl postačit řetězec se třemi jednotkami.

Je důležité si uvědomit rozdíl mezi řetězci získanými podle stejného doporučení různými metodami; oba řetězce budou mít identické retardační časy jednotek $\mu = 1 \dots M$, budou se ale lišit tuhostmi. Jak je to možné, když oba mají aproximovat stejnou funkci? V řetězci získaném analýzou retardačního spektra je totiž navíc článek umožňující okamžitou deformaci. Jak se ukáže v další kapitole, je chování obou řetězců mimo interval $\langle t_{min}; t_{max} \rangle$ zcela odlišné.

6.5 NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ A VYHODNOCENÍ

V této kapitole prezentuji výsledky, které jsem získal namodelováním obou algoritmů v prostředí Matlab. Předmětem zájmu je vliv volby časového intervalu $\langle t_{min}; t_{max} \rangle$ na přesnost řešení. Relativní chyba řešení je počítána stejným způsobem jako v kapitole 5.2. Za přesné řešení se považuje analyticky předepsaná nestárnoucí funkce poddajnosti modelu B3 - (6.49). Za parametr q_2 této funkce je ve všech případech dosazena hodnota $1.40389 \cdot 10^{-4}/\text{MPa}$, získaná pro tlakovou pevnost $f_c = 38 \text{ MPa}$ a obsah cementu 400 kg/m^3 betonu. Upozorňuji na změnu v časových jednotkách – model B3 používá jako základní jednotku času dny. Retardační časy jsou určeny podle výše uvedených doporučení. Při metodě nejmenších čtverců jsou výrazy vyhodnocovány ve třiceti bodech.

Zkoumány jsou následující časové intervaly:

- 1 – 5000 dní – charakteristická oblast
- 0.001 – 5000 dní – široký interval
- 100 – 1000 dní – úzký interval (1 řád)
- 100 – 150 dní – užší interval

Je také zkoumán případ (zařazen za model a)), který představuje solidifikující Kelvinův řetězec, ke kterému je navíc přidána nestárnoucí pružina a stárnoucí tlumič.

Vyhodnocení

Na následujících stranách jsou uvedeny grafické výsledky numerických výpočtů. Lze konstatovat, že při dodržení doporučeného nastavení retardačních časů došlo ve všech případech k výborné shodě mezi aproximovaným řešením a řešením přesným. Relativní chyba se pohybuje na sledované oblasti v řádu 0,25%, což je z hlediska stavařské praxe a dosažitelné přesnosti experimentálního měření zanedbatelná chyba. Zcela rozdílný průběh funkce poddajnosti je způsoben tím, že metoda analýzy retardačního spektra zařazuje na začátek Kelvinova řetězce pružinu.

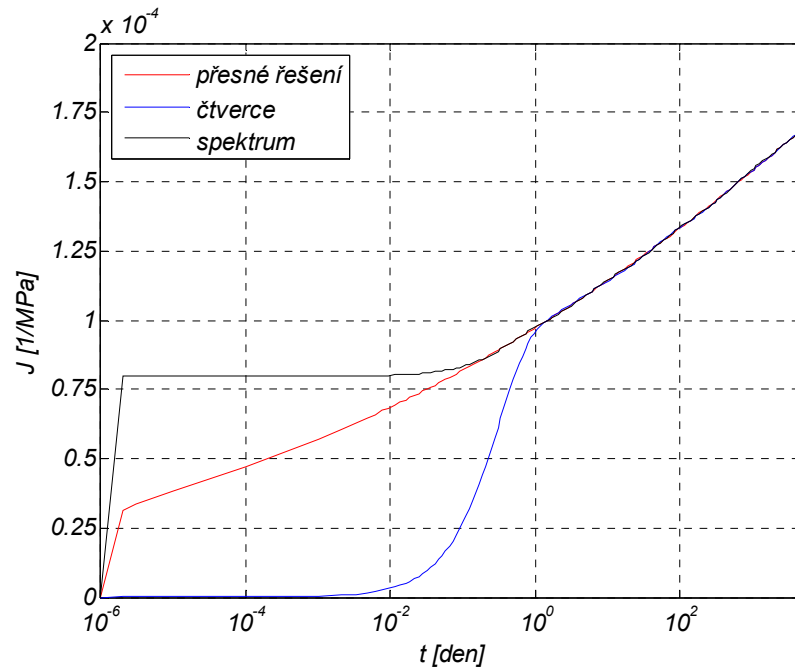
Výsledky obdržené z modelů nakalibrovaných analýzou retardačního spektra dávají ve všech případech *ustálenější* výsledky – amplituda relativní chyby se v žádném ze čtyř modelovaných případů neliší – je v řádu $\pm 0,25$ %. Charakter relativní chyby v logaritmickém měřítku připomíná sinusoidu. Z hlediska rozsahu přesného řešení dává tato metoda dobré výsledky i v blízké oblasti hranice námi specifikovaného časového intervalu. Ve všech případech je dosaženo přijatelných výsledků i pro hodnoty, které jsou desetinou spodní hranice časového intervalu. Pro ně se chyba pohybuje do 1.5 %. To samé pravděpodobně platí i pro hodnoty za horní hranicí intervalu – potvrzeno jen pro poslední případ (v ostatních případech buď nebyly hodnoty za horní hranicí intervalu vyhodnoceny, nebo byl interval *krátký*).

Metoda nejmenších čtverců dává také dobré výsledky. Charakter průběhu relativní chyby je ale nepravidelný – to platí i z hlediska amplitudy. Ta je v některých případech menší, jindy větší nebo srovnatelná s výše uvedenou metodou. Konstatovat však lze, že v případě velmi krátkého časového intervalu je chyba minimální (poslední případ d)). Parametry E_{μ} byly stanoveny tak, aby bylo dosaženo co největší přesnosti v diskrétních okamžicích. Nelze se tedy divit, že za námi specifikovanými hranicemi časového intervalu nemá průběh přesného řešení s výsledkem získaným metodou nejmenších čtverců nic společného. Za povšimnutí stojí v posledním případě klesající funkce poddajnosti za časem 150 dní, což je způsobeno záporným modulem $E_2 = -1.149371 \cdot 10^5$ MPa ($E_1 = 7.1090310 \cdot 10^3$ MPa). Počet bodů, ve kterých se vyhodnocují poddajnosti článků a poddajnost Φ , byl shledán dostatečným (30 hodnot).

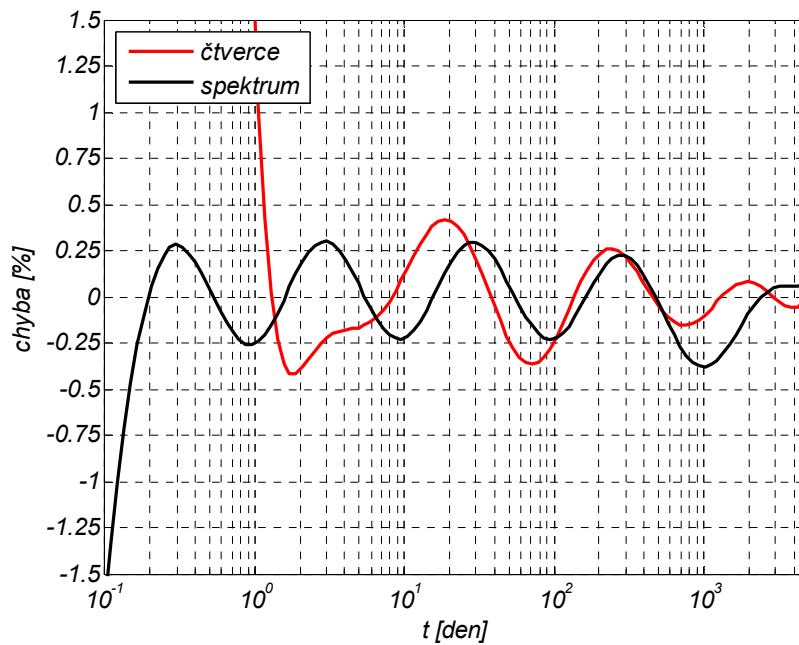
Kdyby byla relativní chyba 0.25 % považována za příliš velkou, není problém obě metody upravit zmenšením časových intervalů mezi retardačními časy jednotlivých článků.

a) 1 – 5000 dní – charakteristická oblast

Retardační časy: 0.3, 3, 30, 300, 3000 dní

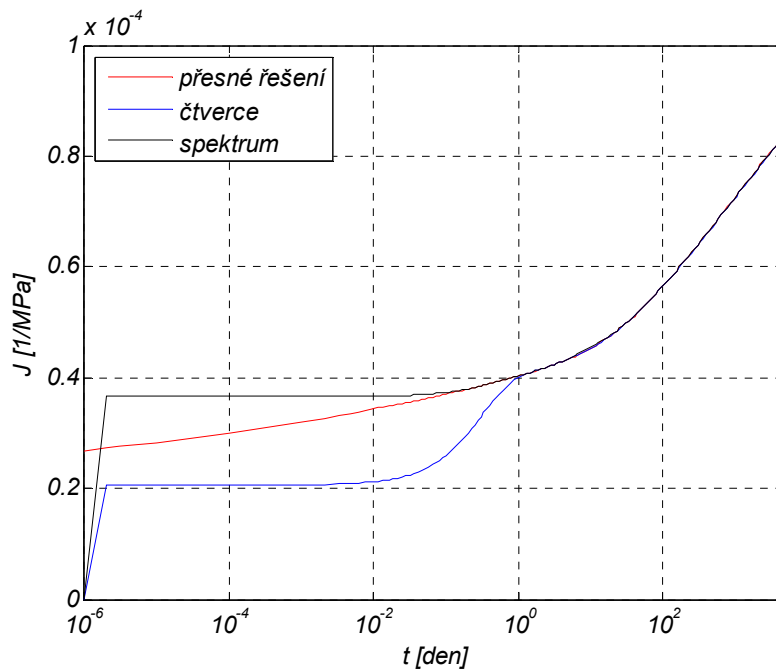


Obrázek 6.4 Průběh funkce poddajnosti v čase.

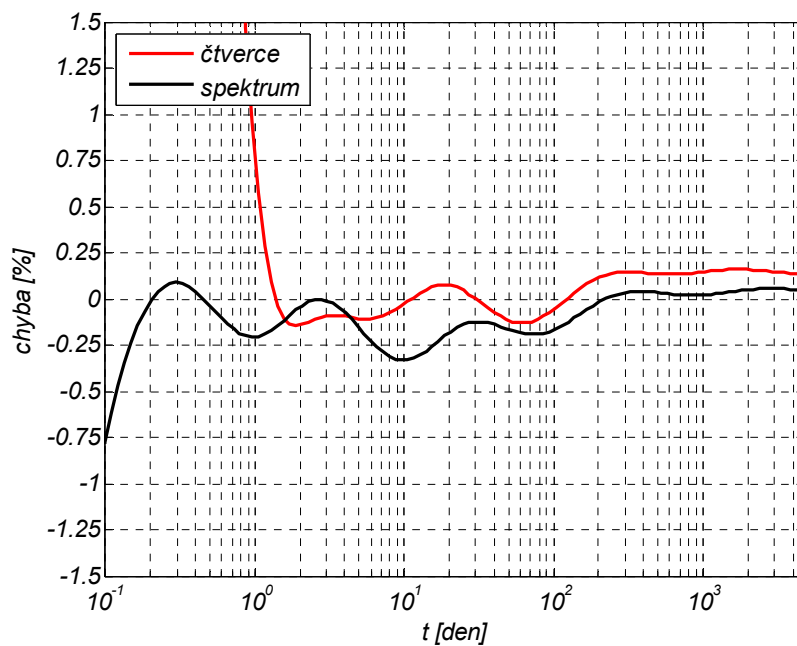


Obrázek 6.5 Průběh relativní chyby v čase.

1 – 5000 dní – charakteristická oblast + stárnutí



Obrázek 6.6 Průběh funkce poddajnosti v čase.

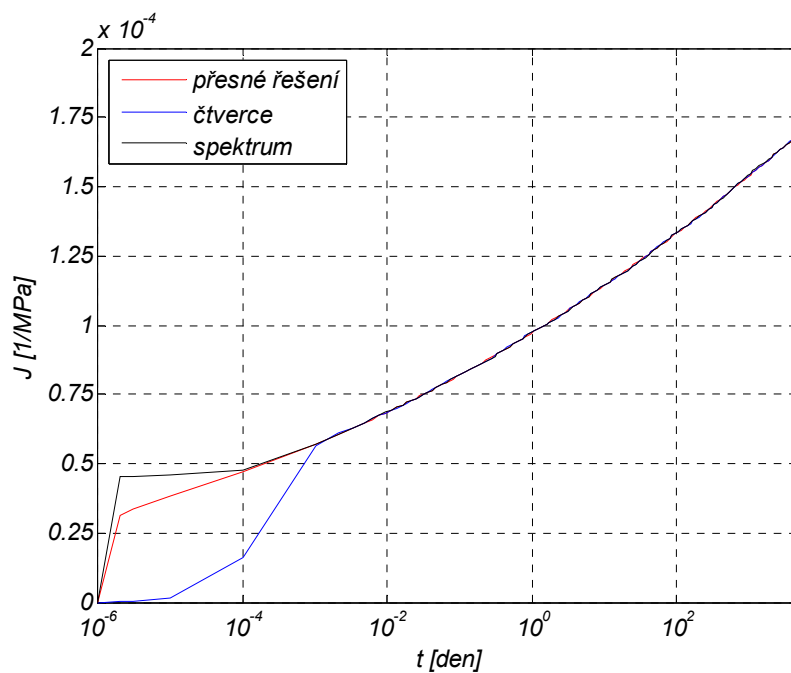


Obrázek 6.7 Průběh relativní chyby v čase.

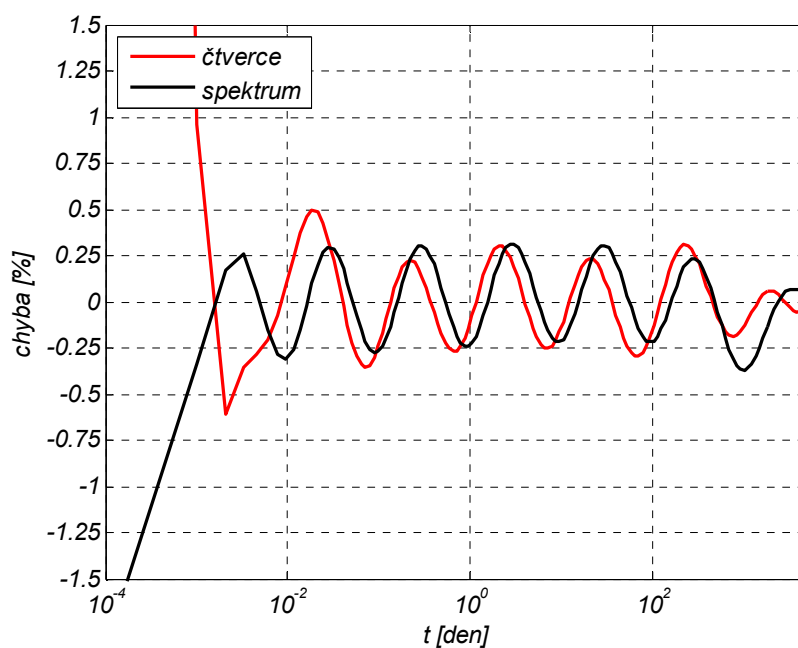
V tomto případě se solidifikujícím řetězcem se chyba zmenšila, důvod je zřejmý; rozdílnosti mezi oběma metodami a přesným řešením spočívají v aproximaci Kelvinova řetězce. Jelikož se jeho poddajnost v solidifikační teorii snižuje a rovněž jsou do reologické soustavy zařazeny další články: stárnoucí tlumič a nestárnoucí pružina, jejichž poddajnost jsme schopni vyjádřit přesně, je celková chyba menší.

b) 0.001 – 5000 dní – široký interval

Retardační časy: 0.0003, 0.003, 0.03, 0.3, 3, 30, 300, 3000 dní



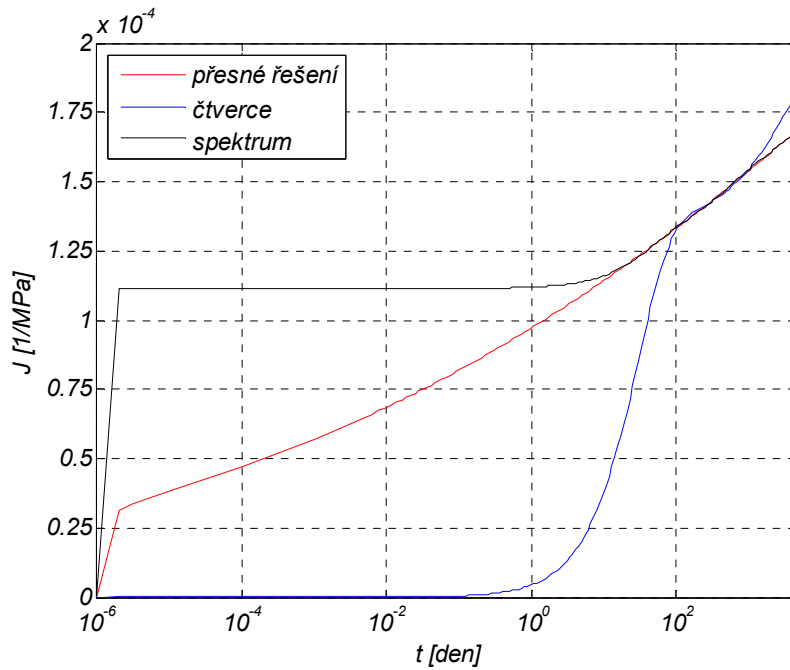
Obrázek 6.8 Průběh funkce poddajnosti v čase.



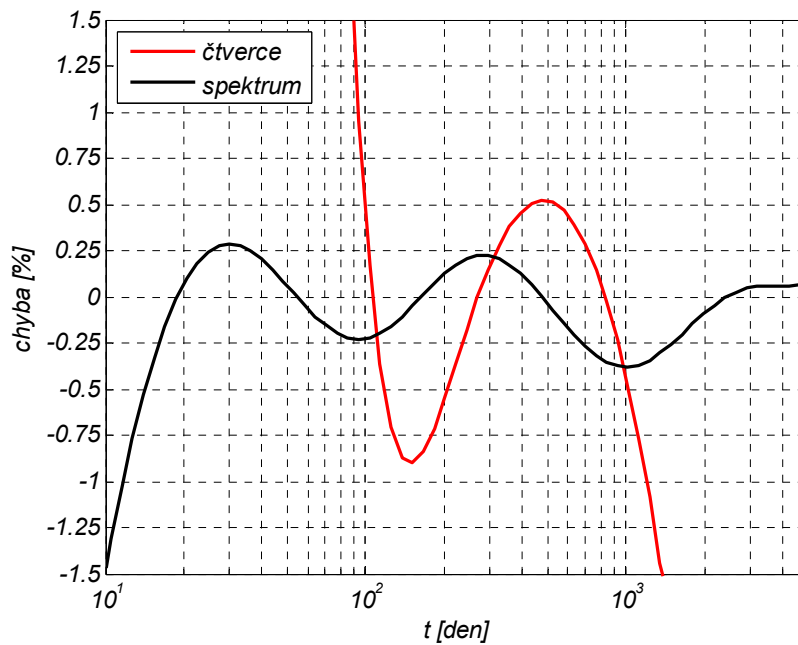
Obrázek 6.9 Průběh relativní chyby v čase.

c) 100 – 1000 dní – úzký interval (1 řád)

Retardační časy: 30, 300, 3000 dní



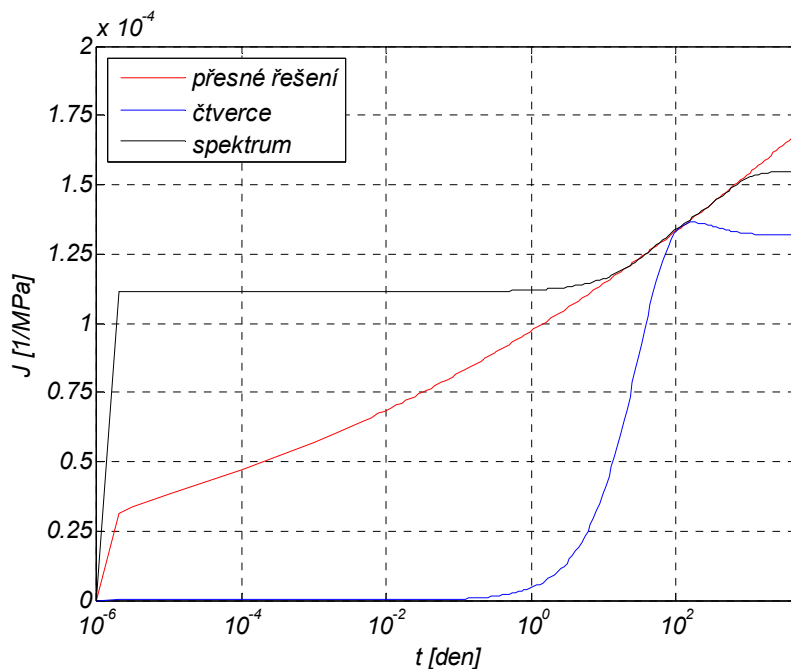
Obrázek 6.10 Průběh funkce poddajnosti v čase.



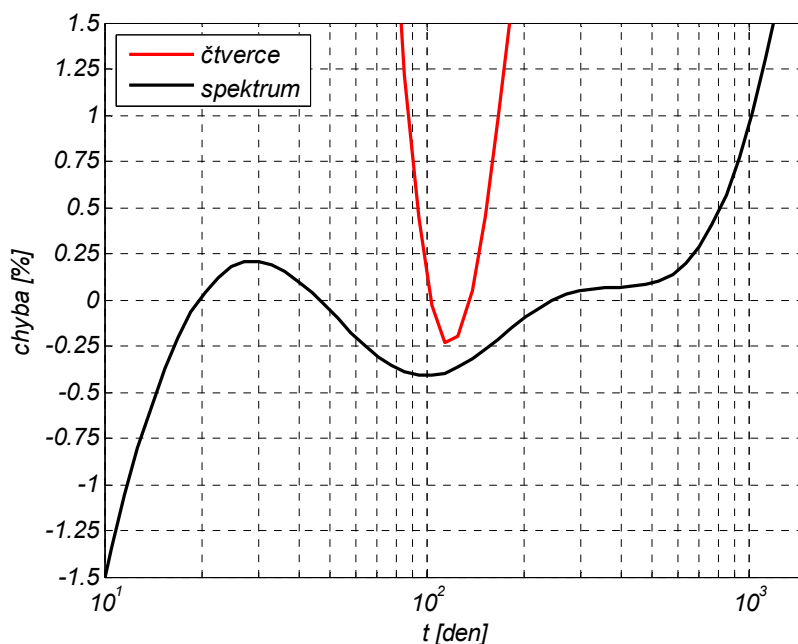
Obrázek 6.11 Průběh relativní chyby v čase.

d) 100 – 150 dní – užší interval

Retardační časy: 30, 300 dní



Obrázek 6.12 Průběh funkce poddajnosti v čase.



Obrázek 6.13 Průběh relativní chyby v čase.

Závěrem této kapitoly bych chtěl dodat, že ač jsou doporučení pro nastavení krajních retardačních časů v případě metody analýzy retardačního spektra konzervativní, neměnil bych je; toto nastavení totiž dává záruku, že budou ve všech případech (i na velmi krátkých intervalech) použity minimálně dvě Kelvinovy jednotky. V případě použití jen jednoho článku je pak vzniklá chyba na hranici tolerovatelné přesnosti. Samozřejmě, pokud někdo zaručí, že software, kde bude tato

metoda implementována, budou obsluhovat pouze lidé, kteří, ač budou potřebovat jen jistou hodnotu, specifikují širší časový interval, pak lze za tohoto předpokladu jednu Kelvinovu jednotku ušetřit.

7. SOLIDIFIKAČNÍ TEORIE

(Solidification Theory)

Solidifikační teorie pochází, stejně jako většina modelů a teorií zmíněných v této práci, z dílny Prof. Bažanta (1977). Solidifikační teorie představuje velmi efektivní nástroj pro popis přetvárných vlastností betonu, byla z ní odvozena současná formulace základního dotvarování v modelu B3 prezentovaná v kapitole 3.7. Jak je známo, hodnotu relativní deformace v čase lze vypočítat integrací součinu funkce poddajnosti a změny působícího napětí:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, t') d\sigma(t') \quad (7.1)$$

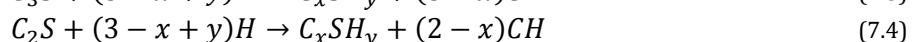
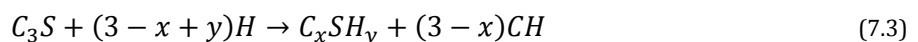
Jak je ze vztahu vidět, funkce poddajnosti závisí na hodnotách časů t a t' , nikoliv pouze na jejich rozdílu $(t - t')$, tedy délce trvání zatížení. Tímto se reálný popis přetvoření stává z inženýrského hlediska velmi nelehkou úlohou. Solidifikační teorie tento problém řeší velmi elegantní cestou – zavádí se veličina, která má *jasný fyzikální význam* a je časově *závislá*. Současně matematické vyjádření časového průběhu této veličiny v čase není komplikované. Stárnoucí funkci poddajnosti lze pak zapsat jako součin této veličiny s nestárnoucí funkcí poddajnosti, jejíž hodnota závisí jen na délce trvání zatížení $(t - t')$. Odvození viz [13]. Vyjádřeno pomocí první časové derivace

$$\dot{J}(t, t') = \frac{1}{v(t)} \dot{\Phi}(t - t') \quad (7.2)$$

kde Φ je nestárnoucí funkce poddajnosti, jejímž argumentem je jen délka trvání zatížení, a $v(t)$ je ona pomocná veličina závisící jen na stáří betonu v okamžiku zatížení.

Tato teorie tedy nepopisuje měnící se fyzikální vlastnosti jednotlivých složek kompozitu v čase – to by skutečně problém nezjednodušilo. Veličina $v(t)$ popisuje důsledek chemické reakce probíhající v betonu (cementové pastě): vyjadřuje objemový podíl vzájemně propojených hydratačních produktů vůči jejich konečnému objemu. Hydratační produkty způsobující dotvarování bývají označovány jako C-S-H gely. Funkce $v(t)$ je rostoucí, $v(0) = 0$, $v(\infty) = 1$. Průběh solidifikace si lze představit podobně jako proces sedimentace – postupné usazování vrstviček hydratačních produktů, které jsou vzájemně pevně spojeny.

Pozn.: v cementářské notaci označuje $C = CaO$ = oxid vápenatý, $S = SiO_2$ = oxid křemičitý, $H = H_2O$ = voda, $CH = Ca(OH)_2$ = hydroxid vápenatý. Potom $3CaO \cdot SiO_2$ = křemičitan trojvápenatý = trikalciumsilikát = alit = C_3S a $2CaO \cdot SiO_2$ = křemičitan dvojvápenatý = dikalciumsilikát = belit = C_2S . Toto značení nám usnadní zápis hydratační reakce alitu a belitu.



kde parametry $x = 0.5 - 1.5$ a $y = 0.5 - 2.5$ určují výslednou strukturu: lístkovitá = C-S-H(I) nebo C-S-H(III), která má podobu tenkých dutých svazčitých vláken.

Bohužel pro popis reálného chování betonu nám funkce poddajnosti (7.2) stačit nebude. Vzhledem k tomu, že vlastnosti betonu se mění (roste efektivní modul) i po ukončení hydratačních reakcí (přibližně ve stáří jednoho roku), potřebujeme do funkce poddajnosti zařadit člen, který by

toto postihoval. Tento člen bude představován stárnoucím tlumičem. Po doplnění členu vystihujícího okamžitou deformaci můžeme funkci poddajnosti zapsat ve formě

$$J(t, t') = q_1 H(t - t') + J_v(t, t') + J_f(t, t') \quad (7.5)$$

První člen násobený Heavisideovou funkcí vystihuje okamžitou poddajnost. U betonu se předpokládá, že jde o časově nezávislou konstantu. Druhý člen představuje viskoelastické chování popsané solidifikační teorií ($J_v(t, t') = J(t, t')$ z rovnice (7.2)) a poslední člen popisuje dlouhodobé deformace. Index f je z anglického slova *flow* (téci, plynout, proudit).

Nyní popíšeme jednotlivé členy této funkce poddajnosti; nejprve viskoelastický člen $J_v(t, t')$. Jak bylo již dříve zmíněno, z experimentálních měření bylo zjištěno, že funkce poddajnosti vynesená v semilogaritmickém měřítku v závislosti na délce zatížení $t - t'$ má zpočátku exponenciální charakter, který po určité době přejde v lineární průběh. Funkci poddajnosti charakterizující nestárnoucí viskoelastickou odezvu můžeme hledat v podobném tvaru jako u Log Double Power Law (kapitola 3.6).

$$\Phi(t - t') = q_2 \ln \left(1 + \left(\frac{t - t'}{\lambda_0} \right)^n \right) \quad (7.6)$$

Vliv stárnutí pak zapíšeme pomocí výše zmíněné funkce popisující časový vývoj objemu hydratačních produktů.

$$\frac{1}{v(t)} = \alpha + \left(\frac{\lambda_0}{t} \right)^m \quad (7.7)$$

kde q_2, λ_0, n, m a α jsou konstanty. Postupným dosazením do vztahu (7.2) a integrací

$$\begin{aligned} J_v(t, t') &= \frac{\Phi(0)}{v(t')} + \int_{t'}^t \frac{\dot{\Phi}(s - t')}{v(s)} ds = \int_{t'}^t \left[\alpha + \left(\frac{\lambda_0}{s} \right)^m \right] \dot{\Phi}(s - t') ds = \\ &= \alpha \int_{t'}^t \dot{\Phi}(s - t') ds + \int_{t'}^t \lambda_0^m s^{-m} \dot{\Phi}(s - t') ds = \\ &= \alpha [\Phi(t - t') - \Phi(0)] + \int_{t'}^t \frac{\lambda_0^m s^{-m} n \cdot q_2 ds}{s - t' + \lambda_0^n (s - t')^{1-n}} = \\ &= \alpha q_2 \ln \left(1 + \left(\frac{t - t'}{\lambda_0} \right)^n \right) + q_2 n \cdot \lambda_0^m \int_{t'}^t \frac{s^{-m} ds}{s - t' + \lambda_0^n (s - t')^{1-n}} = \\ &= q_3 \ln \left(1 + \left(\frac{t - t'}{\lambda_0} \right)^n \right) + q_2 \cdot Q(t, t') \end{aligned} \quad (7.8)$$

Pokud dosadíme za konstantu $\lambda_0 = 1$ den, dostaneme první dva členy z výrazu pro basic creep modelu B3 (3.29).

Převrácená hodnota viskozity stárnoucího tlumiče je dána předpisem

$$\frac{1}{\eta(t)} = \frac{q_4}{t} \quad (7.9)$$

kde q_4 je materiálová konstanta. Funkci poddajnosti tlumiče získáme integrací vztahu (7.9).

$$J_f(t, t') = \int_{t'}^t \frac{ds}{\eta(s)} = q_4 \ln \left(\frac{t}{t'} \right) \quad (7.10)$$

čímž jsme získali poslední člen vzorce (3.29).

Pomocí solidifikační teorie jsme tedy získali metodu, jak řešit jednoduchým způsobem komplexní úlohu. Stárnoucí funkci poddajnosti, kterou nelze integrovat, jsme nahradili součinem nestárnoucí funkce poddajnosti a funkcí, která vyjadřuje charakter stárnutí. V případě numerického řešení bylo v případě stárnoucí funkce popsané Dirichletovou řadou nutné v každém časovém kroku vyhodnocovat tuhosti jejich členů. Solidifikační teorie nám dává možnost tyto tuhosti vyřešit jen jednou na počátku výpočtu a stárnutí zohlednit pouhým vynásobením s časově závislou funkcí, kterou lze *levně* v každém časovém kroku vyhodnotit.

Pro postihnutí okamžitých deformací byla přidána elastická pružina a pro popis dlouhodobého chování stárnoucí tlumič. Pokud za konstanty uvedené ve vzorcích dosadíme charakteristické hodnoty ($\lambda_0 = 1$ den, $m = 0.5$, $n = 0.1$), zbývá určit pouze čtyři materiálové parametry $q_1 - q_4$ pro jejichž stanovení byly vyvinuty empirické vzorce zohledňující složení betonové směsi a pevnost v tlaku.

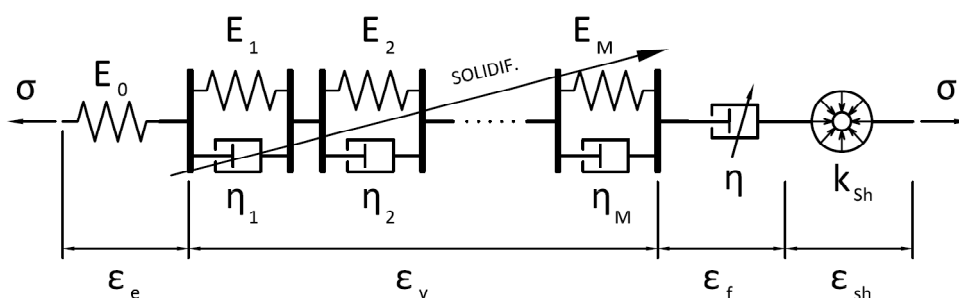
Zde uvedené vzorce lze použít pouze pro základní dotvarování. Zobecnění o vliv proměnné vlhkosti (a teploty) je předmětem kapitoly věnované Microprestress Solidification Theory.

8. MICROPRESTRESS-SOLIDIFICATION THEORY

(Solidifikační teorie mikropředpětí)

Předmětem této teorie je popis reálného přetvárného chování betonu. Její řídicí rovnice mají skutečný fyzikální význam; charakter vzorců tedy nebyl formulován jen tak, aby došlo k dobré shodě s daty získanými z měření a experimentů. Důvodem pro formulování této teorie byla potřeba postihnout dlouhodobé deformace betonu, jejichž průběh je ovlivněn nejen stářím betonu v okamžiku zatížení, ale i okolní vlhkostí a teplotou. V této kapitole budou formulovány vztahy postihující jen vliv průběhu vlhkosti. Předpokladem této teorie je fakt, že pokud nedojde ke změně vlhkosti, zjednoduší se řídicí rovnice na vztah popisující základní dotvarování popsané v předchozí kapitole. Je potřeba dodat, že ač jsou obě teorie – teorie solidifikace a teorie mikropředpětí – založeny na fyzikálním popisu mikrostruktury betonu, vzájemně se nevyklučují. Popisují totiž dva zcela odlišné procesy.

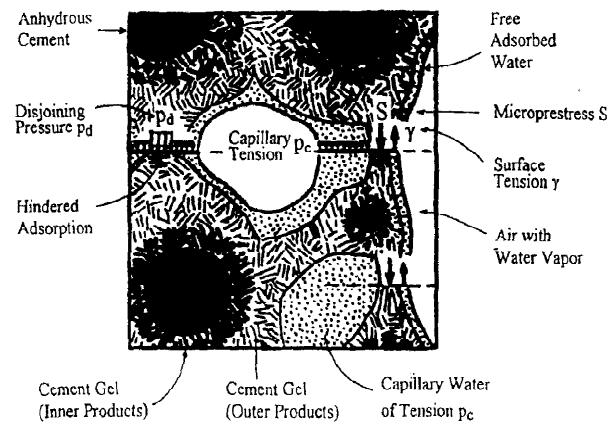
V druhé části této kapitoly bude definován vztah, díky kterému budeme moci popsat chování betonu formou reologického řetězce, viz obrázek 8.1. Jeho první dva členy popisující okamžitou deformaci ϵ_e a viskoelastickou deformaci ϵ_v převezmeme ze solidifikační teorie, popis druhých dvou: tlumiče (deformace ϵ_f) s viskozitou závislou na čase, vlhkosti (a teplotě) a člen popisující smrštění ϵ_{sh} formulujeme v této kapitole.



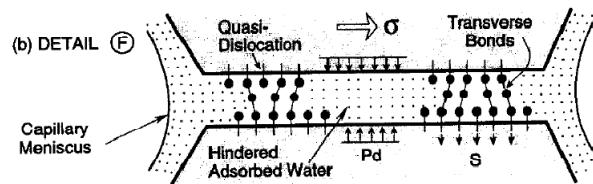
Obrázek 8.1 Schéma reologického řetězce popisujícího mikroprestress-solidification theory.

Základní řídicí veličinou této teorie je tzv. *mikropředpětí*. Označení mikropředpětí by nemělo budít dojem, že jde o veličinu nabývající malých hodnot – právě naopak. Předpona mikro je v tomto případě motivována popisem mikrostruktury betonu. Mikropředpětí vzniká během hydratace betonu vlivem velkých a velmi lokalizovaných objemových změn. Velikost mikropředpětí je ovlivňována změnami vlhkosti a teploty, popřípadě lokálními změnami objemu způsobené chemickými reakcemi. Velikost mikropředpětí je mnohem větší než velikost vnějšího makroskopického napětí. Proto se nepředpokládá, že by změny makroskopického napětí (se stejnou orientací jako mikropředpětí) mohly ovlivnit relativní deformace v místech, kde působí mikropředpětí. Je dobré vysvětlit, proč je právě mikropředpětí vhodnou veličinou pro popis chování betonu. Ztvrdlá cementová pasta vyrobená z portlandského cementu je velmi porézní materiál s až nepředstavitelným specifickým povrchem: $500 \text{ m}^2 / 1 \text{ cm}^3$. Tento materiál je protkán soustavou kapilár (průměr větší než $1 \mu\text{m}$) a podkapilár (průměr od 0.263 nm do $1 \mu\text{m}$), což vede ke vzniku velkých kapilárních a adsorpčních sil, (viz. obrázek 8.2). Například tlak vyvozený při relativní vlhkosti 100% v nanopóru (průměr od 0.263 do 2.63 nm) o průměru dvou molekul vody je při teplotě $25 \text{ }^\circ\text{C}$ 174 MPa . Tento tlak působí na stěny póru a musí být vyrovnán tahovými silami působícími v úzkých krčcích, které spojují dvě protilehlé strany stejného nanopóru (viz. obrázek 8.3). Na mikroúrovni se tedy cementová pasta nachází v samorovnovázném

poli napětí. Termín mikropředpětí je zřejmě převzat z analogie mezi tahovými můstky působícími proti pórovému tlaku a taženou předpínací výztuží působící proti tlačnému betonu – oba systémy jsou z globálního hlediska v rovnováze.



Obrázek 8.2 Mikrostruktura cementové pasty a působící napětí. Převzato z [11].



Obrázek 8.3 Schéma popisující dislokaci na mikroúrovni. Převzato z [9].

Jak jsem už dříve zmínil – nepředpokládá se, že by makroskopické napětí jakkoliv ovlivňovalo velikost mikropředpětí působící ve stejném směru a jemu příslušnou deformaci, protože mikropředpětí má mnohonásobně větší velikost. Deformaci lze ale dobře popsat pomocí napětí působícího v kolmém směru k mikropředpětí. Obrázek 8.3 tuto situaci dokumentuje. Mikropředpětí označené S vzniká reakcí na působící tlak p_d v nanopóru. Průběh deformace můžeme popsat podobně, jako se popisuje plasticita – totiž posunem v krystalové mřížce o jeden atom. Zde ale proces funguje mírně odlišně. Nepředpokládá se, že by všechny můstky přenášející mikropředpětí byly stejně zatíženy. Proto dojde při zatížení příčným makroskopickým napětím σ k přerušení nejvíce zatížené vazby a následné relaxaci makroskopického napětí, největší namáhání se přesune na jiný můstek a situace se opakuje. Pokud dojde k posunu, může nastat opětovné spojení přerušovaných můstků.

Je zřejmé, že čím větší bude napětí přenášené můstky (mikropředpětí S), tím spíše dojde k přerušení vazeb a následné deformaci. Snížení relativní vlhkosti vede ke zvýšení povrchového napětí a tím zvýšení tlaků uvnitř (nano)pórů. Stárnutí materiálu bude jistě souviset se snižováním mikropředpětí.

Vzorec pro výpočet povrchového napětí

$$\gamma = -\frac{C_1 \cdot R \cdot T}{M} \cdot \ln h + \gamma_1 \quad (8.1)$$

kde $R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$... univerzální plynová konstanta

$M = 18.2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$... molární hmotnost vody

T ... absolutní teplota [K]

C_1 a γ_1 ... konstanty

Derivací (8.1) podle času

$$\dot{\gamma} = -\frac{c_1 \cdot \dot{h}}{h} \quad (8.2)$$

kde $c_1 = \frac{C_1 \cdot R \cdot T}{M}$... pomocná konstanta

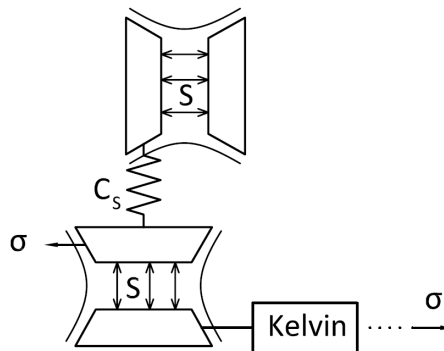
Za konstantní teploty se napětí v kapilárah p_c a relativní tlak vodní páry p_v mění úměrně s povrchovým napětím γ . Zapišeme rychlost přetváření viskózního tlumiče:

$$\dot{\epsilon}_f = \frac{\sigma}{\eta(S)} \quad (8.3)$$

kde S ... mikropředpětí

σ ... makroskopické napětí působící kolmo k mikropředpětí (viz obrázek 8.3).

Orientace plošek, na kterých působí mikropředpětí není díky izotropii materiálu jednotná, pro každý směr je přitom hodnota mikropředpětí S stejná. Schéma relaxace mikropředpětí plyne z obrázku 8.4, kde máme ve vertikálním směru sériově zapojenou pružinu s tuhostí C_s s viskózním článkem, který musí mít stejnou viskozitu jako článek zapojený v původním horizontálním uspořádání, kde je členem reologického řetězce popisujícího dotvarování.



Obrázek 8.4 Mechanismus relaxace mikropředpětí.

Můžeme tedy napsat diferenciální rovnici popisující relaxaci mikropředpětí:

$$\frac{\dot{S}}{C_s} + \frac{S}{\eta(S)} = \frac{\dot{s}}{C_s} \quad (8.4)$$

kde \dot{s} ... časová derivace okamžité hodnoty mikropředpětí, jehož změna je vyvolána kapilárním tlakem, povrchovým napětím nebo tlakem vyvolaným krystalizací.

Předpokládáme mocninový tvar funkce viskozity v závislosti na mikropředpětí.

$$\frac{1}{\eta(S)} = c \cdot S^{p-1} \quad (8.5)$$

kde $p > 1$ je vhodná konstanta [-] a $c > 0$ [$\text{MPa}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$].

Pokud je rovna časová derivace mikropředpětí \dot{s} a derivace pórového tlaku $\dot{\gamma}$, dostaneme kombinací rovnic (8.2), (8.4) a (8.5) nelineární diferenciální rovnici popisující relaxaci mikropředpětí v závislosti na vlhkosti a její časové změně.

$$\dot{S} + c_0 S^p = -\frac{c_1 \cdot \dot{h}}{h} \quad (8.6)$$

Ve vztahu jsme užili substituci

$$c_0 = C_S \cdot c \cdot p \quad (8.7)$$

Pro limitní případ, kdy nedochází k vysychání (basic creep), se pravá strana rovnice (8.6) rovná nule a funkce mikropředpětí $S(t)$ splňující počáteční podmínku

$$S(t_0) = S_0 \quad (8.8)$$

může být snadno vyřešena separací proměnných. Řešením rovnice (8.6) pro $\dot{h} = 0$ je pak

$$S(t) = \left(S_0^{1-p} + c_0(p-1)(t-t_0) \right)^{\frac{1}{1-p}} \quad (8.9)$$

Pokud právě uvedený vztah dosadíme do rovnice (8.5) a tu následně do (8.3), dostaneme časovou závislost mezi rychlostí deformace viskózního článku $\dot{\epsilon}_f$, vnějšího napětí σ a mikropředpětí S .

$$\dot{\epsilon}_f(t) = \sigma(t) \cdot c \cdot p \cdot S^{p-1} = \sigma(t) \cdot c \cdot p \frac{1}{S_0^{1-p} + c_0(p-1)(t-t_0)} \quad (8.10)$$

Funkci poddajnosti J_f získáme zavedením konstantního napětí $\hat{\sigma}$ působícího od okamžiku v čase t' a integrací $\dot{\epsilon}_f(t)$ definovaného v (8.10).

$$J_f(t, t') = \frac{c \cdot p}{c_0(p-1)} \ln \left(\frac{1 + c_0(p-1)S_0^{p-1}(t-t_0)}{1 + c_0(p-1)S_0^{p-1}(t'-t_0)} \right) \quad (8.11)$$

Nyní zavedeme speciální počáteční podmínku pro hodnotu mikropředpětí S_0 tak, aby se funkce poddajnosti zjednodušila na tvar (7.10). Stačí položit

$$S_0 = \left((p-1)c_0 \cdot t_0 \right)^{\frac{1}{1-p}} \quad (8.12)$$

Výrazy (8.9)-(8.11) se pak zjednoduší na

$$S(t) = S_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (8.13)$$

$$\dot{\epsilon}_f(t) = \frac{\sigma(t) \cdot c \cdot p}{c_0 \cdot (p-1) \cdot t} = q_4 \frac{\sigma(t)}{t} \quad (8.14)$$

$$J_f(t, t') = \frac{c \cdot p}{c_0(p-1)} \ln \left(\frac{t}{t'} \right) = q_4 \ln \left(\frac{t}{t'} \right) \quad (8.15)$$

Pokud tedy označíme

$$q_4 = \frac{c \cdot p}{c_0(p-1)} \quad (8.16)$$

shoduje se výsledná funkce poddajnosti (8.15) se vzorcem (7.10).

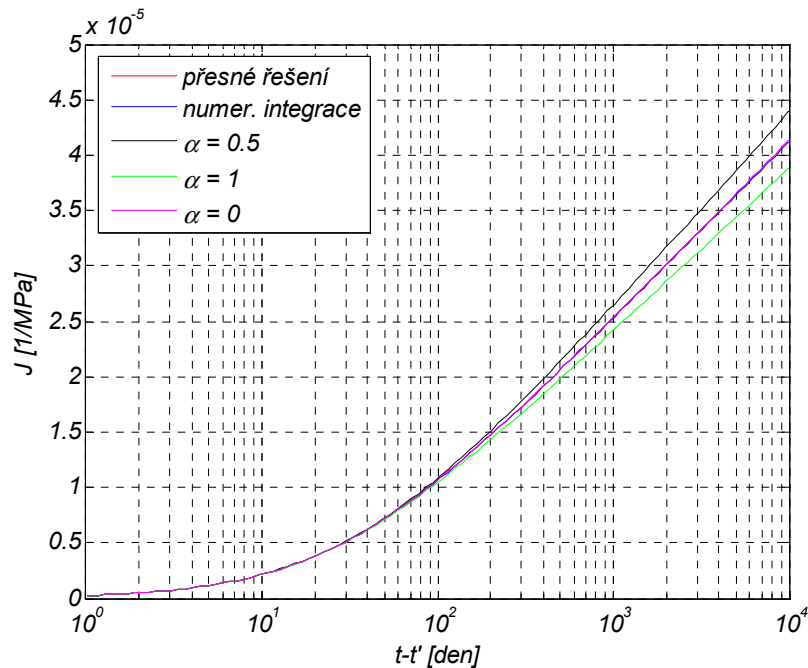
Pokud ale dochází ke změně vlhkosti, nezbyvá než se vrátit k původní nehomogenní diferenciální rovnici (8.6). Jsou dvě možnosti, jak ji vyřešit. Podobně jako u řešení Kelvinova článku můžeme použít zobecněné lichoběžníkové pravidlo; druhou možností je vyřešit tuto rovnici analyticky. V obou případech by se předpokládala lineární průběh vlhkosti v rámci jednoho časového kroku. V případě lichoběžníkového pravidla získáme kvadratickou rovnici:

$$a S_{k+1}^2 + S_{k+1} + c = 0 \quad (8.17)$$

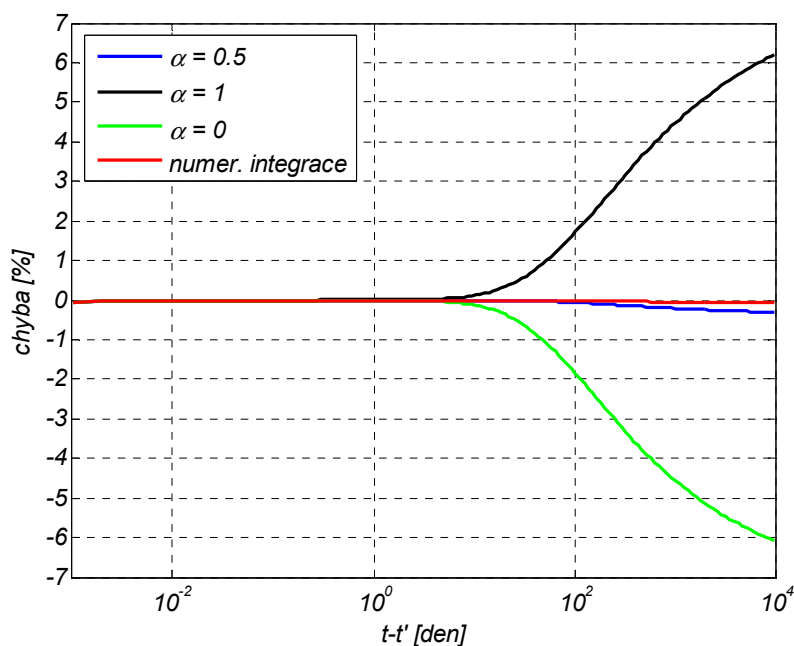
$$a = \alpha \cdot c_0 \cdot \Delta t_k$$

$$c = (1 - \alpha) \cdot c_0 \cdot \Delta t_k S_k^2 - S_k + \frac{\Delta h_k \cdot c_1 \cdot (1 - \alpha)}{h_k} + \frac{\Delta h_k \cdot c_1 \cdot \alpha}{h_{k+1}} \quad (8.18)$$

kde symboly h_k , h_{k+1} a Δh_k mají stejný význam jako v případě času. Vzhledem k tomu, že a je vždy kladné, vyjdou nám řešením dva kořeny, kladný a záporný, přičemž fyzikálně přípustným řešením je pouze kladný kořen. Pro zajímavost a ilustraci dosažené přesnosti při různých výpočetních metodách uvádím dva grafy, na kterých je znázorněna funkce poddajnosti (resp. její relativní chyba) pouze pro viskózní tlumič při základním dotvarování. Jako srovnávací rovina posloužilo analytické řešení rovnice (8.11) vyčíslené pro $p = 2$. Řešení označené jako *numer. integrace* bylo získané numerickou integrací vztahu (8.14) podle vzorce (6.37), $\alpha = 0$ – dopředná Eulerova metoda, $\alpha = 1$ – zpětná Eulerova metoda a $\alpha = 0.5$ – lichoběžníkové pravidlo. Je důležité poznamenat, že v případě základního dotvarování nehraje roli koeficient c_1 a u koeficientů c , c_0 a p nezáleží na jejich jednotlivých hodnotách, ale jen na hodnotě q_4 - (8.16).



Obrázek 8.5 Průběh funkce poddajnosti pouze pro *flow term*. Křivky, které jsou v legendě označené jako „přesné řešení“, „numer. integrace“ a „ $\alpha=0.5$ “ splývají.



Obrázek 8.6 Relativní chyba mezi průběhem funkce poddajnosti viskózního článku daného přesným řešením a ostatními metodami. U řešení označeného „numer. integrace“ je maximální chyba 0.06 %; max. chyba řešení „ $\alpha=0.5$ “ je 0.3 %.

Při analytickém řešení diferenciální rovnice (8.6) předpokládáme, že její pravá strana je vždy kladná (vysychání – vlhkost klesá). Po zavedení pomocných proměnných

$$k = -\frac{c_1 \cdot \dot{h}}{h} \quad (8.19)$$

$$a = \sqrt{\frac{k}{c_0}} \quad (8.20)$$

má rovnice (8.6) partikulární řešení

$$S(t) = a \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot (a - S_0)}{(a - S_0) + (a + S_0) \cdot e^{2 \cdot \sqrt{k \cdot c_0} (t - t_0)}} \right) \quad (8.21)$$

V přírůstkovém tvaru

$$S_{k+1} = a \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot (a - S_k)}{(a - S_k) + (a + S_k) \cdot e^{2 \cdot \sqrt{k \cdot c_0} \Delta t_k}} \right) \quad (8.22)$$

Pro vyhodnocení výrazu (8.19) potřebujeme vypočítat časovou derivaci vlhkosti.

$$\dot{h} = \frac{\Delta h_k}{\Delta t_k} \quad (8.23)$$

Experimentálně bylo zjištěno, že stejného dotvarování je dosaženo při vysychání ($\dot{h} < 0$) i zvlhčování ($\dot{h} > 0$) betonu. Tento fakt zohledníme zavedením absolutní hodnoty ve vzorci (8.19)

$$k = \left| -\frac{c_1 \cdot \dot{h}}{h} \right| \quad (8.24)$$

Pro smrštění je v této teorii prezentován jednoduchý vztah, který zavádí lineární závislost mezi časovou derivací smrštění $\dot{\epsilon}_{sh}$ a první časovou derivací vlhkosti \dot{h} .

$$\dot{\epsilon}_{sh} = k_{sh} \dot{h} \quad (8.25)$$

Proměnnou k_{sh} je možné považovat za konstantu.

Nakonec si dovoluji uvést tabulku shrnující konstanty, které byly získány fitováním experimentálně změřených dat. Jediné koeficienty, které potřebujeme určit a pro které ještě nebyl uveden vzorec, jsou parametry k_{sh} , c_0 a c_1 . V tabulce není uvedena hodnota parametru p . Ve většině případů je nejlepší shody dosaženo pokud $p = 2$.

Tabulka 2 Hodnoty koeficientů Microprestress solidification theory. Převzato z [7].

Tests (1)	$S_0^0 = 25.26$; $S_0^{1,02} = 1.01^a$	$S_0^1 = 5.5$; $S_0^{0,01} = 0.32^b$	σ (4)	$S_0^{1,02} = 0.143$; $S_0^{0,01} = 2.7 \times 10^{-3d}$
q_1 (MPa ⁻¹)	2.03×10^{-5}	2.4×10^{-5}	2.7×10^{-5}	1.48×10^{-5}
q_2 (MPa ⁻¹)	3.9×10^{-5}	5.3×10^{-5}	5.3×10^{-5}	6.1×10^{-4}
α	1.4×10^{-2}	8.5×10^{-3}	4.2×10^{-3}	1.9×10^{-2}
α_n	0.5	0.5	0.75	0.65
c (1/[(MPa) ² s])	1.59×10^{-6}	2.72×10^{-6}	3.44×10^{-6}	1.03×10^{-5}
c_0 (1/[(MPa) s])	0.49	0.94	1.79	1.35
c_1 (MPa)	1.98	8.2	13.2	22.4
$S_0^{2,0}$ (MPa)	2.89	1.7	19.4	0.143
k_{sh}	1.83×10^{-3}	2.62×10^{-3}	4.73×10^{-3}	5.7×10^{-3}
E (MPa)	4.92×10^4	3.85×10^4	5.27×10^4	8.31×10^4
f_i (MPa)	1.8	1.4	1.2	2.4
ϵ_0	2.53×10^{-4}	1.68×10^{-4}	4.74×10^{-4}	9.23×10^{-4}
D (mm/day)	0.84	1.35	0.25	4.32
C (mm ² /day)	35.3	24.9	36.3	45.8

Note: Test values in molar pascals.

^aBryant and Vadhanavikkitt (1987).

^bL' Hermite et al. (1965).

^cTroxell et al. (1958).

^dRussell and Corley (1977).

9. IMPLEMENTACE DO PROGRAMU OOFEM

9.1 POPIS PROGRAMU OOFEM

Dílčím úkolem této práce bylo zefektivnit implementaci modelu B3 v programu OOFEM. OOFEM (Object Oriented Finite Element Solver) je open-source program určený pro řešení (převážně) mechanických a transportních úloh a také mechaniky tekutin. Jak název napovídá, jako nástroj k tomu slouží metoda konečných prvků. Užívání programu je podmíněno souhlasem s licencí GNU GPL (GNU = GNU's Not Unix; GPL = General Public License). Nejnovější verze programu nese označení 1.9; byla vydána 28. června 2009. Program je vyvíjen na Fakultě stavební ČVUT, hlavním autorem je Bořek Patzák. Program je z 90% psán v jazyce C++, k tomuto okamžiku je délka kódu 152.356 řádek. Architektura programu je objektově orientovaná. Díky tomu je program snadno rozšiřitelný o nové materiály, typy analýz, druhy konečných prvků a podobně.

Z mého pohledu je OOFEM dobrý řešič, který vyžaduje přesnou a srozumitelnou komunikaci. Samotný program totiž neobsahuje žádný preprocessor. Program se spouští v příkazovém řádku, při tom je potřeba specifikovat cestu na vstupní soubor, kterým je textový dokument. Po načtení vstupního souboru a kontrole správnosti jeho syntaxe se spouští vlastní výpočet, jehož dílčí výstupy (například číslo řešeného kroku, čas strávený řešením, relativní chyba v případě nelineárních výpočtů apod.) jsou textově vypisovány do konzole. Veškeré potřebné informace potřebné k vyhodnocení výpočtu jsou zapsány do jednoho textového souboru. V závislosti na nastavení je možné ukládat výsledky i po jednotlivých krocích. To je dobré jak pro grafický postprocessing, tak i pro možnost navázání výpočtu od konkrétního výpočetního kroku (samozřejmě za předpokladu, že předchozí kroky jsou již vypočteny).

Preprocessing

Jak jsem se výše zmínil, samotný program neobsahuje žádný preprocessor. V případě jednoduchých (dvourozměrných, prutových) úloh je sestavení vstupního souboru přibližně stejně obtížné jako v jiných programech s preprocesorem. Problém nastává v případě, kdy je potřeba analyzovat složitější konstrukci nebo těleso, pro které je nutné vyrobit síť konečných prvků daných vlastností. K tomu lze použít například komerční program T3D nebo volně dostupné Targe2; oba programy využívají opět pouze textový vstup. Je samozřejmě možné používat i jiný komerční grafické preprocessory např. GiD a jiné, nicméně ty budou mít pravděpodobně jinou syntaxi vstupního souboru, než je vstupní soubor pro OOFEM. Podle mého názoru nejmenší práce čeká uživatele, pokud se rozhodne pro program T3D v kombinaci s programem T3D2OOFEM, který je schopen přeložit výstup z T3D do syntaxe stravitelné programem OOFEM. Program T3D2OOFEM je kromě konverze sítě konečných prvků také schopen přiřadit k uzlům okrajové a počáteční podmínky, zatížení apod. a k prvkům označení materiálu a průřezu. Samotný vstupní soubor pro OOFEM má přesně předepsanou strukturu, kterou je nutné dodržovat:

- 1) jméno výstupního souboru
- 2) popis úlohy = slovní komentář
- 3) typ úlohy a jí příslušející specifikace (lineární statika, ... , dynamika, vedení tepla, ...)
- 4) dimenze úlohy (2D, 3D, skořepina, ...)
- 5) specifikace výstupu (co vše se má zapisovat do výstupního souboru)
- 6) počet uzlů, prvků, průřezů, materiálů, okrajových podmínek, ...
- 7) geometrie a popis uzlů

- 8) geometrie a popis prvků
- 9) použité průřezy
- 10) použité materiály
- 11) nelokální omezení (volitelné)
- 12) okrajové podmínky
- 13) počáteční podmínky
- 14) časové funkce
- 15) xfem manager (volitelné)

V této práci jsem k vytváření vstupního souboru použil textový editor a program Matlab, ve kterém jsem „naprogramoval“ síť konečných prvků.

Postprocessing

V této sekci bych se chtěl zmínit o třech programech. První a nejjednodušší z nich nese název Extractor. Jedná se o program, který je schopen *extrahovat* z výstupního souboru uživatelem specifikované hodnoty. Extrahovat lze například posuny, reakce, síly, přetvoření a napětí v konkrétním uzlu nebo Gaussově bodě. Typem se tedy jedná o parser; ve verzi 1.9 je tento původně C++ kód přepsán do jazyka Python. K funkčnosti na rozdíl od následujících dvou programů nepotřebuje informace ze souborů vytvářených v každém kroku. Tento program se velmi hodí například k získání dat pro vytvoření pracovního diagramu daného materiálu nebo konstrukce.

Druhý z programů se jmenuje OOFEG. I tento program je dodáván přímo v „balíčku“ s OOFEMem. S programem OOFEM toho má hodně společného (stejně zdrojové soubory). Až uživatel v době překladu se rozhodne, který z programů chce zkompileovat. OOFEG je grafický postprocessor, umožňuje zobrazit konstrukci, její zdeformovaný stav a téměř libovolnou (vypočtenou) veličinu. Výhodou OOFEGu je snadná rozšiřitelnost na míru šitá pro OOFEM, nevýhodou je krkolomnější obsluha.

Posledním z programů pro postprocessing, který bych chtěl zmínit, je program ParaView. ParaView je freeware a open-source program. Z mého pohledu je ParaView moderní program, který vedle snadné obsluhy (bez nutnosti studovat manuál) vyniká kromě základních vykreslovacích funkcí i možností vést konstrukcí řezy, vytvářet animace v čase a mnoho dalších. Komunikace mezi programem OOFEM a ParaView se odehrává formou souborů s příponou *vtk*.

9.2 PŘEDCHOZÍ IMPLEMENTACE MODELU B3

V této části bych se chtěl ve zkratce zmínit o předchozím návrhu a implementaci modelu B3 v programu OOFEM. V předchozí implementaci měl model B3 svou vlastní třídu B3Material, která byla veřejnou dědičností odvozena ze třídy MaxwellChainMaterial a ta pak stejnou dědičností ze třídy StructuralMaterial. Tyto třídy měly na starost úlohy počínaje načtením všech potřebných vstupních parametrů přes výpočet tuhosti po určení aktuálních hodnot vnitřních proměnných. Jádrem třídy MaxwellChainMaterial je metoda giveEModulus, která slouží k určení přírůstkového modulu pružnosti; tato metoda je založena na exponenciálním algoritmu pro Maxwellův řetězec.

Kromě těchto tříd byly ale použity ještě třídy zodpovědné za aktualizaci vnitřních proměnných, napětí a deformací na konci výpočetního kroku. Data zpracovávaná třídou MaxwellChainMaterial byla tedy aktualizována třídou MaxwellChainMaterialStatus. Tato třída sloužila k nahrazení starých hodnot vnitřních proměnných novými. O úroveň výše se třída

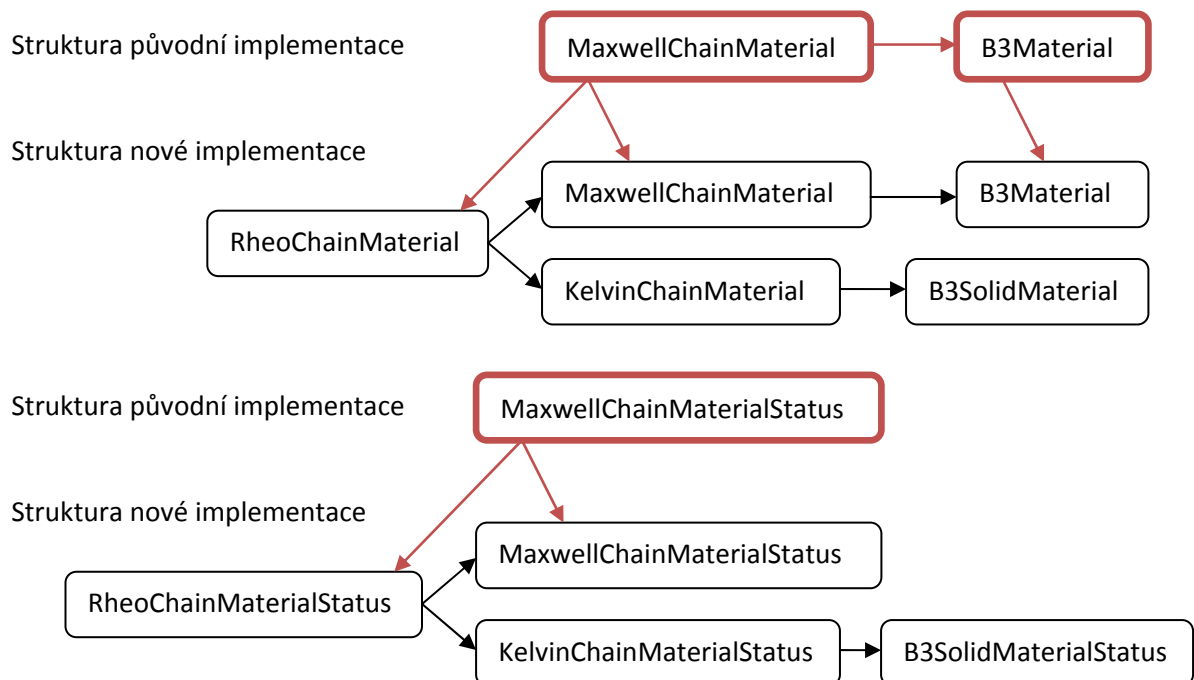
StructuralMaterialStatus starala o aktualizaci deformací a napětí. Všechny výše zmíněné třídy fungují na úrovni jednoho konkrétního Gaussova integračního bodu.

Tato implementace byla shledána nevyhovující hned z několika důvodů. Jak je zřejmé z názvu rodiče třídy B3Material, implementace byla založena na Maxwellově reologickém řetězci. Vzhledem k tomu, že je model B3 představitelem stárnoucího materiálu, je v každém Gaussově bodě a v časovém kroku nutné určovat tuhosti jednotlivých článků Maxwellova řetězce znovu – současná implementace k tomu používala metodu nejmenších čtverců.

Tím ale nevýhody nekončí. Nezkrácená verze modelu B3 pracuje s průměrnými hodnotami smrštění a dotvarování spojeného s vysycháním. Pokud tedy budeme pomocí tohoto modelu simulovat dotvarovací zkoušku na 3D tělese, v celém jeho průřezu vznikne rovnoměrné napětí, které v případě rozdílné relativní vlhkosti tělesa a okolního prostředí není v souladu reálným chováním. B3Material má sice jednu metodu, která je schopna počítat smrštění v závislosti na bodové vlhkosti, problém dotvarování spojeného s vysycháním se tím neřeší. Další závady jsou spíše kosmetické, šlo by je bez větší práce opravit.

9.3 NOVÁ IMPLEMENTACE MODELU B3

Při tvorbě nové implementace bylo nutné zachovat implementaci stávající. Vzhledem k tomu, že stávající implementace byla založena na Maxwellově řetězci a jádro nové tvoří Kelvinův řetězec, bylo nejpřirozenější vytvořit jednu nadtřídu, která bude společná pro oba typy řetězců. Tato nová nadtřída se jmenuje RheoChainMaterial. Třída B3Material zůstala nezměněna. V podobném duchu byly odvozeny i třídy XyMaterialStatus.



Obrázek 9.1 Přechod z původní struktury tříd na novou.

Je zbytečné zde dopodrobna popisovat všechny metody nově vyvinutých tříd. Chtěl bych se ale zmínit o třech zásadních rozdílech mezi původní a novou implementací.

Určení modulů E_μ Kelvinova řetězce

Jádrem nově vzniklé třídy B3SolidMaterial je, jak název napovídá, solidifikující Kelvinův řetězec, který je implementován pomocí algoritmu popsaného v kapitole 6.3. Tímto se odstraní nutnost přepočítávat v každém výpočetním kroku tuhosti jednotlivých článků; tuhosti stačí určit jednou na počátku výpočtu. Vliv stárnutí je zahrnut přenásobením těchto tuhostí jednoduchou, časově závislou funkcí. Pro určení samotných koeficientů E_μ jsou na výběr dvě metody. První je metoda nejmenších čtverců popsaná v kapitole 6.4.1, která minimalizuje chybu řešení aproximovaného Dirichletovou řadou a nestárnoucí funkcí poddajnosti (6.49). Druhou variantou je použití metody analýzy retardačního spektra, která je vysvětlena v sekci 6.4.2. Navíc obě dvě metody jsou nastaveny tak, že aproximují nestárnoucí funkci poddajnosti jen na uživatelem specifikovaném intervalu, nejsou tedy zařazeny nadbytečné jednotky jako ve stávající implementaci. Dalším vylepšením je možnost aproximovat i krátké odezvy konstrukce, kratší než 0.1 dne, což třída B3Material neumožňovala. Postupy zmíněné v tomto odstavci umožňují ale popsat pouze základní dotvarování.

Dotvarování spojené s vysycháním

Nově vzniklá implementace umožňuje oproti stávající vypočítat bodové rozložení smrštění a dotvarování spojeného s vysycháním. Bohužel drying creep v současné implementaci ovlivňuje pouze vlhkost a její časová derivace; vliv teploty bude předmětem další práce. Pro výpočet dotvarování spojeného se smršťováním jsou použity vzorce odvozené v kapitole 8 věnované microprestress-solidification theory. Z této kapitoly nám stačí použít jen tři vzorce: výpočet viskozity (8.5), výpočet mikropředpětí při konstantní vlhkosti (8.9) a v případě proměnné vlhkosti (8.17)+(8.18). Získání lokálních hodnot a nikoliv hodnot průměrných je ale vykoupeno vyšším výpočetním časem vniklým nutností řešit dvě sdružené úlohy (vedení vlhkosti a mechanická úloha). Jistě někoho napadne otázka, k čemu je dobrá nová třída B3SolidMaterialStatus, když třída B3Material fungovala bez svého statutu. Odpověď je jasná – třída slouží k uchování a aktualizování hodnot mikropředpětí.

Smršťování

Pro výpočet smršťování máme nyní 4 možnosti: výpočet bez smršťování, výpočet s průměrnými hodnotami smršťování, výpočet s lokálními hodnotami smrštění (z předchozí implementace) a nový výpočet lokálního smrštění založený na teorii mikropředpětí. Poslední zmíněný je popsán vztahem (8.25).

Tato implementace má jednu velkou výhodu – pro určení hodnoty parametru k_{sh} jsme schopni odvodit vztah získaný z plné verze modelu B3. Použijeme rovnici (3.38)-(3.42) a (3.49). Vydeme z rovnosti konečné hodnoty deformace (tj. v rovnici (3.38) můžeme funkci $S(t - t_0)$ nahradit jedničkou, protože tato funkce určuje pouze průběh smrštění). Výsledný vztah má tvar

$$k_{sh} = \frac{(1 - h^3)\alpha_1\alpha_2(0.019 \cdot w^{2.1} \bar{f}_c^{-0.28} + 270)}{\Delta h} \frac{E(607)}{E(t_0 + \tau_{sh})} \quad (9.1)$$

kde h představuje konečnou hodnotu vlhkosti v tělese (tedy hodnotu vlhkosti prostředí) a Δh je rozdíl počáteční a konečné vlhkosti. Pro zbylé parametry platí vztahy uvedené v kapitole 3.7.2.

Syntaxe nové implementace ve vstupním souboru

Vzhledem k tomu, že jsem sám zjistil, jak je v některých případech těžké dohledat význam některých proměnných, dovoluji si zde uvést shrnutí všech vstupních parametrů potřebných pro použití nově implementovaného materiálového modelu.

B3SolidMat #

fc #	průměrná válcová pevnost betonu	
cc #	hmotnostní obsah cementu v 1 m ³ betonu	
w/c #	vodní součinitel	
a/c #	hmotnostní poměr kameniva ku cementu	
d #	hustota [kg/m ³]	
n #	Poissonovo číslo	
talpha #	součinitel teplotní roztažnosti	
referencetemperature #	referenční teplota [K]	
t0 #	stáří betonu v okamžiku ukončení ošetřování [den]	
q1 #	součinitel pro model B3 (nepovinný pokud mode = 0)	(3.34)
q2 #	součinitel pro model B3 (nepovinný pokud mode = 0)	(3.35)
q3 #	součinitel pro model B3 (nepovinný pokud mode = 0)	(3.36)
q4 #	součinitel pro model B3 (nepovinný pokud mode = 0)	(3.37)
q5 #	součinitel pro model B3 (nepovinný pokud mode = 0)	(3.53)
alpha1 #	součinitel pro model B3 – vliv cementu	(3.43)
alpha2 #	součinitel pro model B3 – vliv způsobu ošetřování	(3.44)
vs #	poměr objemu tělesa ku ploše [m]	
ks #	tvarový součinitel	(3.47)
hum #	relativní vlhkost okolního prostředí [-]	
kt #	součinitel pro model B3 (nepovinný pokud mode = 0)	(3.46)
EpsSinf #	součinitel pro model B3 (nepovinný pokud mode = 0)	(3.42)
relMatAge #	relativní stáří betonu [den]	
begoftimeofinterest #	Stáří betonu, od kterého chceme dobrou aproximaci [den]. Defaultní hodnota = 0.1 dne.	
endOfTimeOfInterest #	stáří betonu, do kterého chceme dobrou aproximaci [den]	
timefactor #	Škálovací součinitel – hodí se při výpočtu sdružené úlohy, kdy hlavní úloha má jiné jednotky času (vteřiny) než podproblém (dny). V našem případě má buď hodnotu 1 v případě samostatného výpočtu nebo 86400 v případě sdružené úlohy	

w_h #	parametr (de)sorpční izotermy – viz další kapitola
ncoeff #	parametr (de)sorpční izotermy – viz další kapitola
a #	parametr (de)sorpční izotermy – viz další kapitola
ksh #	Par. pro výpočet smrštění – vyžadován pokud shmode = 3. Má (9.1) prioritu před parametry initHum # a finalHum #
initHum #	Volitelný parametr pro výpočet smrštění, pokud je zadán společně s finalHum #, nemusí být zadána hodnota ksh #. Parametr představuje počáteční vlhkost tělesa (0.2-0.98)
finalHum #	Volitelný parametr pro výpočet smrštění, pokud je zadán společně s initHum #, nemusí být zadána hodnota ksh #. Parametr představuje koncovou vlhkost tělesa pro čas $t = \infty$ (0.2-0.98)
ts0 #	Okamžik zatížení. Slouží k sestavení počáteční podmínky pro výpočet mikropředpětí.
c0 #	parametr pro výpočet mikropředpětí
c1 #	parametr pro výpočet mikropředpětí
es0 #	parametr pro smrštění pokud shmode = 2
r #	parametr pro smrštění pokud shmode = 2
rprime #	parametr pro smrštění pokud shmode = 2
at #	parametr pro smrštění pokud shmode = 2
shmode 0	Není počítáno smrštění.
shmode 1	Smrštění počítáno pomocí průměrných hodnot. Vyžaduje zadání parametrů: hum #, ks #, vs #, alpha1 #, alpha2 #.
shmode 2	Bodové smrštění. Vyžaduje výpočet sdružené úlohy společně s úlohou vedení vlhkosti. Vyžaduje parametry: es0 #, r #, rprime #, at #, w_h #, ncoeff #, a #.
shmode 3	Bodové smrštění. Vyžaduje výpočet sdružené úlohy společně s úlohou vedení vlhkosti. Vyžaduje parametry: ksh # nebo initHum # a finalHum #. Dále: w_h #, ncoeff #, a #. Enumerátor MicroPrestress = 1.
MicroPrestress 0	Výpočet základního dotvarování.
MicroPrestress 1	Výpočet dotvarování spojeného s vysycháním. Vyžaduje výpočet sdružené úlohy a parametry w_h #, ncoeff #, a #, c0 #, c1 #, ts0 #.
EModuliMode 0	Volitelný parametr. Výpočet modulů Kelvinova řetězce pomocí analýzy retardačního spektra. Defaultní hodnota.
EModuliMode 1	Výpočet modulů Kelvinova řetězce metodou nejmenších čtverců.
mode 0	Volitelný parametr – součinitele q_1 a další jsou určeny ze složení betonové směsi.

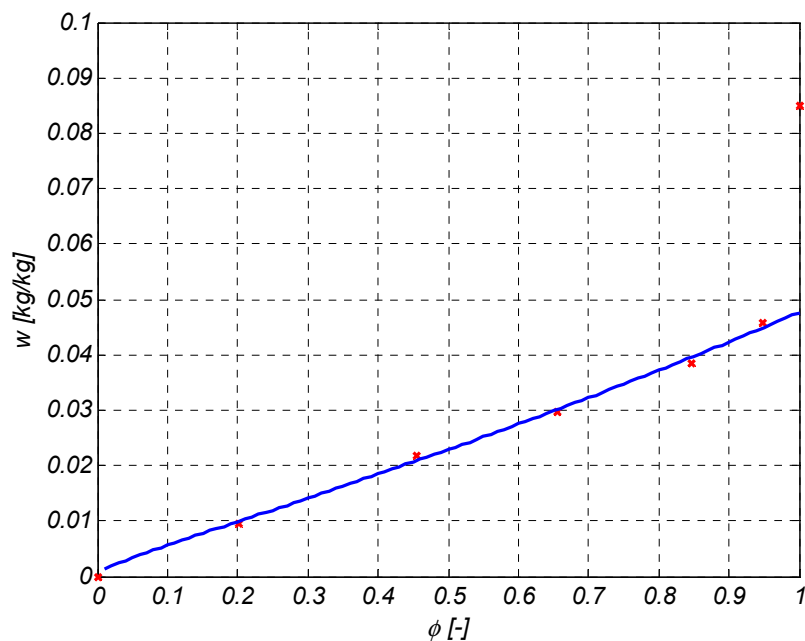
Při výpočtu sdružené úlohy může být použit volitelný parametr stepMultiplier #, který určuje poměr délky po sobě následujících kroků. (Zadává se do vstupního souboru řídicí úlohy)

9.4 POPIS DESORPČNÍ IZOTERMY

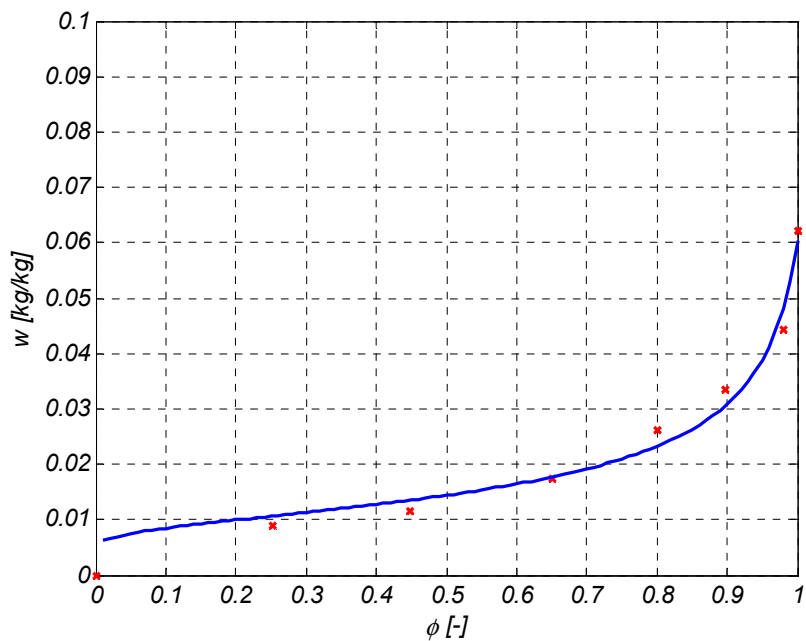
Desorpční izoterma slouží k převodu mezi relativní vlhkostí a hmotnostní vlhkostí. Pro převod v opačném směru slouží tzv. inverzní desorpční izoterma. Desorpční izoterma se používá v případě, že dochází k vysychání materiálu, v opačném případě jde o sorpční izotermu. Ve třídě sloužící pro výpočet vlhkosti a teploty (třída HeMoTK) je dán předpis sorpční izotermu ve tvaru:

$$w = w_h \left(1 - \frac{\ln(h)}{a} \right)^{-\frac{1}{n}} \quad (9.2)$$

kde parametry w_h , a a n jsou získané fitováním experimentálních dat. h označuje relativní vlhkost a w je poměr hmotnosti odpařitelné vody k hmotnosti vysušeného betonu. Hodnoty uvedených parametrů jsem získal z experimentálních dat (viz příloha 1) metodou nejmenších čtverců. Experimentální data poskytl Ing. Tomáš Krejčí, PhD.. V případě optimalizace parametrů pro desorpční izotermu jsem nezahrnul do minimalizace celkové chyby hodnotu experimentálního měření pro $h=1$ (optimalizací by vyšla křivka téměř vůbec nerespektující průběh spojnice bodů experimentálního měření).



Obrázek 9.2 Průběh desorpční izotermu. Červené body – experimentální měření, modrá křivka – fit metodou nejmenších čtverců; poslední bod nebyl zahrnut pro optimalizaci. Získaná sada parametrů: $w_h=4.761543066615762e-002$; $n=1.816678072657568e-001$; $a=4.867091694452869e+000$;



Obrázek 9.3 Průběh sorpční izotermy. Červené body – experimentální měření, modrá křivka – fit metodou nejmenších čtverců. Parametry: $w_h = 6.025983345239795e-002$; $a = 3.110890001772897e-002$; $n = 2.201367699125804e+000$;

Při běžných výpočtech se prý většinou používá jen jedna izoterma - sorpční (nerozlišuje se nasákávání a vysychání. Vzhledem k tomu že v našich výpočtech vždy půjde o simulování vysychání, použijeme data získaná z fitu desorpční izotermy.

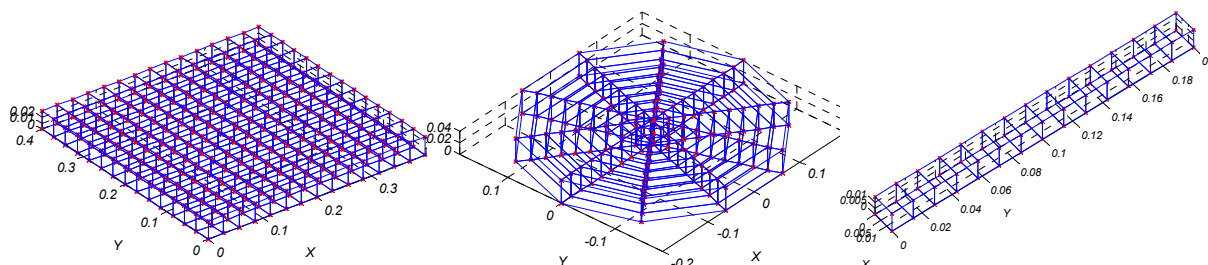
10. SROVNÁVACÍ VÝPOČTY

V této kapitole budou porovnány výsledky výpočtů získaných plnou verzí modelu B3 s výpočty pomocí nové implementace microprestress solidification theory v programu OOFEM (dále jen MPS). Cílem je posoudit vliv velikosti vzorku, jeho tvaru a okolní relativní vlhkosti na funkci poddajnosti a rovněž na průběh smršťování. Všechny výpočty budou vztaženy k referenčnímu modelu, který je představován nekonečnou deskou, jejíž tloušťka je taková, aby $\varepsilon_{sh}^{\infty} = \varepsilon_s^{\infty}$ (vzorce (3.39) a (3.42)), tj. $\tau_{sh} = 600$ dní a okolní relativní vlhkost je 50 %. V úlohách bude změněn vždy jen jeden parametr (velikost, vlhkost, tvar), nebudou uvažovány jejich kombinace.

- 1) Velikost prvku bude taková, aby poločas vysychání τ_{sh} byl roven 1/10, 1/5, 1/2, 2, 5 a 10 násobku referenční hodnoty (600 dní).
- 2) Relativní vlhkost okolí: 30 %, 40 %, 60 %, 70 %, 80 %, 90 %.
- 3) Geometrické tvary těles: nekonečná deska (tvarový součinitel $k_s = 1.0$), nekonečný čtvercový hranol ($k_s = 1.25$) a nekonečný válec ($k_s = 1.15$).

10.1 SIMULACE V PROGRAMU OOFEM

Pro vytvoření sítě konečných prvků jsem použil vlastní „mesher“, který byl vytvořen v programu Matlab. Není sice tak všestranný jako například T3D, umožňuje ale přímé získání vstupního souboru pro výpočet. Výše uvedená geometrická tělesa mají tu výhodu, že je lze v případě vhodné stanovených okrajových podmínek přesně popsat jen jednou vrstvou konečných prvků. V našem případě se bude jednat o *brick* s lineární aproximací. Pro stěnu a čtvercový hranol lze použít stejnou síť konečných prvků (lišily by se pouze okrajové podmínky). Pro rychlejší průběh výpočtu bude použita jen jedna řada prvků.



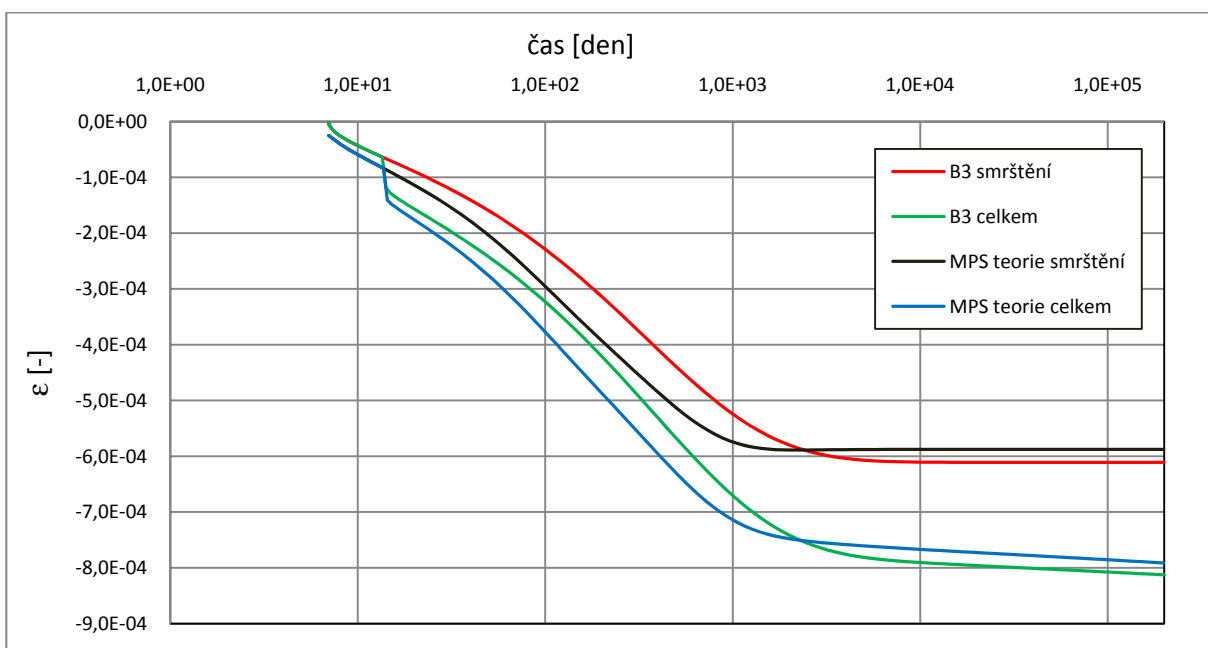
Obrázek 10.1 Ilustrativní obrázek sítě konečných prvků. Vlevo hranol/stěna, uprostřed válec, vpravo stěna. Skutečná tělesa měla 80 x 80 prvků (hranol), 100 x 70 prvků (válec, vyšší počet v radiálním směru) a 1 x 80 prvků (stěna).

Řešení proběhne formou tzv. sdružené úlohy (v programu OOFEM *staggered analysis*). V tomto případě bude úloha vedení vlhkosti a tepla vždy předcházet mechanickému problému. Mechanická úloha nemá na výpočet vlhkosti žádný vliv (model nesimuluje vznik trhlin ani žádný jiný typ heterogenit). Teoreticky by proto bylo možné nejprve vypočítat rozložení teploty a vlhkosti ve všech časových krocích a teprve pak mechanickou odezvu.

Pro srovnávací výpočty jsem se snažil použít beton typických vlastností. Jeho složení je následující: obsah cementu $c = 400 \text{ kg/m}^3$, vodní součinitel $w/c = 0.4$, poměr kameniva k cementu $a/c = 4.5$, průměrná tlaková pevnost $f_c = 30 \text{ MPa}$. Stáří betonu v okamžiku ukončení ošetřování

$t_0 = 7$ dní, stáří betonu v okamžiku zatížení $t_1 = 14$ dní. Velikost zatížení je 1 MPa v tlaku. Parametr $\alpha_1 = 1.0$ (cement typu I), $\alpha_2 = 1.2$ (ochrana proti vysychání). Počáteční relativní vlhkost 98 %.

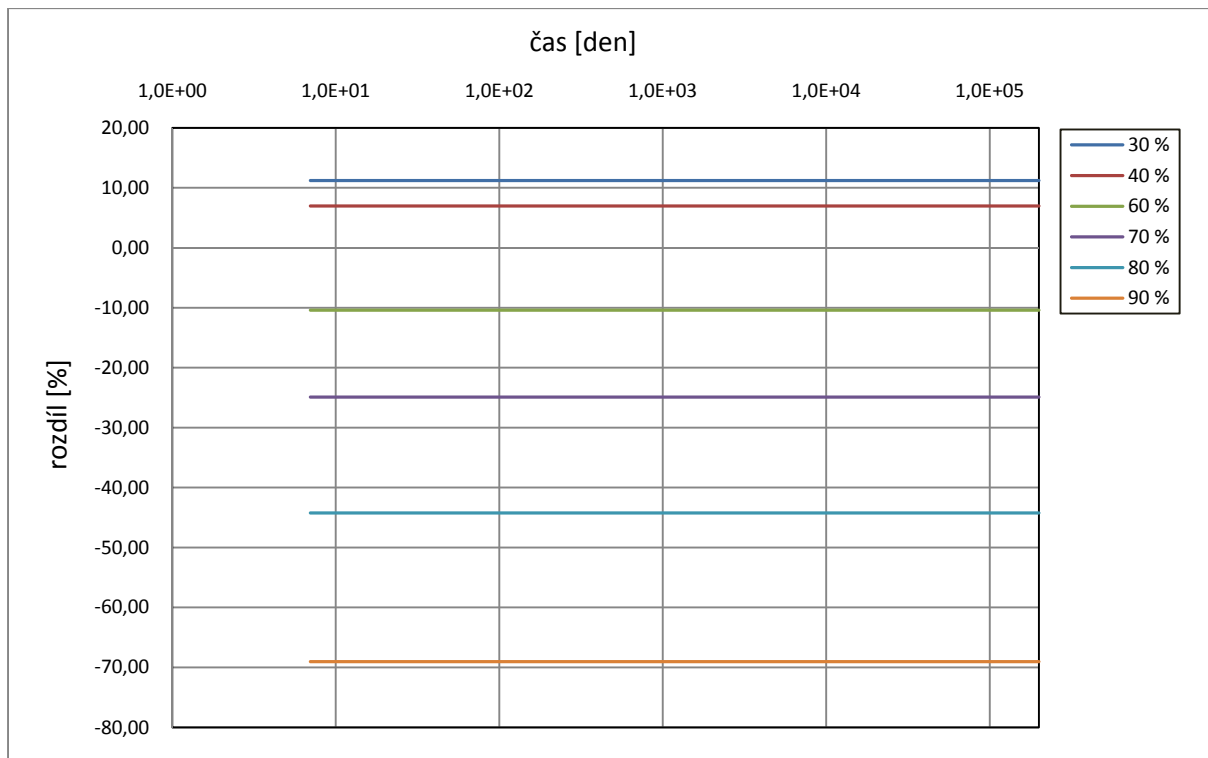
Nejdříve bylo potřeba nakalibrovat parametry c_0 a c_1 referenční úlohy tak, aby se časový průběh relativní deformace způsobené smršťováním a dotvarováním a průběh daný modelem B3 co nejméně lišil. Optimalizace probíhala na dvojici úloh; v první byla veškerá deformace způsobená jen smršťováním, ve druhé se ke smršťování přidalo ve stáří betonu 14 dní i silové zatížení. Zjistil jsem, že parametry, které byly doporučeny v tabulce 2, nedávají dobré výsledky, materiál se chová příliš poddajně. Dále jsem postupoval metodou pokus-omyl. Nejlepší shody jsem dosáhl pro $c_0 = 1.0 \text{ MPa}^{-1}\text{den}^{-1}$ a $c_1 = 0.2 \text{ MPa}$, viz obrázek 10.2. Při této kombinaci koeficientů je rozdíl ve finálních hodnotách smrštění a celkové deformace přibližně stejný. Časový průběh deformace je podobný, při výpočtu pomocí MPS dojde k dřívějšímu vysušení vzorku a tím i k rychlejšímu průběhu smrštění.



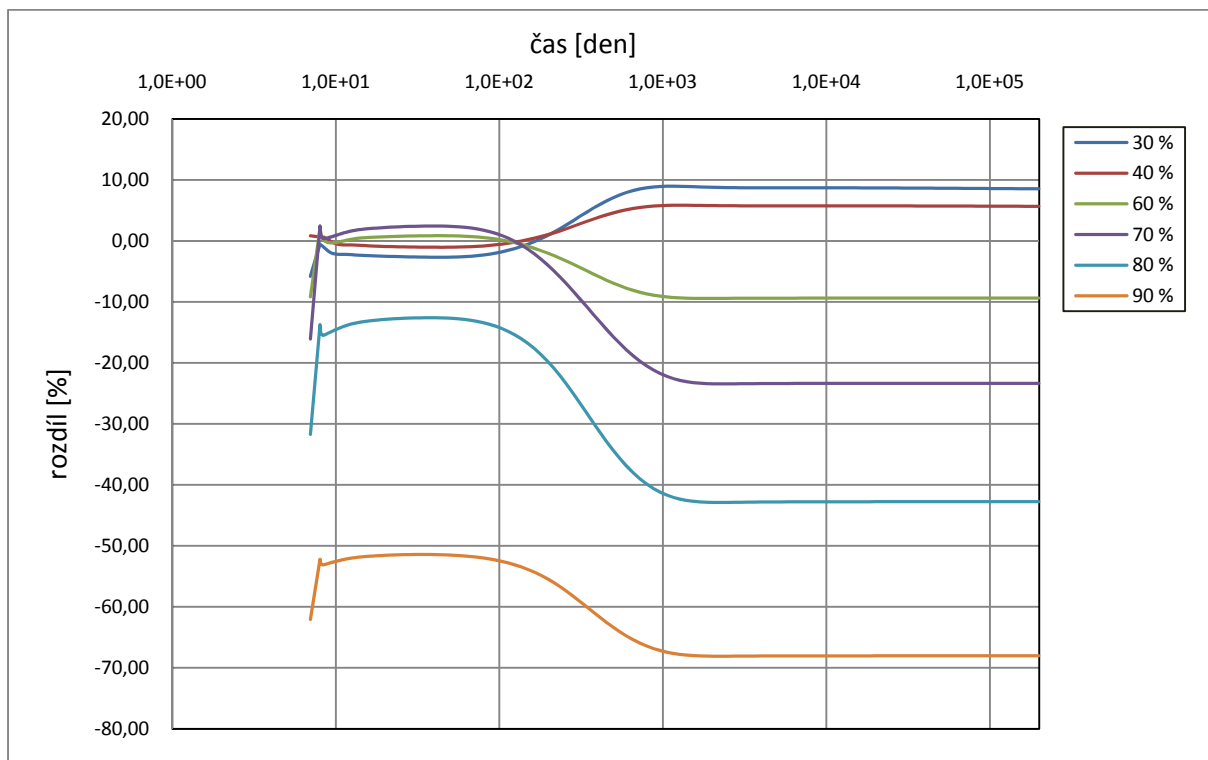
Obrázek 10.2 Referenční výpočet. Stěna $d = 0.138 \text{ m}$, relativní vlhkost okolí 50 %.

Průběh výpočtu byl komplikován mnoha jevy. Problémy nastaly na samém počátku výpočtu, kdy vlivem náhlého snížení počáteční vlhkosti (98 %) na hodnotu předepsané okrajové podmínky (50 %) došlo k drobnému zvýšení vlhkosti v druhé řadě uzlů od místa zavedení této podmínky. V materiálu HeMoTK, který byl použit pro řešení úlohy vedení tepla a vlhkosti, je povolený interval relativní vlhkosti 20 % - 98 %. Proto sebemenší zvýšení relativní vlhkosti nad 98 % okamžitě zastavilo výpočet. K výraznějšímu vzestupu došlo v případě čtvercového průřezu v uzlech ležících na diagonále v blízkosti rohů. Tento vzestup vlhkosti lze redukovat zjemněním sítě konečných prvků a prodloužením délky prvního výpočetního kroku (zjištěno empiricky metodou pokus-omyl). Rovněž jsem zjistil, že tento jev zřejmě závisí na absolutní velikosti prvku.

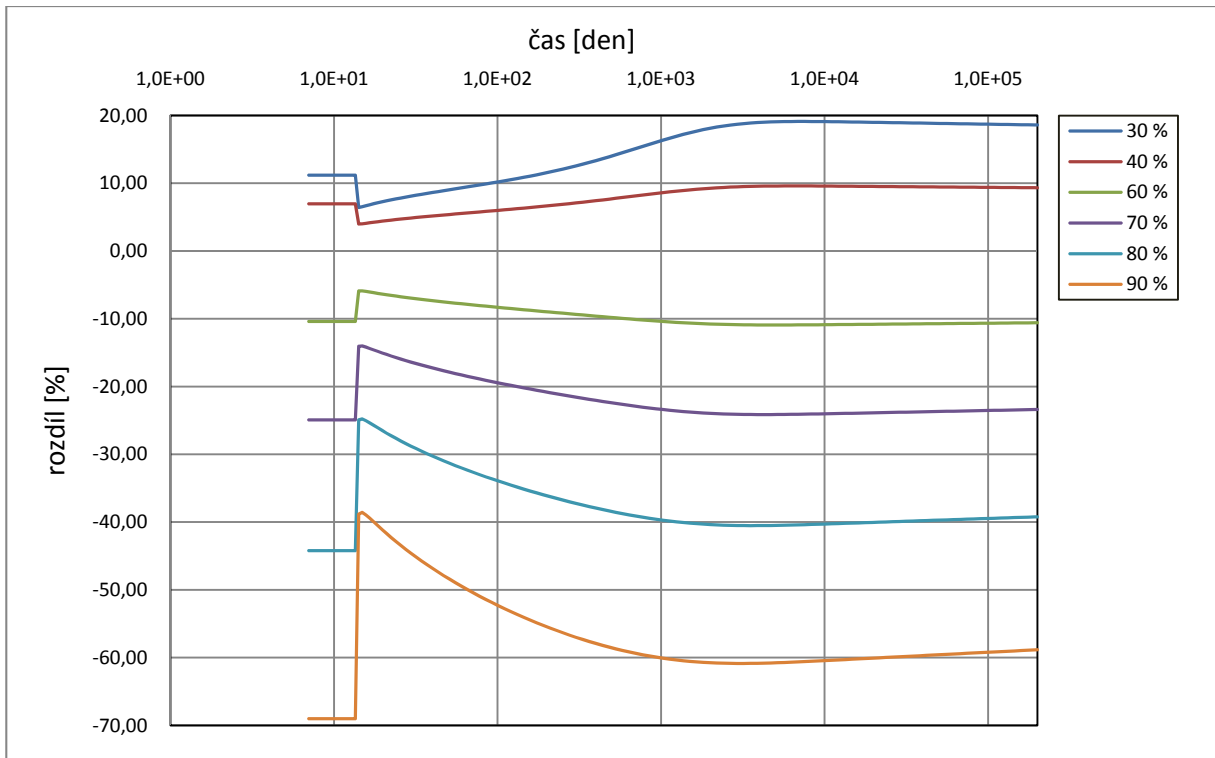
Na následujících grafech jsou uvedeny relativní rozdíly hodnot, viz vztah (5.35), mezi výsledky výpočtů sledujících vliv velikosti průřezu (relativní vlhkosti, popř. tvaru průřezu) a výsledků referenčního stavu. Upozornění – hodnoty z modifikovaných úloh vypočtených pomocí MPS teorie jsou vztaženy k referenčnímu stavu MPS; obdobně pro B3.



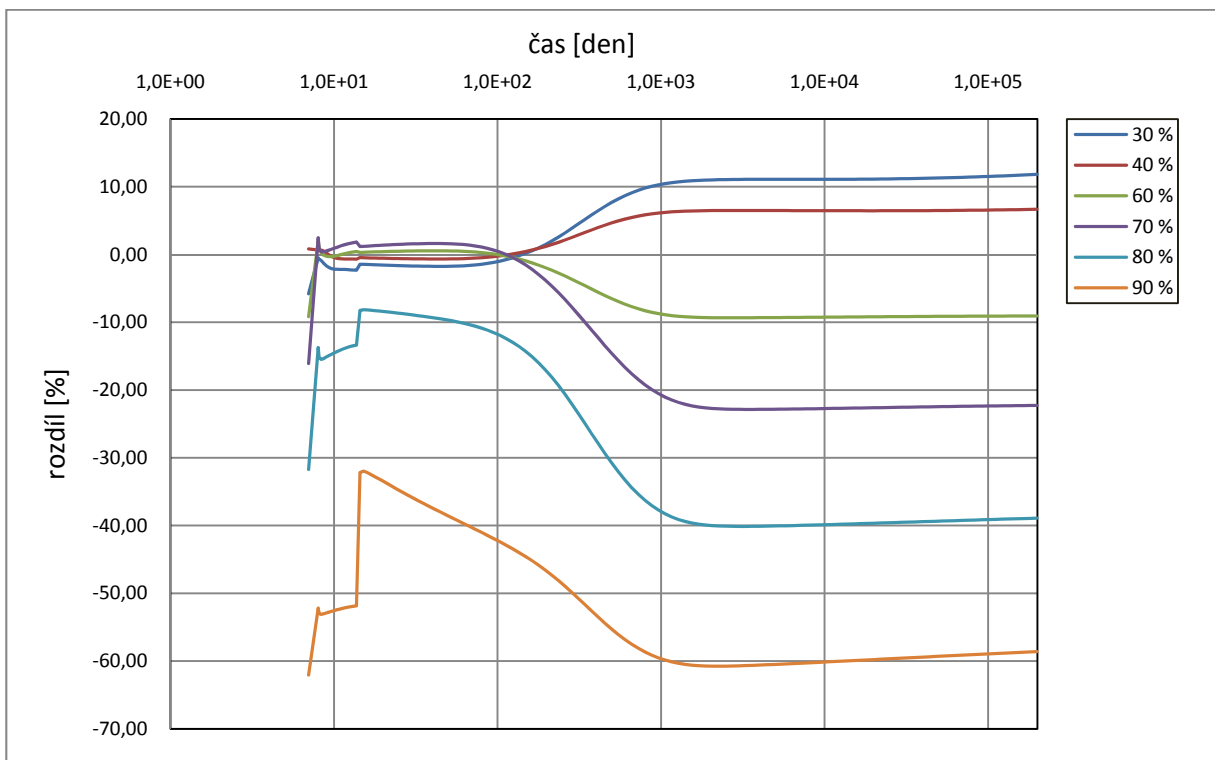
Obrázek 10.3 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou okolní vlhkostí. Bez silového zatížení. Výpočet pomocí modelu B3.



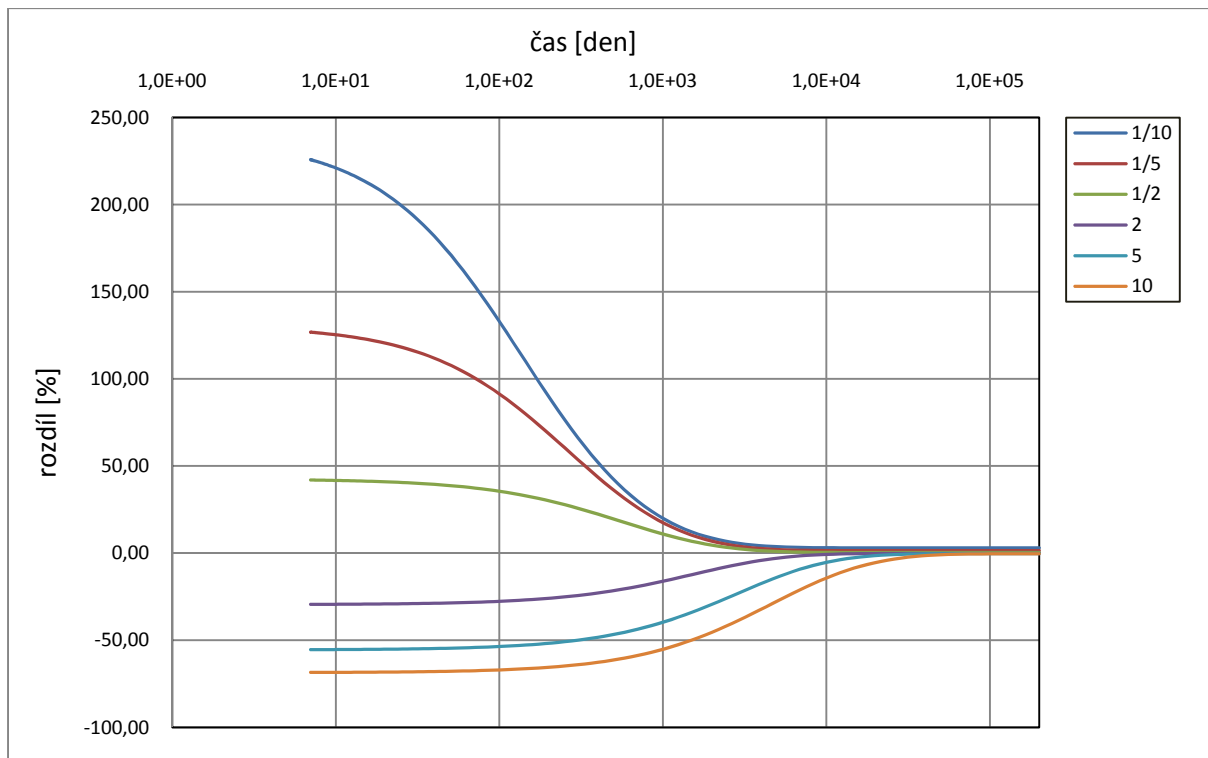
Obrázek 10.4 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou okolní vlhkostí. Bez silového zatížení. Výpočet pomocí MPS teorie.



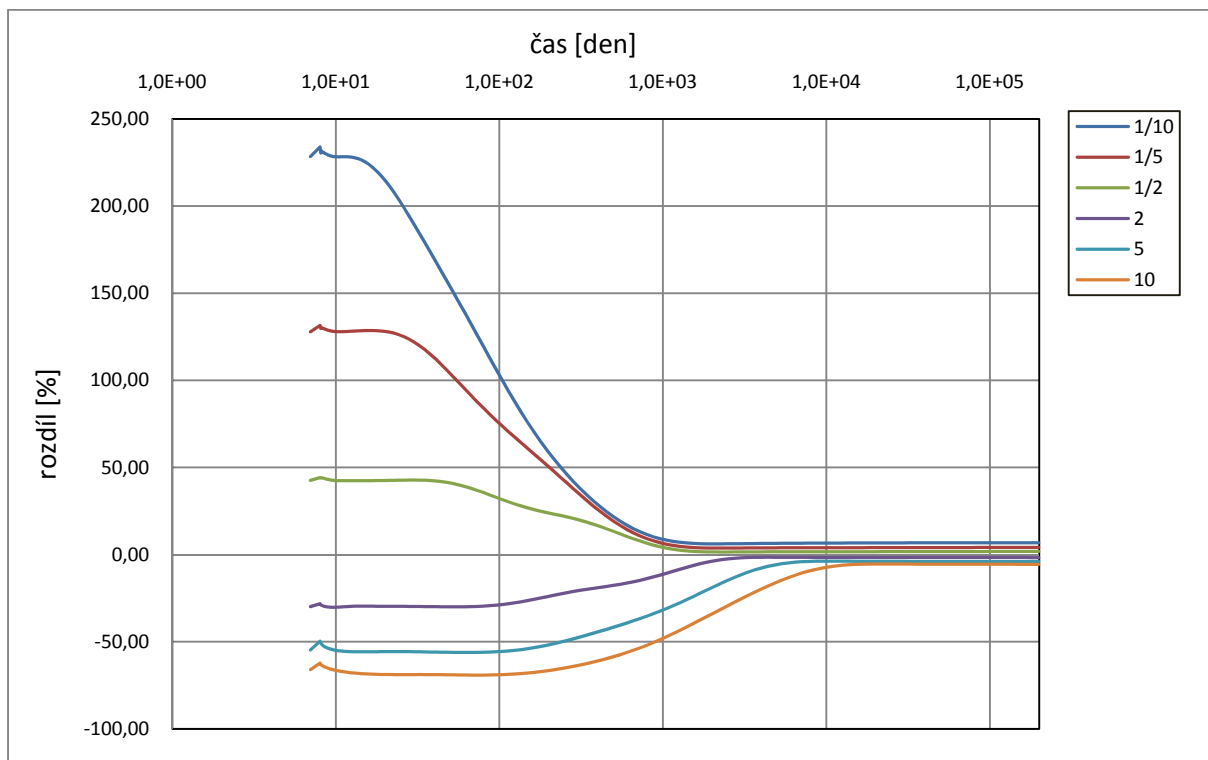
Obrázek 10.5 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou relativní vlhkostí okolí. Od času $t' = 14$ dní působí zatížení 1 MPa (tlak). Výpočet pomocí modelu B3.



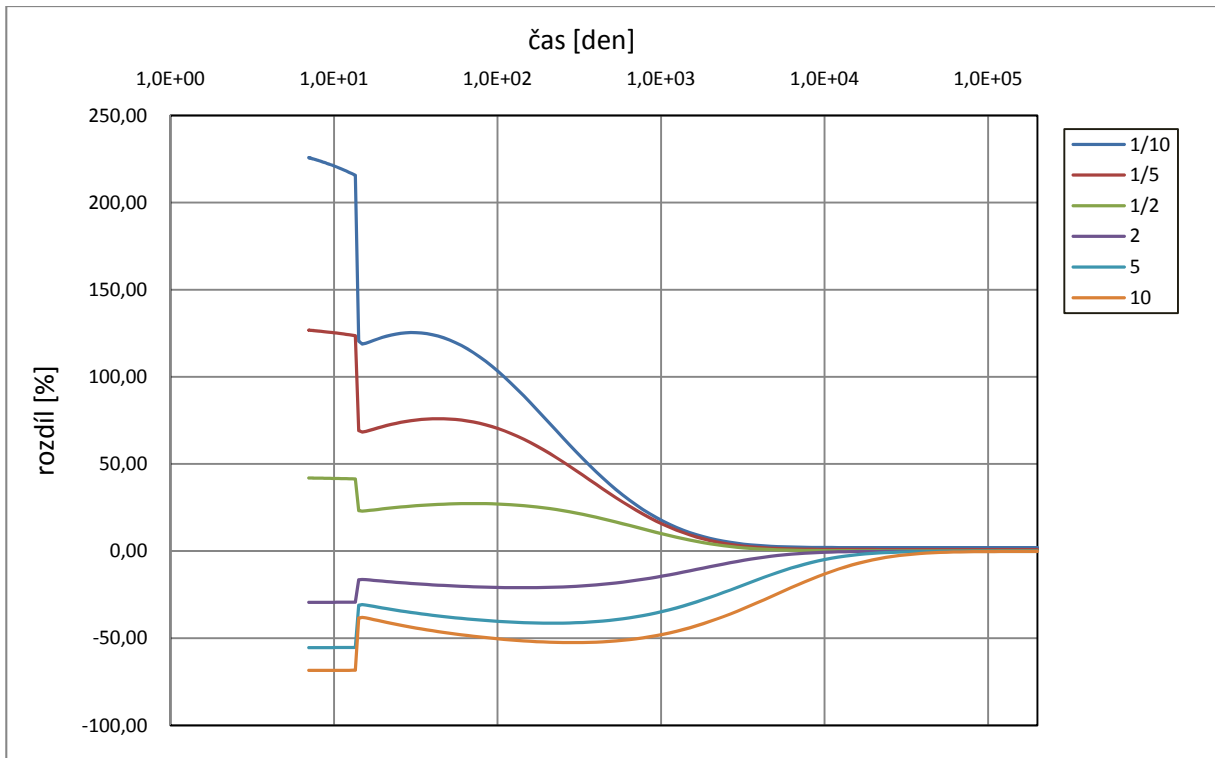
Obrázek 10.6 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou relativní vlhkostí okolí. Od času $t' = 14$ dní působí zatížení 1 MPa (tlak). Výpočet pomocí MPS teorie.



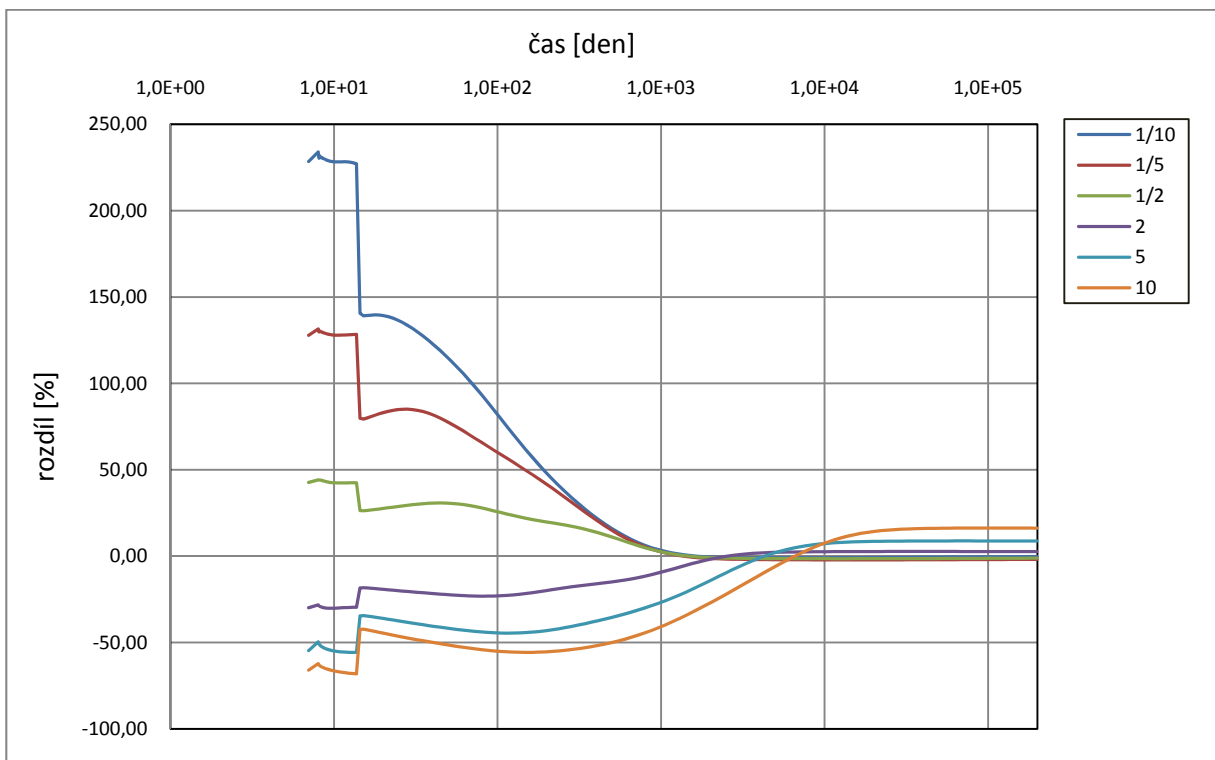
Obrázek 10.7 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou velikostí (násobky poločasu vysychání). Bez silového zatížení. Výpočet pomocí modelu B3.



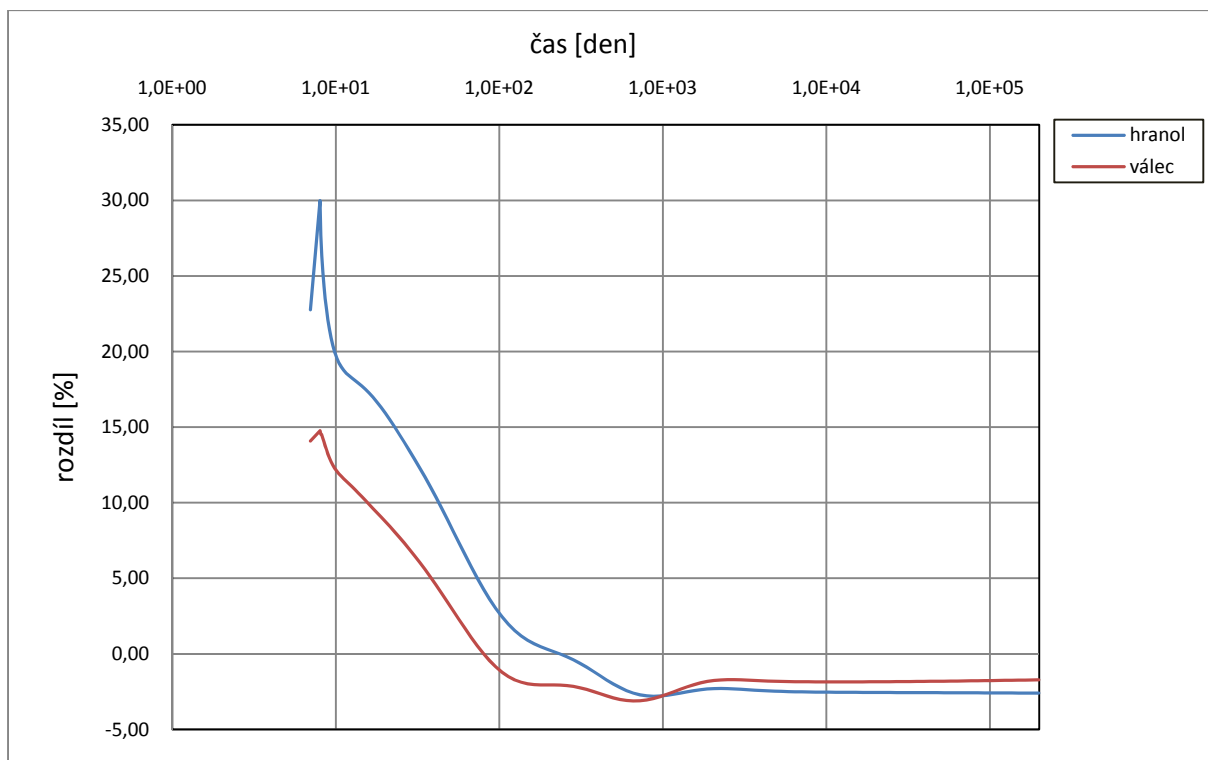
Obrázek 10.8 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou velikostí (násobky poločasu vysychání). Bez silového zatížení. Výpočet pomocí MPS teorie.



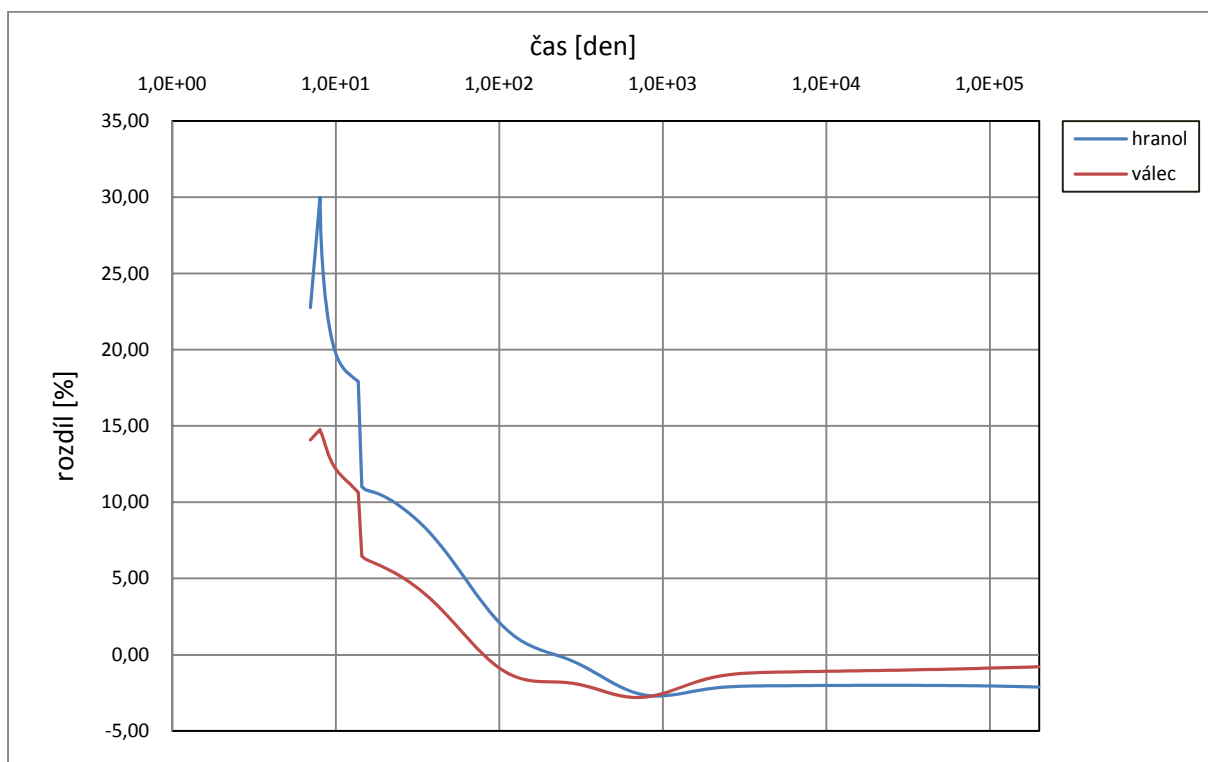
Obrázek 10.9 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou velikostí (násobky poločasu vysychání). Od času $t' = 14$ dní působí zatížení 1 MPa (tlak). Výpočet pomocí modelu B3.



Obrázek 10.10 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněnou velikostí (násobky poločasu vysychání). Od času $t' = 14$ dní působí zatížení 1 MPa (tlak). Výpočet pomocí MPS teorie.



Obrázek 10.11 Relativní rozdíl poměrné deformace (v %) referenčního stavu a stavů se změněným tvarem průřezu při zachování stejného poločasu vysychání. Výpočet pomocí MPS teorie.



Obrázek 10.12 Relativní rozdíl poměrné deformace (v referenčního stavu a stavů se změněným tvarem průřezu při zachování stejného poločasu vysychání. Od času $t' = 14$ dní působí zatížení 1 MPa (tlak). Výpočet pomocí MPS teorie.

10.2 VYHODNOCENÍ

Vliv relativní vlhkosti prostředí

Jak je vidět z obrázku 10.3, je pro model B3 v případě samotného smrštění relativní rozdíl hodnot deformace pro různé relativní vlhkosti okolního prostředí konstantní. To plyne ze vzorce (3.38), ve kterém se pro různé hodnoty relativní vlhkosti okolí mění jen hodnota součinitele k_h a ostatní výrazy jsou stejné. Pro časy delší než 1000 dní jsou hodnoty (jejich relativní rozdíl) získané pomocí MPS teorie podobné jako při výpočtu užitím modelu B3, viz obrázek 10.4. Pro kratší časy se ale průběh jednotlivých simulací velmi liší. V časovém intervalu od 10 do 100 dní dochází k velmi zajímavému jevu, který je v rozporu s očekáváním – pro menší relativní vlhkost prostředí, než je referenční stav, vychází menší velikost smrštění (např. křivka 30 % nebo 40 %). Pro hodnoty relativní vlhkosti 60 % a 70 % dochází k opačnému jevu; na výše zmíněném intervalu je hodnota smrštění vyšší než v referenčním případě.

Výsledky z výpočtů, u kterých bylo aplikováno zatížení ve stáří betonu 14 dní vyvolující napětí -1 MPa, jsou uvedeny na obrázku 10.5 pro model B3 a na obrázku 10.6 pro MPS teorii. V intervalu od 100 do 1000 dní dochází ke stejnému jevu jako v předchozím případě. Relativní rozdíl finálních hodnot deformace je pro vyšší hodnoty relativní vlhkosti (60 % - 90 %) podobný jako pro model B3. Pro relativní vlhkost 30 % a 40 % je tento rozdíl menší (přibližně o třetinu)

Vliv velikosti prvku

V modelu B3 je závislost konečné hodnoty smrštění na velikosti prvku dána posledním členem ve vzorci (3.39). Větší prvek je charakterizován vyšším poločasem vysychání τ_{sh} . Funkce $E(t)$ je v čase rostoucí. Proto je pro větší prvek (větší než referenční model s poločasem vysychání $\tau_{sh} = 600$ dní) zlomek $\frac{E(607)}{E(t_0 + \tau_{sh})}$ větší než jedna, a proto je konečná hodnota smrštění vyšší. Tato skutečnost je dokumentována na obrázku 10.7 pro B3 a na obrázku 10.8 pro MPS teorii. U modelu B3 je ale výsledný rozdíl menší.

V případě silového zatížení a modelu B3 je konečná hodnota deformace pro všechny velikosti prvku podobná. Z důvodu větší absolutní hodnoty deformace je relativní rozdíl menší – viz obrázek 10.9. Výsledky výpočtu užitím MPS teorie jsou uvedeny na obrázku 10.10. Pro čas menší než 1000 dní jsou výsledky velmi podobné jako u modelu B3. Pro delší časy a se ale průběhy liší – u větších prvků dochází k většímu dotvarování (cca 20 % pro prvek s $\tau_{sh} = 6000$ dní).

Vliv tvaru průřezu

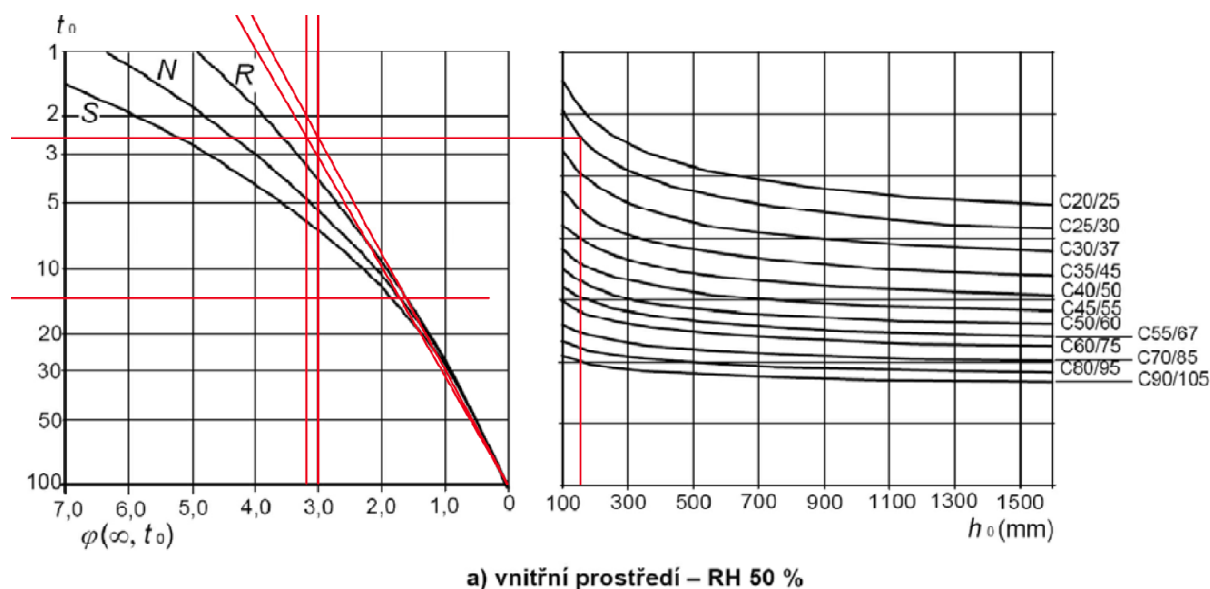
Výsledky z výpočtů modelem B3 zde nejsou uvedeny. Z důvodu stejného poločasu vysychání je průběh ve všech případech stejný. Při výpočtu podle MPS teorie ale vyšly významné rozdíly. Viz obrázek 10.11 pro smršťování a obrázek 10.12 pro smršťování a silové zatížení.

10.3 VÝPOČET PODLE EC2

V tomto oddílu jsou prezentovány výsledky dotvarování a smršťování získané výpočtem podle postupů uvedených v současnosti platné normě ČSN EN 1992-1-1, Eurokód 2. Výpočet byl proveden na modelu, který byl v předchozí kapitole označený jako referenční tj., deska tl. 139 mm, beton C25/30, jehož střední hodnota pevnosti 33 MPa (viz příloha 2) je nejbližší 30 MPa uvažovaným v předcházející části, vlhkost okolního prostředí 50 %, stáří v okamžiku zahájení vysychání 7 dní a v okamžiku zatížení 14 dní. Velikost zatížení byla 1 MPa v tlaku. Pro srovnání dvou postupů uvedených v této normě byl zvolen cement třídy N.

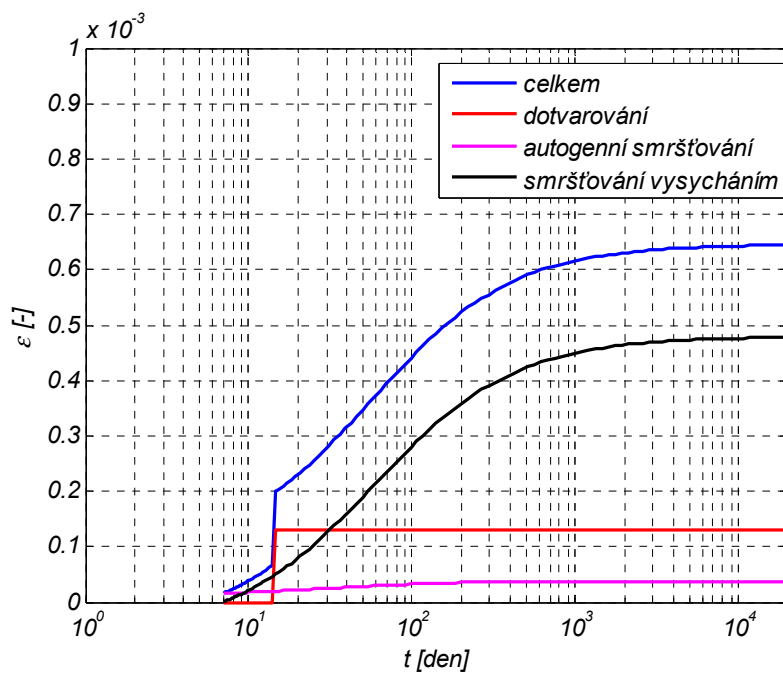
10.3.1 VÝPOČET DLE ČLÁNKU 3.1.4 – DOTVAROVÁNÍ A SMRŠŤOVÁNÍ

Výpočtem podle článku 3.1.4 (viz příloha 2) jsme schopni určit finální hodnotu dotvarování, nikoliv ale její průběh v čase. Dotvarování je v normě popsáno součinitelem dotvarování, jehož hodnotu lze určit velmi rychle odečtením ze dvou grafů (viz obrázek 10.13). Tyto grafy jsou ale uvedeny pouze pro dvě hodnoty vlhkosti okolního prostředí: 50 % a 80 %. Oproti modelu B3 umožňuje Eurokód provádět i nelineární výpočty dotvarování (působící napětí je větší než 0.45 charakteristické hodnoty pevnosti v tlaku).

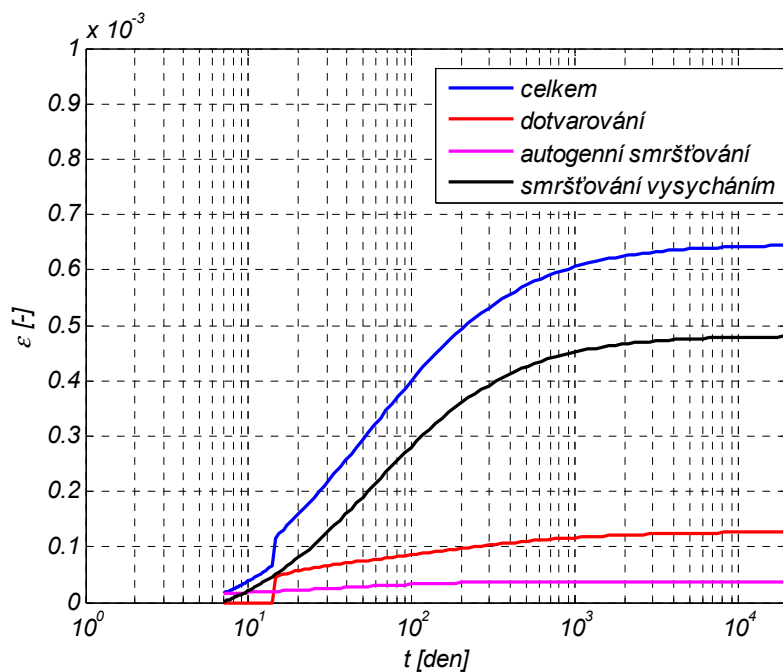


Obrázek 10.13 Postup určení součinitele dotvarování z grafu. Pro cement třídy R je součinitel dotvarování přibližně 3, pro cement třídy N přibližně 3.2.

Norma nezanebává autogenní smršťování. Jeho průběh i průběh smršťování způsobeného vysycháním je popsán časově závislou funkcí, která se limitně blíží ke konečné hodnotě. Výsledek výpočtu je znázorněn na obrázku 10.14. Jmenovité hodnoty neomezeného poměrného smršťování vysycháním jsou ale uvedeny (tabelovány) jen pro jednu třídu cementu.



Obrázek 10.14 Výsledky výpočtů podle článku 3.1.4 Eurokódu 2.



Obrázek 10.15 Výsledky výpočtů podle přílohy B Eurokódu 2.

10.3.2 VÝPOČET DLE PŘÍLOHY B

Tato část normy dále rozšiřuje článek 3.1.4. Významným rozšířením je zavedení časově závislé funkce, která vyjadřuje průběh dotvarování v čase. Pro součinitel dotvarování je zde uveden vzorec (hodnotu není nutné odečítat z grafu). Jeho hodnota závisí na pevnosti betonu, vlhkosti okolního prostředí, efektivní tloušťce, okamžiku zatížení, délce trvání zatížení, třídě cementu a okolní teplotě. Výsledek výpočtu je graficky znázorněn na obrázku 10.15.

10.3.3 VYHODNOCENÍ

Z výše uvedených grafů je zřejmé, že získané výsledky se významně liší jen časovým průběhem dotvarování; postupem podle článku 3.1.4 je průběh konstantní, podle přílohy B je časově proměnný. Pokud nás zajímá jen koncová hodnota součinitele dotvarování a současně se konstrukce nachází v prostředí o relativní vlhkosti blízké 50 % nebo 80 %, lze bez rizika vzniku větší chyby použít zjednodušený postup uvedený v článku 3.1.4.

V porovnání s výsledky získanými výpočty podle modelu B3, jsou konečné hodnoty smrštění i dotvarování vypočtené podle EC2 nižší. Konečná hodnota smrštění (viz obrázek 10.2) je menší přibližně o 15 %, hodnota dotvarování o 25 %. Tyto odchylky byly stanoveny jen z jednoho výpočtu. V jiných případech se mohou lišit. Významným rozdílem mezi oběma postupy je ale průběh dotvarování pro dlouhé doby zatížení. V případě EC2 se hodnota dotvarování shora omezena a limitně se k ní blíží. Oproti tomu model B3 horní hranici nedefinuje; dotvarování má logaritmický průběh.

11. ZÁVĚR

Tuto diplomovou práci lze rozdělit do tří hlavních částí. První část má spíše informativní charakter. Byl zde definován proces dotvarování a smršťování, prezentovány byly jejich příčiny a faktory ovlivňující jejich velikost a průběh. Ve třetí kapitole byly představeny vhodné nástroje a modely sloužící k jejich výstižnému a současně jednoduchému popisu. Uvedeny byly jak modely mající spíše historický význam, tak i modely v současnosti nejpropracovanější a nejpoužívanější.

Druhá část – počínaje kapitolou 4 – představuje základnu, ve které jsou shromážděny a rozebrány všechny postupy a algoritmy, z nichž ty nejlepší byly následně implementovány do programu OOFEM. Ve čtvrté kapitole jsou odvozeny funkce poddajnosti Kelvinova a Maxwelllova článku, nestárnoucího, stárnoucího a solidifikujícího Kelvinova řetězce. V dalších dvou kapitolách jsou uvedeny algoritmy sloužící k numerickému výpočtu dotvarování Kelvinova článku (kapitola 5) a Kelvinova řetězce (kapitola 6). Prozkoumán byl zejména vliv druhu algoritmu, délky kroku a průběhu napětí na výslednou přesnost řešení. Šestá kapitola obsahuje také studii a metody stanovení optimálních hodnot retardačních časů a tuhostí Kelvinova řetězce. Sedmá a osmá kapitola stručně představuje nejdůležitější myšlenky a rovnice solidifikační teorie a solidifikační teorie mikropředpětí.

Třetí část – kapitoly 9 a 10 – představuje jádro diplomové práce. V deváté kapitole je stručně charakterizován program OOFEM a další programy, které je dobré při práci s ním používat. Ve stejné kapitole je zmíněna struktura, stávající a nové implementace modelu B3 a jejich výhody a nevýhody. V desáté kapitole byly porovnány výsledky výpočtů novou implementací, modelem B3 a normou Eurokód 2.

Jedním z hlavních přínosů této práce je zcela nová implementace modelu B3 v programu OOFEM. Jejím jádrem je solidifikující Kelvinův řetězec. Použitím nové implementace je možné několikanásobně zrychlit výpočty základního dotvarování betonu. Kromě základního dotvarování lze tento algoritmus použít i pro přibližný výpočet dotvarování prvků velké mocnosti, u kterých je délka životnosti mnohem menší než poločas vysychání, a to i tehdy, pokud jsou vystaveny prostředí s rozdílnou relativní vlhkostí. Stávající implementace je překonána i v dalších ohledech; například je umožněn výběr metody pro určení tuhostí Kelvinova řetězce – k metodě nejmenších čtverců byla přidána metoda využívající analýzu retardačního spektra funkce poddajnosti. Počet článků Kelvinova řetězce již není fixní, je určen v závislosti na délce uživatelem specifikovaného časového intervalu. Tím je dosaženo dalších úspor výpočetního času.

Implementován byl i model pro bodový popis smršťování a dotvarování betonu. Tento model využívá zjednodušenou formulaci Microprestress-Solidification Theory. Zjednodušení spočívá v předpokladu konstantní teploty; velikost mikropředpětí tak zcela závisí jen vývoji vlhkosti. Kvalitativní správnost nové implementace byla dokázána srovnávacími výpočty.

Předmětem dalšího zkoumání by mohlo být rozšíření implementace Microprestress-Solidification Theory o vliv teploty. Pokud by materiálový model umožňoval vznik trhlin, bylo by jistě velmi zajímavé sledovat důsledky zpětného propojení mechanické úlohy a úlohy vedení tepla a vlhkosti.

12. LITERATURA

1. **Bažant, Z. P. a Jirásek, M.** *Creep and Hygrothermal Effects in Concrete Structures*. místo neznámé : Springer, 2010.
2. **Jirásek, M. a Zeman, J.** *Přetváření a porušování materiálů*. Praha : Nakladatelství ČVUT, 2006.
3. **ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby**. místo neznámé : Český normalizační institut, 2006.
4. **Svoboda, L. a kolektiv, a.** *Stavební hmoty*. Bratislava 2004 : Jaga group, s.r.o., 2004.
5. **Patzák, B.** OOFEM project home page. <http://www.oofem.org>. 2000.
6. **Bažant, Z. P. a Baweja, S.** Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model B3 - Short Form. *Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage - Structural Design Effects*. 2000.
7. —. Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model B3. *Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage - Structural Design Effects*. 2000.
8. **Bažant, Z. P., Hauggaard, A. B. a Baweja, S.** Microprestess-Solidification Theory for Concrete Creep. II: Algorithm and Verification. *Journal of engineering Mechanics*. 1997, November.
9. **Bažant, Z. P., a další.** Microprestess-Solidification Theory for Concrete Creep. I: Aging and Drying Effects. *Journal of Engineering Mechanics*. 1997, November.
10. **Hilsdorf a Müller.** Structural Concrete, Textbook on Behaviour, Design and Performance. *fib Bulletin*. 1996, Sv. 1, July.
11. **Bažant, Z. P., Hauggard, A. B. a Baweja, S.** Microprestess solidification theory for aging and drying creep in concrete. *Advances in Building and Materials Science*. 1996.
12. **Bažant, Z. P. a Prasannan, S.** Solidificaton Theory for Concrete Creep. II: Verification and Application. *Journal of Engineering Mechanics*. 1989, August.
13. —. Solidification Theory for concrete Creep. I: Formulation. *Journal of Engineering Mechanics*. 1989, August.
14. **Křístek, V. a Šmerda, Z.** *Creep and Shrinkage of Concrete Elements and Structures*. Amsterdam : Elsevier, 1988.
15. **Bažant, Z. P. a Chern, J.-C.** Triple Power Law for Concrete Creep. *Journal of Engineering Mechanics*. 1985, ASCE 111.
16. —. Log Double Power Law for Concrete Creep. *ACI Journal*. 1985, September-October.
17. **Křístek, V.** *Teoretické problémy betonových konstrukcí a mostů*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1980.

18. Pomůcka pro cvičení z předmětu Numerická matematika. <http://mat.fsv.cvut.cz/ivana/yum8.pdf>
19. http://en.wikipedia.org/wiki/Root_mean_square
20. http://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule
21. http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

13. PŘÍLOHY

13.1 PŘÍLOHA 1 – CHARAKTERISTIKY BETONU

MATERIALS WITH WELL DEFINED THICKNESS AND HYGROTHERMAL CAPACITY

Mat.name	1	default	solar	longwave
		thickness	absorpt.	emissivity
'*' and		delx	Absorp	Emiss
8 chars.	digit 1	[m]	[-]	[-]

{ Thermal properties }

dry	thermal	freez.pnt	thermal	water dep	ice dep.	temp. dep.
density	capacity	depress.	cond.	lambda	lambda	lambda
ro	cp	dtfreez	lambda10	lambdauw	lambdaui	tclambda
[kg/m3]	[J/(kgúK)]	[K]	[W/(múK)]	[W/(múK)]	[W/(múK)]	[W/(múKý)]

{ Vapour transport and storage properties }

DELTA_X RH-entries in delta-RH curve (for the hygroscopic region) [-].
List of one to n numbers terminated with an asterisk *

DELTA_Y Vapour perm. entries ("delta") in delta-RH curve [kg/(músúPa)].
List with same number of elements as DELTA_X (no terminator)

DELTAH_X u-entries in delta-u curve (for the over-hygroscopic region) [kg/kg].
List of one to n numbers terminated with an asterisk *

DELTAH_Y Vapour perm. entries ("delta") in delta-u curve [kg/(músúPa)].
List with same number of elements as DELTAH_X (no terminator)

ABSORP_X RH-entries in sorption curve (u-RH) (for absorption) [-].
List of one to n numbers terminated with an asterisk *

ABSORP_Y Moisture content entries ("u") in absorption curve [kg/kg].
List with same number of elements as ABSORP_X (no terminator)

DESORP_X RH-entries in sorption curve (u-RH) (for desorption) [-].
List of one to n numbers terminated with an asterisk *

DESORP_Y Moisture content entries ("u") in desorption curve [kg/kg].
List with same number of elements as DESORP_X (no terminator)

{ Liquid transport and storage properties }

critical	capillary	vacuum
moist.cnt	moist.cnt	moist.cnt
ucr	ucap	uvac
[kg/kg]	[kg/kg]	[kg/kg]

HYDCND_X u-entries in hydraulic conductivity's depend. on MC (Kliq-u) [kg/kg].
List of one to n numbers terminated with an asterisk *

HYDCND_Y Hydr.cond. entries ("Kliq") in Kliq-u curve [kg/(músúPa)].
List with same number of elements as HYDCND_X (no terminator)

SUCABS_X ln(PSuc)-entries in suction curve for moisture absorption ln[Pa].
List of one to n numbers terminated with an asterisk *

SUCABS_Y Moisture content entries in u-ln(PSuc) absorption curve [kg/kg].
List with same number of elements as SUCABS_X (no terminator)

SUCDRY_X ln(PSuc)-entries in suction curve for drying ln[Pa].
 List of one to n numbers terminated with an asterisk *
 SUCDRY_Y Moisture content entries in u-ln(PSuc) absorption curve [kg/kg].
 List with same number of elements as SUCDRY_X (no terminator)

*CONCRETE	1	0.10	0.65	0.9				
2400.0	800.0	15.0	1.5	36.0	108.0	0.0		
DELTAL_X	0.0	0.6	0.98 *					
DELTAL_Y	2.50E-12	2.50E-12	1.00E-11					
DELTAH_X	0.048 *							
DELTAH_Y	1.00E-11							
ABSORP_X	0.0	0.2525	0.449	0.650	0.800	0.8985		
	0.9815							
	1.00 *							
ABSORP_Y	0.0	0.00885	0.01155	0.01735	0.0262	0.0335		
	0.04435							
	0.062							
DESORP_X	0.0	0.2005	0.454	0.6555	0.8475	0.9485	1.00	
*								
DESORP_Y	0.0	0.0094	0.0219	0.02975	0.0385	0.0457	0.085	
	0.04	0.062	0.085					
HYDCND_X	0.04	0.062	0.085 *					
HYDCND_Y	1.10E-14	6.25E-13	6.25E-13					
SUCABS_X	-10.0	6.0	10.0	14.0	14.786 *			
SUCABS_Y	0.062	0.0597	0.0544	0.0454	0.04415			
SUCDRY_X	-10.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	
	12.0	13.0	14.0	14.7857 *				
SUCDRY_Y	0.085	0.084	0.0766	0.0681	0.0620	0.0577		
	0.0547							

0.0525 0.0509 0.0493 0.04795
 Concrete, 2400 kg/m3, k=1.5 W/mK, ð=2.5E-12 / 1.0E-11 kg/msPa
 Vap.Perm:
 Sorption: KKH->LA (Concrete, w/c 0.48)
 HydrCond&
 Suction :
 CAR 940810

13.2 PŘÍLOHA 2 – VÝŇATKY Z EC 2

	Pevnostní třídy betonu												Analytické vztahy/ vysvětlivky		
	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70		80	90
f_{ck} (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	
$f_{ck, cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	
f_{cm} (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	$f_{cm} = f_{ck} + 8$ (MPa)
f_{ctm} (MPa)	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5	$f_{ctm} = 0,30 \times f_{ck}^{(2/3)} \leq C50/60$ $f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + (f_{cm}/10)) > C50/60$
$f_{ctk,0,05}$ (MPa)	1,1	1,3	1,5	1,8	2	2,2	2,5	2,7	2,9	3	3,1	3,2	3,4	3,5	$f_{ctk,0,05} = 0,7 \times f_{ctm}$ 5% kvantil
$f_{ctk,0,95}$ (MPa)	2	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6	6,3	6,6	$f_{ctk,0,95} = 1,3 \times f_{ctm}$ 95% kvantil
E_{cm} (GPa)	27	29	30	31	33	34	35	36	37	38	39	41	42	44	$E_{cm} = 22(f_{cm}/10)^{0,3}$ (f_{cm} v MPa)
ε_{c1} (‰)	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,25	2,30	2,40	2,45	2,50	2,60	2,70	2,80	2,80	viz obrázek 3.2 $\varepsilon_{c1}(\text{‰}) = 0,7 f_{cm}^{0,31} < 2,8$
ε_{cu1} (‰)					3,50					3,20	3,00	2,80	2,80	2,80	viz obrázek 3.2 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu1}(\text{‰}) = 2,8 + 27[(98 - f_{cm})/100]^4$
ε_{c2} (‰)					2,00					2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	viz obrázek 3.3 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{c2}(\text{‰}) = 2,0 + 0,085(f_{ck} - 50)^{0,53}$
ε_{cu2} (‰)					3,50					3,10	2,90	2,70	2,60	2,60	viz obrázek 3.3 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu2}(\text{‰}) = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$
n					2,00					1,75	1,60	1,45	1,40	1,40	pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4$
ε_{c3} (‰)					1,75					1,80	1,90	2,00	2,20	2,30	viz obrázek 3.4 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{c3}(\text{‰}) = 1,75 + 0,55[(f_{ck} - 50)/40]$
ε_{cu3} (‰)					3,50					3,10	2,90	2,70	2,60	2,60	viz obrázek 3.4 pro $f_{ck} \geq 50$ MPa $\varepsilon_{cu3}(\text{‰}) = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$

3.1.4 DOTVAROVÁNÍ A SMRŠŤOVÁNÍ

(1) Dotvarování a smršťování betonu závisí na okolní vlhkosti, na rozměrech prvku a na složení betonu. Na dotvarování má také vliv zralost betonu v době, kdy je poprvé zatížen a závisí na době trvání a velikosti zatížení.

(2) Součinitel dotvarování, $\varphi(t, t_0)$ se vztahuje k tečnovému modulu E_c , který lze uvažovat hodnotou $1,05 E_{cm}$. Pokud není vyžadována velká přesnost, může se hodnota stanovená z obrázku 3.1 považovat za součinitel dotvarování za předpokladu, že beton není namáhán tlakovým napětím větším než $0,45 f_{ck}(t_0)$ ve stáří t_0 , tj. ve stáří betonu v okamžiku zatížení.

POZNÁMKA Pro další informace, včetně průběhu dotvarování v čase, lze použít přílohu B.

(3) Poměrné přetvoření vyvolané dotvarováním betonu $\varepsilon_{cc}(\infty, t_0)$ v čase $t = \infty$ při konstantním tlakovém napětí σ_c , působící ve stáří betonu t_0 , je dáno vztahem:

$$\varepsilon_{cc}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) (\sigma_c / E_c) \quad (3.6)$$

(4) Pokud tlakové napětí betonu ve stáří t_0 přestoupí hodnotu $0,45 f_{ck}(t_0)$, pak se má uvažovat nelineární dotvarování. Tak velké napětí může vzniknout v důsledku předpětí, např. v úrovni předpínacích vložek u prefabrikovaných prvků. V takových případech má být základní nelineární součinitel dotvarování stanoven ze vztahu:

$$\varphi_k(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \exp(1,5 (k_\sigma - 0,45)) \quad (3.7)$$

kde $\varphi_k(\infty, t_0)$ je základní nelineární součinitel dotvarování, který nahradí $\varphi(\infty, t_0)$;

k_σ poměr napětí a pevnosti $\sigma_c / f_{cm}(t_0)$,
kde σ_c je napětí v tlaku a $f_{cm}(t_0)$ průměrná pevnost betonu v tlaku v okamžiku zatížení.

(5) Hodnoty uvedené na obrázku 3.1 platí pro okolní teploty -40°C až $+40^\circ\text{C}$ a průměrnou relativní vlhkost mezi $\text{RH} = 40\%$ a $\text{RH} = 100\%$. Jsou použity následující značky:

- $\varphi(\infty, t_0)$ je konečná hodnota součinitele dotvarování;
- t_0 stáří betonu v okamžiku zatížení ve dnech;
- h_0 náhradní rozměr průřezu = $2A_c / u$,
kde A_c je průřezová plocha betonu a u je obvod části průřezu vystavené vysychání;
- S třída cementu S podle 3.1.2(6);
- N třída cementu N podle 3.1.2(6);
- R třída cementu R podle 3.1.2(6).

(6) Celkové poměrné smršťování se skládá ze dvou částí, poměrného smršťování vysycháním a poměrného autogenního smršťování. Poměrné smršťování vysycháním se vyvíjí pomalu, protože je funkcí migrace vody ztvrdlým betonem. Poměrné autogenní smršťování vzniká v průběhu tvrdnutí betonu: hlavní část proto vzniká v počátečních dnech po vybetonování. Poměrné autogenní smršťování je lineární funkcí pevnosti betonu. Zejména má být uvažováno, pokud se nový beton betonuje na ztvrdlý beton. Hodnota celkového poměrného smršťování je tedy:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} \quad (3.8)$$

kde ε_{cs} je celkové poměrné smršťování;

- ε_{cd} poměrné smršťování vysycháním;
- ε_{ca} poměrné autogenní smršťování.

Konečná hodnota poměrného smršťování vysycháním $\varepsilon_{cd, \infty}$ je rovna $k_{h1} \cdot \varepsilon_{cd, 0}$. Hodnotu $\varepsilon_{cd, 0}$ lze stanovit z tabulky 3.2 (očekávané průměrné hodnoty s variačním koeficientem přibližně 30 %).

POZNÁMKA Vztah pro $\varepsilon_{cd, 0}$ je uveden v příloze B.

Tabulka 3.2 – Jmenovité hodnoty neomezeného poměrného smršťování vysycháním $\varepsilon_{cd,0}$ ($v^{0/100}$) betonu s cementem CEM třídy N

$f_{ck}/f_{ck,cube}$ (MPa)	Relativní vlhkost ($v^{0/100}$)					
	20	40	60	80	90	100
20/25	0,62	0,58	0,49	0,30	0,17	0,00
40/50	0,48	0,46	0,38	0,24	0,13	0,00
60/75	0,38	0,36	0,30	0,19	0,10	0,00
80/95	0,30	0,28	0,24	0,15	0,08	0,00
90/105	0,27	0,25	0,21	0,13	0,07	0,00

Vývoj poměrného smršťování vysycháním v čase vyplývá ze vztahu:

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) k_h \varepsilon_{cd,0} \quad (3.9)$$

kde k_h je součinitel závisící na náhradní tloušťce h_0 podle tabulky 3.3.

Tabulka 3.3 – Hodnoty k_h ve vztahu (3.9)

h_0 (mm)	k_h
100	1,0
200	0,85
300	0,75
≥ 500	0,70

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{(t - t_s)}{(t - t_s) + 0,04 \sqrt{h_0^3}} \quad (3.10)$$

kde t je stáří betonu v uvažovaném okamžiku, ve dnech;

t_s stáří betonu (dny) na začátku smršťování vysycháním (nebo nabýváním); obvykle je to na konci ošetřování betonu;

h_0 náhradní rozměr průřezu = $2A_c/u$ [mm],
kde A_c je průřezová plocha betonu a u je obvod části průřezu vystavené vysychání.

Poměrné autogenní smršťování je dáno vztahem:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \varepsilon_{ca}(\infty) \quad (3.11)$$

$$\text{kde } \varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5 (f_{ck} - 10) 10^{-6}; \quad (3.12)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2t^{0,5}); \quad (3.13)$$

t je dáno ve dnech.

PŘÍLOHA B (INFORMATIVNÍ)

B.1 ZÁKLADNÍ VZTAHY PRO STANOVENÍ SOUČiniteLE DOTVAROVÁNÍ

(1) Součinitel dotvarování $\varphi(t, t_0)$ lze vypočítat ze vztahu:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t, t_0) \quad (B.1)$$

kde φ_0 je základní součinitel dotvarování, který lze stanovit ze vztahu:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0), \quad (B.2)$$

φ_{RH} je součinitel, vystihující vliv relativní vlhkosti na základní součinitel dotvarování

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{pro } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (\text{B.3a})$$

$$\varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad \text{pro } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \quad (\text{B.3b})$$

RH je relativní vlhkost okolního prostředí v %;

$\beta(f_{cm})$ součinitel, vystihující vliv pevnosti betonu na základní součinitel dotvarování:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}; \quad (\text{B.4})$$

f_{cm} průměrná hodnota pevnosti betonu v tlaku v MPa ve stáří 28 dní;

$\beta(t_0)$ součinitel, vystihující vliv stáří betonu v okamžiku vnesení zatížení na základní součinitel dotvarování:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})}; \quad (\text{B.5})$$

h_0 náhradní rozměr prvku v mm, kde:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u}; \quad (\text{B.6})$$

A_c plocha průřezu;

u obvod prvku vystavený okolnímu prostředí;

$\beta_c(t, t_0)$ součinitel časového průběhu dotvarování po zatížení, lze ho stanovit z následujícího vztahu:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{-0,3}; \quad (\text{B.7})$$

t stáří betonu ve dnech v uvažovaném okamžiku;

t_0 stáří betonu ve dnech v okamžiku vnesení zatížení;

$t - t_0$ neupravená doba trvání zatížení ve dnech;

β_H součinitel závislý na relativní vlhkosti (RH v %) a na náhradním rozměru prvku (h_0 v mm), lze ho stanovit ze vztahu:

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 RH)^{18}] h_0 + 250 \leq 1500 \quad \text{pro } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (\text{B.8a})$$

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 RH)^{18}] h_0 + 250 \alpha_3 \leq 1500 \alpha_3 \quad \text{pro } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \quad (\text{B.8b})$$

$\alpha_{1/2/3}$ součinitele vlivu pevnosti betonu:

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \quad \alpha_2 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{-0,2} \quad \alpha_3 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{-0,5} \quad (\text{B.8c})$$

(2) Vliv druhu cementu (viz 3.1.2 (6)) na součinitel dotvarování betonu lze uvažovat úpravou stáří betonu v okamžiku vnesení zatížení t_0 ve vztahu (B.5) podle následujícího vztahu:

$$t_0 = t_{0,T} \cdot \left(\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \quad (\text{B.9})$$

kde $t_{0,T}$ je stáří betonu ve dnech v okamžiku vnesení zatížení, upravené s přihlédnutím k vlivu teploty podle vztahu (B.10),

α mocnitel vystihující vliv druhu cementu:

- = -1 pro cement třídy S,
- = 0 pro cement třídy N,
- = 1 pro cement třídy R.

(3) Vliv zvýšených nebo snížených teplot v rozsahu 0°C až 80°C na zralost betonu lze uvažovat úpravou stáří betonu podle následujícího vztahu:

$$t_T = \sum_{i=1}^n e^{-(4000/[273+T(\Delta t_i)]-13,65)} \cdot \Delta t_i \quad (\text{B.10})$$

kde t_T je stáří betonu upravené s přihlédnutím k vlivu teploty, kterým se nahrazuje t v příslušných vztazích,

$T(\Delta t_i)$ teplota ve °C během období Δt_i ,

Δt_i počet dní, v nichž převládá teplota T .

Průměrný variační součinitel hodnot dotvarování určených podle výše uvedených vztahů, odvozených z databanky výsledků laboratorních zkoušek, je přibližně 20 %.

Výše uvedené hodnoty $\varphi(t, t_0)$ se vztahují k tečnovému modulu pružnosti E_c .

Pokud se považuje za postačující menší přesnost, lze pro dotvarování betonu ve stáří 70 let použít hodnoty uvedené na obrázku 3.1 v článku 3.1.4.

B.2 ZÁKLADNÍ VZTAHY PRO STANOVENÍ POMĚRNÉHO PŘETVOŘENÍ OD SMRŠŤOVÁNÍ VYSYCHÁNÍM

(1) Základní poměrné přetvoření od smršťování vysycháním $\varepsilon_{cd,0}$ se vypočítá ze vztahu:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right) \right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH} \quad (\text{B.11})$$

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[1 - \left(\frac{RH}{RH_0} \right)^3 \right] \quad (\text{B.12})$$

kde f_{cm} je průměrná hodnota pevnosti betonu v tlaku (MPa);

f_{cm0} = 10 MPa;

α_{ds1} součinitel, který závisí na druhu cementu (viz 3.1.2 (6)):

= 3 pro cement třídy S;

= 4 pro cement třídy N;

= 6 pro cement třídy R;

α_{ds2} součinitel, který závisí na druhu cementu:

= 0,13 pro cement třídy S;

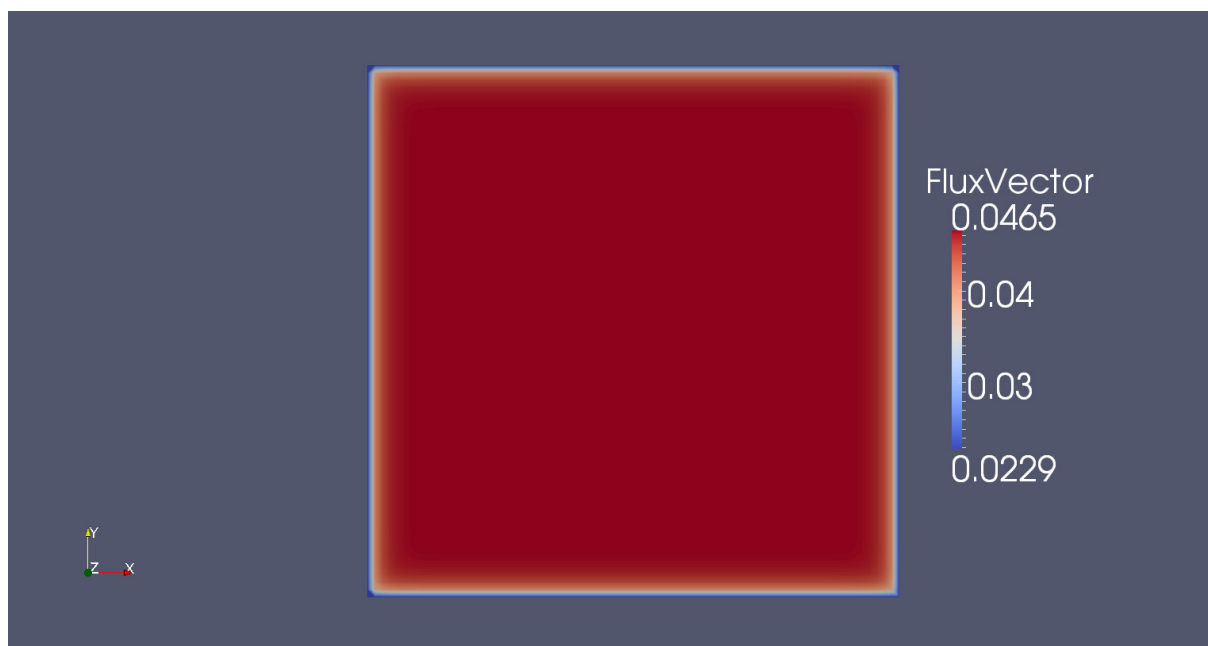
= 0,12 pro cement třídy N;

= 0,11 pro cement třídy R;

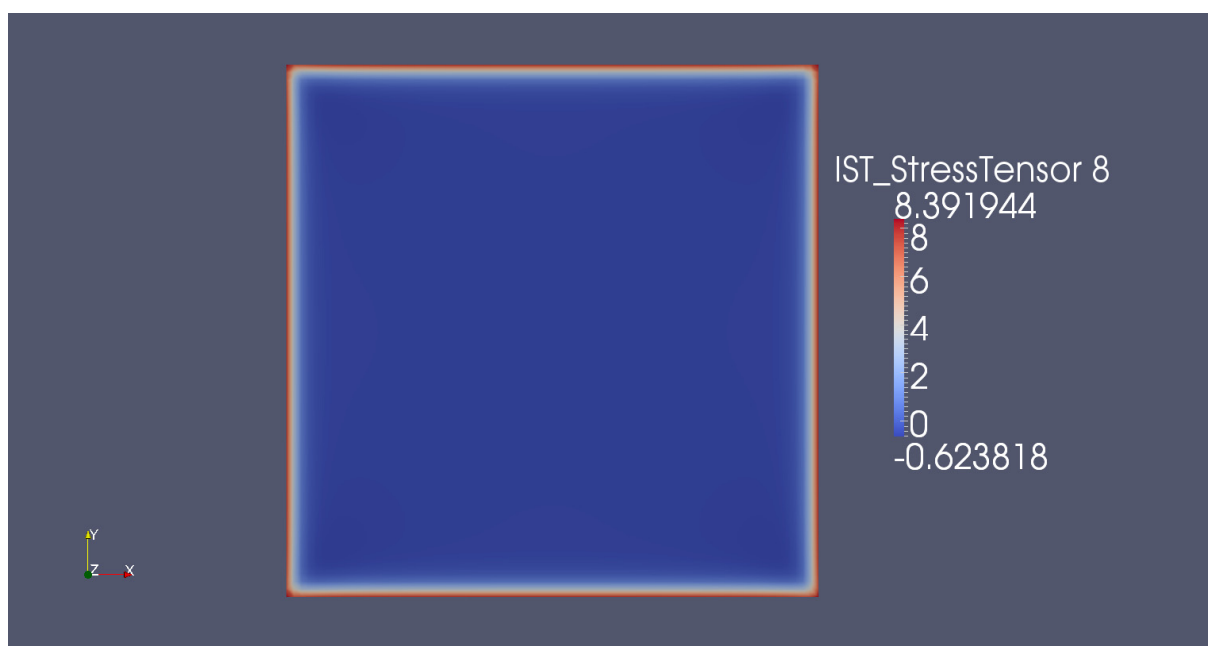
RH relativní vlhkost okolního prostředí (%);

RH_0 = 100 %.

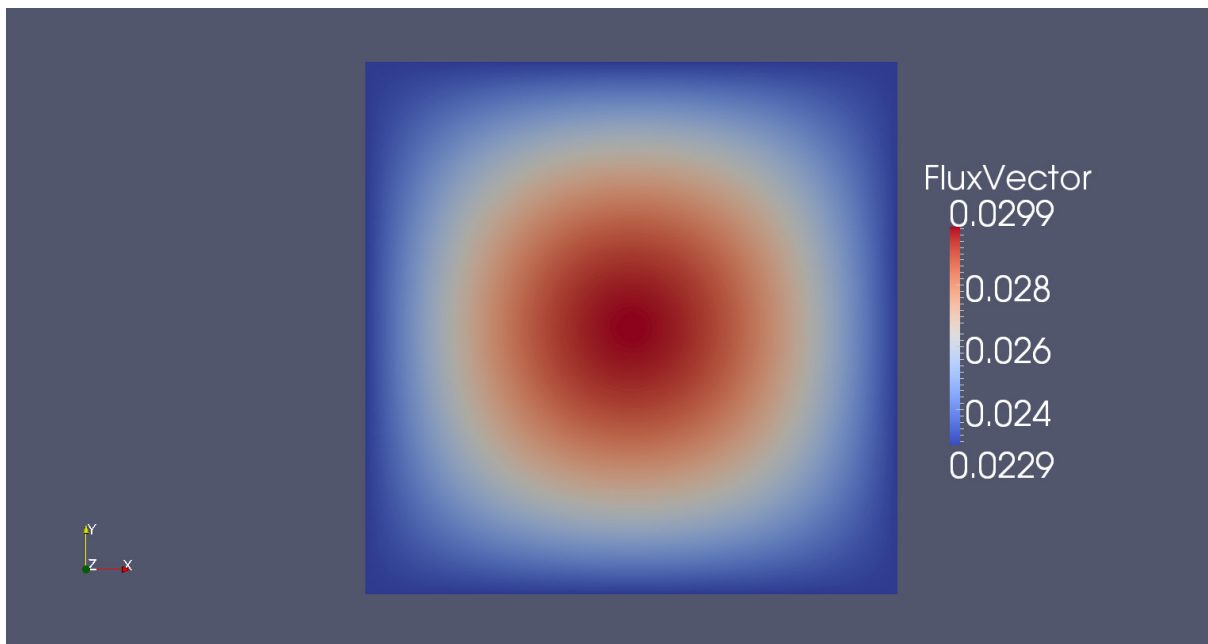
13.3 PŘÍLOHA 3 – GRAFICKÉ VÝSTUPY Z PROGRAMU PARAVIEW



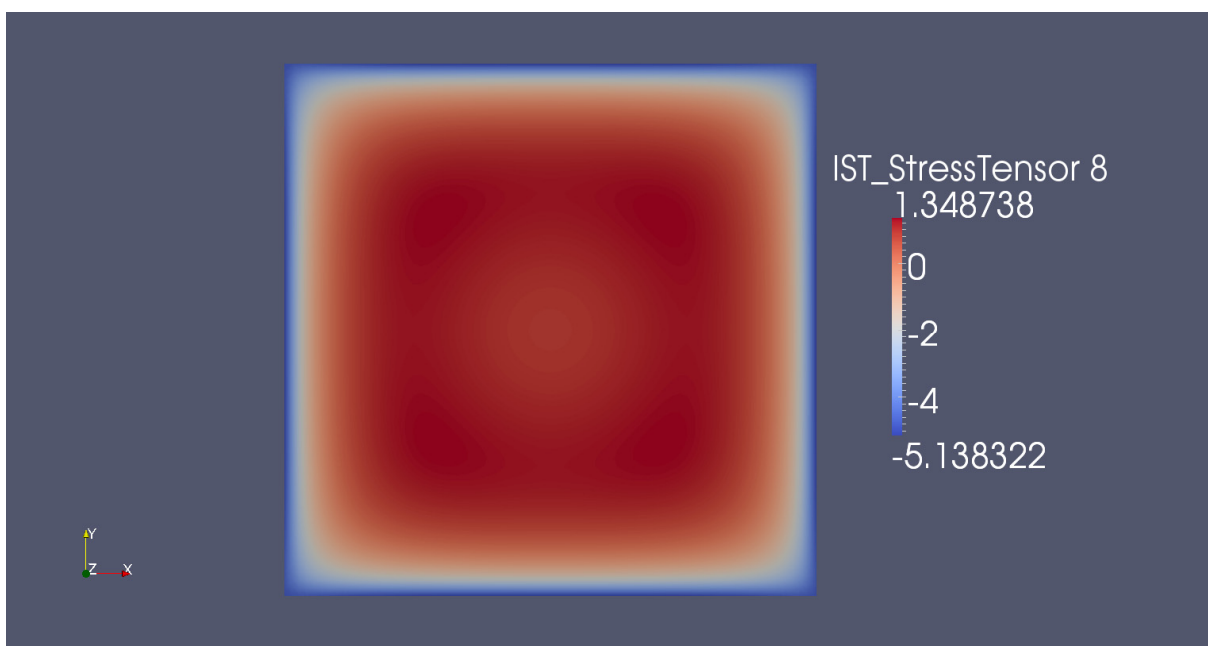
Obrázek 13.1 Rozložení vlhkosti (hmotnostní vyjádření) po průřezu v 1. výpočetním kroku ($t = t_0 = 7$ dní).



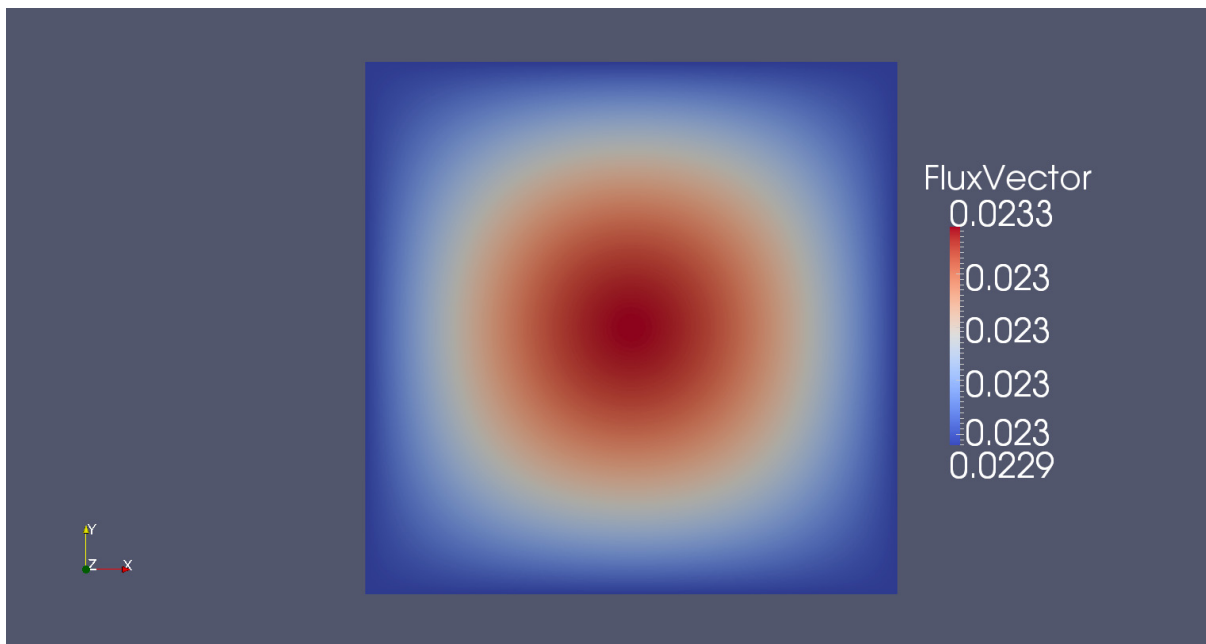
Obrázek 13.2 Rozložení normálového napětí σ_z po průřezu v 1. výpočetním kroku ($t = t_0 = 7$ dní).



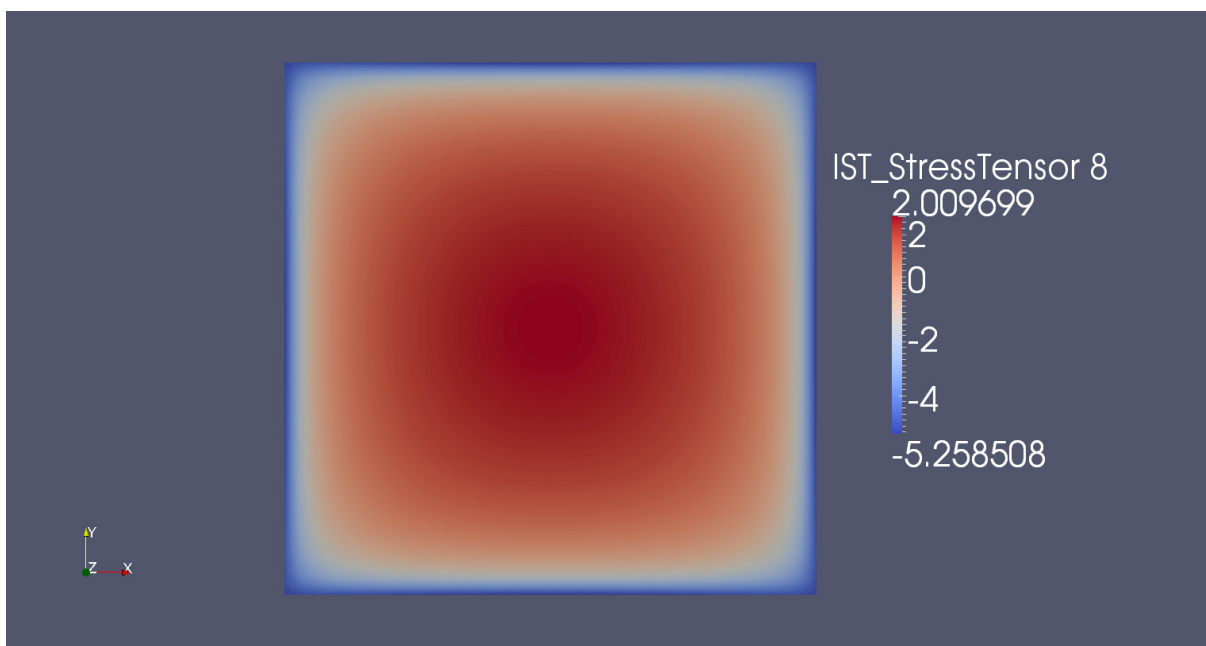
Obrázek 13.3 Rozložení vlhkosti (hmotnostní vyjádření) v 68. výpočetním kroku ($t = t_0 + \tau_{sh} = 7 + 600$ dní).



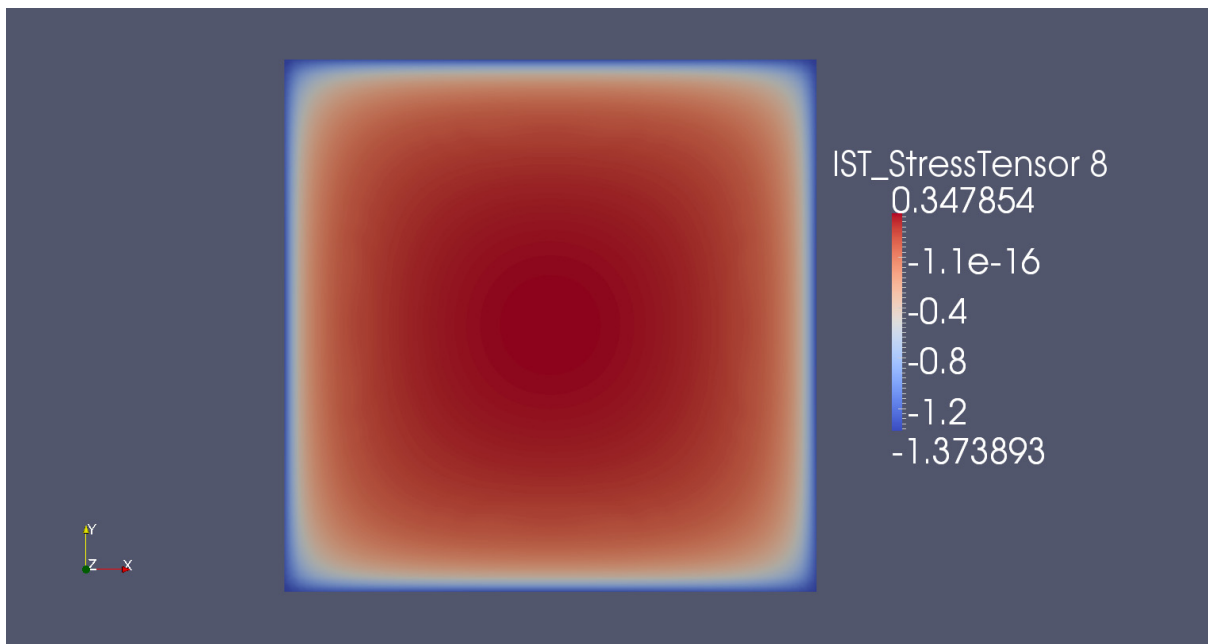
Obrázek 13.4 Rozložení normálového napětí σ_z po průřezu v 68. výpočetním kroku ($t = t_0 + \tau_{sh} = 7 + 600$ dní).



Obrázek 13.5 Rozložení vlhkosti (hmotnostní vyjádření) v 80. výpočetním kroku ($t = 1869$ dní).



Obrázek 13.6 Rozložení normálového napětí σ_z po průřezu v 80. výpočetním kroku ($t = 1869$ dní).



Obrázek 13.7 Rozložení normálového napětí σ_z po průřezu v posledním výpočetním kroku ($t = 200\,000$ dní).