Algoritmus pro výpočet průřezových charakteristik

Jan Ulrich 2016/2017

Cíl: Sestavit algoritmus v Matlabu, který spočítá a vykreslí těžiště, momenty setrvačnosti, deviační moment a jádro průřezu u polygonálního průřezu.

Myšlenka: Převedení dvojných integrálů, potřebných pro výpočet těchto veličin, na integrály po obvodu obrazce (po jednotlivých úsečkách).

Výpočet těžiště
(Nutné integrovat proti směru hodinových ručiček)

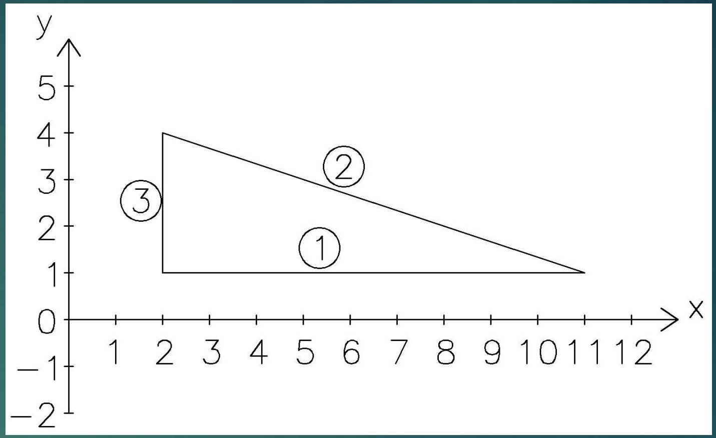
$$A \;\; = \iint_A 1 \; dA = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x) \quad dx \right)$$

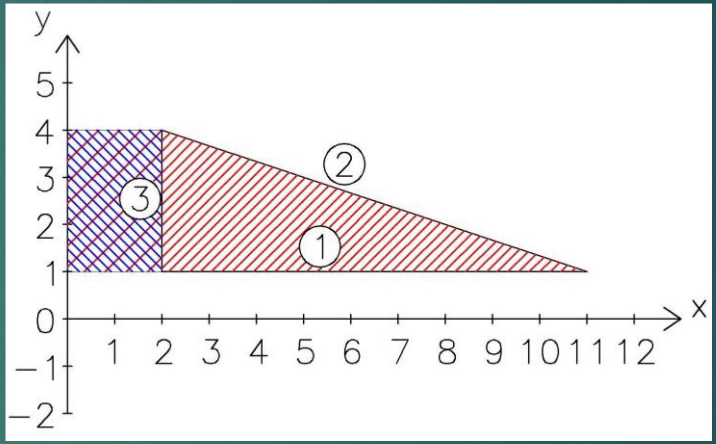
$$S_x = \iint_A \color{red}{y} \; dA = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{y_i}^{y_{i+1}} \color{red}{y} \; f_i(y) \quad dy \right)$$

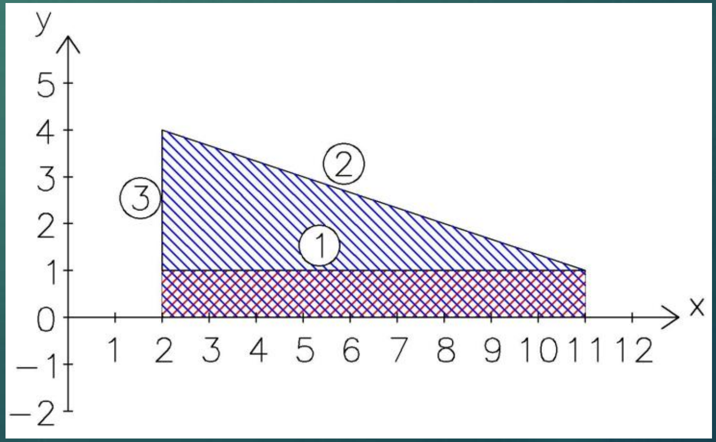
$$S_y = \iint_A \color{red}{x} \; dA = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \color{red}{x} \; f_i(x) \quad dx \right)$$

$$x_c = {}^{S_y}\!/_{A}$$

$$y_c = {}^{S_x}\!/_{A}$$



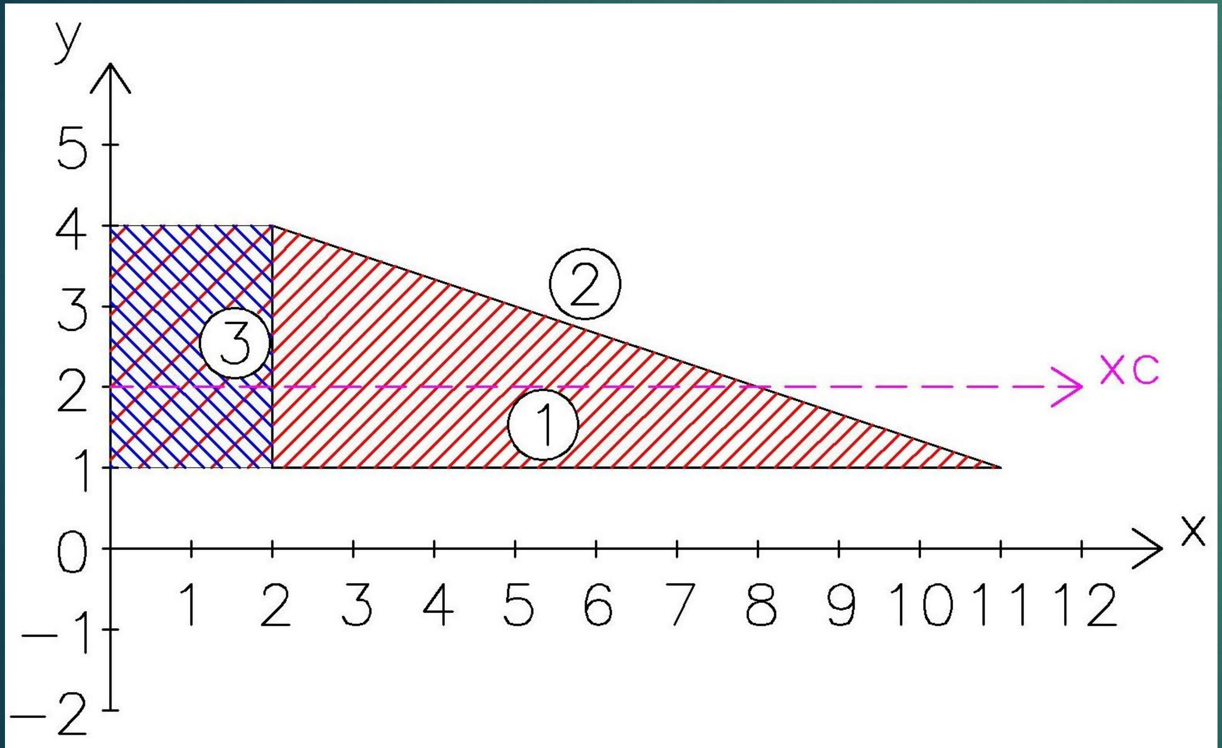


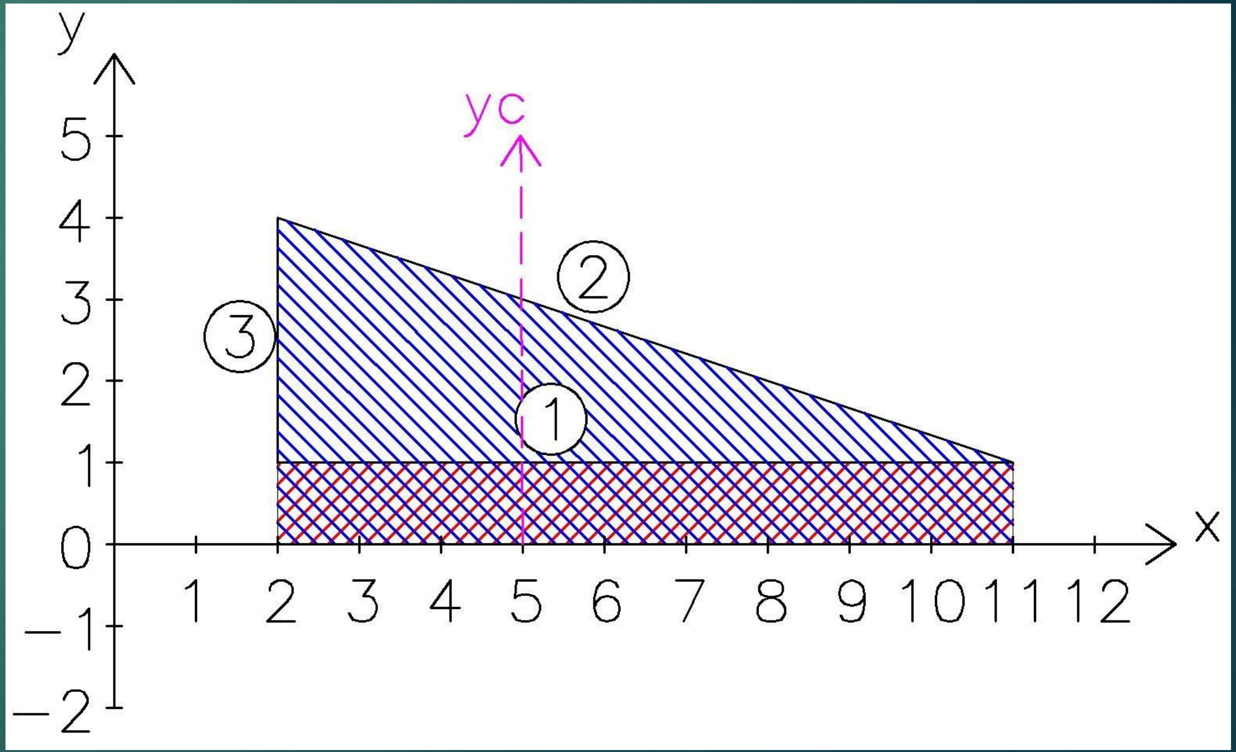


Výpočet momentů setrvačnosti

$$I_{x_c} = \iint_A (y - y_c)^2 \; dA = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{y_i}^{y_{i+1}} (y - y_c)^2 \, f_i(y) \quad dy \right)$$

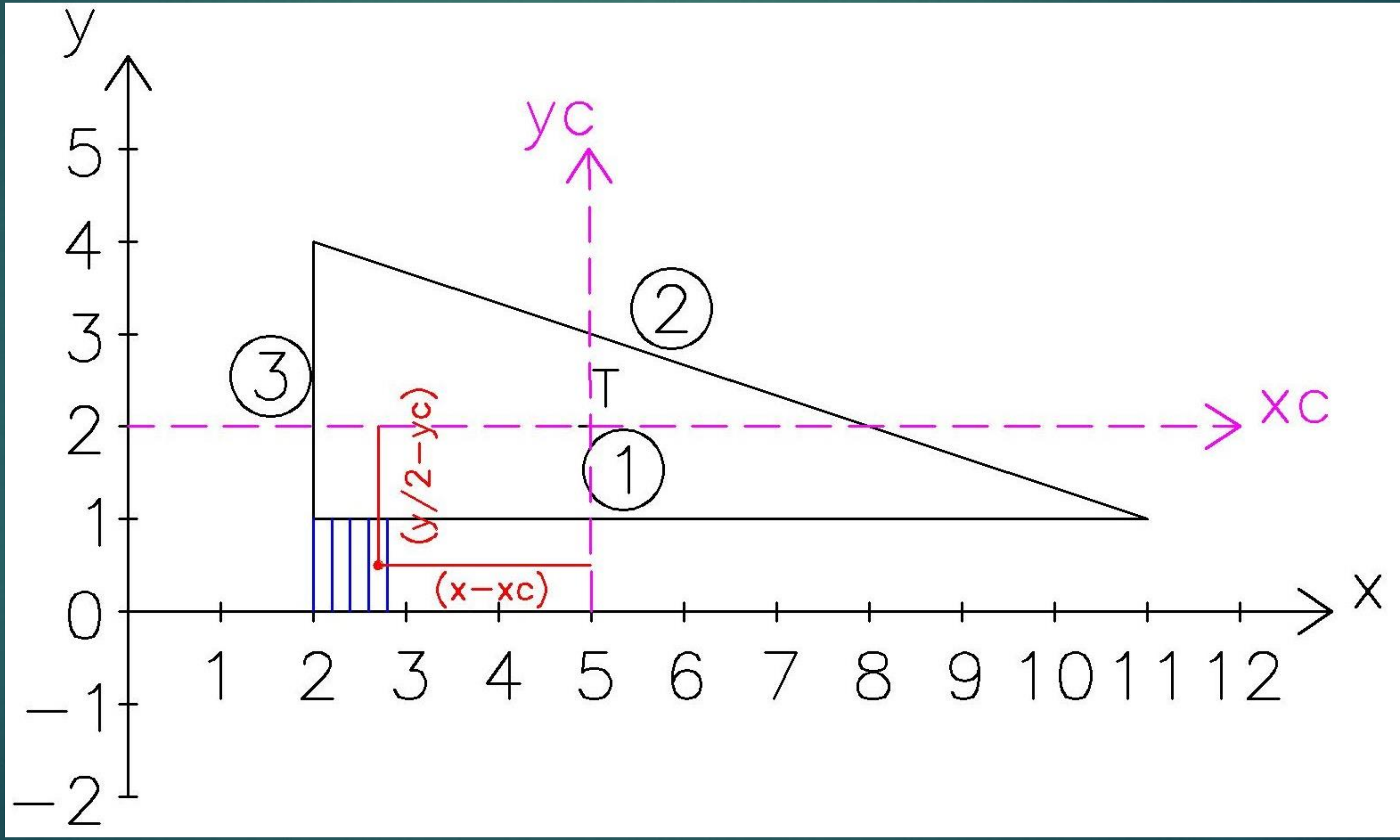
$$I_{y_c} = \iint_A (x - x_c)^2 \; dA = - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_c)^2 \, f_i(x) \quad dx \right)$$





Výpočet deviačního momentu

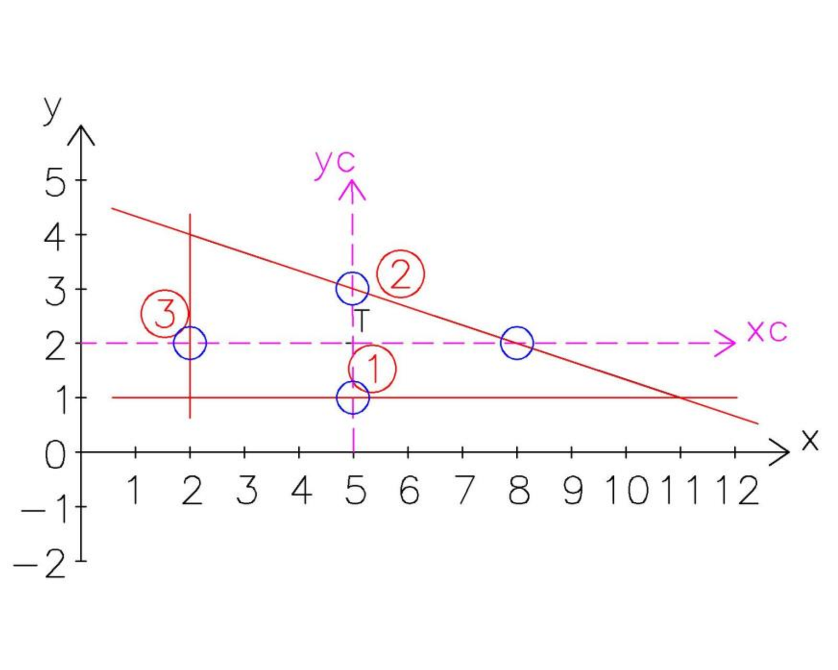
$$D_{x_c y_c} = \iint_A (y - y_c)\,(x - x_c)\; dA = -\sum_{i=1}^{n} \Big(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_c)\,\Big(\frac{f(x)_i}{2} - y_c\Big)\, f_i(x) \quad dx \Big)$$

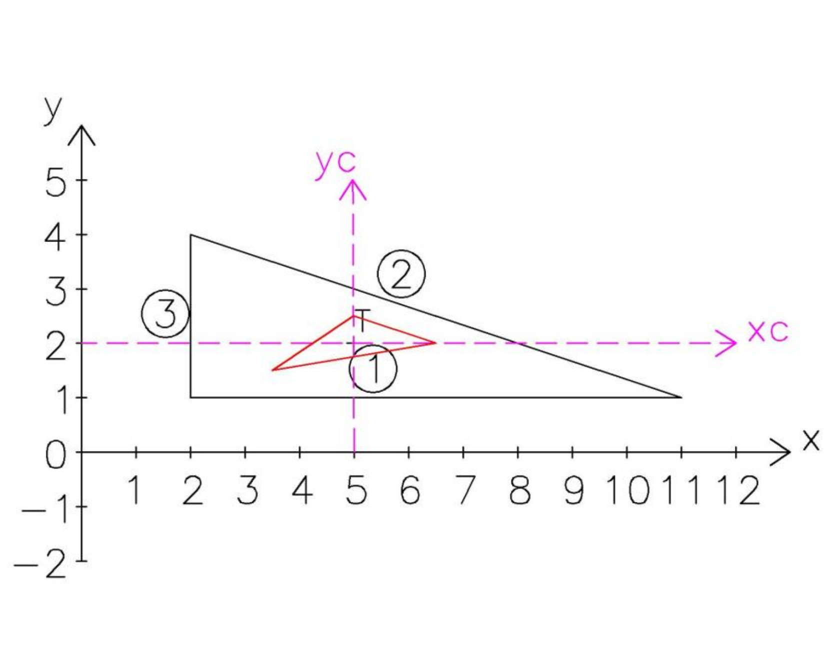


Výpočet s vykreslení jádra průřezu

1. Sestrojit konvexní obal průřezu
2. U každé takto vzniklé přímky určit průsečíky s těžišťovými osami a jejich relativní souřadnice k těžišťovým osám (pokud přímka neprotíná osu, souřadnice je NEKONEČNO)
3. $jadro_{x_i} = -\frac{\frac{I_{yc}}{A}}{q_i}$ $\quad q_i \dots relativní\ x - ová\ souřadnice\ průsečíků\ íté\ přímky$

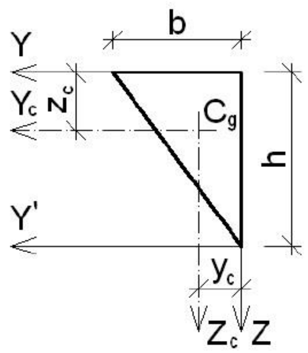
$jadro_{y_i} = -\frac{\frac{I_{xc}}{A}}{p_i}$ $\quad p_i \dots relativní\ y - ová\ souřadnice\ průsečíků\ íté\ přímky$





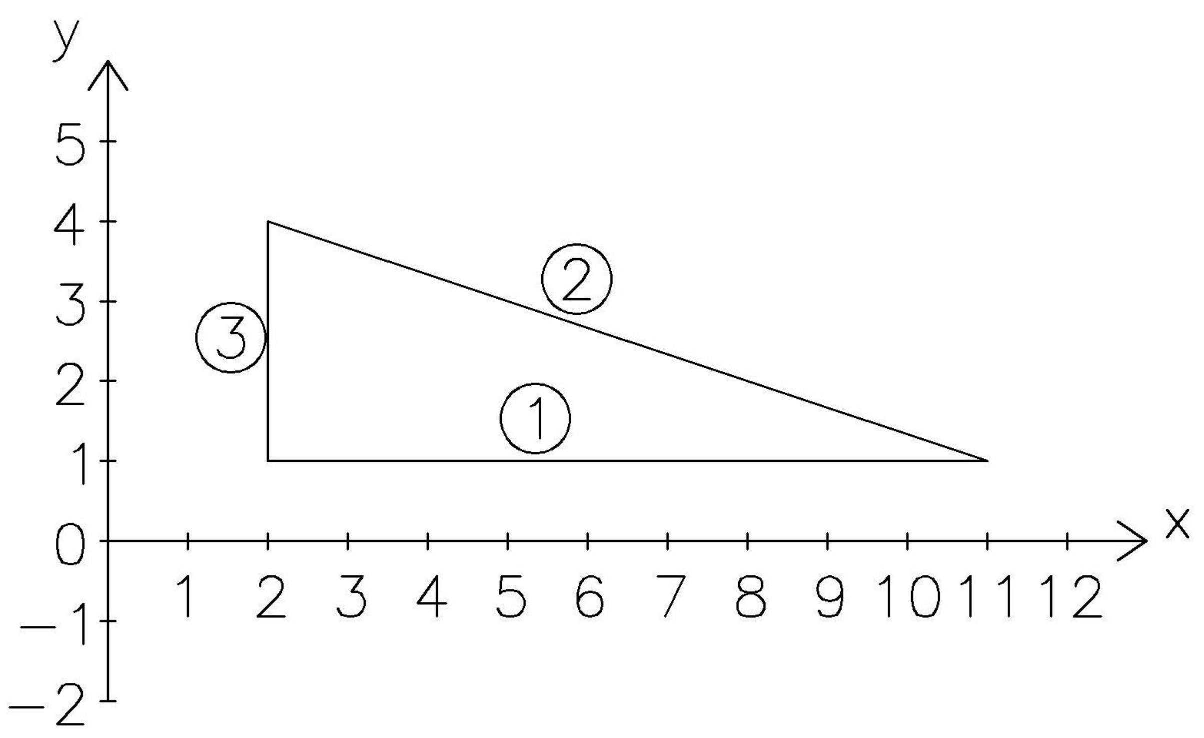
Ověření správnosti myšlenky

Nyní vypočítám průřezové charakteristiky vzorového příkladu podle mnou zvoleného postupu s hodnotami, které získám použitím vzorců z geometrických charakteristik rovinných obrazců.

	$A = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3}$ $z_c = \frac{h}{3}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = \frac{bh^3}{36}, \quad \boldsymbol{I}_{zC} = \frac{hb^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad I_z = \frac{hb^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{bh^3}{4}$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $D_{yz} = \frac{b^2h^2}{24}$ $D_{y'z} = -\frac{b^2h^2}{8}$ Pozor na znaménka!

Úplně jako první věc si musím určit obecné rovnice a meze pro jednotlivé přímky

přímka	x	y	q	a_x	b_x	a_y	b_y
1	0	9	-9	2	11	1	1
2	-3	-9	42	11	2	1	4
3	3	0	-6	2	2	4	1



Plocha

$$A \;= -\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x) \quad dx\right) = -\left(\int_{2}^{11} 1\, dx + \int_{11}^{2} \frac{42}{9} - \frac{x}{3} dx + 0\right) = -(9 + (-22{,}5)) = \mathbf{13{,}5\ m^2}$$

Statické momenty

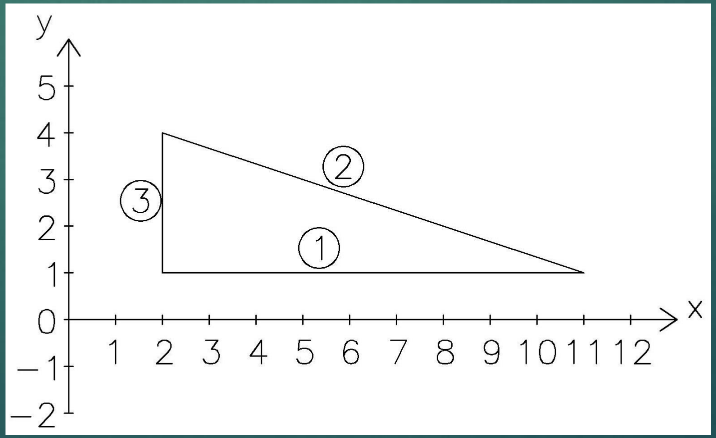
$$S_x = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{y_i}^{y_{i+1}} \color{red}{y}\, f_i(y) \quad dy\right) = \left(0 \;+ \int_{1}^{4} -3y^2 + \frac{42}{3} y\ dy + \int_{4}^{1} 2y\ dy\right) = (0\ + 42\ + (-15)) = \mathbf{27\ m^3}$$

$$S_y = -\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \color{red}{x}\, f_i(x) \quad dx\right) = -\left(\int_{2}^{11} x\ dx \;+ \int_{11}^{2} \frac{42}{9} x \;-\; \frac{x^2}{3}\ dx + 0\right) = -(58{,}5\ + (-126)) = \mathbf{67{,}5\ m^3}$$

Těžiště

$$x_c = \frac{Sy}{A} = \frac{67{,}5}{13{,}5} = \mathbf{5\ m\ (3m)}$$

$$y_c = \frac{Sx}{A} = \frac{27}{13{,}5} = \mathbf{2\ m\ (1m)}$$



Momenty setrvačnosti

$$I_{x_c} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{y_i}^{y_{i+1}} (y - y_c)^2 \, f_i(y) \quad dy \right) = \left(0 + \int_1^4 \left(-3y + \frac{42}{3} \right) (y-2)^2 \, dy + \int_4^1 (2)\,(y-2)^2 \, dy \right)$$

$$= \left(12{,}75 \; + (-6) \right) = \mathbf{6,75 \;\; m^4}$$

$$I_{y_c} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_c)^2 \, f_i(x) \quad dx \right) = -\left(\int_2^{11} 1 \, (x-5)^2 \, dx + \int_{11}^{2} \left(\frac{42}{9} - \frac{x}{3} \right) (x-5)^2 \, dx + 0 \right)$$

$$= -\left(81 + (-141{,}75) \right) = \mathbf{60,75 \; m^4}$$

Deviační moment

$$D_{x_c y_c} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_c)\left(\frac{f(x)_i}{2} - y_c\right) f_i(x) \quad dx\right) = -\left(\int_{2}^{11} (x-5)\left(\frac{1}{2} - 2\right) \times 1 \ dx + \right.$$

$$\left. + \int_{11}^{2} (x-5)\left(\frac{42}{9\times 2} - \frac{x}{3\times 2} - 2\right)\left(\frac{42}{9} - \frac{x}{3}\right) dx + 0\right) = -(-20{,}25 + 30{,}375) = \mathbf{-10{,}125\ m^4}$$

Výpočet podle vzorců z tabulek geometrické charakteristiky

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{9 \times 3}{2} = 13{,}5\ m^2$$

$$x_c = \frac{b}{3} = \frac{9}{3} = 3m$$

$$y_c = \frac{h}{3} = \frac{3}{3} = 1m$$

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{36} = \frac{9 \times 3^3}{36} = 6{,}75\ m^4$$

$$I_{yc} = \frac{hb^3}{36} = \frac{3 \times 9^3}{36} = 60{,}75\ m^4$$

$$D_{x_c y_c} = -\frac{h^2 b^2}{72} = -\frac{3^2 \times 9^2}{72} = -10{,}125\ m^4$$

Srovnání výsledků

	Geometrické vzorce	Mé vzorce
A	$13{,}5\ m^2$	$13{,}5\ m^2$
x_c	$3m$	$3m$
y_c	$1m$	$1m$
I_{xc}	$6{,}75\ m^4$	$6{,}75\ m^4$
I_{yc}	$60{,}75\ m^4$	$60{,}75\ m^4$
$D_{x_c y_c}$	$-10{,}125\ m^4$	$-10{,}125\ m^4$

Tím, že mi vyšly stejné hodnoty, jsem se přesvědčil, že můj způsob řešení funguje a nyní ho pomocí kódu v Matlabu aplikuji na složitější průřezy

Představení kódu

- vyroba_fci – ze souřadnic bodů vytvoří matici, (počet hran X 7), kde první tři čísla reprezentují obecnou rovnici jedné hrany a další čtyři jsou meze na osách

```
function [matice_fci]=vyroba_fci(x,y)

x(1,end+1)=x(1);
y(1,end+1)=y(1);

souradnice_bodu=[x;y]';
matice_fci=zeros(length(x)-1,7);
for ii=1:length(x)-1


    matice_fci(ii,1:2)=souradnice_bodu(ii+1,:)-souradnice_bodu(ii,:);
    matice_fci(ii,1:2)=[-matice_fci(ii,2); matice_fci(ii,1)];
    matice_fci(ii,3)=-(matice_fci(ii,1)*souradnice_bodu(ii,1)+matice_fci(ii,2)*souradnice_bodu(ii,2));
    matice_fci(ii,4:5)=[souradnice_bodu(ii,1) souradnice_bodu(ii+1,1)];
    matice_fci(ii,6:7)=[souradnice_bodu(ii,2) souradnice_bodu(ii+1,2)];

end
```

přímka	x	y	q	a_x	b_x	a_y	b_y
1	0	9	-9	2	11	1	1
2	-3	-9	42	11	2	1	4
3	3	0	-6	2	2	4	1

- vyroba_pruseciky – z matice_fci vytvoří matici průsečíků každé přímky hrany se všemi ostatními přímkami hran

```
function [pruseciky]=vyroba_pruseciky(matice_fci)

pruseciky=zeros(2*size(matice_fci,1),size(matice_fci,1));
for ii=1:size(matice_fci,1)

    for io=1:size(matice_fci,1)

        if ii==io
             pruseciky(2*ii-1:2*ii,io)=NaN;

        else
            inverzni_matice=[matice_fci(ii,1:2);matice_fci(io,1:2)];
            inverzni_matice=([inverzni_matice(2,2) -inverzni_matice(1,2); -inverzni_matice(2,1) inverzni_matice(1,1)])./(inverzn
            pruseciky(2*ii-1:2*ii,io)=inverzni_matice*-[matice_fci(ii,3);matice_fci(io,3)];

        end
    end
end
```

- jadro – vyrobí souřadnice bodů jádra

```
function [X_jadro,Y_jadro]=jadro(x,y,xc,yc,A,Ix,Iy)

x_obrys=x(convhull(x,y));
y_obrys=y(convhull(x,y));

matice_fci_obrys=vyroba_fci(x_obrys(1:end-1),y_obrys(1:end-1));

q=vyroba_pruseciky([matice_fci_obrys; 0 1 -yc 0 0 0 0]);
p=vyroba_pruseciky([matice_fci_obrys; 1 0 -xc 0 0 0 0]);

q=q(end-1,1:end-1)-xc;
p=p(end,1:end-1)-yc;

q(isnan(q))=Inf;
p(isnan(p))=Inf;

X_jadro=-Iy./(A*q)+xc;
Y_jadro=-Ix./(A*p)+yc;
```

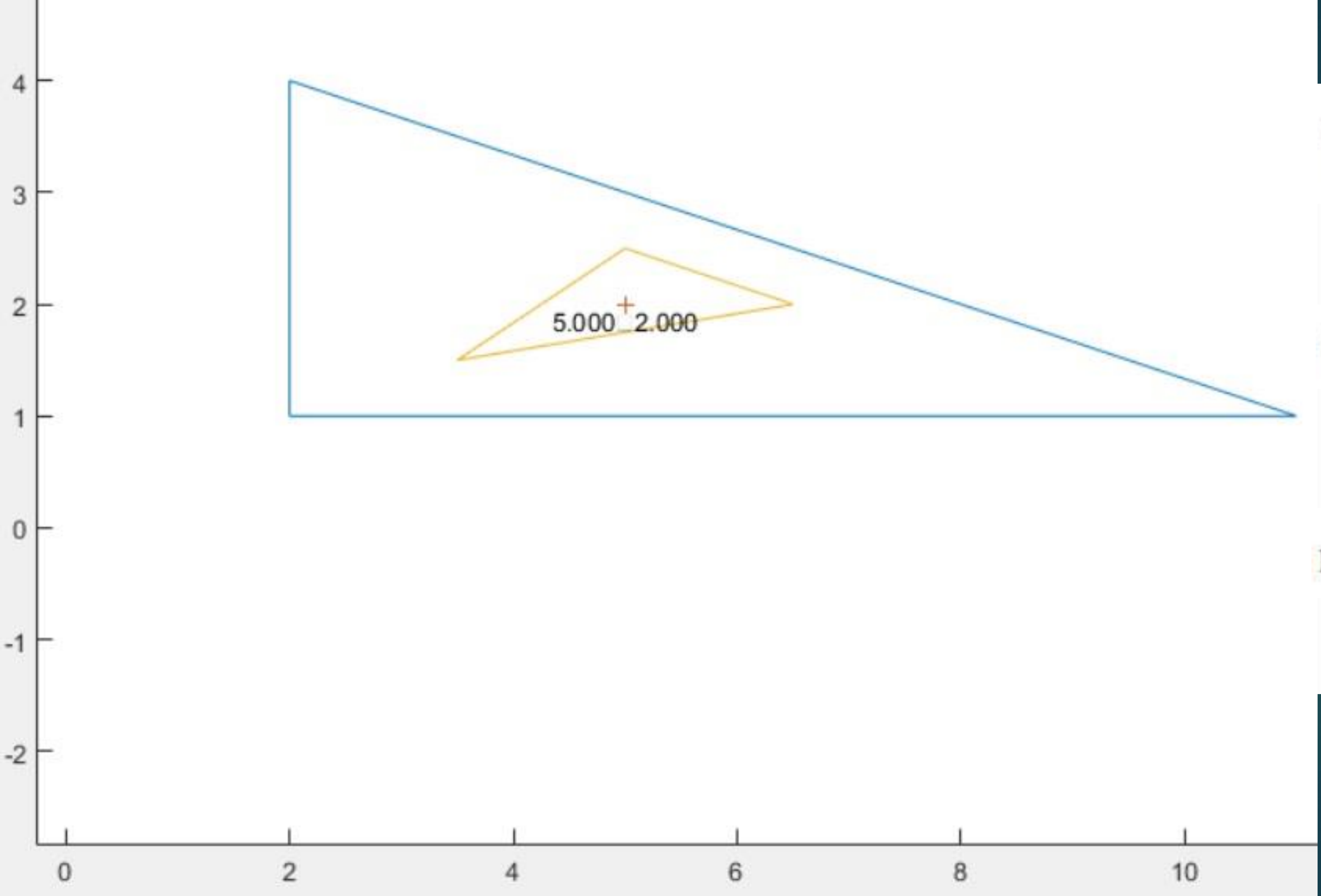
Ukázka výpočtu momentu setrvačnosti I_{yc}

(ostatní veličiny se získají velmi podobně)

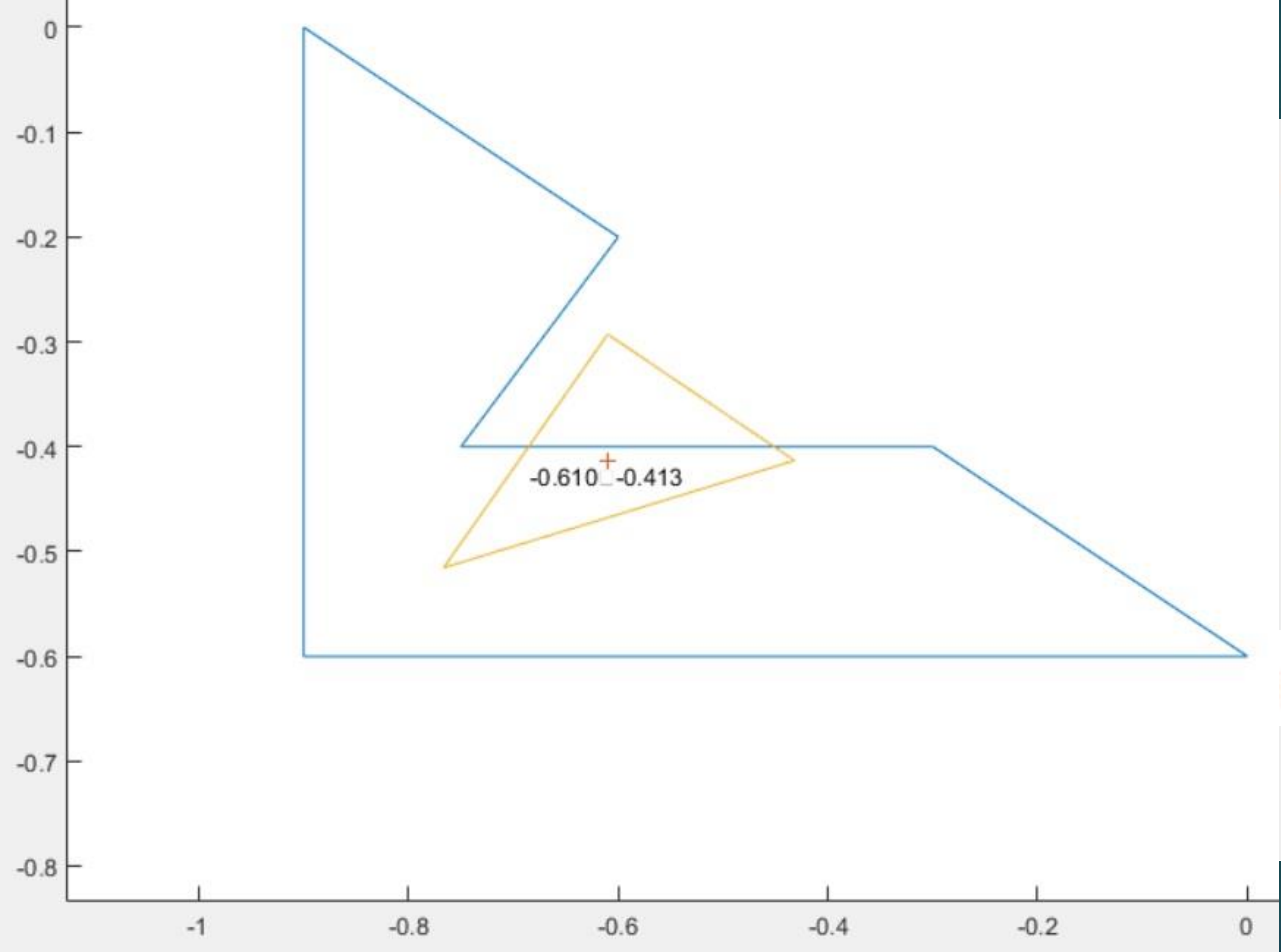
$$I_{y_c} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_c)^2 \, f_i(x) \quad dx \right) =$$

```
for ii=1:length(x)

        if abs(matice_fci(ii,2)/matice_fci(ii,1))==inf
            fun=@(x1) (x1-xc).^2.*(x1*0-matice_fci(ii,3)/matice_fci(ii,2));
        elseif (matice_fci(ii,2)/matice_fci(ii,1))==0
                fun=@(x1) 0;
        else
            fun=@(x1) (x1-xc).^2.*(x1*(-matice_fci(ii,1)/matice_fci(ii,2))-matice_fci(ii,3)/matice_fci(ii,2));
        end

        momenty_Y(ii,1)=integral(fun,matice_fci(ii,4),matice_fci(ii,5));
```

Ukázka vyřešených průřezů




```
Iyc =

   60.7500

Ixc =

    6.7500

Dxcyc =

  -10.1250
```



Iyc =

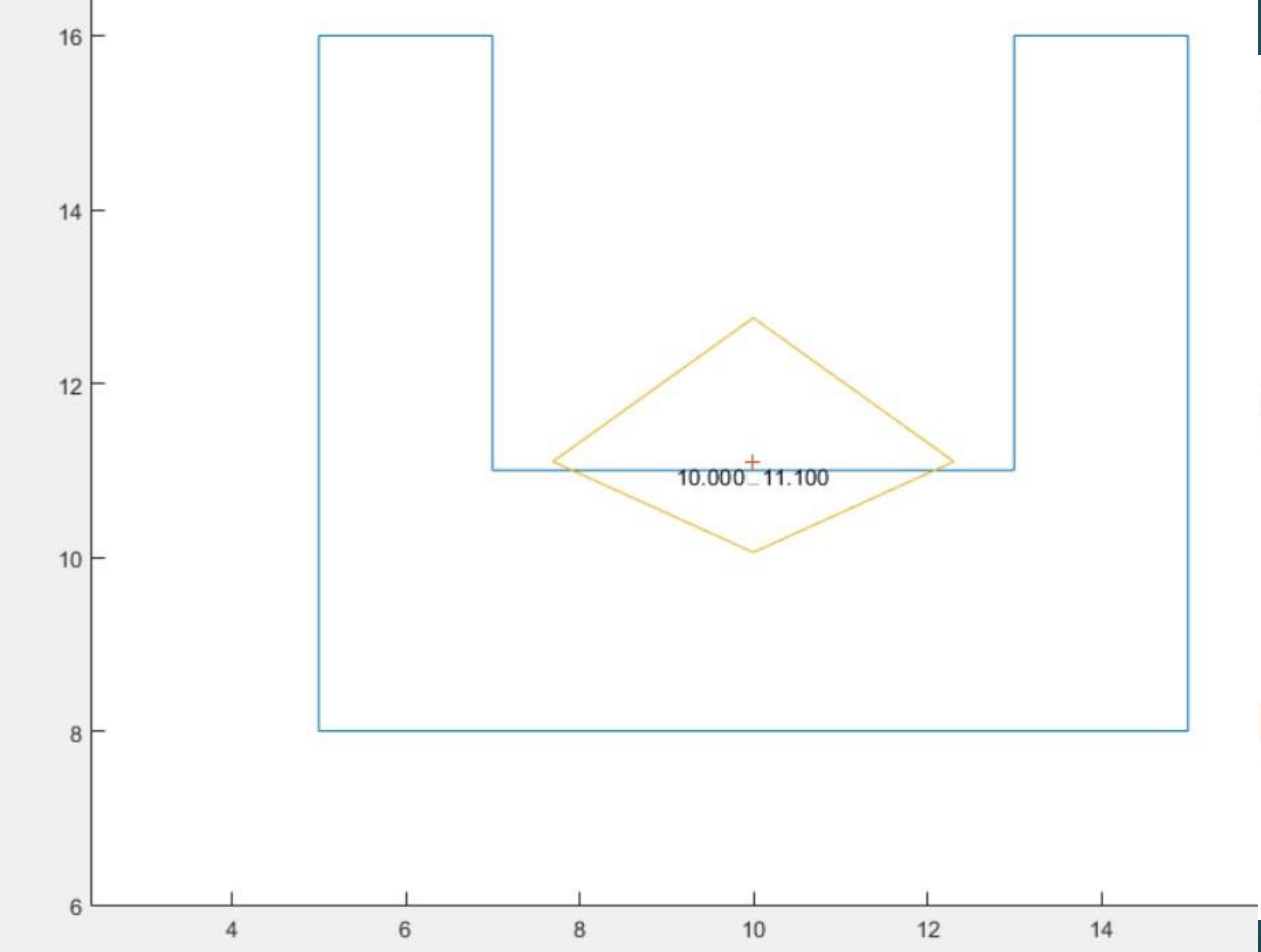
0.0116

Ixc =

0.0051

Dxcyc =

-0.0042



Iyc =

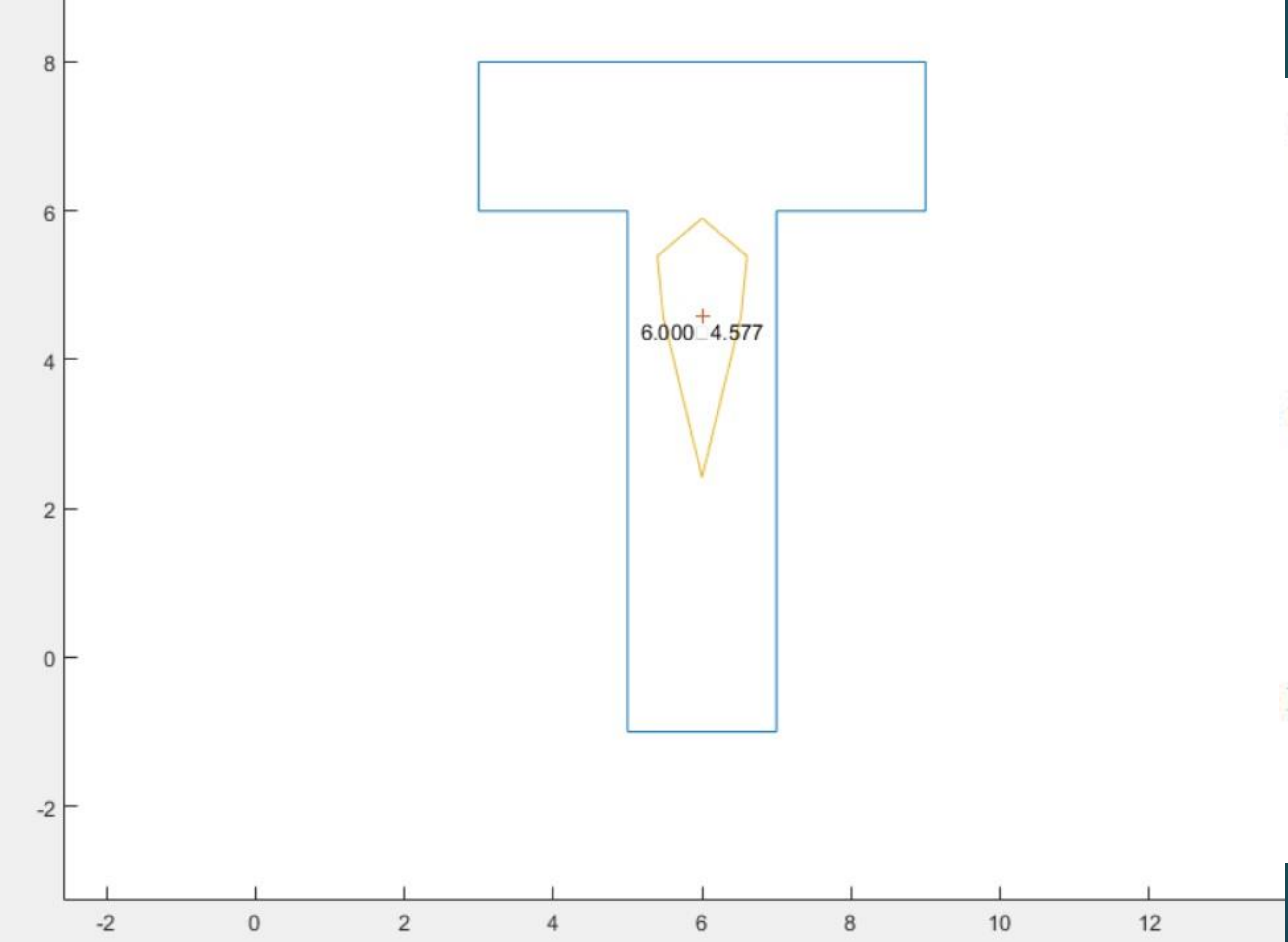
576.6667

Ixc =

256.1667

Dxcyc =

0



Iyc =

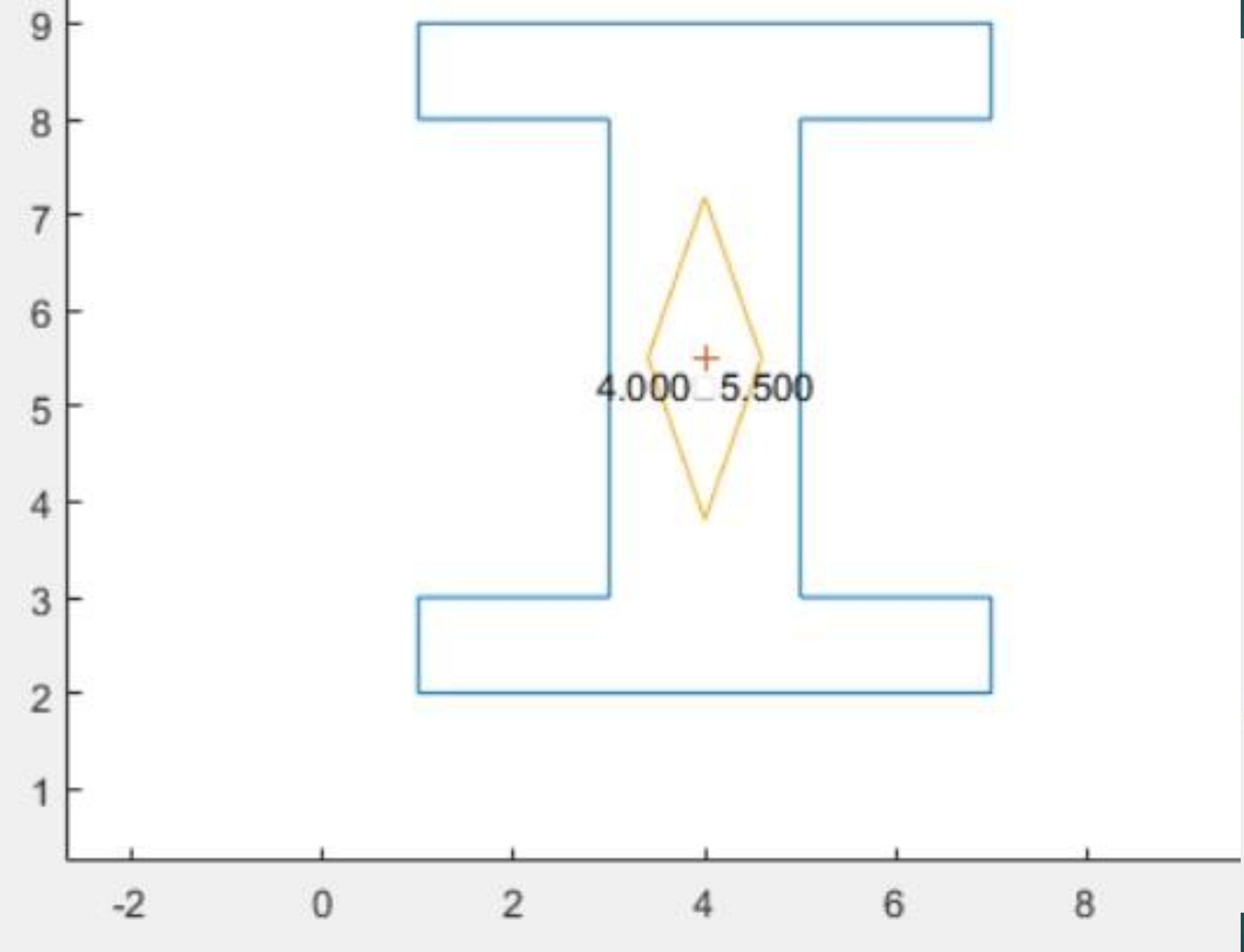
40.6667

Ixc =

192.0128

Dxcyc =

0




```
Iyc =

   39.3333


Ixc =

  129.8333


Dxcyc =

     0
```

Konec

Děkuji za pozornost