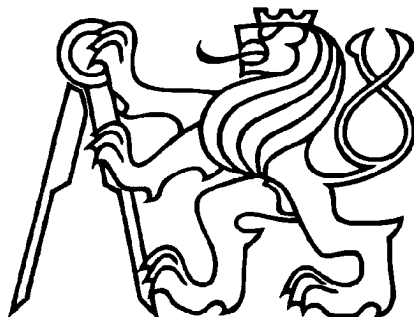


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

FAKULTA STAVEBNÍ



Optimální návrh a optimální řízení
konstrukcí v oboru velkých deformací

Anna Kučerová

Praha, květen 2004

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 1 |
| 2 | Model prutu s nelineární kinematikou | 4 |
| 2.1 | Reissnerův dvojrozměrný model geometricky přesného zakřiveného prutu uvažující velké deformace | 4 |
| 2.2 | Aproximace Reissnerova modelu prutu metodou konečných prvků | 7 |
| 2.3 | Metoda řešení problému nelineární mechaniky | 12 |
| 3 | Optimalizační úlohy pro konstrukce s nelineární kinematikou | 14 |
| 3.1 | Optimální návrh geometrických vlastností konstrukce | 14 |
| 3.2 | Optimální řízení konstrukcí zatížením | 16 |
| 4 | Deterministické metody řešení sdruženého problému nelineární mechaniky a optimalizace | 18 |
| 4.1 | Metoda řešení tradičně formulovaného sdruženého problému | 18 |
| 4.1.1 | Příklad řešení optimálního řízení konstrukce zatížením | 20 |
| 4.2 | Metoda řešení simultánně formulovaného sdruženého problému | 23 |
| 4.2.1 | Příklad řešení optimálního řízení konstrukce zatížením | 25 |
| 5 | Stochastické metody řešení na principu genetických algoritmů | 27 |
| 5.1 | Algoritmus SADE | 28 |
| 5.2 | Algoritmus GRADE | 31 |
| 5.3 | Příklady optimálního řízení konstrukcí zatížením | 32 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.3.1 | Tradiční formulace | 33 |
| 5.3.2 | Simultánní formulace | 39 |
| 5.4 | Příklad optimálního návrhu geometrických vlastností konstrukce | 41 |
| 5.4.1 | Tradiční formulace | 43 |
| 5.4.2 | Simultánní formulace | 44 |
| 6 | Závěr | 47 |
| | Literatura | 51 |
| A | Optimální řízení konstrukce ve tvaru písmene B algoritmem SADE | 53 |
| B | Optimální řízení konstrukce ve tvaru písmene T metodou difuzní aproximace | 58 |

Seznam tabulek

| | | |
|------|---|----|
| 4.1 | Průběh řešení úlohy konstrukce ve tvaru písmene T metodou sdružených gradientů. | 23 |
| 4.2 | Průběh simultánního řešení úlohy konstrukce ve tvaru písmene T Newton-Raphsonovou metodou. | 26 |
| 5.1 | Parametry algoritmů SADE a GRADE. | 33 |
| 5.2 | Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene T. | 33 |
| 5.3 | Písmeno T - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $J(\cdot)$ | 34 |
| 5.4 | Písmeno T - nalezené hodnoty zatížení. | 34 |
| 5.5 | Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene B. | 35 |
| 5.6 | Písmeno B - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $J(\cdot)$ | 35 |
| 5.7 | Písmeno B - nalezené hodnoty zatížení. | 36 |
| 5.8 | Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene I. | 37 |
| 5.9 | Písmeno I - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $J(\cdot)$ | 38 |
| 5.10 | Získané výsledky simultánní optimalizace zatížení - série 1. | 41 |
| 5.11 | Získané výsledky simultánní optimalizace zatížení - série 2. | 41 |
| 5.12 | Mezní přípustné hodnoty výšek průřezů prutů jednotlivých prvků. | 42 |
| 5.13 | Výsledky tradičního řešení optimalizace návrhu. | 43 |
| 5.14 | Výsledky simultánního řešení optimalizace návrhu. | 46 |
| 6.1 | Srovnání výsledků získaných při řešení úlohy optimálního řízení o dvou proměnných formulované tradičním a simultánním způsobem. | 49 |
| 6.2 | Srovnání výsledků získaných při řešení úlohy optimálního návrhu konstrukce formulované tradičním a simultánním způsobem. | 49 |

Seznam obrázků

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Pohyblivý souřadnicový systém. | 5 |
| 2.2 | Schéma inkrementální analýzy. | 13 |
| 4.1 | Písmeno T - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení. | 22 |
| 4.2 | Písmeno T - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$ | 22 |
| 5.1 | Schéma operátoru křížení u algoritmu SADE | 30 |
| 5.2 | Schéma operátoru křížení u algoritmu GRADE | 32 |
| 5.3 | Písmeno B - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení. | 35 |
| 5.4 | Písmeno I - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení. | 37 |
| 5.5 | Písmeno I - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$ v její nerozšířené podobě 4.14. | 37 |
| 5.6 | Sto různých řešení "úlohy s písmenem I". | 38 |
| 5.7 | Počáteční tvar konstrukce, její zatížení a materiálové vlastnosti. | 42 |
| A.1 | Konvergence algoritmu SADE při tradičním řešení problému "písmene B". . . | 55 |
| A.2 | Písmeno B - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$ | 56 |
| A.3 | Písmeno B - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$ | 57 |
| B.1 | Řešení "problému písmene T" difuzní aproximací | 59 |

P O D Ě K O V Á N Í

Na tomto místě bych ráda co nejsrdečněji poděkovala Prof. Adnanu Ibrahimbegovićovi především za umožnění ročního studia na Ecole Normale Supérieure de Cachan a také za jeho podporu, nekonečnou trpělivost, za rady a inspirace nejen při vypracovávání této diplomové práce. Dále bych chtěla mnohokrát poděkovat Ing. Honzovi Zemanovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc, nezdolné nadšení, důvěru a trpělivost zejména při dokončování této diplomové práce.

Také děkuji Ing. Matějovi Lepšovi za množství odborných rad a konstruktivních diskuzí nejen v oblasti optimalizačních algoritmů. Prof. Ing. Zdeňkovi Bittnarovi, DrSc. děkuji za jeho nepřetržitou podporu a důvěru v průběhu mého studia na ČVUT v Praze, jakož i za umožnění mého studia v zahraničí.

A rovněž bych chtěla poděkovat Zuzce Vitingerové, Ing. Ondrovi Hrstkovi, mým rodičům, bratrovi Honzovi a ostatním přátelům a kolegům, kteří mě v mém úsilí po celou dobu podporovali.

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA STAVEBNÍ

Abstrakt

Optimální návrh a optimální řízení konstrukcí
v oboru velkých deformací

Anna Kučerová

Předmětem této diplomové práce je řešení úloh optimálního návrhu a optimálního řízení konstrukcí v oboru velkých deformací. Jinými slovy, cílem práce je ukázat, jakým způsobem je možné optimalizovat návrhové parametry konstrukce nebo složky zatížení tak, aby bylo dosaženo požadované deformace nebo jiných vlastností konstrukce.

Pro ilustraci navrhovaného postupu řešení optimálního návrhu a optimálního řízení je použit Reissnerův dvojrozměrný model geometricky přesného prutu, který je schopen popsat velké deformace konstrukce.

V této práci jsou představeny dvě možné formulace sdruženého problému nelineární mechaniky a optimalizace. První z nich přistupuje k problému víceméně odděleně, tzn. řešení statických podmínek mechaniky představuje pouze omezení přípustných řešení pro optimalizační problém. Ve druhé formulaci jsou použity Lagrangeovy multiplikátory pro svázání mechanického i optimalizačního problému tak, aby je posléze, za předpokladu, že složky deformace konstrukce a optimalizované parametry konstrukce či zatížení jsou uvažovány jako nezávislé, bylo možné řešit zároveň.

Optimalizační problém je řešen jednak jednoduchými deterministickými metodami, jednak stochastickou metodou založenou na principu genetických algoritmů. Konkrétně je použita metoda sdružených gradientů v případě první formulace úlohy a Newton-Raphsonova metoda v případě formulace druhé. Stochastickou metodou použitou pro řešení obou formulací sdruženého problému je algoritmus SADE, pro který bylo v rámci této práce navrženo a odzkoušeno také několik pozměňujících návrhů.

Výhody a nevýhody představených postupů řešení jsou ilustrovány na několika numerických příkladech.

Abstract

Optimal design and optimal control of structures
undergoing large deformations

Anna Kučerová

In this thesis the optimal design and optimal control of structures undergoing large displacements and rotations is investigated. In other words, the aim of this work is to show how to find corresponding initial configuration and the corresponding set of multiple load parameters in order to recover a desired deformed configuration or some desirable features of the deformed structure.

The numerical model chosen to illustrate the proposed optimal design and optimal control methodologies is the Reissner geometrically exact two-dimensional beam, which is able to describe large displacements and rotations.

Two different formulations of the coupled problem of optimal design and optimal control are presented. In the first one, the problem of non-linear mechanics and the problem of optimization are considered more or less separately; equilibrium equations are mere constraint for an optimization problem. The second one relies on the method of Lagrange multipliers in order to make the mechanics state variables independent from either design or control variables and thus provide the basis for simultaneous method of solution.

The solution procedures are either from deterministic or stochastic domain. Particular, the method of conjugate gradients is used for the first formulation of the coupled problem, the Newton-Raphson method is used for the second one. The stochastic method used for solution of both formulation of the coupled problem is based on principles of genetic algorithms. Particular, the SADE algorithm is used and some developments of this algorithm are presented.

A number of numerical examples are given in order to illustrate both the advantages and potential drawbacks of each of the presented procedures.

Kapitola 1

Úvod

Moderní konstrukce musí být často dimenzovány tak, aby odolávaly velkým posunům a rotacím a přitom zůstaly plně funkční. Také konstrukční fáze, kdy jsou montovány jednotlivé části, by měla být pod pečlivou kontrolou. A nakonec i ekonomická kritéria nabývají stále více na důležitosti a jsou důvodem pro snahu popsat uvedený problém na přesnějším teoretickém základu.

Námi navrhované optimalizační metody mohou být využity ve fázi návrhu konstrukce a dopomoci k získání takového návrhu, který maximálně vystihuje předepsané požadavky. Analogicky, metody optimálního řízení konstrukcí mohou být užitečným prostředkem pro stanovení minimálního zatížení, které vyvolá požadovanou výslednou deformaci konstrukce. Formálně mohou být oba problémy, optimalizace návrhu i řízení, definovány jako minimalizace objektivní funkce, která vyjadřuje naše požadavky. Jejich největší rozdíl tkví ve volbě proměnných objektivní funkce, neboli optimalizačních proměnných. Ty můžeme pro případ optimálního návrhu označit jako návrhové proměnné, které jsou typicky spjaty s mechanickými vlastnostmi konstrukce (např. Youngův modul pružnosti) nebo s její geometrií (např. parametry počátečního tvaru konstrukce nebo její dílčí rozměry). V případě optimálního řízení označíme proměnné objektivní funkce jako řídicí. Ty jsou obvykle spojeny se zatížením dané konstrukce. Namísto řešení problému optimalizace návrhu a řízení odlišným způsobem, jak je obvyklé, se tato práce zaměřuje na společné vlastnosti obou úloh, což vytváří jednak možnost jejich shodné prezentace a zároveň i vyvinutí nové metody řešení.

V první části práce jsou představeny dva odlišné přístupy k formulaci problémů optimálního

návrhu či řízení jako úloh spojených s problémem nelineární mechaniky. První přístup, spíše tradiční (viz (Kleiber, Antunez, Hein, and Kowalczyk, 1997)), je případem, kdy se řeší odděleně optimalizační úloha na jedné straně a problém nelineární mechaniky na straně druhé. Obvykle bývají užívány dva různé programy, jeden pro řešení mechanické úlohy, druhý pro optimalizaci. Důsledkem je omezení komunikace mezi oběma programy na minimum (viz (Tortorelli and Michaleris, 1994) nebo (Rousselet, 1992)), klasicky ve formě objektivní funkce a jejího gradientu. V tomto případě jsou statické podmínky rovnováhy nelineární mechaniky redukovány na pouhé omezení přípustných řešení problému, respektující meze pro daný stav konstrukce, její posuny a rotace.

Druhý přístup využívá metodu Lagrangeových multiplikátorů (viz (Luenberger, 1984) nebo (Strang, 1986)) ke spojení obou úloh v jednu, vyjádřenou jedinou rovnicí. Ta zahrnuje jak statické podmínky rovnováhy nelineární mechaniky, tak výraz definující optimalizační úlohu a také vnitřní vztahy statických proměnných (posunů a rotací) s optimalizačními proměnnými, přičemž všechny tyto proměnné jsou nadále uvažovány jako nezávislé. Řešením této rovnice je následně řešen problém optimalizace a problém nelineární mechaniky současně. Takovou formulaci úlohy dále nazýváme simultánní. Tato myšlenka je zároveň rozvinuta v rámci diskrétní aproximace metodou konečných prvků, což vytváří model konečných prvků se stupněmi volnosti nesestávajícími se pouze z posunů a rotací, ale také z optimalizačních proměnných. Detailní formulace uvedených postupů je představena na Reissnerově dvojrozměrném modelu geometricky přesného prutu (viz (Ibrahimbegović and Frey, 1993)).

V další části předkládané práce jsou představeny numerické metody, které umožňují řešení výše zmíněných problémů. Nejprve jsou použity jednoduché deterministické metody, konkrétně metoda sdružených gradientů pro řešení tradičně formulované úlohy a Newton-Raphsonova metoda pro řešení úlohy formulované simultánně. Postup jejich použití je formulován jednotně pro optimální návrh i optimální řízení. Efektivita výpočtu, ale i omezení použití jsou ukázány na jednoduchém příkladu optimálního řízení.

Dále je použita stochastická metoda řešení ze skupiny genetických algoritmů (viz (Goldberg, 1989), (Michalewicz, 1992)), konkrétně algoritmus SADE (viz (Hrstka and Kučerová, 2004), (Hrstka, Kučerová, Lepš, and Zeman, 2003)), který byl vyvinut na naší fakultě v minulých letech a byl též úspěšně testován na některých úlohách stavebního inženýrství (Drchal, Kučerová,

and Němeček, 2002), (Kuráž, Kučerová, and Kuráž, 2003), (Kučerová, Mühlbauer, and Bittnar, 2003). Dále je také představena nová modifikace tohoto algoritmu založená na principu zjednodušeného gradientu, která urychluje jeho konvergenci a tak i jeho efektivitu. Tato modifikace algoritmu SADE je dále nazývána GRADE.

Osnova práce je následující. V druhé kapitole je stručně představen použitý model geometricky přesného prutu, schopný popsat velké posuny a rotace, jeho diskrétní formulace metodou konečných prvků a také metoda řešení problému nelineární mechaniky vyplývající z použití tohoto modelu. Teoretické formulace problémů optimalizace návrhu a řízení jsou prezentovány v kapitole 3. Deterministické metody řešení jsou popsány v kapitole 4, stochastické metody pak v kapitole 5. Kapitola 6 uvádí shrnutí prezentované práce a další výhledy do budoucna.

Kapitola 2

Model prutu s nelineární kinematikou

V této kapitole je detailně popsána formulace dvojrozměrného modelu počátečně zakřiveného geometricky přesného prutu s nelineární kinematikou (viz (Ibrahimbegović and Frey, 1993)). Dále je představena aproximace tohoto modelu metodou konečných prvků. K tradičnímu postupu řešení nelineární úlohy uvažující uvedený model je použita inkrementální analýza, která je stručně vysvětlena v poslední části této kapitoly.

2.1 Reissnerův dvojrozměrný model geometricky přesného zakřiveného prutu uvažující velké deformace

Dle Ibrahimbegoviće a kol. (Ibrahimbegovic, Frey, Fonder, and Massonnet, 1991) je uvažován předpoklad, že počáteční zakřivení je možné odvodit isometrickou transformací přímého prutu. Jestliže $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ jsou báze vektory referenčního ortogonálního systému souřadnic, pak báze vektory lokálního systému souřadnic křivého prutu $(\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2)$ lze vyjádřit jako:

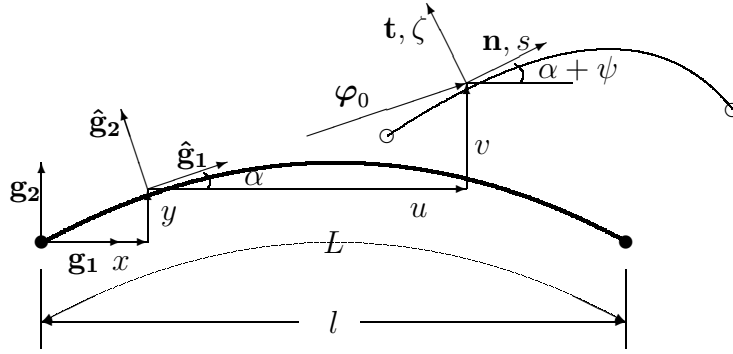
$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1 & \hat{\mathbf{g}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

kde α je počáteční pootočení průřezu zakřiveného nezátíženého prutu vzhledem k odpovídajícímu průřezu referenčního přímého prutu.

Míra zobecněné deformace prutu je uvažována podle Reissnera (Reissner, 1972). Rotací systému $(\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2)$ o úhel ψ zavedeme vliv zatížení. Tak získáme pohyblivý souřadný systém

s jednou osou (označovanou \mathbf{n}) kolmou k průřezu a druhou (označovanou \mathbf{t}) v jeho rovině. Můžeme tedy psát (viz obrázek 2.1)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1 & \hat{\mathbf{g}}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \psi) & \sin(\alpha + \psi) \\ -\sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$



Obrázek 2.1: Pohyblivý souřadnicový systém.

Při uvažování velkých deformací může být polohový vektor na deformované konstrukci vyjádřen jako:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \zeta \mathbf{t} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} -\sin(\alpha + \psi) \\ \cos(\alpha + \psi) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

kde x a y jsou souřadnice počáteční polohy prutu, u a v jsou složky posunu v globálním souřadném systému a ζ je souřadnice podél normály k ose deformovaného prutu.

Gradient deformace je vyjádřen jako

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} - \zeta \frac{d\psi}{ds} \cos(\alpha + \psi) & -\sin(\alpha + \psi) \\ \frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} - \zeta \frac{d\psi}{ds} \sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

přičemž s představuje souřadnici podél osy deformovaného prutu.

Poté může být gradient deformace rozložen na část odpovídající rotaci a ryzím deformacím

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \psi) & -\sin(\alpha + \psi) \\ \sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

a s využitím tzv. Biotova tensoru $\mathbf{H} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$ jako míry deformace, kde $\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}$ (viz (Ibrahimbegović and Frey, 1993)), jsou získány jeho následující nenulové složky

$$H_{11} = \Sigma - \zeta K ; \quad H_{21} = \Gamma \quad , \quad (2.6)$$

kde Σ, K, Γ jsou míry zobecněné deformace vyjádřené Reissnerem v podobě

$$\begin{aligned} \Sigma &= \cos(\alpha + \psi) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} \right) + \sin(\alpha + \psi) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} \right) - 1 \quad , \\ \Gamma &= -\sin(\alpha + \psi) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} \right) + \cos(\alpha + \psi) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} \right) \quad , \\ K &= \frac{d\psi}{ds} \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

V maticovém zápisu lze rovnici (2.7) zapsat jako

$$\Sigma = \Lambda^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n}) = \Lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}_1 \quad , \quad (2.8)$$

kde

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Gamma \\ K \end{pmatrix} , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \psi) & -\sin(\alpha + \psi) & 0 \\ \sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} \\ \frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} \\ \frac{d\psi}{ds} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{n} = \Lambda \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

V rámci této práce se omezíme na lineárně pružný materiál, kde fyzikální rovnice mají tvar

$$N = (EA)\Sigma, \quad V = (GA)\Gamma, \quad M = (EI)K, \quad (2.9)$$

přičemž normálová síla N , posouvající síla V a moment M jsou složky vnitřních sil, plocha průřezu A a moment setrvačnosti průřezu I jsou průřezové charakteristiky konstantní v průběhu zatěžování a Youngův modul pružnosti E a smykový modul pružnosti G jsou konstantní materiálové parametry. Vektor vnitřních sil \mathbf{N} může být vyjádřen v maticovém zápisu jako

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\Sigma = \mathbf{C}\Lambda^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n}), \quad (2.10)$$

kde

$$\mathbf{N} = (N, V, M)^T, \quad \mathbf{C} = \text{diag}(EA, GA, EI).$$

Pro definování slabého řešení statických podmínek rovnováhy je ještě zapotřebí vyjádřit virtuální deformaci jako

$$\begin{aligned}\delta\Sigma &= \delta [\Lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}_1] \\ &= \delta\Lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \Lambda^T \delta\mathbf{h}(\mathbf{u}) \\ &= \Lambda^T (\mathbf{W}\mathbf{h}(\mathbf{u})\delta\psi + \mathbf{d}(\delta\mathbf{u})),\end{aligned}\quad (2.11)$$

kde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}(\delta\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{d\delta u}{ds} \\ \frac{d\delta v}{ds} \\ \frac{d\delta\psi}{ds} \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta\psi \end{pmatrix}.$$

Slabá formulace statické podmínky rovnováhy je následně definována jako

$$G(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \underbrace{\int_L (\delta\Sigma^T \mathbf{N}) ds}_{\mathbf{G}_{int}} - \underbrace{\int_L \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}^{ext} ds}_{\mathbf{G}_{ext}} = 0, \quad (2.12)$$

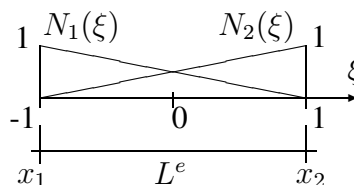
kde \mathbf{f}^{ext} je vektor vnějších sil působících na konstrukci.

Výraz pro virtuální práci vnitřních sil je pak

$$G_{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_L ((\mathbf{d}(\delta\mathbf{u}) + \mathbf{W}\mathbf{h}(\mathbf{u})\delta\psi)^T \Lambda \mathbf{C} \Lambda^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n})) ds. \quad (2.13)$$

2.2 Aproximace Reissnerova modelu prutu metodou konečných prvků

Pro přehlednost následujících výpočtů použijeme co nejjednodušší aproximaci Reissnerova modelu pomocí prvku se dvěma uzly. Lineární báze funkce na tomto prvku a jejich derivace jsou následující:



$$\begin{aligned}N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi), & \frac{dN_1}{d\xi} &= -\frac{1}{2}, \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi), & \frac{dN_2}{d\xi} &= \frac{1}{2}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Aproximace počátečního tvaru prutu je tedy uvažována jako

$$\begin{aligned}x^e &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \quad , \\y^e &= N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2\end{aligned}\quad (2.15)$$

a Jakobián transformace z referenční soustavy souřadnic do soustavy x, y

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{L^e}{2}, \quad L^e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad . \quad (2.16)$$

Orientace průřezu je definována úhlem

$$\alpha^e = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad . \quad (2.17)$$

Isoparametrické aproximace posunů a rotací jsou uvažovány ve tvaru

$$\begin{aligned}u^e &= N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad , \\v^e &= N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 \quad , \\ \psi^e &= N_1(\xi)\psi_1 + N_2(\xi)\psi_2 \quad .\end{aligned}\quad (2.18)$$

Diskrétní aproximace jednotlivých složek zobecněné deformace pak mají tvar (srovnej s vyjádřením 2.7)

$$\begin{aligned}\Sigma^e &= \frac{1}{L^e} [(x_2 - x_1) + (u_2 - u_1)] \cos \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right] \\ &+ \frac{1}{L^e} [(y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)] \sin \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right] - 1 \quad ,\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\Gamma^e &= -\frac{1}{L^e} [(x_2 - x_1) + (u_2 - u_1)] \sin \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right] \\ &+ \frac{1}{L^e} [(y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)] \cos \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right],\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$K^e = \frac{d\psi^e}{ds} = \frac{1}{L^e}(\psi_2 - \psi_1). \quad (2.21)$$

Prvek musí být schopen korektně popsat stav čistého ohybu (Kirchhoffovo namáhání), kdy

$$\Sigma^e(\xi) = 0, \quad \Gamma^e(\xi) = 0 \quad \text{a} \quad K^e = konst. \neq 0 \quad \forall \xi \quad , \quad (2.22)$$

což je možné jen za podmínky, že výrazy (2.19) a (2.20) jsou nezávislé na ξ , resp. výraz

$$\frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \quad (2.23)$$

je roven nule. To však podle vztahu (2.21) vyloučí zakřivení prutu:

$$K^e = \frac{1}{L^e}(\psi_2 - \psi_1) = 0 \quad , \quad (2.24)$$

což je v rozporu s požadavkem (2.22).

Nejjednodušším řešením výše popsaného problému je užití jednobodové Gaussovy integrace při vyjádření virtuální práce vnitřních sil (viz 2.13). V takovém případě jsou pro vyjádření zobecněných měř deformace v (2.19), (2.20) a (2.21) použity hodnoty ve středu prvku (kde $\xi = 0$), čímž je eliminován výraz závislý na ξ a tím i ohybové zamknutí. Zavedením následujících výrazů

$$\beta^e = \alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \quad , \quad (2.25)$$

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_2 - (\cdot)_1 \quad (2.26)$$

je získána zjednodušená aproximace deformace, která ohybové zamknutí nezpůsobuje.

$$\begin{aligned} \Sigma^e &= \frac{1}{L^e}(\Delta x + \Delta u) \cos \beta^e + \frac{1}{L^e}(\Delta y + \Delta v) \sin \beta^e - 1 \quad , \\ \Gamma^e &= -\frac{1}{L^e}(\Delta x + \Delta u) \sin \beta^e + \frac{1}{L^e}(\Delta y + \Delta v) \cos \beta^e \quad , \\ K^e &= \frac{\Delta \psi}{L^e} \quad . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Diskretizovaná statická rovnice na úrovni jednoho prvku má tvar

$$G^e(\mathbf{u}^e, \delta \mathbf{u}^e) = \int_{L^e} (\mathbf{d}(\delta \mathbf{u}) + \mathbf{W}\mathbf{h}(\mathbf{u})\delta \psi)^T \mathbf{\Lambda}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n}) ds - \int_{L^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{ext} ds = 0 \quad , \quad (2.28)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\delta \mathbf{u}) &= \frac{1}{L^e} \begin{pmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta v_2 - \delta v_1 \\ \delta \psi_2 - \delta \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \frac{1}{L^e} \begin{pmatrix} \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta \psi \end{pmatrix}, \quad \delta \psi = \frac{1}{2}(\delta \psi_1 + \delta \psi_2), \\ \mathbf{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \cos \beta^e & -\sin \beta^e & 0 \\ \sin \beta^e & \cos \beta^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta u_1 + \delta u_2 \\ \delta v_1 + \delta v_2 \\ \delta \psi_1 + \delta \psi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Virtuální práce vnitřních sil se získá součtem příspěvků jednotlivých prvků

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_e G^e(\mathbf{u}^e, \delta \mathbf{u}^e). \quad (2.29)$$

Lokalizací pak obdržíme vektor vnitřních sil

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_e \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{u}) \quad (2.30)$$

a soustavu nelineárních rovnic pro neznámé složky deformace \mathbf{u}

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad . \quad (2.31)$$

Snahou následující formulace je co nejvíce usnadnit programování (např. v jazyce C/C++).

Pro snazší vyjádření systému podmínek rovnováhy (2.31) je možné nejprve zavést vektor $\Lambda \mathbf{N}^e$ pro jeden element jako

$$\Lambda \mathbf{N}^e = \Lambda^e \mathbf{C}^e \Lambda^{eT} (\mathbf{h}^e(\mathbf{u}) - \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \Lambda N_1 \\ \Lambda N_2 \\ \Lambda N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta^e EA^e \Sigma^e - \sin \beta^e GA^e \Gamma^e \\ \sin \beta^e EA^e \Sigma^e + \cos \beta^e GA^e \Gamma^e \\ EI^e K^e \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

kde diskrétní formulace pro β^e , Σ^e a Γ^e je uvedena v rovnicích (2.25) a (2.27).

Nyní je možné vyjádřit vektor vnitřních sil jednoduše následujícím způsobem:

$$\mathbf{f}_e^{int} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda N_1 \\ -\Lambda N_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\Lambda N_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\Lambda N_1) - \Lambda N_3 \\ \Lambda N_1 \\ \Lambda N_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\Lambda N_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\Lambda N_1) + \Lambda N_3 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Tečnová matice tuhosti je definovaná jako derivace vektoru \mathbf{f}_e^{int} podle všech složek vektoru posunů a rotací \mathbf{u} :

$$\mathbf{K}^e_{[6 \times 6]} = \frac{\partial \mathbf{f}_e^{int(6 \times 1)}}{\partial \mathbf{u}_{(6 \times 1)}}; \quad \mathbf{u}^e = (u_1, v_1, \psi_1, u_2, v_2, \psi_2)^T \quad . \quad (2.34)$$

S využitím několika analogií mezi jednotlivými prvky vektoru \mathbf{f}_e^{int} a v samotné matici \mathbf{K} je

možné její podobu vyjádřit pomocí následujícího schématu

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & -K_{11}^e & -K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{12}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & -K_{12}^e & -K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{13}^e & K_{23}^e & K_{33}^e & -K_{13}^e & -K_{23}^e & K_{36}^e \\ -K_{11}^e & -K_{12}^e & -K_{13}^e & K_{11}^e & K_{12}^e & -K_{13}^e \\ -K_{12}^e & -K_{22}^e & -K_{23}^e & K_{12}^e & K_{22}^e & -K_{23}^e \\ K_{13}^e & K_{23}^e & K_{36}^e & -K_{13}^e & -K_{23}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

kde jednotlivé prvky jsou

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{1}{L^e} (EA^e \cos^2 \beta^e + GA^e \sin^2 \beta^e) \quad , \\ K_{12}^e &= \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = \frac{1}{L^e} (\cos \beta^e EA^e \sin \beta^e - \sin \beta^e GA^e \cos \beta^e) \quad , \\ K_{13}^e &= \frac{\partial f_1}{\partial \psi_1} = \frac{1}{2} [(EA^e - GA^e)(\sin \beta^e \Sigma^e - \cos \beta^e \Gamma^e) - \sin \beta^e GA] \quad , \\ K_{22}^e &= \frac{\partial f_2}{\partial v_1} = \frac{1}{L^e} (EA^e \sin^2 \beta^e + GA^e \cos^2 \beta^e) \quad , \\ K_{23}^e &= \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1} = \frac{1}{2} [(EA^e - GA^e)(-\cos \beta^e \Sigma^e - \sin \beta^e \Gamma^e) + \cos \beta^e GA] \quad , \\ K_{33}^e &= \frac{\partial f_3}{\partial \psi_1} = \frac{1}{4} (\Delta x + \Delta u) [(EA^e - GA^e)(-\cos \beta^e \Sigma^e - \sin \beta^e \Gamma^e) + \cos \beta^e GA] + \\ &\quad + \frac{1}{4} (\Delta y + \Delta v) [(EA^e - GA^e)(-\sin \beta^e \Sigma^e + \cos \beta^e \Gamma^e) + \sin \beta^e GA] + \\ &\quad + \frac{EI^e}{L^e} = \frac{1}{2} [(\Delta x + \Delta u)K_{23}^e - (\Delta y + \Delta v)K_{13}^e] + \frac{EI^e}{L^e} \quad , \\ K_{36}^e &= \frac{\partial f_3}{\partial \psi_2} = \frac{1}{4} (\Delta x + \Delta u) [(EA^e - GA^e)(-\cos \beta^e \Sigma^e - \sin \beta^e \Gamma^e) + \cos \beta^e GA] + \\ &\quad + \frac{1}{4} (\Delta y + \Delta v) [(EA^e - GA^e)(-\sin \beta^e \Sigma^e + \cos \beta^e \Gamma^e) + \sin \beta^e GA] - \\ &\quad - \frac{EI^e}{L^e} = K_{33}^e - \frac{2EI^e}{L^e} \quad , \end{aligned} \quad (2.36)$$

kde L^e je definováno rovnicí (2.17).

Globální vektor vnitřních sil \mathbf{f}^{int} a matice tuhosti \mathbf{K} jsou pak dány lokalizací

$$\mathbf{f}^{int}_{(n_{ddl} \times 1)} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \{ \mathbf{f}_e^{int} \}_{(6 \times 1)}; \quad \mathbf{K}_{(n_{ddl} \times n_{ddl})} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \{ \mathbf{K}^e \}_{(6 \times 6)} \quad , \quad (2.37)$$

kde n_{ddl} je celkový počet stupňů volnosti konstrukce a n_{el} je počet elementů konstrukce.

2.3 Metoda řešení problému nelineární mechaniky

Obvyklá úloha z oblasti stavební mechaniky uvažuje jako zadané hodnoty mechanické vlastnosti konstrukce (obsažené v matici tuhosti) a na ní působící zatížení. Poté bývá použita některá numerická či analytická metoda pro výpočet odpovídajících posunů a rotací konstrukce. Řešení úlohy představuje nalezení řešení soustavy podmínek rovnováhy:

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^{ext}. \quad (2.38)$$

V případě geometricky nelineární mechaniky je vektor vnitřních sil nelineární funkcí posunů \mathbf{u} .

Nejčastěji užívanou metodou řešení systému nelineárních rovnic je tzv. inkrementální analýza. Tato metoda zavádí nový parametr označovaný jako pseudo-čas "t" nebo parametr zatížení

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}^{ext}(t); \quad t \in [0, T]. \quad (2.39)$$

Poté je zvolena diskretizace časového intervalu

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^{n_{inc}} [t_n, t_{n+1}]. \quad (2.40)$$

Zatížení jako funkce pseudo-času je definováno jako

$$\mathbf{f}^{ext}(t) = \mathbf{f}_0^{ext} g(t); \quad g(T) = \frac{\|\mathbf{f}^{ext}(T)\|}{\|\mathbf{f}_0^{ext}\|}, \quad (2.41)$$

kde $\mathbf{f}^{ext}(T)$ představuje celkové zatížení působící na konstrukci, \mathbf{f}_0^{ext} je konstantní vektor a $g(t)$ je zvolená kladná rostoucí funkce, např. $g(t) = t$.

Přírůstek zatížení je

$$\Delta \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_n^{ext}; \quad \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{f}_0^{ext} g(t_{n+1}); \quad \mathbf{f}_n^{ext} = \mathbf{f}_0^{ext} g(t_n). \quad (2.42)$$

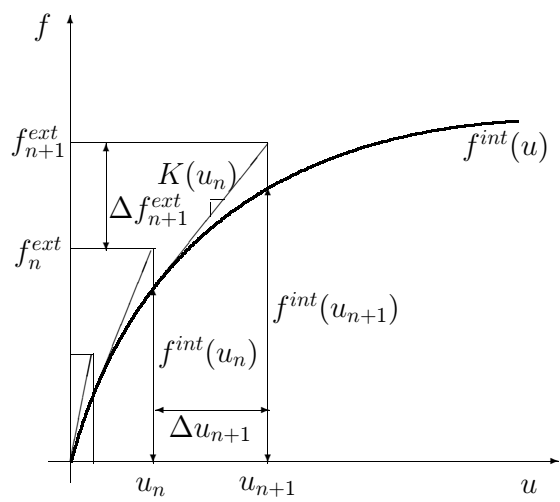
Přírůstek deformace

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n; \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(t_{n+1}); \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n) \quad (2.43)$$

je určen jako

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}_n) [\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n) + \Delta \mathbf{f}_{n+1}^{ext}], \quad (2.44)$$

kde $\mathbf{K}(\mathbf{u}_n) = \frac{\partial \mathbf{f}_n^{int}}{\partial \mathbf{u}}$ je tečnová matice tuhosti získaná derivací vektoru vnitřních sil $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n)$ podle všech složek deformace \mathbf{u} .



Obrázek 2.2: Schéma inkrementální analýzy.

Kapitola 3

Optimalizační úlohy pro konstrukce s nelineární kinematikou

Výše uvedený model prutu dává dostatečný základ pro popsání optimalizační úlohy konstrukce s materiálově pružným, ale geometricky nelineárním chováním. Optimální návrh geometrických vlastností konstrukce nebo řízení jejího chování nastavením vnějšího zatížení je tak možné popsat shodným způsobem, jak ukáží následující odstavce.

3.1 Optimální návrh geometrických vlastností konstrukce

Problém optimálního návrhu představuje zvolení vlastností mechanického modelu a hledání geometrických vlastností prutů (např. výšek jejich průřezu) nebo počátečního tvaru konstrukce. Složky zatížení jsou v tomto případě uvažované jako dané konstantní hodnoty. Z matematického hlediska může být optimální návrh formulován jako minimalizace objektivní funkce $J(\cdot)$, která definuje požadované vlastnosti konstrukce. Taková funkce pak není závislá pouze na návrhových proměnných \mathbf{d} popisujících geometrii konstrukce (např. výšky průřezu prutů, počáteční tvar konstrukce), ale i na jednotlivých složkách deformace konstrukce, jejich posunech a rotacích \mathbf{u} .

Tradiční přístup k popsané optimalizační úloze předpokládá, že návrhové proměnné prostřednictvím statických podmínek rovnováhy přímo definují odpovídající deformaci konstrukce. Proces optimalizace $\hat{J}(\cdot)$ pak lze formulovat jako

$$\hat{J}(\mathbf{d}) = \min J(\mathbf{u}(\mathbf{d}), \mathbf{d}); \quad \mathbf{u}(\mathbf{d}) : G(\mathbf{u}(\mathbf{d}), \delta\mathbf{u}) = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Nejdůležitější vlastností tohoto přístupu je malý počet proměnných optimalizační úlohy, jelikož jsou mezi ně zahrnuty pouze návrhové proměnné. Složky deformace se pro každou konkrétní kombinaci hodnot geometrických proměnných vypočítají jako slabé řešení statických podmínek rovnováhy pomocí některé numerické iterační metody, např. inkrementální analýzy. Pro takto získaný vektor návrhových proměnných a k nim iteračně dopočítaných složek deformace je následně vyčíslena hodnota objektivní funkce $J(\cdot)$. Zřejmou nevýhodou tohoto postupu je značná výpočtová náročnost, jelikož každé vyhodnocení objektivní funkce zde představuje další cyklus iteračního řešení nelineární soustavy rovnic (2.31).

Simultánní řešení prezentované optimalizační úlohy se opírá o využití Lagrangeových multiplikátorů. Problém podmíněné optimalizace (3.1) je tak převeden na následující úlohu:

$$\max_{\forall \boldsymbol{\lambda}} \min_{\forall (\mathbf{u}, \mathbf{d})} L(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}),$$

kde Lagrangián $L(\cdot)$ je definován jako

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{d}) + G(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}). \quad (3.2)$$

V rovnici (3.2) $\boldsymbol{\lambda}$ značí vektor Lagrangeových multiplikátorů, které zaujaly místo virtuálních rotací a posunů $\delta \mathbf{u}$ ve slabé formulaci statické podmínky rovnováhy (rovnice (2.12) a (2.13)) následujícím způsobem

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_L ((\mathbf{d}(\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{W}\mathbf{h}(\mathbf{u})\lambda_\psi)^T \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n})) ds, \quad (3.3)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_u, \lambda_v, \lambda_\psi)^T$.

Zásadním rozdílem tohoto vyjádření oproti formulaci (3.1) je fakt, že složky deformace jsou zde uvažovány jako proměnné, které jsou nezávislé na návrhových proměnných a tudíž jsou zahrnuty mezi optimalizované proměnné, stejně tak jako jsou mezi ně zahrnuty i Lagrangeovy multiplikátory. Počet optimalizovaných proměnných je tak v tomto případě několikanásobně větší, než v případě tradiční formulace, což zvyšuje náročnost optimalizačního procesu. Naproti tomu významnou výhodou této formulace je značné zjednodušení jednotlivých vyhodnocení objektivní funkce. Tentokrát není zapotřebí další iterační metoda pro výpočet odpovídajících hodnot složek deformace, jelikož ty jsou produktem optimalizačního procesu.

Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky optimality (např. (Luenberger, 1984)) spojené s minimalizačním problémem v (3.2) můžou být zapsány jako

$$0 = \mathbf{r}_u^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) \delta \mathbf{u} \quad , \quad (3.4)$$

$$0 = \mathbf{r}_d^T \delta \mathbf{d} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{d}} \right)^T \delta \mathbf{d} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right)^T \delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} \quad , \quad (3.5)$$

$$0 = \mathbf{r}_\lambda^T \delta \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \delta \boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) - \mathbf{f}^{ext}]^T \delta \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (3.6)$$

přičemž $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{u}}$ je tečná matice tuhosti konstrukce.

V rovnici (3.4), (3.5) a (3.6) jsou vektory $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda$ rezidua optimalizačního problému. Pak je možné definovat proces řešení následujícím způsobem:

$$\min_{\forall(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{r}^T \mathbf{r} ; \quad \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_d \\ \mathbf{r}_\lambda \end{pmatrix} . \quad (3.7)$$

3.2 Optimální řízení konstrukcí zatížením

Studované řízení konstrukcí zahrnuje řízení vnějším kvazistatickým zatížením, které je vybíráno tak, aby vyvolalo u konstrukce přímo optimální či požadovaný deformovaný tvar a nebo takový tvar, který je na základě jiných kriterií definován objektivní funkcí. Parametry počátečního tvaru konstrukce jsou tu uvažovány jako známé zadané hodnoty. Za předpokladu, že zatížení konstrukce je nezávislé na deformaci konstrukce (zatížení je konzervativní), jsou řídicí proměnné přímo složky zatížení, které definují výraz pro práci vnějších sil jako

$$G^{ext}(\mathbf{c}; \delta \mathbf{u}) := \int_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{c} \, ds \quad , \quad (3.8)$$

kde \mathbf{c} je vektor obsahující pouze nenulové složky zatížení a \mathbf{F}_0 je matice, která definuje rozložení těchto složek do příslušných uzlů na diskretizované konstrukci.

Při použití tradičního postupu je možné pro každou konkrétní variaci řídicích proměnných \mathbf{c} vyřešit soustavu podmínek rovnováhy a získat tak odpovídající deformaci konstrukce. Za tohoto předpokladu můžeme proces optimalizace řízení $\hat{J}(\cdot)$ popsat jako

$$\hat{J}(\mathbf{c}) = \min J(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \mathbf{c}) ; \quad \mathbf{u}(\mathbf{c}) : G(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \delta \mathbf{c}) = 0 \quad , \quad (3.9)$$

což je ekvivalentní formulace k formulaci optimálního návrhu v (3.1).

Také použití Lagrangeových multiplikátorů v problému optimálního řízení vede k formulaci, která má mnohé společné s odpovídající formulací optimálního návrhu, jak vyplývá ze srovnání rovnice (3.2) a rovnice

$$\max_{\forall \boldsymbol{\lambda}} \min_{\forall (\mathbf{u}, \mathbf{c})} L(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \boldsymbol{\lambda}); \quad L(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{c}) + G(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \boldsymbol{\lambda}). \quad (3.10)$$

Jisté rozdíly jsou ve vyjádření Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky optimality, které jsou při řešení úlohy optimálního řízení následující:

$$0 = \mathbf{r}_u^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \delta \mathbf{u} \quad , \quad (3.11)$$

$$0 = \mathbf{r}_c^T \delta \mathbf{c} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \delta \mathbf{c} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \delta \mathbf{c} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}_0 \delta \mathbf{c} \quad , \quad (3.12)$$

$$0 = \mathbf{r}_\lambda^T \delta \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \delta \boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) - \mathbf{F}_0 \mathbf{c}]^T \delta \boldsymbol{\lambda} \quad . \quad (3.13)$$

Nakonec může být výsledný proces řešení popsán stejným způsobem jako pro případ optimálního návrhu:

$$\min_{\forall (\mathbf{u}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{r}^T \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_c \\ \mathbf{r}_\lambda \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Kapitola 4

Deterministické metody řešení sdruženého problému nelineární mechaniky a optimalizace

4.1 Metoda řešení tradičně formulovaného sdruženého problému

Tradičně formulovaný sdružený problém optimálního návrhu i optimálního řízení lze shodně zapsat jako

$$\hat{J}(\mathbf{x}) = \min J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \quad , \quad (4.1)$$

přičemž vektor \mathbf{x} představuje návrhové proměnné pro případ optimálního návrhu nebo řídicí proměnné v případě optimálního řízení. Vektor \mathbf{u} představuje v obou případech vektor uzlových posunů a rotací a jeho funkční závislost na návrhových, resp. řídicích proměnných vyplývá ze statických podmínek rovnováhy

$$G(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad . \quad (4.2)$$

Jednou z nejjednodušších metod nepodmíněné optimalizace je metoda sdružených gradientů. Jde o iterační metodu, která vyžaduje vhodný počáteční odhad hledaného řešení \mathbf{x}_0 , z něhož získáme řešení v následujících iteracích \mathbf{x}_k podle vztahu:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k; \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.3)$$

Další požadavky této metody jsou kladeny na optimalizovanou funkci $J(\cdot)$ a plynou z výpočtu směru a délky kroku $\alpha_k \mathbf{d}^k$, ke kterému je nutný výpočet gradientu řešené funkce – tedy objektivní funkce musí být diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.

Tento gradient je počítán vzhledem k optimalizovaným proměnným, totiž vektoru \mathbf{x} a lze ho získat následujícím postupem. Nejprve zderivujeme objektivní funkci $J(\cdot)$ jako funkci složenou:

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \frac{\partial J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}}. \quad (4.4)$$

Konkrétnímu výpočtu výrazu $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ se můžeme vyhnout zavedením tzv. adjungovaného stavu, který získáme následujícím postupem. Zderivujeme rovnici (4.2) také podle optimalizovaných proměnných \mathbf{x} jako složenou funkci:

$$\begin{aligned} \nabla G(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} - \\ &- \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Jednoduchou úpravou a přenásobením vektorem \mathbf{p}^T získáme

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \mathbf{p} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} \right] \mathbf{p} = 0. \quad (4.6)$$

Adjungovaný stav \mathbf{p} určíme z podmínky:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} \right] \mathbf{p} = \frac{\partial J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}}. \quad (4.7)$$

Nyní lze rovnici (4.6) zapsat jako

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \mathbf{p} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (4.8)$$

a výsledný tvar gradientu objektivní funkce je tedy

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \frac{\partial J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \left[\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \mathbf{p}. \quad (4.9)$$

V každé z iterací výpočtu metodou sdružených gradientů je k vyjádření příslušné hodnoty objektivní funkce $J(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k)$ třeba iteračního výpočtu inkrementální analýzou pro vyřešení

soustavy nelineárních rovnic plynoucích z podmínky (4.2). Na konci iteračního běhu inkrementální analýzy vyjádříme pro získaný vektor posunů $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k)$ také výrazy všech derivací jak objektivní funkce, tak vektorů vnitřních a vnějších sil nutných pro výpočet adjungovaného stavu (viz rovnice (4.7)) a následně gradientu objektivní funkce (viz rovnice (4.9)).

Metoda sdružených gradientů se pokouší zlepšit chování nejjednodušší metody největšího spádu přidáním části směru předchozího kroku k současnému záporně vzatému gradientu následujícím způsobem:

$$\mathbf{d}_k = -\nabla J(\mathbf{x}_k) + \beta \mathbf{d}_{k-1}. \quad (4.10)$$

Skalární součinitel β ovlivňuje podíl směru předchozího kroku na kroku současném. Jelikož ve větší vzdálenosti od optima může být výhodné pohybovat se proti směru gradientu a naopak v jeho blízkosti přímo ve směru gradientu, je vhodné, aby součinitel β nabýval daleko od optima hodnot blízkých nule a naopak v blízkosti optima hodnot větších. Toto se nejčastěji snažíme zajistit použitím jednoho z následujících vztahů:

$$\text{Fletcher-Reevesova formulace: } \beta = \frac{[\nabla J(\mathbf{x}_k)]^T \nabla J(\mathbf{x}_k)}{[\nabla J(\mathbf{x}_{k-1})]^T \nabla J(\mathbf{x}_{k-1})} \quad (4.11)$$

$$\text{Polak-Ribiereova formulace: } \beta = \frac{[\nabla J(\mathbf{x}_{k-1} - \nabla J(\mathbf{x}_k))]^T \nabla J(\mathbf{x}_k)}{[\nabla J(\mathbf{x}_{k-1})]^T \nabla J(\mathbf{x}_{k-1})} \quad (4.12)$$

Po získání směru iteračního kroku metody sdružených gradientů \mathbf{d}_k určíme také jeho délku α_k z podmínky

$$\nabla J(\mathbf{x}_{k+1}(\alpha_k)) \cdot \mathbf{d}_k = 0. \quad (4.13)$$

4.1.1 Příklad řešení optimálního řízení konstrukce zatížením

Nejčastějším předmětem problémů optimálního řízení je najít takové zatížení, které vyvolá požadovanou deformaci \mathbf{u}^d . Objektivní funkce $J(\cdot)$ příslušná tomuto problému je

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u}(\mathbf{c}) - \mathbf{u}^d\|^2 ds \quad . \quad (4.14)$$

Pro výpočet použijeme její zjednodušenou diskretizovanou podobu:

$$J = \sum_{i=0}^{n_{el}} \sum_{j=1}^2 [(u_{ij} - u_{ij}^d)^2 + (v_{ij} - v_{ij}^d)^2] L_i \quad , \quad (4.15)$$

kde n_{el} je počet konečných prvků, L_i je počáteční délka i -tého prvku, u_{ij}, v_{ij} jsou složky deformace vypočítané inkrementální analýzou a u_{ij}^d, v_{ij}^d jsou složky požadované deformace.

Je možné říct, že v reálném životě nenastane často situace, kdy můžeme určit všechny složky požadované deformace. Z tohoto důvodu jsou v následujících příkladech rotace ve všech uzlech uvažovány jako neznámé.

Připomeňme, že pro případ optimálního řízení jsou derivace vektorů vnitřních a vnějších sil podle řídicích proměnných \mathbf{c} a posunů \mathbf{u} dány jako

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\cdot)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{c}); \quad \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\cdot)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

kde $\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{c})$ je tečná matice tuhosti detailně rozepsaná v kapitole 2.2, a

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\cdot)}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0}; \quad \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\cdot)}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{F}_0, \quad (4.17)$$

kde matice \mathbf{F}_0 je matice definující rozmístění složek vektoru \mathbf{c} do příslušných uzlů diskretizované konstrukce.

Pro výpočet adjungovaného stavu \mathbf{p} a následně i gradientu objektivní funkce $\nabla J(\cdot)$ je třeba vyjádřit ještě derivace této funkce podle všech jejích proměnných:

$$\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^d; \quad \frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Z toho vyplývá vztah pro adjungovaný tvar v k -té iteraci metody sdružených gradientů

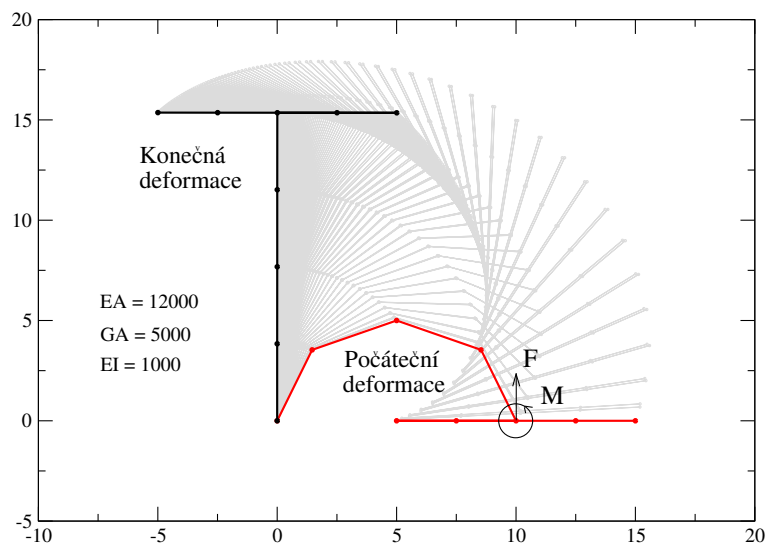
$$\mathbf{p}_k^T = (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}^d)^T \mathbf{K}^{-T}(\mathbf{u}_k) \quad (4.19)$$

a výsledně také pro gradient objektivní funkce

$$\nabla J(\mathbf{u}_k) = \mathbf{p}_k^T \mathbf{F}_0 = (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}^d)^T \mathbf{K}^{-T}(\mathbf{u}_k) \mathbf{F}_0. \quad (4.20)$$

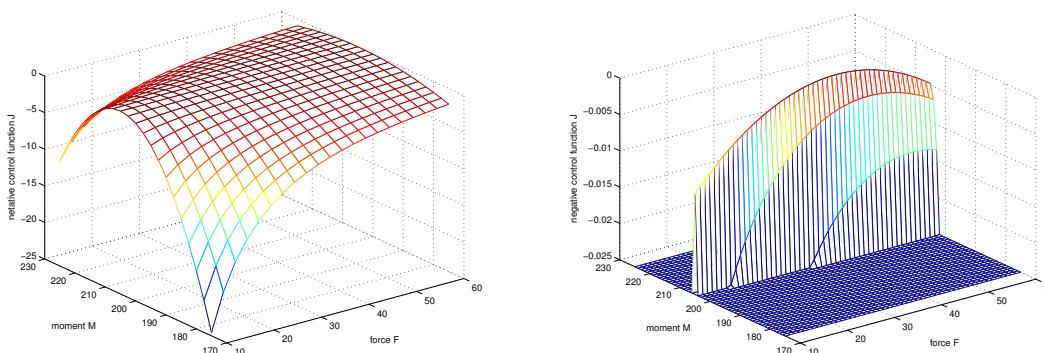
Uvedený postup ukážeme na příkladu jednoduché konstrukce ve tvaru písmene T se zatížením o dvou složkách, resp. na příkladu minimalizačního problému o dvou neznámých. Mechanické vlastnosti konstrukce, její počáteční a požadovaná deformace a rozmístění zatížení je zobrazeno na obrázku 4.1.

Jelikož uváděná úloha má za cíl vyzkoušet popsany proces řešení a ukázat jeho efektivitu, bylo její zadání vytvořeno následovně. Metodou pokusu a omylu bylo nalezeno zatížení, jež



Obrázek 4.1: Písmeno T - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení.

vyvolalo uspokojivou deformaci (vypočítanou inkrementální metodou) a ta byla označena za požadovanou s tím, že zatížení jí odpovídající bylo známé. V případě "písmene T" jsou optimální hodnoty složek vektoru zatížení tyto $\mathbf{c} = (F, M) = (40, 205)$. K získání představy o charakteru řešené úlohy z hlediska optimalizace mohou posloužit řezy objektivní funkcí v místě optima, které jsou ukázány na obrázku 4.2. Pro zpřehlednění obrázku je průběh vynesena pro záporně vzatou optimalizovanou funkci $-J(\cdot)$.



Celý obor hodnot funkce $-J(\cdot)$ Detail v okolí optimální hodnoty funkce $-J(\cdot)$.

Obrázek 4.2: Písmeno T - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$.

Výpočet byl spuštěn pro obě formulace součinitele β . V obou případech bylo zvoleno počáteční řešení $\mathbf{c}_0 = (25, 220)$ a průběh výpočtu byl shodným způsobem zaznamenán do tabulky 4.1.

| iterace | Fletcher-Reevesova formulace | | | Polak-Ribiereova formulace | | |
|---------|------------------------------|---------|-------------------------------|----------------------------|---------|-------------------------------|
| | F_k | M_k | $J(\mathbf{u}(\mathbf{c}_k))$ | F_k | M_k | $J(\mathbf{u}(\mathbf{c}_k))$ |
| 0 | 25 | 220 | 1.90009 | 25 | 220 | 1.90009 |
| 1 | 10.3356 | 203.509 | 0.0785499 | 10.3356 | 203.509 | 0.0785499 |
| 2 | 27.8942 | 204.258 | 0.00611722 | 27.8942 | 204.258 | 0.00611722 |
| 3 | 34.6072 | 204.577 | 0.00137009 | 29.1143 | 204.33 | 0.00475017 |
| 4 | 36.8534 | 204.692 | 0.000612327 | 29.9342 | 204.379 | 0.00395654 |
| 5 | 37.8684 | 204.747 | 0.00037428 | 30.5441 | 204.415 | 0.00342586 |
| 6 | 38.423 | 204.778 | 0.000269265 | 31.0245 | 204.444 | 0.00304156 |
| 7 | 38.765 | 204.799 | 0.000212869 | 31.4177 | 204.468 | 0.00274817 |
| 8 | 38.9939 | 204.813 | 0.000178512 | 31.7484 | 204.488 | 0.00251559 |
| 9 | 39.1565 | 204.823 | 0.000155682 | 32.0324 | 204.505 | 0.00232591 |
| 10 | 39.2772 | 204.831 | 0.000139525 | 32.2802 | 204.521 | 0.00216776 |

Tabulka 4.1: Průběh řešení úlohy konstrukce ve tvaru písmene T metodou sdružených gradientů.

Vzhledem k uvedenému příkladu by bylo možné uzavřít, že metoda sdružených gradientů je metodou velice účinnou a vhodnou pro řešení uvedeného typu úloh. Nicméně je nutné zdůraznit, že pro úspěšné použití této metody je velmi důležité vhodně zvolit počáteční bod iteračního cyklu. Například pro $\mathbf{c}_0 = (10, 220)$ už totiž tato metoda není schopná dosáhnout jakéhokoli použitelného řešení, a to bez ohledu na použitou formulaci součinitele β .

4.2 Metoda řešení simultánně formulovaného sdruženého problému

Jak již bylo uvedeno, simultánní formulace sdruženého problému používá Lagrangeovy multiplikátory a minimalizovaným výrazem je zde vektor reziduí daný Karush-Kuhn-Tuckerovými

podmínkami optimality. Pro optimální řízení i optimální návrh konstrukce lze tyto podmínky optimality zapsat shodně jako soustavu nelineárních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} \right) + \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (4.21)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_x = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (4.22)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_\lambda = [\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) - \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}, \mathbf{x})] \quad . \quad (4.23)$$

Nejjednodušší způsob řešení takové nelineární soustavy rovnic je pomocí Newton-Raphsonovy metody. Předpokládejme, že máme k dispozici hodnoty $(\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)^T$, příslušející dané iteraci algoritmu. Pak můžeme psát:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \mathbf{r}(\mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k + \Delta \boldsymbol{\lambda}_k) = \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k) + \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right] (\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \Delta \mathbf{x}_k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_k \end{pmatrix} + O \left\{ \begin{pmatrix} \Delta \|\mathbf{u}_k\|^2 \\ \Delta \|\mathbf{x}_k\|^2 \\ \Delta \|\boldsymbol{\lambda}_k\|^2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Při dostatečně malém kroku $\Delta \mathbf{r}$ můžeme výraz $\{\Delta \|\mathbf{u}_k\|^2, \Delta \|\mathbf{x}_k\|^2, \Delta \|\boldsymbol{\lambda}_k\|^2\}$ zanedbat a tak získáme soustavu lineárních rovnic. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že vektor vnitřních sil $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ a matice tuhosti $\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ jsou na daném přírůstku konstantní, tedy

$$\mathbf{r}_x^T \approx \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad , \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{u}^2} + \frac{\partial \mathbf{K}_u}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\lambda} \approx \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{u}^2} \quad . \quad (4.26)$$

Newton-Raphsonova soustava (4.24) má tedy tvar

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{r}_u}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_\lambda}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{r}_\lambda}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{r}_\lambda}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \Delta \mathbf{x}_k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad , \quad (4.27)$$

příčemž matice obsahující derivace reziduí \mathbf{r} se nazývá Hessián \mathbf{H} a obecně má pro optimální řízení i optimální návrh konstrukce tvar:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{u}^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} & \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{u}} & \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}^2} & -\frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) & -\frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

4.2.1 Příklad řešení optimálního řízení konstrukce zatížením

Metoda řešení simultánně formulovaného sdruženého problému Newton-Raphsonovou metodou je pro srovnání ukázána na stejné úloze optimálního řízení jako v předcházející kapitole, to jest na úloze zabývající se konstrukcí ve tvaru písmene T. Pro příslušnou objektivní funkci definovanou rovnicí (4.14) má Hessián následující tvar:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_0^T \\ \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) & -\mathbf{F}_0^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Počáteční hodnoty vektoru zatížení byly také zvoleny stejně, tedy $\mathbf{c}_0 = (25, 220)$. V této metodě je ovšem také nutné mít odpovídající počáteční hodnoty posunů a rotací \mathbf{u}_0 a Lagrangeových multiplikátorů λ_0 . Počáteční hodnoty posunů a rotací je možné získat pro zvolené zatížení jedním iteračním výpočtem inkrementální analýzy, Lagrangeovy multiplikátory pak z jedné z Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek optimality, vedoucí na vztah

$$\lambda^T = - \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{K}^{-1} = -\alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d)^T \mathbf{K}^{-1}. \quad (4.30)$$

Průběh výpočtu pro uvedený počáteční odhad řešení je uveden v tabulce 4.2.

Jak je z výsledků patrné, řešení simultánně formulované úlohy je mnohem efektivnější a to hned ze dvou důvodů. Prvním z nich je mnohem vyšší přesnost dosaženého výsledku při nižším počtu nutných iterací. Druhým pak fakt, že pro tradičně formulovanou úlohu představuje jedna iterace další iterační výpočet inkrementální analýzou, zatímco u simultánně formulované úlohy pouze vyhodnocení vektoru reziduí, Hessiánu a vyřešení jedné soustavy lineárních rovnic. Nevýhodou této metody je však nutnost výpočtu druhých derivací objektivní funkce, což významě zvyšuje nároky této optimalizační metody na námi volenou objektivní funkci.

| iterace | síla F_k | moment M_k | $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ |
|---------|------------|--------------|---------------------------|
| 0 | 25 | 220 | 3.96518e+11 |
| 1 | 25.806 | 205.37 | 6816.51 |
| 2 | 40.0079 | 204.575 | 0.0168817 |
| 3 | 40.0001 | 204.997 | 7.73501e-09 |
| 4 | 40.0001 | 204.997 | 2.59912e-22 |
| 5 | 40.0001 | 204.997 | 6.58778e-23 |
| 6 | 40.0001 | 204.997 | 8.64125e-23 |
| 7 | 40.0001 | 204.997 | 1.83903e-22 |
| 8 | 40.0001 | 204.997 | 5.81991e-23 |
| 9 | 40.0001 | 204.997 | 1.42024e-22 |
| 10 | 40.0001 | 204.997 | 1.07988e-22 |

Tabulka 4.2: Průběh simultánního řešení úlohy konstrukce ve tvaru písmene T Newton-Raphsonovou metodou.

Pokud jde o náročnost této metody na vhodnou volbu počátečního řešení, platí to samé jako pro metodu sdružených gradientů. Konkrétně pro počáteční řešení $\mathbf{c}_0 = (10, 220)$ tato metoda sice ke správnému řešení stále ještě rychle konverguje, nicméně např. pro $\mathbf{c}_0 = (0, 0)$ už konverguje k lokálnímu extrému $\mathbf{c}_0 = (4688.8, -2515.11)$.

Kapitola 5

Stochastické metody řešení na principu genetických algoritmů

Genetické algoritmy patří mezi velice moderní a populární optimalizační metody. Jsou založené na analogii s procesy pozorovanými ve volné přírodě, jako je vývoj živých organismů v průběhu milionů let. Narozdíl od klasických gradientních metod pracují genetické algoritmy s takzvanou populací jedinců, která představuje skupinu přípustných řešení optimalizační úlohy. Na populaci jsou aplikovány genetické operátory křížení, mutace a selekce. Princip genetických algoritmů byl poprvé představen J. H. Hollandem v (Holland, 1975). Od té doby byly tyto algoritmy s úspěchem použity k řešení širokého okruhu úloh (viz např. publikace D. E. Goldberga (Goldberg, 1989) a Z. Michalewicze (Michalewicz, 1992)).

U genetických algoritmů v jejich původní podobě představuje populace jedinců populaci chromozomů. To jsou binární řetězce reprezentující určitým způsobem přípustné řešení problému. V případě inženýrských optimalizačních úloh se však setkáváme s proměnnými z oboru reálných čísel. V úlohách zde prezentovaných představují tyto proměnné hodnoty složek zatížení nebo geometrické vlastnosti konstrukce (např. výšky průřezu prutů), které nabývají reálných hodnot. R. Storn v (Storn, 1996) představuje evoluční algoritmus nazvaný diferenciální evoluce, který je upraven tak, aby přímo pracoval s reálnými proměnnými. Binární řetězce představující chromozomy jsou zde nahrazeny řetězci reálných čísel, které je možné chápat jako reálné vektory. Ty pak umožňují vytvoření nového operátoru křížení, založeného na výpočtu rozdílu dvou mateřských chromozomů.

V této práci byl k optimalizaci použit algoritmus SADE¹ (Kučerová and Hrstka, 2001). Reprezentace chromozomů jako reálných vektorů vychází z diferenciální evoluce stejně jako princip pro operátor křížení. Liší se od diferenciální evoluce tím, že stejně jako tradiční genetické algoritmy používá operátor mutace a upravenou podobu operátoru selekce. V (Hrstka and Kučerová, 2004) bylo ukázáno, že algoritmus je schopen vyřešit i úlohy s vyšším počtem proměnných. Stejně tak si umí poradit i u problémů, které mají více lokálních optim a najít globální optimum, přestože gradient objektivní funkce nabývá vysokých hodnot a optimální hodnota se v blízkosti optima jeví jako izolovaná. V následujících odstavcích je stručný popis jednotlivých operátorů algoritmu. Detailnější popis je prezentován např. v (Hrstka and Kučerová, 2004). Během práce na této diplomové práci bylo vyzkoušeno také několik modifikací algoritmu SADE a tak byla vyvinuta nová verze algoritmu nazvaná GRADE².

5.1 Algoritmus SADE

V tradičních evolučních metodách je prvním krokem vytvoření počáteční populace chromozomů, neboli první generace. Chromozomy jsou generovány jako náhodné vektory tak, že jejich jednotlivé složky jsou vybírány z rovnoměrného rozdělení na intervalu v předem zadaných mezích. Následuje opakování cyklu

- vytvoření dvojnásobku původního počtu chromozomů pomocí operátorů: mutace, lokální mutace a křížení,
- ohodnocení nových chromozomů,
- selekce chromozomů do nové generace o stejném počtu jedinců jako generace počáteční,

dokud nejsou splněny zvolené podmínky pro zastavení algoritmu. Algoritmus zapsaný v programovacím jazyce C vypadá následovně:

```
void SADE ( void )  
{
```

¹Simplified Atavistic Differential Evolution

²GRadient Atavistic Differential Evolution

```

FIRST_GENERATION();
while ( to_continue () )
{
    MUTATE();
    LOCAL_MUTATE();
    CROSS();
    EVALUATE_GENERATION();
    SELECT();
}
}

```

V prezentovaných výpočtech pracoval algoritmus s populací o ' $PR \times n$ ' chromozomech, kde n představuje celkový počet proměnných objektivní funkce a PR je parametr algoritmu roven 10.

Necht' $CH_i(t)$ je i -tý chromozom v generaci t . Jeho vyjádření je možné zapsat jako

$$CH_i(t) = (ch_{i1}(t), ch_{i2}(t), \dots, ch_{in}(t)). \quad (5.1)$$

Vývoj populace chromozomů je zajišťován těmito operátory:

Operátor MUTATE

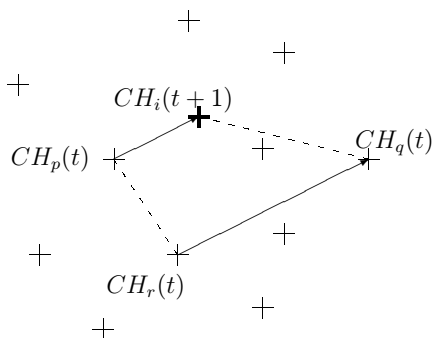
Pro vytvoření nového chromozomu tímto operátorem je nejprve náhodně vybrán z populace chromozom $CH_i(t)$. Dále je vytvořen náhodný vektor RP z rovnoměrného rozdělení nad definičním oborem objektivní funkce. Nový chromozom $CH_k(t + 1)$ je pak získán podle předpisu:

$$CH_k(t + 1) = CH_i(t) + MR(RP - CH_i(t)), \quad (5.2)$$

kde MR je konstantní parametr algoritmu roven 0.5. Počet chromozomů vytvořených operátorem mutace je definován dalším parametrem algoritmu označovaným "radioaktivita", jenž je roven 0.1.

Operátor LOCAL_MUTATE

Lokální mutace vytváří nový chromozom vždy v blízkosti některého již existujícího jedince. Nejdříve tedy vybere náhodný chromozom z populace a změní všechny jeho složky o náhodné hodnoty z obvykle velice úzkého intervalu. Cílem operátoru je rychlejší dohledávání řešení



Obrázek 5.1: Schéma operátoru křížení u algoritmu SADE

s vyšší přesností. Jeho efektivitu lze ocenit zejména při optimalizaci funkcí, které se vyznačují vysokou hodnotou gradientu v okolí optima, kde malá změna hodnoty proměnných představuje velkou změnu funkční hodnoty a je tedy užitečné zjemnit krok algoritmu. Počet chromozomů vytvořených operátorem lokální mutace je definován parametrem zvaným "lokální radioaktivita", jehož hodnota je rovna 0.1.

Operátor CROSS

Úkolem operátoru křížení je doplnit jedince vzniklé operátory mutace či lokální mutace o takový počet nových chromozomů tak, aby bylo dosaženo celkem dvojnásobku počáteční velikosti populace. Nový chromozom $CH_i(t+1)$ je tu vytvořen podle následujícího schématu: z populace jsou náhodně vybrány tři chromozomy $CH_p(t)$, $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$, je spočítán rozdíl vektorů $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$, získaný diferenční vektor je přenásoben konstantou CR a nakonec přičten k chromozomu $CH_p(t)$, neboli

$$CH_i(t+1) = CH_p(t) + CR(CH_q(t) - CH_r(t)). \quad (5.3)$$

Toto schéma je zobrazeno na obrázku 5.1. Každá složka nového chromozomu, která překročí pro ni zadanou mez definičního oboru objektivní funkce je nahrazena hodnotou právě oné překročené meze. Parametr CR má pravděpodobně největší vliv na chování algoritmu. Čím větší je hodnota parametru, tím pomaleji algoritmus konverguje, což je výhodné u problémů s větším počtem lokálních optím. Naopak nízké hodnoty parametru zvyšují rychlost konvergence algoritmu. Během prezentovaných výpočtů byla hodnota parametru nastavena na 0.3.

Operátor SELECT

Selekce představuje jádro genetického algoritmu. Jejím cílem je zajistit zlepšování populace

vybíráním lepších jedinců do nové generace. Výběr je prováděn na principu inverzního turnaje, kdy je ze dvou náhodně vybraných chromozomů vyřazen ten horší, což se opakuje do té doby, než zůstane v populaci stejný počet jedinců jako na začátku cyklu. Šance horšího jedince přežít v populaci do další generace při tomto způsobu selekce zajišťuje užitečnou míru diverzity populace.

5.2 Algoritmus GRADE

Algoritmus GRADE vznikl drobnými úpravami algoritmu SADE. Myšlenka těchto úprav má dva hlavní cíle:

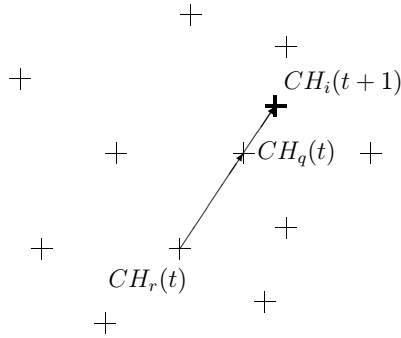
- zrychlení konvergence algoritmu na hladkých funkcích s jedním jediným optimem,
- snížení počtu parametrů algoritmu SADE a omezení jejich vlivu na chování algoritmu, jelikož nastavení jejich hodnot tak, aby byl algoritmus efektivní, se pro různé optimalizační úlohy může výrazně lišit, přičemž jediným způsobem jejich nastavení je pouze metoda pokusu a omylu.

Pro připomenutí, parametry algoritmu SADE jsou: PR , definující počet chromozomů v populaci; MR a "radioaktivita", parametry operátoru mutace; "lokální radioaktivita", parametr operátoru lokální mutace a CR , parametr operátoru křížení. Ještě jeden parametr vystupuje v operátoru lokální mutace, který slouží k upřesnění intervalu pro definování posunů zvoleného jedince k vytvoření nového.

GRADE si zachovává původní schéma a rozdíly oproti SADE jsou jen následující:

- zrušení operátoru lokální mutace,
- parametr MR není nadále konstatou algoritmu, ale při tvorbě každého nového chromozomu je jeho hodnota vybírána náhodně z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$,
- schéma operátoru křížení je nahrazeno následujícím schématem:

$$CH_i(t+1) = \max(CH_q(t); CH_r(t)) + SG \cdot CR(CH_q(t) - CH_r(t)), \quad (5.4)$$



Obrázek 5.2: Schéma operátoru křížení u algoritmu GRADE

které je zobrazeno na obrázku 5.2. Operátor tentokrát pracuje pouze se dvěma náhodně vybranými chromozomy z populace $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$. Jejich rozdílem vznikne diferenční vektor, který je přenásoben parametrem CR a jeho směr případně změněn přenásobením součinitelem SG . Nový chromozom $CH_i(t+1)$ je získán součtem výsledného diferenčního vektoru a lepšího z chromozomů $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$. Parametr CR již také není konstantním parametrem algoritmu, ale je při každém křížení generován náhodně z intervalu $\langle 0, CL \rangle$, kde CL je nový parametr algoritmu. Nastavení hodnoty tohoto parametru má již ovšem menší vliv na chování algoritmu, než jak tomu byly u parametru CR . Pokud není u konkrétních výpočtů upřesněno jinak, je jeho hodnota rovna 1. Součinitel SG je roven -1 pokud je chromozom $CH_r(t)$ lepší než $CH_q(t)$ a roven 1 v ostatních případech.

Parametry algoritmu GRADE jsou tedy následující: PR , "radioaktivita" a CL . Hodnota parametru PR je pro tento algoritmus též zvolena rovna 10 a parametr "radioaktivita" je nastaven na hodnotu 0.2.

5.3 Příklady optimálního řízení konstrukcí zatížením

V následující části jsou ukázány výsledky řešení úloh, jejíž objektivní funkce je shodně popsána v kapitole 4 a dána rovnicí (4.14). Postup výpočtu je předveden jak pro tradiční formulaci problému, která obnáší iterační výpočet inkrementální analýzy v každém vyhodnocení objektivní funkce, tak i pro simultánní formulaci problému, založenou na Lagrangeových multiplikatorech.

5.3.1 Tradiční formulace

První úlohou je optimální řízení konstrukce ve tvaru písmene T, popsané v kapitole 4. Pro připomenutí, v této úloze je cílem nalézt takové hodnoty momentu M a síly F tak, aby bylo dosaženým požadované deformace. Během výpočtu genetickým algoritmem je pro ohodnocení každého jedince, tedy navrženého řešení problému, spustěn výpočet inkrementální analýzy pro nalezení odpovídajícího vektoru přemístění. Teprve pak je vyhodnocena objektivní funkce, která je definována jako rozdíl mezi dosaženou deformovaným tvarem konstrukce a tvarem požadovaným.

Úloha je řešena každým z algoritmů popsáných v předcházejících odstavcích. Nastavené hodnoty parametrů algoritmů jsou zaznamenány v tabulce 5.1.

| Algoritmus SADE | Algoritmus GRADE |
|-------------------------------|-----------------------|
| $PR = 10$ | $PR = 10$ |
| "radioaktivita" = 0.1 | "radioaktivita" = 0.1 |
| $MR = 0.5$ | $CL = 1.0$ |
| "lokální radioaktivita" = 0.1 | |
| $CR = 0.3$ | |

Tabulka 5.1: Parametry algoritmů SADE a GRADE.

Narozdíl od prezentovaných deterministických metod genetické algoritmy nevyžadují počáteční odhad řešení. Naproti tomu ovšem potřebují stanovit minimální a maximální přípustné hodnoty všech optimalizovaných proměnných. Ty jsou pro úlohy s konstrukcí ve tvaru písmene T zaneseny společně optimálními hodnotami do tabulky 5.2.

| Složka | Optimální | Minimální | Maximální |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| F | 40 | 10 | 60 |
| M | 205 | 175 | 225 |

Tabulka 5.2: Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene T.

Protože je genetický algoritmus stochastická metoda, je třeba spustit výpočet například stokrát pro omezení náhodných vlivů. Jelikož není možné najít optimální hodnotu objektivní funkce s absolutní přesností, je výpočet zastaven vždy, jakmile dosáhne hodnoty funkce $J(\cdot)$

menší než 10^{-7} , neboli jakmile dosáhne optimální hodnoty, která je rovna nule s přesností větší než 10^{-7} . Za těchto podmínek byl při každém výpočtu zaznamenán počet vyhodnocení objektivní funkce a nalezené hodnoty jednotlivých složek zatížení. Statistika z výsledků výpočtů je zaznamenána v tabulkách 5.3 a 5.4³.

| Algoritmus | Minimální | Maximální | Průměrný |
|------------|-----------|-----------|----------|
| SADE | 240 | 2860 | 648.8 |
| GRADE | 280 | 1180 | 512.4 |

Tabulka 5.3: Písmeno T - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $J(\cdot)$.

| Složka | Minimální | Maximální | Průměrná | Směrodatná odchylka |
|--------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| F | 39.912 | 40.084 | 40.002 | 0.0474 |
| M | 205.00 | 205.00 | 205.00 | 0.001 |

Tabulka 5.4: Písmeno T - nalezené hodnoty zatížení.

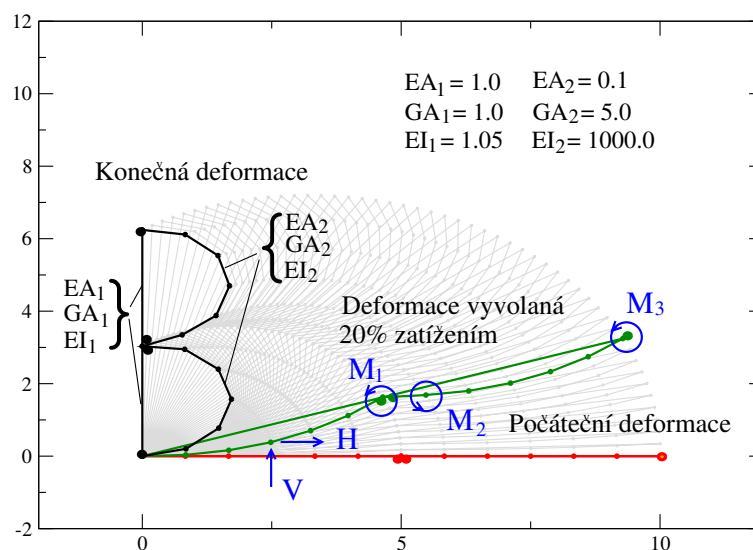
Druhý příklad se týká o něco složitější konstrukce ve tvaru písmene B se zatížením o pěti složkách. Jde tu tedy o optimalizační problém o pěti proměnných. Mechanické vlastnosti konstrukce, její počáteční a požadovaná deformace a rozmístění zatížení jsou zobrazeny na obrázku 5.3.

V případě "písmene B" jsou optimální a přípustné minimální a maximální hodnoty jednotlivých složek vektoru zatížení $\mathbf{c} = (H, V, M_1, M_2, M_3)$ zapsány v tabulce 5.5.

Parametry obou algoritmů zůstaly nastaveny na stejných hodnotách jako při řešení předcházející úlohy. Výpočet byl opět spuštěn stokrát a vždy zastaven při dosažení hodnoty objektivní funkce menší než 10^{-6} . Výsledky jsou uvedeny v tabulkách 5.6 a 5.7.

Na obrázcích v příloze D je zachycen průběh konvergence algoritmu SADE při řešení úlohy s "písmenem B". Tamtéž je i poznámka týkající se jistých potíží při výpočtech algoritmem SADE, doplněná pro snazší srozumitelnost i řezy objektivní funkce v místě jejího optima.

³Statistika výsledků v této tabulce byla provedena na výsledcích algoritmu GRADE. Výpočet prováděný oběma algoritmy byl zastaven při dosažení stejné přesnosti optimální hodnoty objektivní funkce $J(\cdot)$ a proto i chyby v nalezených hodnotách zatížení se významně neliší.



Obrázek 5.3: Písmeno B - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení.

| Složka | Optimální | Minimální | Maximální |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| H | 0.04 | 0.025 | 0.050 |
| V | -0.05 | -0.06 | -0.035 |
| M_1 | 0.782 | 0.6 | 0.9 |
| M_2 | -0.792 | -0.9 | -0.65 |
| M_3 | 0.792 | 0.6 | 0.85 |

Tabulka 5.5: Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene B.

| Algoritmus | Minimální | Maximální | Průměrný |
|------------|-----------|-----------|----------|
| SADE | 2600 | 165800 | 46887.5 |
| GRADE | 1900 | 117850 | 20632.0 |

Tabulka 5.6: Písmeno B - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $J(\cdot)$.

Na základě již uvedených výsledků lze vyjádřit domněnku, že algoritmus GRADE je z obou metod efektivnější, a proto je při řešení dalších úloh používán pouze ten.

Třetí příklad se týká jednoduché konstrukce ve tvaru písmene I. Vektor zatížení má opět

| Složka | Minimální | Maximální | Průměrná | Směrodatná odchylka |
|--------|-----------|-----------|-----------|---------------------|
| H | 0.039638 | 0.040353 | 0.039977 | 0.0002218 |
| V | -0.050265 | -0.49733 | -0.049998 | 0.0001590 |
| M_1 | 0.78178 | 0.78221 | 0.78199 | 0.000121 |
| M_2 | -0.79237 | -0.79163 | -0.79202 | 0.000214 |
| M_3 | 0.79180 | 0.79224 | 0.79200 | 0.000092 |

Tabulka 5.7: Písmeno B - nalezené hodnoty zatížení.

pouze dvě složky, ty jsou ale vybrané tak, aby vytvořily speciální případ zatížení, kdy objektivní funkce (4.14)⁴ už nedefinuje jedno jediné optimální řešení, ale řešení je zde nekonečně mnoho. Přesto nelze říct, že každá variace složek zatížení je optimální. Mezi složkami totiž existuje lineární závislost, která definuje jednorozměrný prostor optimálních řešení. Na následujících výpočtech je ukázána schopnost algoritmu GRADE zjistit zmíněnou závislost po několikanásobném spuštění výpočtu.

Mechanické vlastnosti konstrukce, její počáteční a požadovaná deformace a rozmístění zatížení jsou zobrazeny na obrázku 5.4.

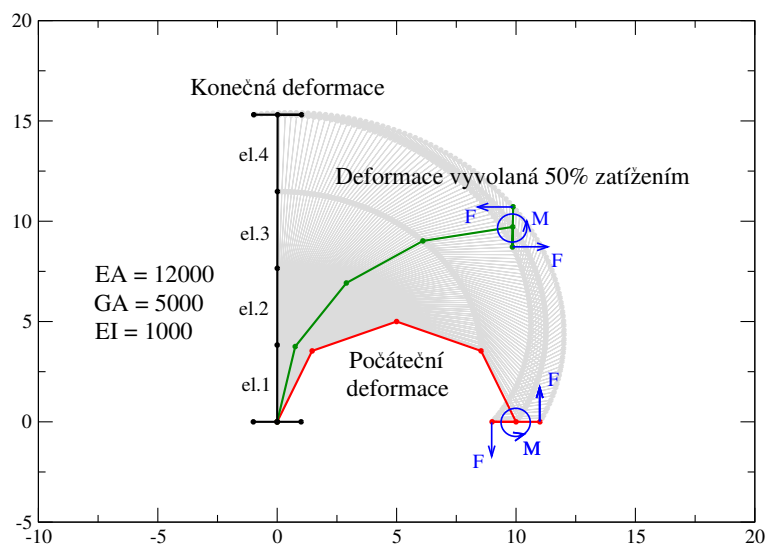
Pro získání nekonečného počtu různých řešení bylo zvoleno zatížení v podobě jednoho momentu a jedné dvojice sil, které mají na konstrukci téměř stejný deformační účinek. Zatížení (viz obrázek 5.4), které v tomto případě sleduje postupnou deformaci konstrukce (zatížení nekonzervativní), je modelováno pomocí následující formulace vektoru vnějších sil:

$$\mathbf{f}^{ext} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}_0 \mathbf{c}. \quad (5.5)$$

Jedna z možných kombinací optimálních hodnot složek vektoru zatížení $\mathbf{c} = (F, M)$ a jejich přípustné minimální a maximální hodnoty jsou pro případ "písmene I" dány v tabulce 5.8. Průběh záporně vzaté optimalizované funkce je znázorněn na obrázku 5.5.

Při řešení této úlohy byl algoritmus GRADE také spustěn stokrát. Výpočet byl vždy zastaven při dosažení hodnoty objektivní funkce $J(\cdot)$ menší než 10^{-7} . Minimální, maximální a průměrný počet vyhodnocení této funkce je zaznamenán v tabulce 5.9.

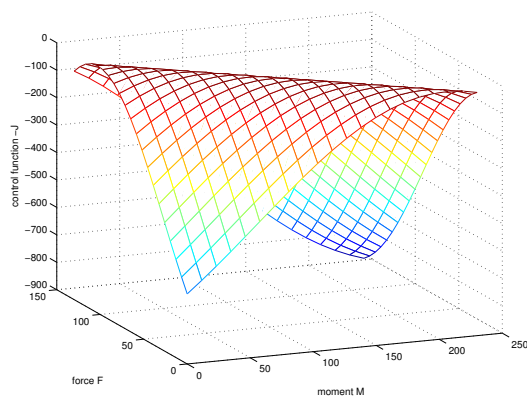
⁴V tomto případě je provedena drobná změna v diskretizované formulaci objektivní funkce, kde n_{el} už nepředstavuje celkový počet konečných prvků konstrukce, ale objektivní funkce je vyhodnocena pouze na těch prvcích konstrukce, které jsou na požadovaném deformovaném tvaru konstrukce vertikální.



Obrázek 5.4: Písmeno I - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení.

| Složka | Optimální | Minimální | Maximální |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| F | 0.0 | 0.0 | 120.0 |
| M | 205.4 | 0.0 | 230.0 |

Tabulka 5.8: Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene I.

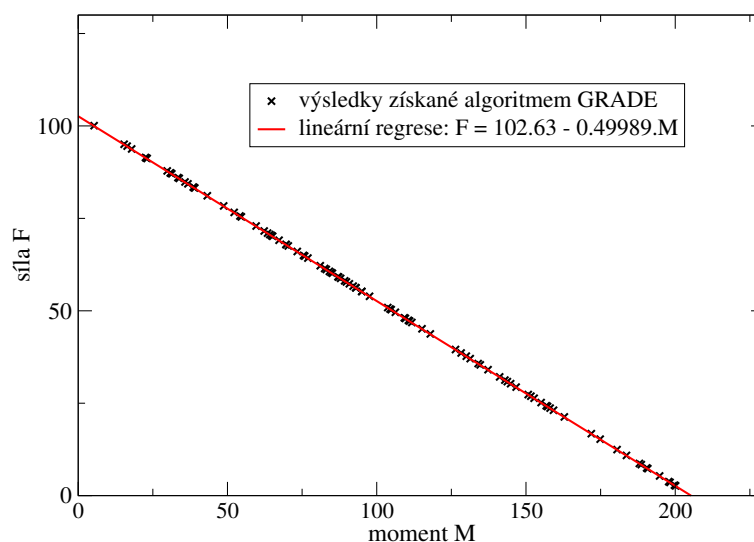


Obrázek 5.5: Písmeno I - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$ v její nerozšířené podobě 4.14.

| Algoritmus | Minimální | Maximální | Průměrný |
|------------|-----------|-----------|----------|
| GRADE | 180 | 640 | 359.8 |

Tabulka 5.9: Písmeno I - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $J(\cdot)$.

Jelikož při každém výpočtu bylo nalezeno jiné řešení, byla všechna řešení vynesena do grafu na obrázku 5.6. S pomocí lineární regrese je pak možné snadno zjistit vztah mezi složkami zatížení, který definuje prostor optimálních řešení.



Obrázek 5.6: Sto různých řešení "úlohy s písmenem I".

Za předpokladu, že pruty, které jsou ve výsledném deformovaném tvaru vodorovné, jsou nekonečně tuhé, je přesné vyjádření prostoru optimálních řešení následující:

$$F = 102.5 - 0.5M. \quad (5.6)$$

Pro numerické výpočty tento předpoklad splněn nebyl, což může vysvětlit drobný rozdíl mezi přesným řešením a řešením získaným lineární regrese z výsledků algoritmu GRADE.

V následující úloze je cílem ukázat, jak je možné změnit předcházející úlohu s "písmenem I" o nekonečném počtu řešení na úlohu s jediným optimálním řešením. K tomu stačí rozšířit formulaci objektivní funkce o výraz vyjadřující práci vnějšího zatížení. Během optimalizace je

pak tato práce minimalizována zároveň s minimalizováním hodnot jednotlivých složek zatížení. Novou formulaci objektivní funkce $J(\cdot)$ lze tedy zapsat jako

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^d\|^2 + \alpha \frac{1}{2} \|\mathbf{c}\|^2, \quad (5.7)$$

kde je α konstantní součinitel, který definuje velikost vlivu práce vnějších sil na hodnotu objektivní funkce. Pro následující výpočty byla jeho hodnota nastavena na 10^{-9} , čímž je vyjádřeno, že hlavním cílem optimalizace je co nejpřesnější nalezení požadované deformace, zatímco minimalizace práce vnějších sil není podstatná.

Tradiční formulace úlohy vede na následující formulaci diskretizované objektivní funkce

$$J = \sum_{i=0}^{n_{el}} \sum_{j=1}^2 [(u_{ij} - u_{ij}^d)^2 + (v_{ij} - v_{ij}^d)^2] L_i - \alpha \sum_{i=0}^{n_c} c_i^2, \quad (5.8)$$

kde nový parametr n_c představuje počet složek zatížení.

Při řešení uvedené úlohy byl algoritmus GRADE spuštěn také stokrát, ale vždy byl zastaven při dosažení 20000 vyhodnocení objektivní funkce, protože v tomto případě není známa její optimální hodnota. Při každém spuštění našel algoritmus stejné řešení:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (F, M) = (68.466, 68.526), \\ J &= 1.407863054 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.3.2 Simultánní formulace

Simultánní formulace problému optimálního řízení je ukázána na úloze s konstrukcí ve tvaru písmene T, popsané v předcházející kapitole, kde cílem je nalezení takového zatížení, aby bylo dosaženo požadované deformace konstrukce.

Proces řešení $\hat{L}(\cdot)$ je formulován jako

$$\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\forall(\mathbf{u}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda})} [\mathbf{r}^T \mathbf{r}], \quad (5.10)$$

kde vektor \mathbf{r} je definován v rovnicích (3.13) - (3.14). Pro získání jeho diskretizované podoby je třeba nejprve vyjádřit následující derivace objektivní funkce:

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}} = \alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d); \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, u_2, \dots, u_{n_{ddl}})^T \\ \mathbf{u}^d &= (u_1^d, u_2^d, \dots, u_{n_{ddl}}^d)^T \end{aligned}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = 0. \quad (5.12)$$

Vektor reziduí $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\lambda, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_c)$ je pak

$$\mathbf{r}^T = \left(\begin{array}{c} (\mathbf{f}^{int} - \mathbf{F}_0 \mathbf{c})^T; \\ \alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d)^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}; \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}_0 \end{array} \right), \quad (5.13)$$

kde n_{ddl} je počet stupňů volnosti celé konstrukce a n_c je počet nenulových složek zatížení (v tomto případě $n_c = 2$).

Optimalizované proměnné jsou tentokrát: složky zatížení (2 proměnné), složky deformace (21 proměnných) a Lagrangeovy multiplikátory (21 proměnných), což dává celkem 44 proměnných optimalizační úlohy. Mezní přípustné hodnoty pro složky zatížení jsou uvedeny v předcházející kapitole v tabulce 5.2. Intervaly přípustných hodnot složek deformace jsou vyjádřeny vztahem k jejich požadovaným hodnotám \mathbf{u}_d jako

$$\mathbf{u}_{min} = (1 - EP)\mathbf{u}_d, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{u}_{max} = (1 + EP)\mathbf{u}_d, \quad (5.15)$$

kde EP představuje takzvanou "chybu" v odhadu konečné deformace. Pro následující výpočty je jeho hodnota stanovena $EP = 0.00001$. Mezní hodnoty Lagrangeových multiplikátorů jsou nastaveny pevně na hodnotách ± 0.000225 .

K optimalizaci je použit algoritmus GRADE s hodnotami parametrů: $PR = 20$, $CL = 1.0$ a "radioaktivita" = 0.2. Výpočet byl spuštěn stokrát a pokaždé zastaven v okamžiku, kdy algoritmus nalezne řešení s hodnotou výrazu $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ menší než 0.1. Zaznamenávána je opět přesnost nalezených složek zatížení a počet potřebných vyhodnocení optimalizovaného výrazu $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$. Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 5.10.

Pro následující sérii výpočtů je optimalizační úloha zjednodušena redukováním Lagrangeových multiplikátorů jako optimalizovaných proměnných. Tato redukce je možná díky vyjádření závislosti těchto multiplikátorů na složkách deformace \mathbf{u} a zatížení \mathbf{c} z rovnice (3.11) následujícím způsobem:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = - \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{K}^{-1} = -\alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d)^T \mathbf{K}^{-1}. \quad (5.16)$$

| | Minimum | Maximum | Průměr | Směrodatná odchylka |
|--|---------|---------|--------|---------------------|
| F | 39.938 | 40.083 | 40.004 | 0.0284 |
| M | 204.85 | 205.09 | 204.99 | 0.0437 |
| počet vyhodnocení výrazu $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ | 36960 | 360800 | 102203 | ———— |

Tabulka 5.10: Získané výsledky simultánní optimalizace zatížení - série 1.

Vektor reziduí \mathbf{r} se tak zjednoduší na $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_\lambda)$ a počet optimalizovaných proměnných klesne na 23. Všechny ostatní parametry výpočtu jsou ponechány stejné jako pro předchozí sérii. Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 5.11.

| | Minimum | Maximum | Průměr | Směrodatná odchylka |
|--|---------|---------|--------|---------------------|
| F | 39.973 | 40.034 | 40.000 | 0.0135 |
| M | 204.96 | 205.05 | 205.00 | 0.0192 |
| počet vyhodnocení výrazu $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ | 14720 | 201480 | 37701 | ———— |

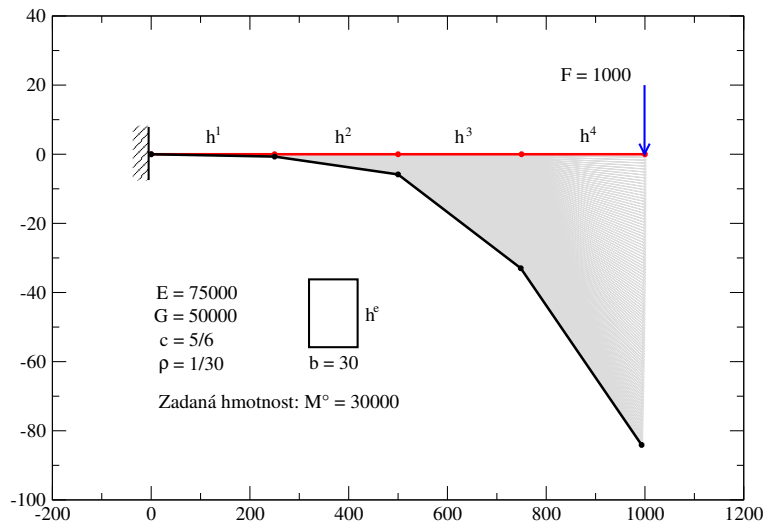
Tabulka 5.11: Získané výsledky simultánní optimalizace zatížení - série 2.

5.4 Příklad optimálního návrhu geometrických vlastností konstrukce

Problém optimálního návrhu konstrukce zahrnuje mnohem širší a proměnlivější skupinu úloh než problém optimálního řízení. Pro úlohy optimálního návrhu bývá obvykle typické, že vstupními konstantami jsou známé složky zatížení. Méně často se už setkáme s případem, kdy je rovněž známa i požadovaná deformace, jelikož objektivní funkce se častěji opírá o jiný typ požadavků, než je docílení požadovaného tvaru konstrukce. Právě jeden takový příklad byl zvolen pro ilustraci, a to na konstrukci co nejjednodušší, s objektivní funkcí velice jednoduchou a se snadno představitelným fyzikálním významem.

Zvolenou konstrukcí je konzola proměnlivého průřezu, přičemž předmětem optimalizace je právě jeho výška. Při aproximaci metodou konečných prvků je konzola rozdělena na čtyři prvky. Výška průřezu prutu na úseku jednoho prvku je pak uvažovaná jako konstantní. Optimalizační proměnné d tedy představují výšky průřezu prutů na jednotlivých prvcích a je možné je zapsat

do vektoru $\mathbf{d} = \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$, což znamená, že úloha představuje optimalizační problém o čtyřech proměnných.



Obrázek 5.7: Počáteční tvar konstrukce, její zatížení a materiálové vlastnosti.

Předmětem řešení je minimalizace deformace vyvolané daným zatížením (viz obrázek 5.7) za podmínky, že hmotnost konstrukce má být $M_0 = 30000$. Výraz pro výpočet hmotnosti je následující:

$$M = \int_L \rho b h \, ds \quad , \quad (5.17)$$

kde $\rho = 1/30$ a $b = 30$.

Narozdíl od všech příkladů optimálního řízení není v tomto případě předem známé optimální řešení. Dané jsou jen mezní přípustné hodnoty optimalizačních proměnných, které jsou uvedené v tabulce 5.12.

| | h_1 | h_2 | h_3 | h_4 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| Minimální | 30 | 30 | 15 | 5 |
| Maximální | 60 | 60 | 35 | 25 |

Tabulka 5.12: Mezní přípustné hodnoty výšek průřezů prutů jednotlivých prvků.

5.4.1 Tradiční formulace

V tradičně formulované úloze má objektivní funkce následující podobu:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u}\|^2 ds + (M - M_0)^2. \quad (5.18)$$

Diskretizovaná formulace objektivní funkce je pak:

$$J = \sum_{i=0}^{n_{el}} \sum_{j=0}^6 u_{ij}^2 L_i + \left(\rho b \sum_{i=0}^{n_{el}} (h_i L_i) - M_0 \right)^2, \quad (5.19)$$

kde $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6})^T = (u_{i1}, v_{i1}, \varphi_{i1}, u_{i2}, v_{i2}, \varphi_{i2})^T$ je vektor deformace na i -tém prvku a kde n_{el} znamená počet prvků.

K optimalizaci je použit algoritmus GRADE, s parametry nastavenými na hodnotách $PR = 10$, $CL = 1.0$ a "radioaktivita" = 0.2. Pro každou variaci výšek průřezu prutů je spočtena odpovídající deformace inkrementální analýzou o sto krocích. Při prvním výpočtu byla nalezena minimální hodnota funkce

$$J_{opt}(\cdot) = 627646.$$

Poté byl spuštěn výpočet ještě stokrát a zastaven při dosažení uvedené hodnoty s přesností 1, resp. při dosažení hodnoty funkce $J_{opt}(\cdot)$ menší než 627647. Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 5.13.

| | Minimum | Maximum | Průměr | Směrodatná odchylka |
|-------------------------------------|---------|---------|--------|---------------------|
| h_1 | 43.772 | 43.807 | 43.790 | 0.0094 |
| h_2 | 35.914 | 35.949 | 35.932 | 0.0088 |
| h_3 | 26.313 | 26.346 | 26.328 | 0.0082 |
| h_4 | 14.184 | 14.210 | 14.197 | 0.0064 |
| počet vyhodnocení funkce $J(\cdot)$ | 1440 | 9960 | 3497 | —— |

Tabulka 5.13: Výsledky tradičního řešení optimalizace návrhu.

5.4.2 Simultánní formulace

Pro simultánní formulaci úlohy optimálního návrhu konzoly se v předpisu objektivní funkce vyskytuje pouze výraz vyjadřující velikost deformace

$$J(\mathbf{u}) = \alpha_1 \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u}\|^2 ds \quad , \quad (5.20)$$

kde parametr $\alpha_1 = 10^{-3}$.

Lagrangeovy multiplikátory nejsou uvažovány jako optimalizované proměnné, ale jsou počítány s užitím vztahu (3.4) jako

$$\boldsymbol{\lambda} = - \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{K}^{-1} = \alpha_1 \mathbf{u} \mathbf{K}^{-1}; \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n_{ddl}})^T \quad . \quad (5.21)$$

Podmínka dané hmotnosti konzoly je obsažena až ve vektoru reziduí \mathbf{r} , jako jeho další složka v podobě

$$r_{lim} = \alpha_2 (M - M_0), \quad (5.22)$$

kde parametr $\alpha_2 = 1$ a hodnotu hmotnosti M získáme při diskretním výpočtu ze vztahu

$$M = \rho b \sum_{i=0}^4 h_i L_i \quad . \quad (5.23)$$

Proces řešení úlohy $\hat{L}(\cdot)$ je definován jako

$$\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = \max_{\forall(\mathbf{u}, \mathbf{c})} [-\mathbf{r}^T \mathbf{r}] \quad ; \quad \mathbf{r} = (\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda, r_{lim}), \quad (5.24)$$

kde $\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda$ jsou definovány rovnicemi (3.5) a (3.6). Pro získání diskretizované podoby vektoru reziduí \mathbf{r} zbývá ještě vyjádřit derivace vektoru vnitřních sil \mathbf{f}^{int} a objektivní funkce $J(\cdot)$ podle návrhových proměnných $\mathbf{d} = \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$.

Derivace vnitřních sil vyjádřená pro e -tý prvek tedy zahrnuje jedinou optimalizační proměnnou h_e , která je obsažena pouze ve výrazu pro vektor vnitřních sil \mathbf{f}_e^{int} . Výraz materiálové matice tuhosti je

$$\mathbf{C} = \text{diag}(EA, GA, EI) = \text{diag}(Ebh_e, Gbh_e, E\frac{1}{12}bh_e^3). \quad (5.25)$$

Dále je možné definovat vektor $\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{N}^{e'}$ jako

$$\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{N}' = \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{N}^e}{\partial h} = \begin{pmatrix} \Lambda N'_1 \\ \Lambda N'_2 \\ \Lambda N'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta^e Eb \Sigma^e - \sin \beta^e Gb \Gamma^e \\ \sin \beta^e Eb \Sigma^e + \cos \beta^e Gb \Gamma^e \\ \frac{1}{4} Ebh_e^2 \cdot K^e \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

což nakonec vede k

$$\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial h} = \begin{pmatrix} -\Lambda N'_1 \\ -\Lambda N'_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\Lambda N'_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\Lambda N'_1) - \Lambda N'_3 \\ \Lambda N'_1 \\ \Lambda N'_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\Lambda N'_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\Lambda N'_1) + \Lambda N'_3 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Matice $\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial h}$ v globální podobě je dána lokalizací

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial h} \underset{(n_{ddl} \times n_{el})}{=} \mathbf{A} \underset{e=1}{\overset{n_{el}}{\{ \frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial h} \}}}, \quad (5.28)$$

kde n_{ddl} je počet stupňů volnosti celé konstrukce a n_{el} je počet prvků.

Jelikož zvolená objektivní funkce $J(\cdot)$ není závislá na návrhových proměnných, je její derivace podle těchto proměnných rovna nule.

$$\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{h}} = 0. \quad (5.29)$$

Výsledná diskretní podoba vektoru reziduí je pak

$$\mathbf{r}^T = \left(\underset{(1 \times n_{el})}{\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{h}}}; \underset{(1 \times n_{ddl})}{(\mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext})^T}; \underset{(1 \times 1)}{\alpha_2(M - M_0)} \right), \quad (5.30)$$

kde n_{ddl} je počet stupňů volnosti konstrukce a n_{el} je počet prvků (v tomto případě $n_{el} = 4$).

Optimalizované proměnné jsou tedy složky deformace (15 proměnných) a výšky průřezu prutů jednotlivých prvků (4 proměnné), což je celkem 19 proměnných.

Mezní přípustné hodnoty výšek průřezu prutů zůstaly stejné jako v tabulce 5.12. Pro získání mezních hodnot deformace je použito výsledku řešení tradiční formulace této úlohy:

$$\mathbf{h}^{init} = (43.79, 35.93, 26.32, 14.20); \quad M^{init} = 30060 \quad (5.31)$$

a pro dané zatížení (viz obrázek 5.7) je s užitím inkrementální analýzy spočítána odpovídající deformace \mathbf{u}^{init} . Mezní přípustné hodnoty deformace \mathbf{u}_{min} a \mathbf{u}_{max} jsou dané výrazem

$$\mathbf{u}_{min} = (1 - EP)\mathbf{u}^{init}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{u}_{max} = (1 + EP)\mathbf{u}^{init}, \quad (5.33)$$

kde hodnota parametru EP je rovna 0.0001.

Jako optimalizační metoda je opět použit algoritmus GRADE s parametry $PR = 20$, $CL = 2.0$ a "radioaktivita" = 0.1. Výpočet byl spuštěn stokrát a pokaždé zastaven při dosažení hodnoty výrazu $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ menší než 10000. Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 5.14.

| | Minimum | Maximum | Průměr | Směrodatná odchylka |
|-------------------------------------|---------|---------|--------|---------------------|
| h_1 | 43.782 | 43.794 | 43.789 | 0.0026 |
| h_2 | 35.925 | 35.935 | 35.930 | 0.0021 |
| h_3 | 26.315 | 26.324 | 26.319 | 0.0019 |
| h_4 | 14.197 | 14.202 | 14.200 | 0.0010 |
| počet vyhodnocení funkce $J(\cdot)$ | 111340 | 968240 | 313006 | —— |

Tabulka 5.14: Výsledky simultánního řešení optimalizace návrhu.

Na tomto příkladu optimálního návrhu konstrukce je těžší porovnávat efektivitu tradiční či simultánní formulace a to hned z několika důvodů. Prvním z nich je již rozdílná formulace objektivní funkce $J(\cdot)$, jelikož pro různé formulace úlohy jsou rozdílným způsobem definované váhy mezi výrazem pro velikost konečné deformace a podmínkou definující hmotnost konzoly, což vede k rozdílným řešením úlohy. Dalším důvodem je rozdíl v množství vstupních informací, které ten který postup vyžaduje. Přesto při srovnání výsledků se zdá být simultánní formulace efektivnější než tradiční.

Kapitola 6

Závěr

V této diplomové práci je nejprve představen tradiční postup řešení problémů optimálního řízení, který je tvořen dvěma cykly na různých úrovních řešení. V prvním z nich je použito iteračního postupu inkrementální analýzy k výpočtu vektoru posunů a rotací na základě zvolených hodnot zatížení ze soustavy nelineárních statických podmínek. Tento problém nelineární mechaniky je již formulován tak, aby na optimalizační úrovni umožnil použití moderních numerických metod založených na genetických algoritmech. V optimalizačním cyklu pak vyhodnocení objektivní funkce pro každou konkrétní kombinaci proměnných představuje průběh jednoho cyklu inkrementální analýzy. Pro optimalizaci jsou použity nejprve deterministické metody (metoda sdružených gradientů pro řešení tradičně formulované úlohy, Newton-Raphsonova metoda pak pro řešení simultánně formulované úlohy). Dále pak i stochastické metody, založené na genetických algoritmech, konkrétně algoritmus SADE (viz (Hrstka and Kučerová, 2004)) a posléze jeho nově upravená verze nazvaná GRADE, která se liší využitím operátoru založeném na zjednodušeném výpočtu gradientu¹.

Jak je ukázáno v kapitole 4 na uvedené úloze optimálního řízení o dvou proměnných, jsou obě deterministické metody za určitých podmínek velice efektivní. Nevýhodou aplikace Newton-Raphsonovy metody při řešení simultánně formulované úlohy je podmínka kladená na objektivní funkci, která musí být dvakrát spojitě diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru. Další nevýhodou obou uvedených deterministických metod je nutnost vhodné volby počátečního řešení. Jak je ukázáno na numerickém příkladu, pro nevhodně zvolený počáteční vektor řešení

¹Všechny uvedené metody řešení jakož i řešené úlohy byly naprogramovány v jazyce C/C++.

metody buď nekonvergují vůbec nebo do lokálního extrému.

V kapitole 5.3.1 je ukázáno srovnání dvou uvedených genetických algoritmů na dvou příkladech optimálního řízení pro dvě, resp. pět proměnných. Z výsledků je patrné, že v obou případech je algoritmus GRADE rychlejší a tudíž výhodnější. Poznámky k obtížím, které vznikly při aplikaci těchto algoritmů, jsou ukázány v příloze A na úloze s konstrukcí ve tvaru písmene B. Na třetím příkladu optimalizace řízení je ukázána možnost využití algoritmu GRADE pro úlohu "nedostatečně definovanou" s nekonečným počtem "optimálních" řešení.

V další části diplomové práce je věnována pozornost takzvanému simultánnímu řešení problému optimalizace řízení. V tomto případě jsou složky zatížení a deformace uvažovány jako nezávislé proměnné. Statické podmínky rovnováhy a výraz minimalizované objektivní funkce jsou uvedeny do vzájemného vztahu pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Problém nelineární mechaniky a optimalizace je tak řešen současně na jedné úrovni, v jediném optimalizačním cyklu. Na příkladu v kapitole 5.3.2 je ukázáno, že taková formulace úlohy optimálního řízení může být efektivní za předpokladu, že se značnou přesností známe všechny výsledné složky deformace. Neboli, podaří-li se správně předpovědět hodnoty složek deformace s dostatečnou přesností, může být řešení takto simultánně formulované úlohy efektivnější ve srovnání s tradičním postupem. Tento názor dokládají výsledky v tabulce 6.1, kde jsou porovnány výsledky pro obě formulace optimálního řízení na úloze o dvou proměnných. Porovnání bylo provedeno jednak z hlediska výpočtové náročnosti obou způsobů a jednak z hlediska přesnosti nalezených hodnot složek zatížení ze souboru sta různých spuštění výpočtu. Srovnání výpočtové náročnosti se opírá o průměrný počet vyhodnocení objektivní funkce. Nicméně je nutné znovu připomenout, že jedno vyhodnocení pro tradičně formulovanou úlohu představuje iterační výpočet inkrementální analýzou, což v našem případě znamená stonásobný výpočet soustavy o 21 lineárních rovnicích. Naproti tomu jedno vyhodnocení v první sérii výpočtů simultánní formulace úlohy představuje jediné vyhodnocení výrazů ve vektoru \mathbf{r} . V druhé sérii je už ovšem během jednoho vyhodnocení řešena jedna soustava o 21 lineárních rovnicích pro získání hodnot Lagrangeových multiplikátorů. Proto byly všechny výpočty provedeny na stejném počítači, kde byla provedena i časová studie prováděných operací. V tabulce 6.1 je tedy uvedeno i porovnání časové náročnosti jednotlivých postupů řešení problému optimálního řízení.

Poslední etapa předkládané práce je zaměřena na formulování problému optimálního návrhu

| formulace | tradiční | simultánní - série 1 | simultánní - série 2 |
|---------------------------|----------|----------------------|----------------------|
| směrodatná odchylka pro F | 0.0474 | 0.0284 | 0.0135 |
| směrodatná odchylka pro M | 0.001 | 0.044 | 0.019 |
| počet vyhodnocení | 512.4 | 102203 | 37701 |
| jedno vyhodnocení [s] | 0.006946 | 0.00002037 | 0.00004935 |
| doba výpočtu [s] | 3.559 | 2.082 | 1.861 |

Tabulka 6.1: Srovnání výsledků získaných při řešení úlohy optimálního řízení o dvou proměnných formulované tradičním a simultánním způsobem.

konstrukce oběma výše popsanými způsoby. Na základě zkušeností z předchozích výpočtů byl pro případ optimálního návrhu zvolen jednoduchý příklad, na kterém je možné snadno ukázat principy řešení tohoto typu úloh. I zde výsledky ukázaly, že řešení simultánně formulované úlohy je výhodnější než řešení úlohy formulované tradičně. Srovnání výsledků obou postupů je uvedeno v tabulce 6.2.

| | tradiční formulace | simultánní formulace |
|-------------------------------|--------------------|----------------------|
| směrodatná odchylka pro h_1 | 0.0094 | 0.0026 |
| směrodatná odchylka pro h_2 | 0.0088 | 0.0021 |
| směrodatná odchylka pro h_3 | 0.0082 | 0.0019 |
| směrodatná odchylka pro h_4 | 0.0064 | 0.0010 |
| počet vyhodnocení | 3497 | 313006 |
| jedno vyhodnocení [s] | 0.0021 | 0.0000276 |
| doba výpočtu [s] | 7.344 | 8.640 |

Tabulka 6.2: Srovnání výsledků získaných při řešení úlohy optimálního návrhu konstrukce formulované tradičním a simultánním způsobem.

Jeden ze zásadních rozdílů mezi problémy optimálního návrhu a optimálního řízení je ve vstupních zadávaných veličinách. V případě optimálního návrhu může často nastat případ, kdy nebude zadána požadovaná deformace, která představuje současně i informaci o konečné deformaci. Pokud na konečnou deformaci nejsou kladeny požadavky, nastávají obtíže při formulování úlohy k simultánnímu řešení, kde přibližný odhad konečné deformace představuje

nezbytný vstupní parametr úlohy. V takovém případě je třeba využít jinou, výpočtově nenáročnou metodu, která je schopna poskytnout třeba jen velice přibližně odhad konečné deformace.

Motivací další práce by měla být snaha nalezení optimalizační metody, která při minimální výpočtové náročnosti dokáže poskytnout hrubý odhad řešení. Takovou metodu by poté bylo možné kombinovat se simultánně formulovaným optimalizačním problémem. Ten by již v zúženém prostoru přípustných řešení dokázal vyřešit přesněji genetický algoritmus GRADE. Příkladem takové výpočtově nenáročné metody by mohla být difuzní aproximace, která využívá při řešení tzv. plochu odezvy. Jeden příklad výsledků této metody je uveden v příloze B.

Závěry a výsledky této diplomové práce byly též publikovány v (Ibrahimbegović, Knopf-Lenoir, Kučerová, and Villon, 2003).

Literatura

- Drchal, J., Kučerová, A., Němeček, J., 2002. Optimizing synaptic weights of neural networks. In: Topping, B., Bittnar, Z. (Eds.), Proceedings of the Third International Conference on Engineering Computational Technology. Civil-Comp Press, Stirling, United Kingdom, paper 86.
- Goldberg, D., 1989. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Addison-Wesley.
- Holland, J. H., 1975. Adaptation in natural and artificial systems. University of Michigan, Ann Arbor, MI, Internal report.
- Hrstka, O., Kučerová, A., March 2004. Improvements of real coded genetic algorithms based on differential operators preventing the premature convergence. Advances in Engineering Software 35 (3-4), 237–246.
- Hrstka, O., Kučerová, A., Lepš, M., Zeman, J., August 2003. A competitive comparison of different types of evolutionary algorithms. Computers & Structures 81 (18–19), 1979–1990.
- Ibrahimbegović, A., Frey, F., 1993. Finite element analysis of linear and non-linear planar deformations of elastic initially curved beams. International Journal for Numerical Methods in Engineering 36, 3239–3258.
- Ibrahimbegovic, A., Frey, F., Fonder, G., Massonnet, C., 1991. A variational formulation of shallow shells. In: Onate, E. e. a. e. (Ed.), Finite elements in the 1990's. Springer, Berlin, pp. 68–79, a Book dedicated to O. C. Zienkeiwicz.

- Ibrahimbegović, A., Knopf-Lenoir, C., Kučerová, A., Villon, P., 2003. Optimal design and optimal control of elastic structures undergoing finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press.
- Kleiber, M., Antunez, H., Hein, T., Kowalczyk, P., 1997. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics; theory and finite element computations*. John Wiley & Sons.
- Kuráž, V., Kučerová, A., Kuráž, M., 2003. Využití genetických algoritmů pro aproximaci re-tenčních čar. In: Sáňka, M., Kulhavý, J. (Eds.), *Sborník konference Pedologické dny 2003*. Mendelova zemědělská universita v Brně, pp. 107–111.
- Kučerová, A., Hrstka, O., 2001. Homepage of SADE.
<http://klobouk.fsv.cvut.cz/~ondra/sade/sade.html>.
- Kučerová, A., Mühlbauer, M., Bittnar, Z., 2003. Parameter identification for rock long term behaviour simulation. In: *NAFEMS world congress 2003*. Orlando, Florida, U.S.A.
- Luenberger, D., 1984. *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley Publ.
- Michalewicz, Z., 1992. *Genetic Algorithms+Data Structures=Evolution Programs*. Springer-Verlag.
- Reissner, E., 1972. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *Journal Appl. Math. Phys.* 23, 795–804.
- Rousselet, B., 1992. A finite strain rod model and its design sensitivity. *Mechanics of Structures and Machines* 20, 415–432.
- Storn, R., 1996. On the usage of differential evolution for function optimization. In: *Biennial Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society*. pp. 519–523.
- Strang, G., 1986. *Introduction to applied mathematics*. Wellesley-Cambridge Press.
- Tortorelli, D., Michaleris, P., 1994. Design sensitivity analysis: overview and review. *Inverse Problems in Engineering* 1, 71–105.

Příloha A

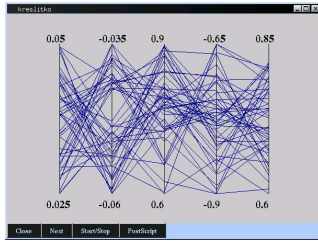
Optimální řízení konstrukce ve tvaru písmene B algoritmem SADE

Obrázek A.1 zobrazuje průběh konvergence algoritmu SADE při tradičním řešení úlohy s "písmenem B". Svislé čáry představují měřítko hodnot pro každou optimalizovanou proměnnou v pořadí: H , V , M_1 , M_2 a M_3 . Chromozomy jsou znázorněny lomenými čarami, spojující hodnoty každé proměnné vynesené v odpovídajícím měřítku. Přestože obrázky byly vyhotoveny během výpočtu, který konvergoval poměrně rychle, je možné postřehnout, že složky zatížení M_1 , M_2 a M_3 konvergují rychleji než složky H a V . Důvodem je pravděpodobně fakt, že hodnoty momentů M_1 , M_2 a M_3 mají mnohem větší vliv na hodnotu objektivní funkce $J(\cdot)$ než síly H a V , což je znatelné i z obrázků A.2 a A.3.

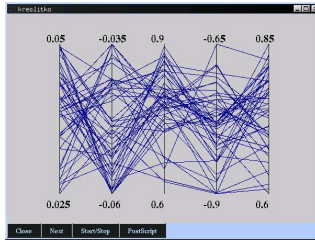
Značný rozdíl mezi vlivem jednotlivých optimalizovaných proměnných na objektivní funkci může znamenat významný problém pro algoritmus SADE. Hned od počátku začne algoritmus rychle konvergovat ke správným hodnotám momentů M_1 , M_2 a M_3 , ale současně není téměř vůbec ovlivňován hodnotami sil H a V . Přesto si však ani tyto složky chromozomů nezachovávají v populaci počáteční diverzitu, ale konvergují také, leč k téměř náhodným hodnotám. Ke konci výpočtu, kdy už jsou téměř nalezeny optimální hodnoty momentů, začíná růst význam sil, jenže v této době už je diverzita populace tak malá, že algoritmus se jen těžko pohybuje po definičním oboru a trvá velice dlouho, než dosáhne optimálních hodnot sil H a V .

Tento fenomén zůstává do jisté míry problémem i pro algoritmus GRADE. Přesto díky využití zjednodušeného gradientu je algoritmus schopen pohybovat se po definičním oboru funkce rychleji a správným směrem, jestliže je tato funkce hladká a má jediný extrém, což jsou podmínky, které studované úlohy splňují.

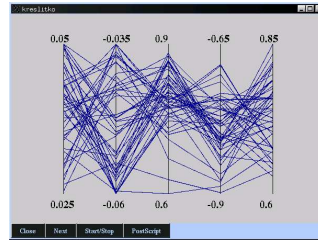
Pokud jde o simultánní formulaci problémů optimálního návrhu a řízení, je dobré si uvědomit, že popsaný fenomén je přímo ovlivněn nastavením vah, resp. parametrů α ve funkci $L(\cdot)$.



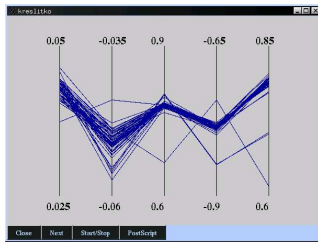
G2:-J=-0.0071823



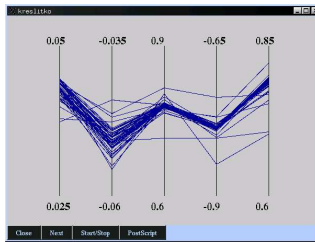
G3:-J=-0.0071823



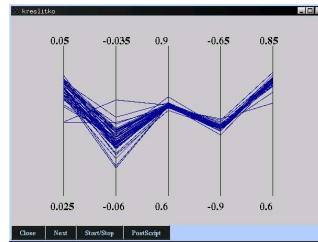
G4:-J=-0.0071823



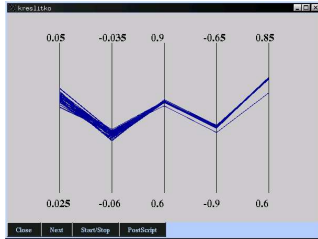
G26:-J=-0.000131106



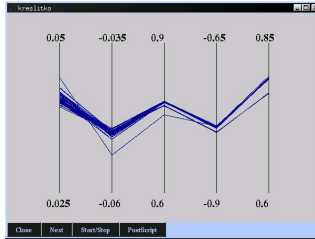
G27:-J=-0.000131106



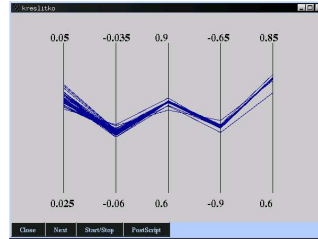
G28:-J=-0.000131106



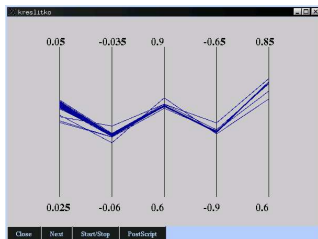
G41:-J=-1.3302e-05



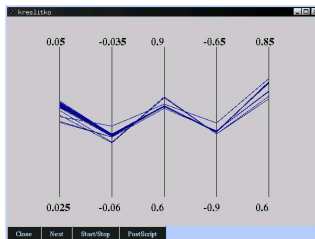
G42:-J=-1.1839e-05



G43:-J=-1.1839e-05



G67:-J=-1.8423e-06

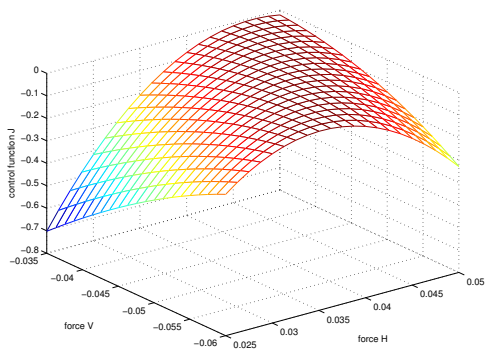


G68:-J=-1.3831e-06

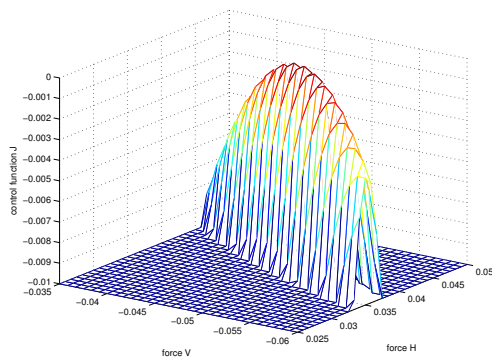


G69:-J=-9.9515e-07

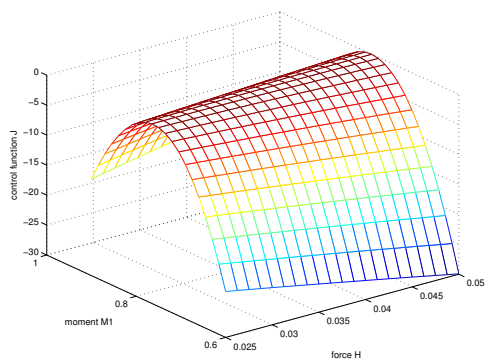
Obrázek A.1: Konvergence algoritmu SADE při tradičním řešení problému "písmene B".



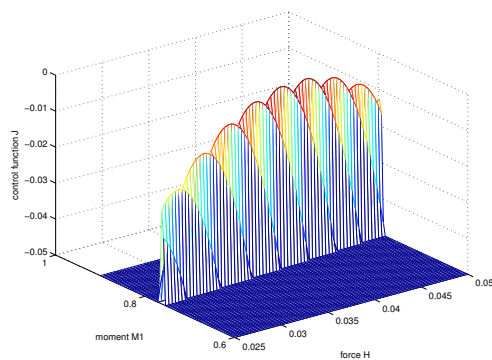
Řez $H - V$



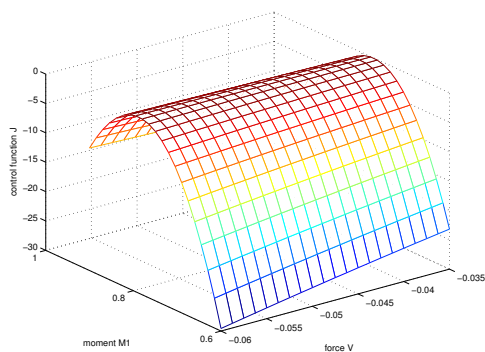
Detail řezu $H - V$ v blízkosti optima



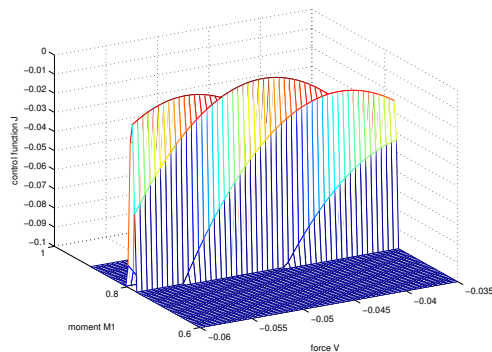
Řez $H - M_1$



Detail řezu $H - M_1$ v blízkosti optima

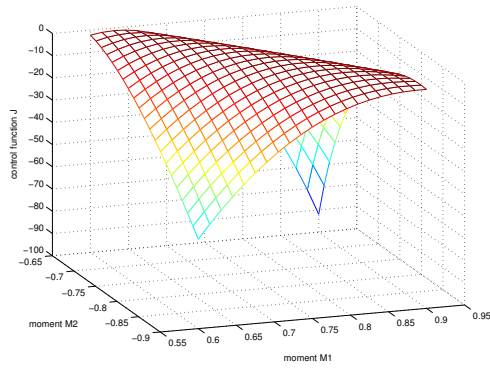


Řez $V - M_1$

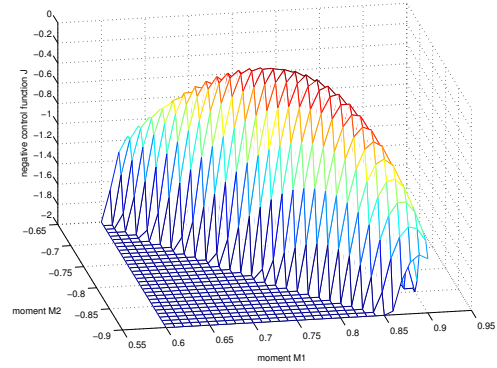


Detail řezu $V - M_1$ v blízkosti optima

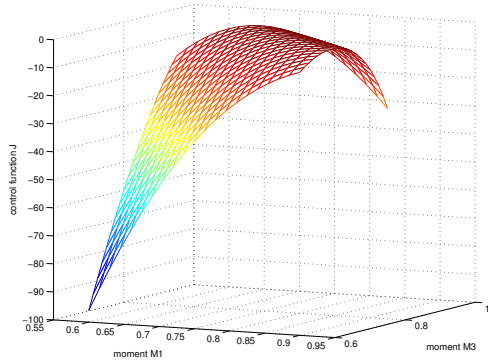
Obrázek A.2: Písmeno B - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$.



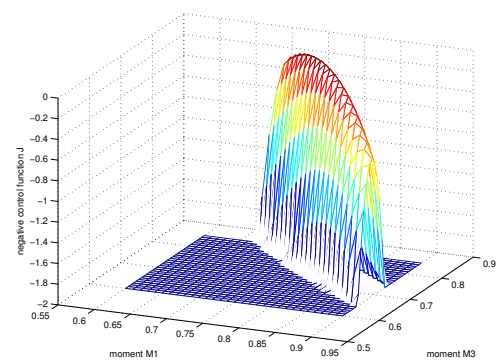
Řez $M_1 - M_2$



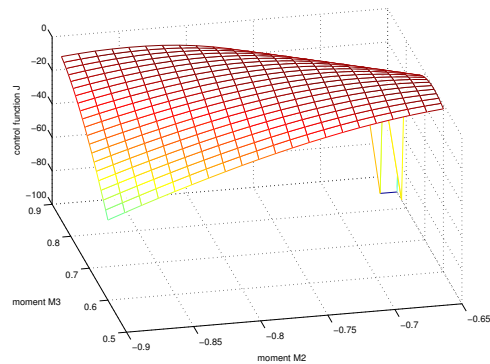
Detail řezu $M_1 - M_2$ v blízkosti optima



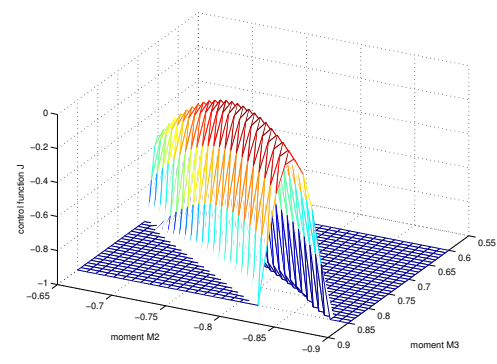
Řez $M_1 - M_3$



Detail řezu $M_1 - M_3$ v blízkosti optima



Řez $M_2 - M_3$



Detail řezu $M_2 - M_3$ v blízkosti optima

Obrázek A.3: Písmeno B - průběh záporně vzaté funkce řízení $-J(\cdot)$.

Příloha B

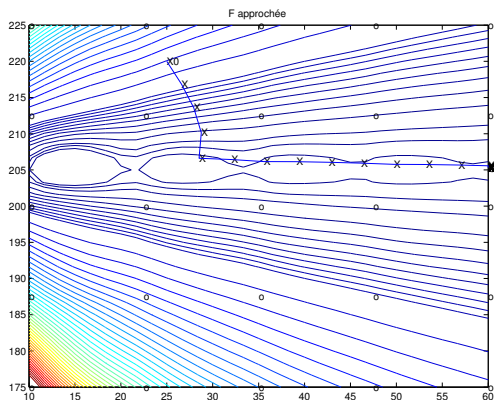
Optimální řízení konstrukce ve tvaru písmene T metodou difuzní aproximace

Metoda difuzní aproximace představuje alternativní metodu řešení optimalizačních problémů. Její výsledky je možné srovnat s výsledky získanými algoritmem GRADE. Jedná se o metodu na principu optimalizace plochy odezvy. Pro sestavení této plochy je třeba nejdříve vyčíslit objektivní funkci v bodech zvolené sítě. Plocha je pak získána interpolací mezi těmito body. Následující ukázka představuje tuto metodu při řešení úlohy s "písmenem T" popsané v kapitole 5.3.1.

Je nutné poznamenat, že výpočet objektivní funkce v bodech sítě i zde představuje iterační výpočet k vyřešení problému nelineární mechaniky, např. pomocí inkrementální analýzy. Naproti tomu následná optimalizace se odehrává už jen na ploše odezvy, kde jedno vyhodnocení objektivní funkce je velice rychlé a nenáročné.

Následující výpočty byly provedeny Catherine Knopf-Lenoir-Vayssade z Technologické Univerzity v Compiègne ve Francii. Při výpočtu difuzní aproximací byl zvolen startovací bod $x_0 = (25, 220)$.

Při pohledu na prezentované výsledky lze říct, že difuzní aproximace sama o sobě není dostatečnou metodou k vyřešení úlohy s "písmenem T". Ve čtvrtém výpočtu byla použita síť (20×20) , pro kterou bylo třeba 400 vyhodnocení skutečné objektivní funkce. Přesto nalezená hodnota síly $F = 47.444$ se od správného řešení $F = 40.000$ významně liší. Také tato metoda totiž naráží na problém popsaný v příloze A, který je pro ni mnohem fatálnější než pro algoritmus

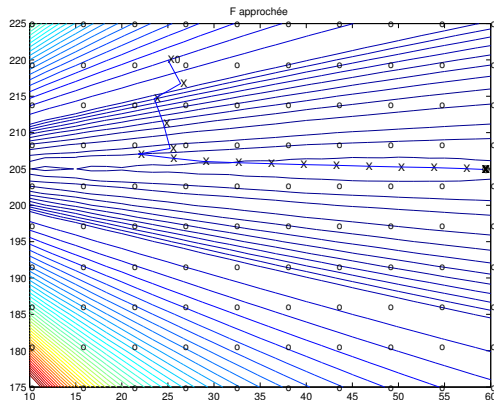


Sít' (5×5)

Výsledek : $F = 60.000$

$M = 205.26$

38 vyhodnocení metodou DA

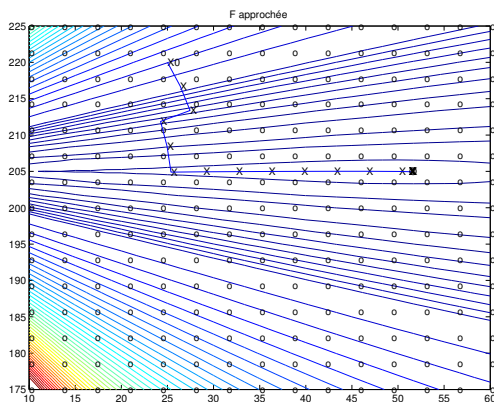


Sít' (10×10)

Výsledek : $F = 59.073$

$M = 204.91$

38 vyhodnocení metodou DA

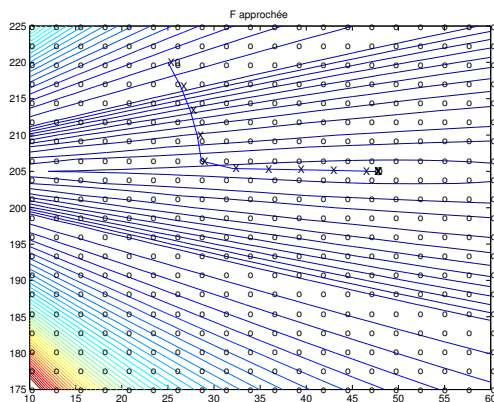


Sít' (15×15)

Výsledek : $F = 51.218$

$M = 204.95$

19 vyhodnocení metodou DA



Sít' (20×20)

Výsledek : $F = 47.444$

$M = 204.97$

15 vyhodnocení metodou DA

Obrázek B.1: Řešení "problému písmene T" difuzní aproximací

GRADE, jelikož jemný vliv síly F není vůbec na ploše odezvy zachycen. Proto je možné konstatovat, že při srovnání difuzní aproximace s algoritmem GRADE je tento algoritmus metodou efektivnější.

Přesto je nutné upozornit, že již na síti (5×5) dosáhla difuzní aproximace hodnoty momentu $M = 205.26$, která je velice blízko optimální hodnotě $M = 205.00$, přičemž k dosažení tohoto výsledku bylo zapotřebí pouhých 25 vyhodnocení objektivní funkce. To vede k možnosti, kombinovat tuto metodu se simultánním řešením úlohy algoritmem GRADE a tak získat nástroj mnohem efektivnější.