Vzpěr jednoduchého rámu, diferenciální operátory

Lenka Dohnalová

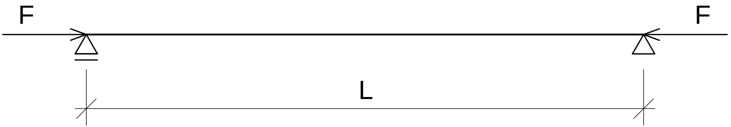
ČVUT, fakulta stavební, ZS 2015/2016
katedra stavební mechaniky a katedra matematiky,

Odborné vedení: doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.,
doc. RNDr. Jan Chleboun, CSc.

Zadání

Úkolem této práce bylo řešení vzpěru jednoduchého rámu a dále využití diferenciálních operátorů při řešení úloh stability centricky tlačeného nosníku o jednom a dvou polích.

Diferenciální rovnice tlačeného prutu



Obr.: Prostý, centricky tlačený nosník

Po zavedení

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}}, \qquad EI = konst.,$$

má diferenciální rovnice průhybu, platná pro každý centricky tlačený homogenní prut bez ohledu na způsob podepření, tvar

$$w^{(4)}(x) + k^2 w''(x) = 0.$$

Diferenciální rovnice tlačeného prutu

Pomocí substituce $p(x) = w''(x)$ převedeme na diferenciální rovnici 2. řádu

$$p''(x) + k^2 p(x) = 0,$$

s obecným řešením ve tvaru

$$p(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx).$$

Přehled získaných vztahů

Dvojím integrováním, resp. dvojím derivováním obecného řešení získáme tyto vztahy:

$$w = -\frac{1}{k^2} C_1 \cos(kx) - \frac{1}{k^2} C_2 \sin(kx) + C_3 x + C_4,$$

$$w' = \frac{1}{k} C_1 \sin(kx) - \frac{1}{k} C_2 \cos(kx) + C_3,$$

$$w'' = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

$$w''' = -kC_1 \sin(kx) + kC_2 \sin(kx),$$

$$w^{(4)} = -k^2 C_1 \cos(kx) - k^2 C_2 \sin(kx),$$

Přehled získaných vztahů

a pro substituovanou rovnici

$$p = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

$$p' = -k\, C_1 \sin(kx) + k\, C_2 \sin(kx),$$

$$p'' = -k^2 C_1 \cos(kx) - k^2 C_2 \sin(kx).$$

Okrajová úloha prostě podepřeného nosníku

Pro základní diferenciální rovnici 4. řádu:

$$w^{(4)}(x) + k^2 w''(x) = 0,$$

podmínky:

$$w(0) = 0, \qquad w(L) = 0,$$
$$w''(0) = 0, \qquad w''(L) = 0.$$

Pro substituovanou rovnici 2. řádu:

$$p''(x) + k^2 p(x) = 0,$$

podmínky:

$$p(0) = 0, \qquad p(L) = 0.$$

Operátorový tvar

Vyjdeme z diferenciální rovnice 2. řádu, navíc zavedeme $\lambda = k^2$,

$$p''(x) + \lambda p(x) = 0.$$

Využijeme lineární diferenciální operátor daný předpisem

$$\mathbf{A} = -D^2,$$

s definičním oborem

$$D_A = \{p \in C^2([0, L]) : p(0) = p(L) = 0\}.$$

Příslušná operátorová rovnice

$$\mathbf{A}p = \lambda p.$$

Specifikace problému

Řešíme otázku, pro která λ má úloha doplněná o okrajové podmínky nenulové řešení na intervalu $[0, L]$. Jde tedy o hledání vlastních čísel λ a příslušných vlastních funkcí.

Nejprve dokážeme, že zvolený operátor je symetrický a pozitivní a následně využijeme větu o vlastních číslech (Věta 5.7, (iii), O. Zindulka - Matematika 3), která říká, že pokud je symetrický operátor **A** pozitivní, pak všechna vlastní čísla jsou kladná a nula tedy není vlastním číslem.

Důkaz symetrie a pozitivnosti

Oba důkazy jsou pro tento případ snadné, jsou založeny na integraci per partes a následném využití okrajových podmínek.

Symetrie: $p, q \in D_A$

$$(\mathbf{A}p, q) = (-p'', q) = \int_0^L -p''q \,\mathrm{d}x = [-p'q]_0^L + \int_0^L p'q' \,\mathrm{d}x = \int_0^L p'q' \,\mathrm{d}x = (p', q'),$$

$$(\mathbf{A}q, p) = (-q'', p) = \int_0^L -q''p \,\mathrm{d}x = [-q'p]_0^L + \int_0^L q'p' \,\mathrm{d}x = \int_0^L p'q' \,\mathrm{d}x = (p', q'),$$

Pozitivnost: $p \in D_A$

$$(\mathbf{A}p, p) = (p', p') = \|p'\|^2 > 0.$$

(Rovnost $\|p'\|^2 = 0$ nastává pouze pro $p \equiv 0$ na celém intervalu $[0, L]$.)

Podmínka netriviálního řešení

Soustava rovnic pro neznámé C_1 a C_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(kL) & \sin(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

má netriviální řešení dané podmínkou

$$\sin(kL) = 0,$$

odkud

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vlastní čísla a vlastní funkce

Vlastní čísla úlohy jsou dána vztahem

$$\lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

přičemž každému vlastnímu číslu λ_n přísluší vlastní funkce

$$p_n = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Kritická síla

Z nejmenšího vlastního čísla a vztahu

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

vyjádříme tzv. kritickou sílu

$$F_{\text{cr}} = \frac{EI\pi^2}{L^2}.$$

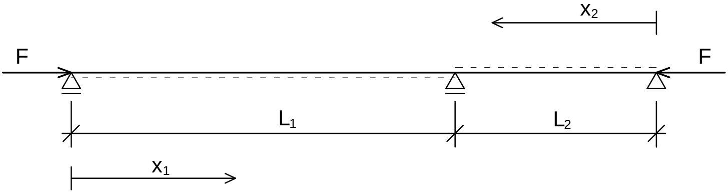
Netriviální řešení průhybu při ztrátě stability

Pro nalezení řešení původní diferenciální rovnice průhybu w je nutno vztah pro vlastní funkce p_n dvakrát integrovat a využitím okrajových podmínek $w(0) = 0$ a $w(L) = 0$ určit nově vzniklé integrační konstanty.

Netriviální řešení průhybu bude mít tvar

$$w_\mathrm{n} = -\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Volba souřadného systému, podmínky



Obr.: Tlačený nosník o dvou polích

$$w_1(0) = 0, \qquad w_1(L_1) = 0, \qquad w_2(0) = 0,$$
$$w_1''(0) = 0, \qquad w_2(L_2) = 0, \qquad w_2''(0) = 0.$$

$$w_1'(L_1) = w_2'(L_2),$$
$$w_1''(L_1) = -w_2''(L_2),$$

Levá část

Integrační konstanty C_1 - C_4,
$C_1 = 0, \ C_4 = 0.$

$$w_1(x_1) = -\frac{1}{k^2} C_2 \sin(kx_1) + C_3 x,$$

$$w_1'(x_1) = -\frac{1}{k} C_2 \cos(kx_1) + C_3,$$

$$w_1''(x_1) = C_2 \sin(kx_1).$$

Pravá část

Integrační konstanty C_5 - C_8,
$C_5 = 0, \ C_8 = 0.$

$$w_2(x_2) = -\frac{1}{k^2} C_6 \sin(kx_2) + C_7 x,$$

$$w_2'(x_2) = -\frac{1}{k} C_6 \cos(kx_2) + C_7,$$

$$w_2''(x_2) = C_6 \sin(kx_2).$$

Maticový zápis soustavy rovnic

Využitím podmínek platných v místě vnitřní podpory dostaneme soustavu čtyř rovnic pro neznámé C_2, C_3, C_6 a C_7

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2}\sin(kL_1) & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k^2}\sin(kL_2) & L_2 \\ -\frac{\cos(kL_1)}{k}-\frac{\sin(kL_1)}{k^2L_1} & 0 & -\frac{\cos(kL_2)}{k}+\frac{\sin(kL_2)}{k^2L_2} & 0 \\ \sin(kL_1) & 0 & \sin(kL_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_6 \\ C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

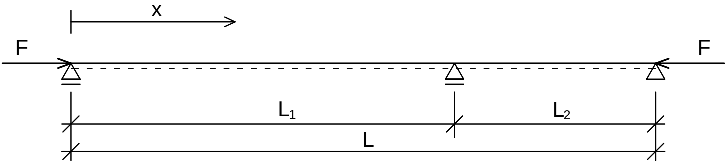
Podmínka netriviálního řešení

Pokud položíme determinant matice roven nule, dostaneme po úpravě vztah

$$kL_1 L_2 \sin(k(L_1+L_2)) - (L_1+L_2)\sin(kL_1)\sin(kL_2) = 0,$$

jenž určuje pro jaká kladná k existuje netriviální řešení úlohy tlačeného nosníku o dvou polích.

Operátorový tvar úlohy



Obr.: Nová volba souřadného systému

Opět vyjdeme ze substituované rovnice

$$p''(x) + \lambda p(x) = 0, \qquad \lambda = k^2.$$

Operátorový tvar úlohy

Zvolme operátor $\mathbf{A} = -D^2$.
Potom hledáme řešení úlohy s operátorovým zápisem

$$\mathbf{A}p = \lambda p, \qquad p \in D_A,$$

definiční obor operátoru definujeme jako podprostor funkcí, které získáme dvojím derivováním funkcí z prostoru

$$M = \Big\{ w \in C^2([0,L]) : w|_{[0,L_1]} \in C^4([0,L_1]) \ \wedge \ w|_{[L_1,L]} \in C^4([L_1,L]) \\ \wedge \ w(0) = w(L_1) = w(L) = 0 \ \wedge \ w''(0) = w''(L) = 0 \Big\},$$

tedy

$$D_A = \Big\{ p \in C([0,L]) : \exists w \in M, p(x) = w''(x) \ \forall x \in [0,L] \Big\}.$$

Důkaz symetrie operátoru

$$(\mathbf{A}p, q) = (-p'', q) = \int_0^{L_1} -p'' q \, \mathrm{d}x + \int_{L_1}^{L} -p'' q \, \mathrm{d}x = [-p' q]_0^{L_1} + \int_0^{L_1} p' q' \mathrm{d}x$$

$$-[p' q]_{L_1}^{L} + \int_{L_1}^{L} p' q' \mathrm{d}x = -p'(L_1) \cdot q(L_1) + \int_0^{L_1} p' q' \mathrm{d}x + p'(L_1) \cdot q(L_1) + \int_{L_1}^{L} p' q' \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{L_1} p' q' \, \mathrm{d}x \; + \int_{L_1}^{L} p' q' \, \mathrm{d}x$$

$$(\mathbf{A}q, p) = (-q'', p) = \int_0^{L_1} -p \, q'' \mathrm{d}x + \int_{L_1}^{L} -p \, q'' \mathrm{d}x = [-pq']_0^{L_1} + \int_0^{L_1} p' q' \mathrm{d}x$$

$$-[pq']_{L_1}^{L} + \int_{L_1}^{L} p' q' \mathrm{d}x = -p(L_1) \cdot q'(L_1) + \int_0^{L_1} p' q' \mathrm{d}x + p(L_1) \cdot q'(L_1) + \int_{L_1}^{L} p' q' \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{L_1} p' q' \, \mathrm{d}x \; + \int_{L_1}^{L} p' q' \, \mathrm{d}x$$

Důkaz pozitivnosti operátoru

Pozitivnost dokážeme obdobným způsobem

$$(\mathbf{A}p, p) = (-p'', p) = \int_0^{L_1} (p')^2 \, \mathrm{d}x \; + \int_{L_1}^{L} (p')^2 \, \mathrm{d}x \; > 0, \quad p \in D_A.$$

Ostrá nerovnost plyne z toho, že nulové hodnoty integrál nabývá pouze pro případ $p \equiv 0$. Pozitivnost operátoru je ale definována pouze pro netriviální funkce a pro ty integrál nulové hodnoty nenabývá.

Postup řešení úlohy $\mathbf{A}p = \lambda p, \ p \in D_A$

Tím jsou splněny potřebné předpoklady pro platnost věty o vlastních číslech operátoru.
Po technicky náročném řešení této úlohy nakonec dostaneme podmínku

$$kL_1 L_2 \sin(k(L_1 + L_2)) - (L_1 + L_2) \sin(kL_1) \sin(kL_2) = 0,$$

jejíž získání snazším způsobem, díky otočení souřadného systému pro pravou část nosníku, jsme již dříve ukázali.

Řešení této rovnosti nalezneme numerickou iterační metedou.

Řešení numerickou iterační metodou

Pro účely numerických výpočtů zvolíme jednotkovou délku celého nosníku a délky jednotlivých částí vyjádříme

$$L_1 = \alpha L,$$

$$L_2 = (1-\alpha)L, \qquad \alpha \in [0,1].$$

Pro konkrétní hodnotu α pomocí numerického výpočtu v Matlabu zjistíme hodnoty k, které splňují rovnost

$$kL_1 L_2 \sin(k(L_1+L_2)) - (L_1+L_2)\sin(kL_1)\sin(kL_2) = 0$$

a vždy pro první (nejmenší) hodnotu k následně vyjádříme velikost kritické síly.

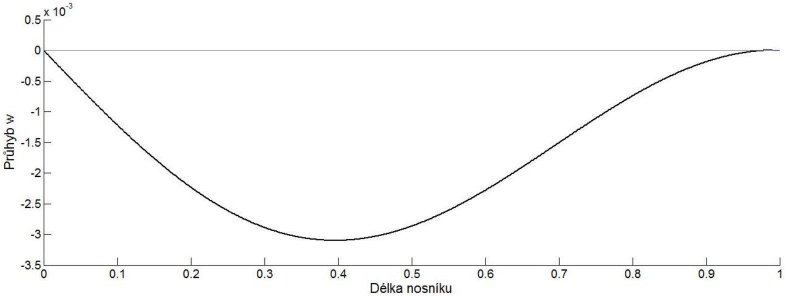
Limitní přiblížení podpor na okraji nosníku

Zajímavým případem je aproximace limitního přiblížení dvou kloubových podpor. Pro výpočet zvolme například $\alpha = 0{,}99$, potom nejmenší hodnota k, pro níž existuje netriviální řešení, je $k_1 = 4{,}5236$.

Pro k_1 vyjádříme hodnotu kritické síly

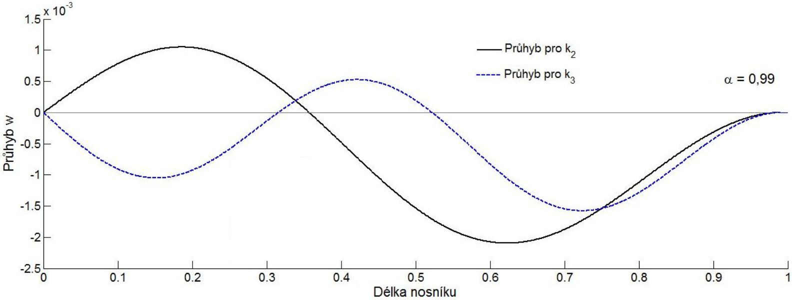
$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{EI\,4{,}5236^2\,\pi^2}{L^2} = \frac{EI\,1{,}4399^2\,\pi^2}{L^2} \doteq \frac{EI\,\pi^2}{(0{,}7\,L)^2}.$$

Limitní přiblížení podpor: $\alpha = 0{,}99$



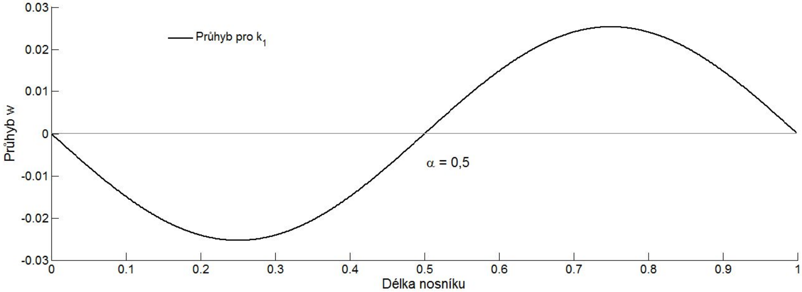
Obr.: Tvar vybočení při dosažení kritické síly

Limitní přiblížení podpor: $\alpha = 0{,}99$



Obr.: Tvar průhybu pro druhé a třetí vlastní číslo

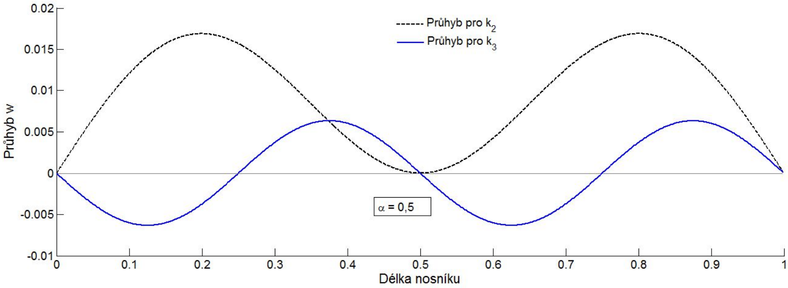
Umístění vnitřní podpory do středu nosníku



Obr.: První tvar vybočení nosníku s vnitřní středovou podporou

Srovnání s prostým nosníkem délky L.
Srovnání s F_{cr} prostého nosníku délky $0{,}5\,L$.

Umístění vnitřní podpory do středu nosníku



Obr.: Tvary vybočení tlačeného nosníku s vnitřní středovou podporou

Srovnání s prostým nosníkem délky *L*.

Vliv polohy vnitřní podpory na vzpěrnou únosnost

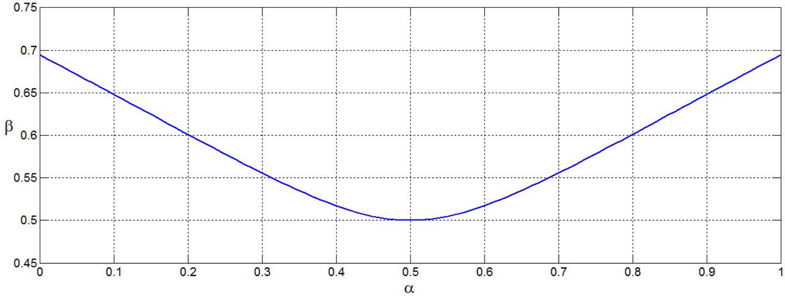
Ukažme, jak poloha vnitřní podpory změní vzpěrnou délku $L_{cr} = \beta L$, která určuje délku náhradního, kloubově uloženého nosníku (shodného průřezu) o jednom poli, který má stejnou hodnotu kritické síly jako posuzovaný nosník.

$$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L_{cr}^2} = \frac{EI\pi^2}{(\beta L)^2}$$

Součinitel vzpěrné délky β vyjadřuje poměr délek

$$\beta = \frac{L_{cr}}{L}.$$

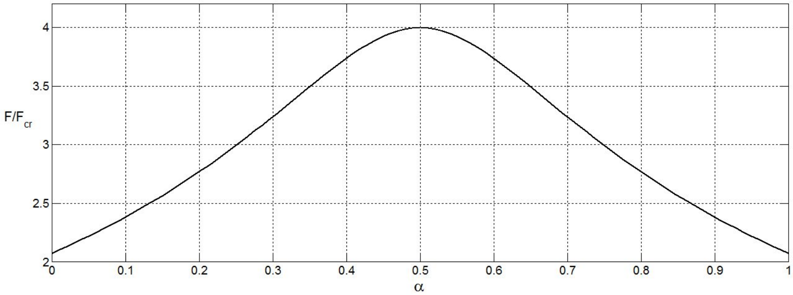
Součinitel vzpěrné délky β v závislosti na volbě α



Obr.: Závislost součinitele β na hodnotě α

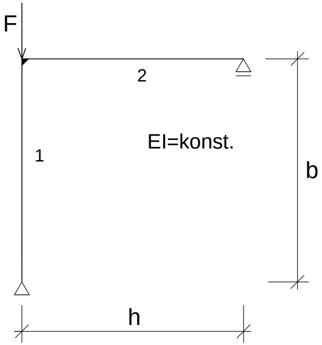
Vliv vnitřní kloubové podpory na zvýšení hodnoty F_{cr}

Následující graf ukazuje hodnotu poměru kritických sil nosníku o jednom poli délky L a nosníku o dvou polích v závislosti na umístění vnitřní kloubové podpory, tedy na volbě α.



Obr.: Graf závislosti hodnoty $\frac{1}{\beta^2}$ na hodnotě α

Základní předpoklady



Obr.: Jednoduchý rám

- shodný průřez (kruhový) na celé konstrukci rámu
- shodná konstantní hodnota *EI* na celém rámu
- vybočení uvažujeme pouze v rovině rámu
- tlaková síla *F* působí centricky

Rovnosti platné pro svislý prut

$$w_1(x) = -\frac{1}{k^2} C_1 \cos(kx) - \frac{1}{k^2} C_2 \sin(kx) + C_3 x + C_4,$$

$$w_1'(x) = \frac{1}{k} C_1 \sin(kx) - \frac{1}{k} C_2 \cos(kx) + C_3,$$

$$w_1''(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

$$w_1'''(x) = -kC_1 \sin(kx) + kC_2 \cos(kx).$$

Rovnosti platné pro vodorovný prut

$$w_2(x) = C_5 \cdot x^3 + C_6 \cdot 3x^2 + C_7 \cdot 6x + C_8 \cdot 6,$$

$$w_2'(x) = C_5 \cdot 3x^2 + C_6 \cdot 6x + C_7 \cdot 6,$$

$$w_2''(x) = C_5 \cdot 6x + C_6 \cdot 6,$$

$$w_2'''(x) = C_5 \cdot 6.$$

Okrajové podmínky a podmínky spojitosti

$$
\begin{aligned}
w_1(0) = 0 \Rightarrow \quad & -C_1 \frac{1}{k^2} + C_4 = 0 && (1) \\
w_1''(0) = 0 \Rightarrow \quad & C_1 = 0 && (2) \\
w_2(b) = 0 \Rightarrow \quad & C_5 \cdot b^3 + C_6 \cdot 3b^2 + C_7 \cdot 6b + C_8 \cdot 6 = 0 && (3) \\
w_2''(b) = 0 \Rightarrow \quad & C_5 \cdot 6b + C_6 \cdot 6 = 0 && (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2(0) = 0 \Rightarrow \quad & C_8 \cdot 6 = 0 && (5) \\
w_1'''(h) + k^2 w_1'(h) = 0 \Rightarrow \quad & -C_3 k^2 = 0 && (6) \\
w_1'(h) - w_2'(0) = 0 \Rightarrow \quad & C_1 \frac{1}{k} \sin kh - C_2 \frac{1}{k} \cos kh + C_3 - C_7 \cdot 6 = 0 && (7) \\
w_1''(h) - w_2''(0) = 0 \Rightarrow \quad & C_1 \cos kh + C_2 \sin kh - C_6 \cdot 6 = 0 && (8)
\end{aligned}
$$

Postup řešení

Soustava uvedených rovnic má netriviální řešení právě tehdy, když je matice M soustavy singulární, tedy pokud je determinant matice M roven nule.
Pomocí Matlabu a funkce, která počítá hodnotu determinantu matice v závislosti na proměnné k najdeme první, tedy nejmenší hodnotu k, pro kterou je determinant matice roven nule a následně dopočteme hodnotu koeficientu β, který figuruje ve vztahu

$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{EI\pi^2}{(\beta h)^2}.$$

Postup řešení

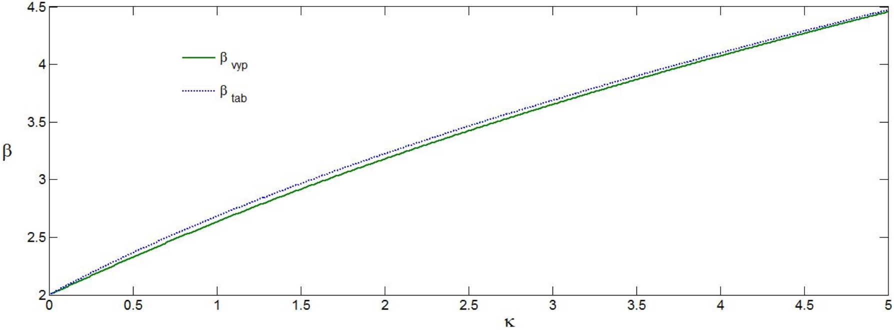
Hodnotu koeficientu β získanou výpočtem následně porovnáme s tabulkovou hodnotou, která je pro tento typ rámu dána vztahem

$$\beta_{\text{tab}} = \sqrt{1 + 0{,}8\,\kappa},$$

kde κ je (při shodném momentu setrvačnosti na celém rámu) poměr délky rámu k jeho výšce, tedy

$$\kappa = \frac{b}{h}.$$

Porovnání vypočtené a tabulkové hodnoty β



Obr.: Srovnání vypočtené a tabulkové hodnoty koeficientu β

Děkuji za pozornost.