

Dolní odhad síly pro ztrátu stability obecného prutu

Autor: Evžen Korec - 2.ročník SI

České vysoké učení technické v Praze

9. února 2016

Vedoucí seminární práce:

doc. RNDr. Ivana Pultarová, Ph.D. prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Osnova

- 1 Mechanická formulace problému
- 2 Matematické řešení problému

Cíl práce

Cíl práce

Nalézt velikost síly, která způsobí ztrátu stability neprizmatického prutu

Předpoklady řešení úlohy

Předpoklady o zkoumaném prutu

- Prut je staticky určitě podepřený (jako prostý nosník)
- Střednice prutu je úsečka
- Prut je vyroben z dokonale homogenního materiálu
- Při namáhání ohybem a tahem (tlakem) se prut chová lineárně pružně

Předpoklady o zatížení působícím na prut

- Na prut působí na jednom z jeho konců zatížení rovnoběžné se střednicí, jehož výslednice prochází střednicí prutu
- Ostatní zatížení působící na prut jsou v porovnání s tímto zatížením zanedbatelná.
- Neuvažujeme i gravitační zatížení plynoucí z hmotnosti prutu

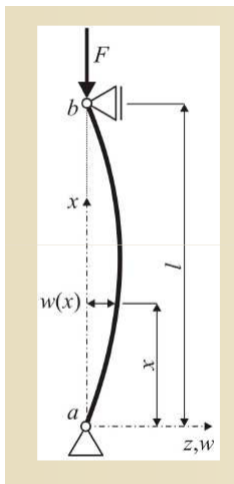
Předpoklady řešení úlohy

Řídíme se předpoklady Navier-Bernoulliovy hypotézy

Navier-Bernoulliova hypotéza

- Po deformaci zůstává libovolný příčný řez (kolmý na přímou střednici) rovinný a kolmý na deformovanou střednici Prut je staticky určitě podepřený
- Deformace jsou řádově menší než délka prutu

Sestavení fyzikálního modelu problému



- Sestavíme jednorozměrný model problému
- Prut budeme modelovat pomocí jeho střednice (spojnice těžišť jednotlivých průřezů)
- Zatížení budeme modelovat pomocí výslednice (bodové síly), která má působiště v hraničním bodě střednice
- Podepření prutu modelujeme jako vazby (prostý nosník)
- Budeme předpokládat, že k působení síly (a tedy i deformaci) může dojít pouze ve směru osy z , jejíž polohu si zvolíme

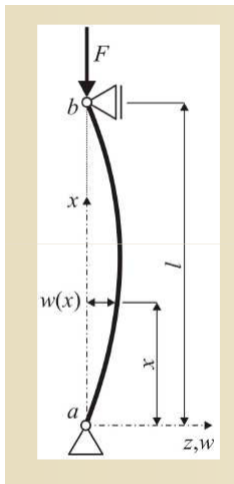
Velikost síly F vedoucí ke kolapsu prutu v našem jednorozměrném modelu

- Na prut nemůže působit neomezeně velká síla F , aniž by nedošlo k jeho kolapsu a ztrátě statické funkce
- Existuje tedy jistá kritická síla F_k , při které dojde ke kolapsu prutu

Kritické síly vedoucí ke kolapsu prutu

- Síla, při které dojde ke ztrátě pevnosti (bereme v potaz pouze namáhání tlakem)
- Síla při které dojde ke ztrátě stability (bereme v potaz pouze namáhání ohybem)

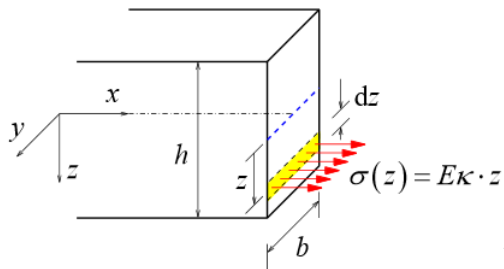
Ztráta stability



- Při působení byť minimálního zatížení ve směru osy z dojde k (být minimální) deformaci ve směru osy z
- Přímka proložená vektorem síly F tedy neprochází každým bodem střednice - dochází k namáhání ohybem
- Budeme zkoumat moment na deformované konstrukci - teorie II. řádu
- Na deformované konstrukci vyjádříme moment jako funkci celkového průhybu $w(x)$

$$M_y(x) = F_k w(x),$$

Ztráta stability



$$M_y(x) = EI_y(x)\kappa_y(x),$$

$$\kappa_y(x) = -w''(x),$$

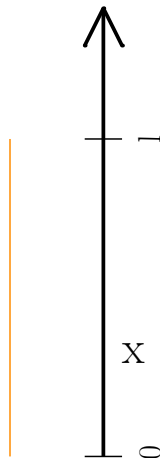
$$M_y(x) = F_k w(x),$$

$$F_k w(x) = -EI_y(x)w''(x).$$

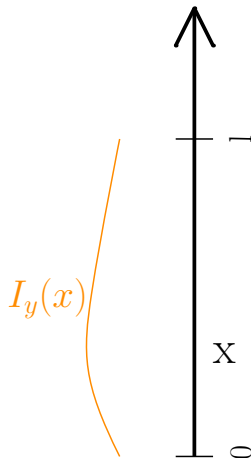
Klasický Eulerův model - sloup je prizmatický



$$I_y(x)$$



Náš model - sloup není prizmatický (má proměnný průřez)



Interpretace F_k pro reálný nosník

- Náš model popisuje F_k pro působení síly pouze v jedné vybrané rovině
- Pokud je prut rotační těleso - stejné F_k pro libovolný výběr roviny působení síly
- Pokud je prut nerotační těleso - různé F_k pro libovolný výběr roviny působení síly

Rovnice popisující fyzikální model

- Získali jsme rovnici

$$-EI_y(x)w''(x) - F_k w(x) = 0,$$

$$D = \{w; w \in C^2\langle 0, l \rangle, w(0) = w(l) = 0\},$$

Kdy dojde ke ztrátě stability prutu?

Pokud má rovnice pro dané F_k nekonečně mnoho řešení

Rovnice popisující fyzikální model

- Z matematického hlediska se jedná o ODR 2.řádu s nulovou pravou stranou
- Pokud hledáme taková F_k , aby úloha měla nekonečně mnoho řešení, řešíme úlohu vlastních čísel - F_k označme jako λ
- Můžeme ekvivalentně zapsat

$$-w''(x) - \frac{\lambda}{EI_y(x)} w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0,$$

$$Aw = -w''(x), \quad Bw = \frac{1}{EI_y(x)} w(x),$$

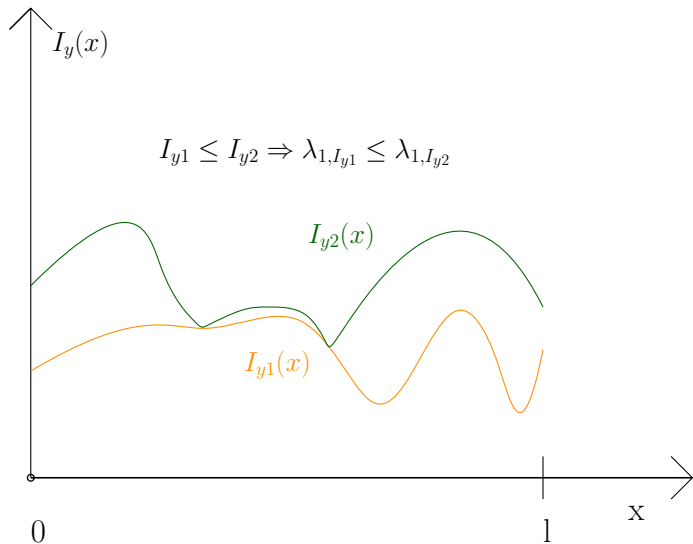
$$Aw - \lambda Bw = 0, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Existence a vlastnosti λ

Protože A a B jsou pozitivně definitní operátory, platí, že:

- Pokud je λ vlastním číslem úlohy, pak má úloha nekonečně mnoho řešení $w(x)$, takzvaných vlastních funkcí
- Existuje spočetně mnoho, a to kladných reálných vlastních čísel λ , která tvoří rostoucí posloupnost. Platí tedy, že první vlastní číslo je nejmenší ze všech vlastních čísel úlohy.

Existence a vlastnosti λ



Existence a vlastnosti λ

- Pokud je λ vlastním číslem úlohy, pak má úloha nekonečně mnoho řešení $w(x)$, takzvaných vlastních funkcí
- Existuje spočetně mnoho, a to kladných reálných vlastních čísel λ , která tvoří rostoucí posloupnost. Platí tedy, že první vlastní číslo je nejmenší ze všech vlastních čísel úlohy.
- Pokud bychom řešili dvě úlohy, ve kterých bychom volili stejnou hodnotu E , tedy $E_1 = E_2$ a funkce I_{y1} a I_{y2} obecně různé, ale takové, aby $I_{y1} \leq I_{y2}$, pak pro nejmenší vlastní čísla úlohy platí, že $\lambda_{1,I_{y1}} \leq \lambda_{1,I_{y2}}$.

Poznámka - Hledáme pouze λ_1 , další vlastní čísla pro nás nemají přímý fyzikální význam!

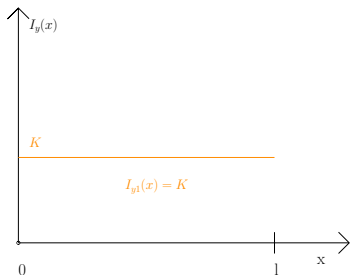
Analytické řešení úlohy

λ_1 umíme najít analyticky, pokud

- I_y je konstantní funkce

$$-w''(x) - \lambda_{EI} w(x) = 0, \quad \lambda_{EI} = \frac{1}{EI_y} \lambda, \quad w(0) = w(l) = 0$$

$$\lambda_n = EI_y \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots, .$$

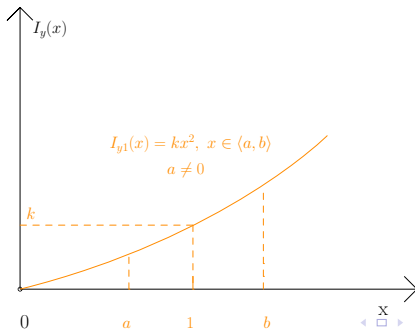


Analytické řešení úlohy

- $I_y = kx^2, k \in \mathbb{R} \setminus 0,$

$$-w''(x) - \frac{\lambda_{Ek}}{x^2} w(x) = 0, \quad \lambda_{Ek} = \frac{1}{Ek} \lambda, \quad w(a) = w(b) = 0$$

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2 Ek}{\left(\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)\right)} - \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \dots,$$



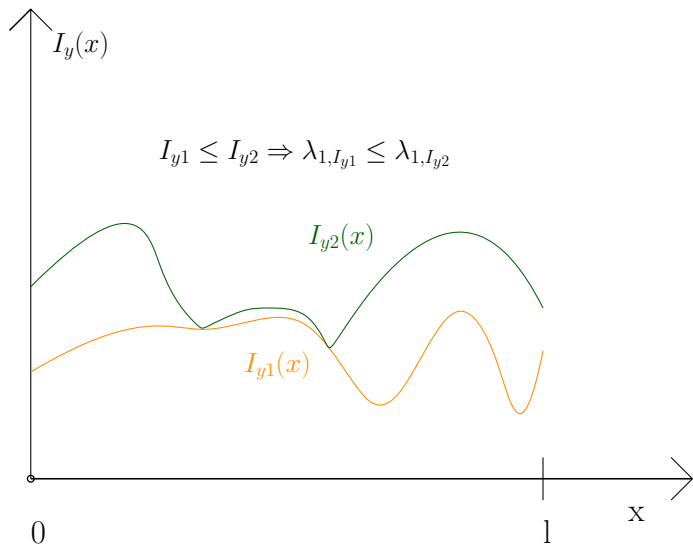
Numerické řešení úlohy - hledání zaručeného dolního odhadu

- Pro jiné tvary I_y neumíme vlastní čísla nalézt analytickým způsobem
- Snažíme se tedy najít dolní odhad λ_1

Možný postup hledání dolního odhadu λ_1

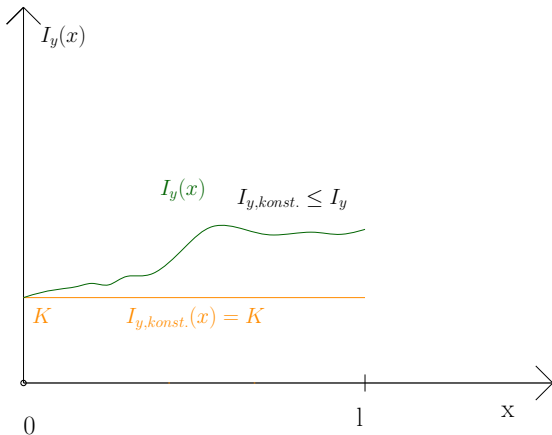
- Předpokládejme, že řešíme úlohu s I_{y2} , pro kterou neumíme najít řešení analytickým způsobem
- Předpokládejme, že existuje I_{y1} , pro které platí $I_{y1} \leq I_{y2}$, přičemž nějakým způsobem umíme najít vlastní čísla (nebo opět jejich dolní odhady) úlohy s I_{y1} (I_{y1} umíme vyřešit)
- Vlastní čísla úlohy s I_{y1} jsou zaručené dolní odhady vlastních čísel s I_{y2} . Tyto zaručené dolní odhady označme λ_L

Numerické řešení úlohy - hledání zaručeného dolního odhadu



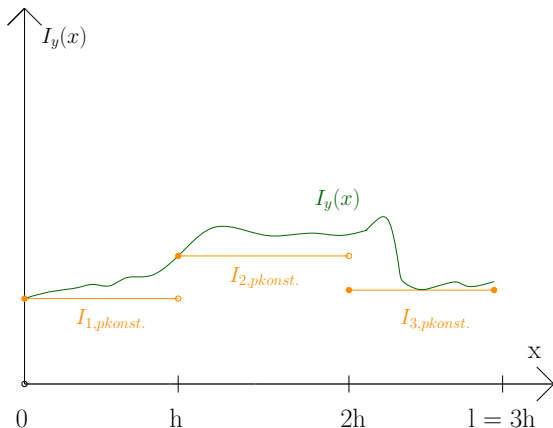
Metoda konstantní aproximace

- $I_y(x)$ nahradíme $I_{y,konst.}(x) = K$, tak že $I_{y,konst.} \leq I_y$



Metoda po částech konstantní aproximace

- $I_y(x)$ nahradíme $I_{y,pkonst.}(x)$, tak že $I_{y,pkonst.} \leq I_y$



Metoda po částech konstantní aproximace

- Víme, že pro úlohu s po částech konstantní funkcí $I_y(x)$ existuje nekonečně mnoho vlastních čísel této úlohy
- Zabýváme se vlastními funkcemi této úlohy
- Na celém $\langle 0, l \rangle$ ale tato vlastní čísla neumíme najít
- Rozdělme ale $\langle 0, l \rangle$ na otevřené intervaly $(0, h)$, $(h, 2h) \dots ((K-1)h, Kh)$, $n = 1, 2 \dots K$, $K \in \mathbb{N}$

Metoda po částech konstantní aproximace

- Na každém z těchto intervalů umíme ale najít fundamentální systém úlohy - jeho lineární kombinace musí nutně obsahovat části vlastních funkcí (pro dané vlastní číslo) na intervalu $((n-1)h, nh)$

$$w_n = C_{1n} \cos \left(x \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \right) + C_{2n} \sin \left(x \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \right)$$

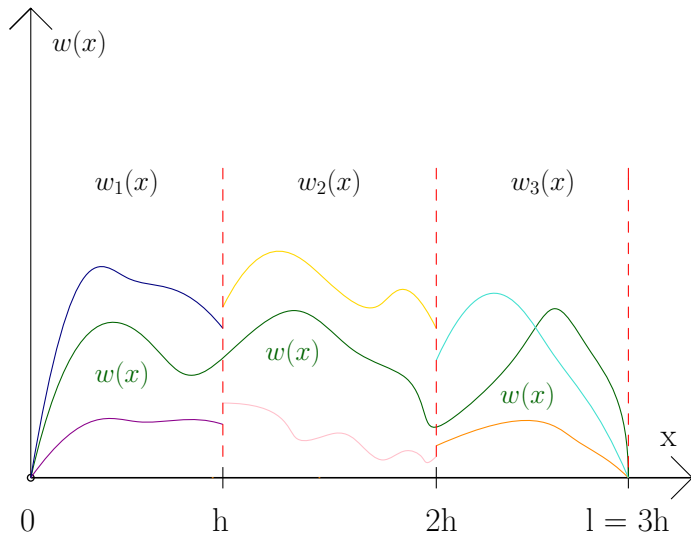
Metoda po částech konstantní aproximace

- Pro vlastní funkce úlohy musí platit spojitost w

$$w_1(0) = 0, w_1(h) = w_2(h), w_2(2h) = w_3(2h)...$$

$$...w_{K-1}(Kh) = w_K(Kh), w_K(l) = 0.$$

Metoda po částech konstantní aproximace



Metoda po částech konstantní aproximace

- Pro vlastní funkce úlohy musí platit spojitost w'

$$w'_1(h) = w'_2(h), w'_2(2h) = w'_3(2h)...$$

$$...w'_{K-1}(Kh) = w'_K(Kh).$$

Metoda po částech konstantní aproximace

- Získáváme soustavu rovnic

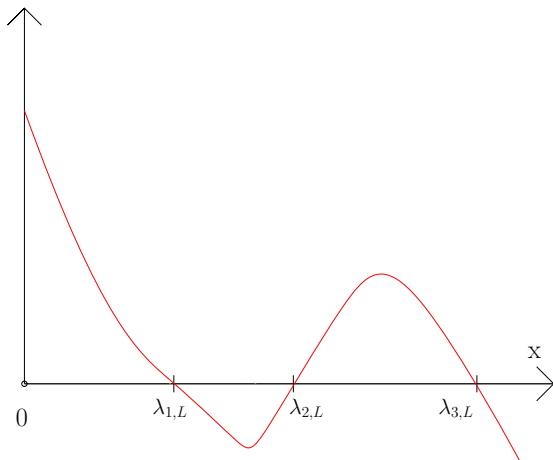
$$\mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- \mathbf{v} je vektor konstant C_{1n}, C_{2n}
- Matice \mathbf{G} je třídiagonální
- Protože vlastních funkcí musí být nekonečně mnoho, musí mít soustava nutně nekonečně mnoho řešení
- $\det(\mathbf{G}) = 0$
- Získáváme rovnici jediné proměnné $\lambda_{i,L}$
- Rovnice obsahuje různé součty a součiny prvků ve tvaru $\sqrt{\lambda_{i,L}}\omega_n \sin(nh\sqrt{\lambda_{i,L}}\omega_n), \sqrt{\lambda_{i,L}}\omega_n \cos(nh\sqrt{\lambda_{i,L}}\omega_n)$

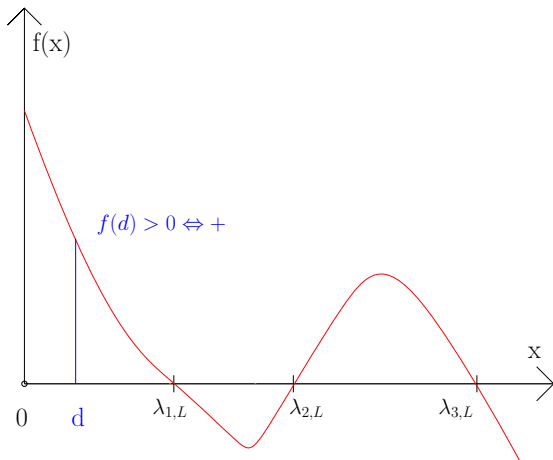
Metoda po částech konstantní aproximace

- Rovnici neumíme vyřešit analyticky
- Musíme použít nějakou numerickou metodu - potřebujeme zaručit, že nám numerická metoda poskytne dolní odhad $\lambda_{1,L}$
- Využijeme toho, že funkce je spojitá a platí Bolzanova věta

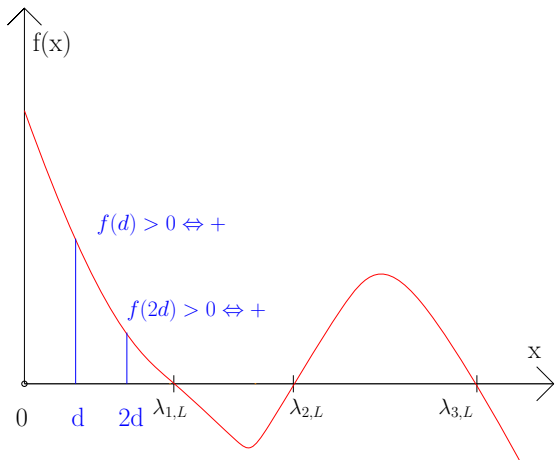
Metoda po částech konstantní aproximace



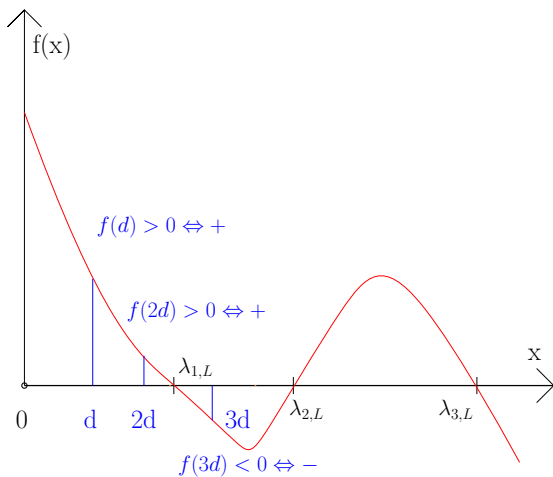
Metoda po částech konstantní aproximace



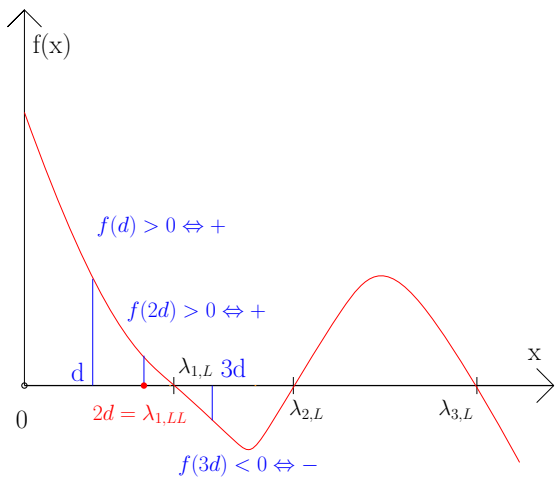
Metoda po částech konstantní aproximace



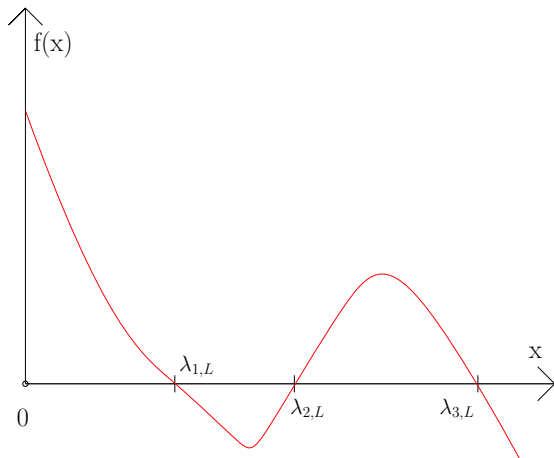
Metoda po částech konstantní aproximace



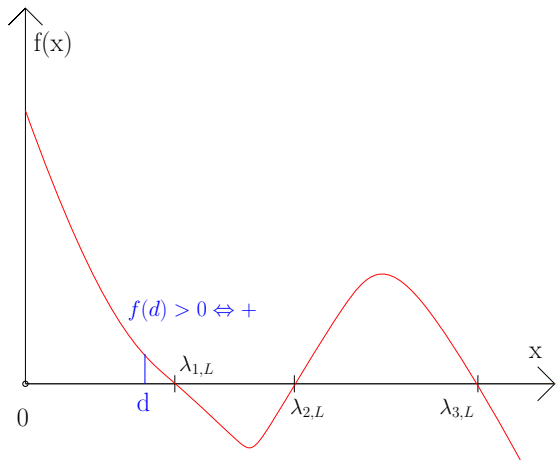
Metoda po částech konstantní aproximace



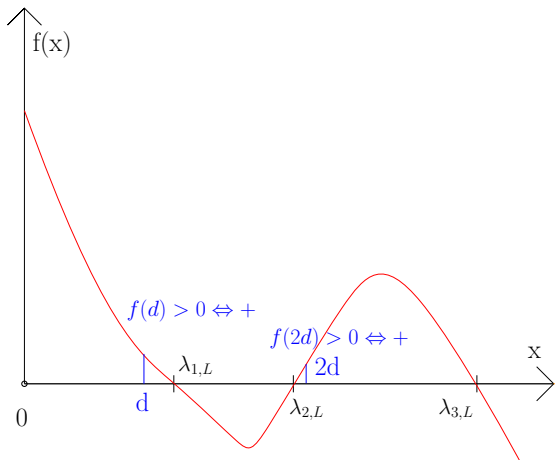
Metoda po částech konstantní aproximace



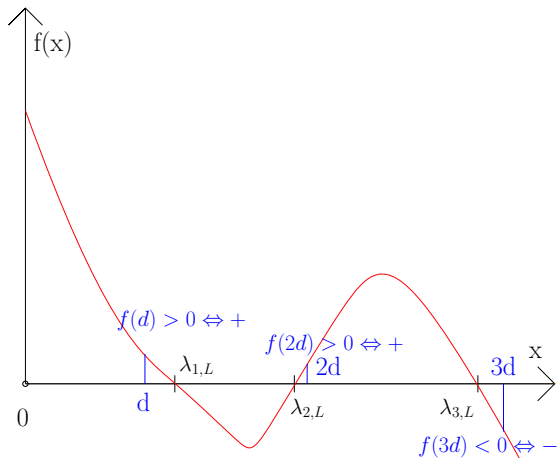
Metoda po částech konstantní aproximace



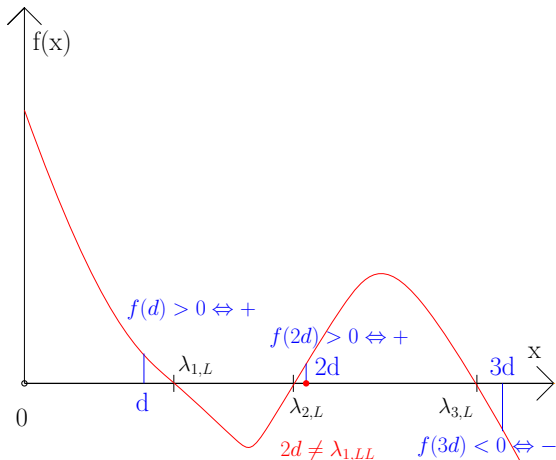
Metoda po částech konstantní aproximace



Metoda po částech konstantní aproximace



Metoda po částech konstantní aproximace



Metoda po částech konstantní aproximace

- Aby nám metoda poskytla dolní odhad $\lambda_{1,L}$, musí platit, že $d \leq \lambda_{2,L} - \lambda_{1,L}$
- Hledáme tedy dolní odhad $\lambda_{2,L} - \lambda_{1,L}$
- Tento odhad můžeme sestavit podle metod uvedených v článcích pro konstantní I_y

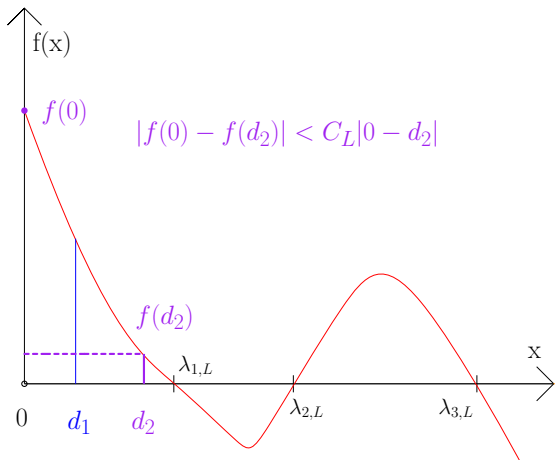
Nedokázaná hypotéza

Vzdálenost prvního a druhého vlastního čísla úlohy s $I_{y,pkonst}$, je větší nebo rovna vzdálenosti prvního a druhého vlastního čísla úlohy s $I_{y,konst}$, tak že $I_{y,konst} \leq I_{y,pkonst}$.

Metoda po částech konstantní aproximace

- Funkce $f(x)$ je Lipschitzovsky spojitá
- $|f(x_C) - f(x_D)| < C_L |x_C - x_D|$
- $C_L = \sup(f'(x))$ na $\langle 0, l \rangle$

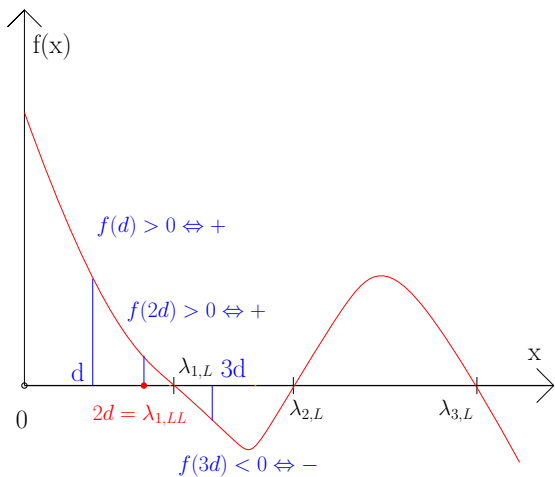
Metoda po částech konstantní aproximace



Metoda po částech konstantní aproximace

- Ze znalosti $\lambda_{1,LL}$ a $\lambda_{2,L} - \lambda_{1,L}$ můžeme najít $\lambda_{2,LL}$

Metoda po částech konstantní aproximace



Variační formulace

- Úlohu nejdříve formulujeme variačně
- Rozšíříme množinu funkcí D , mezi kterými hledáme řešení na H
- $H = H_0^1(0, l) = \{w; \int_0^l (w')^2 dx < \infty, w(0) = 0, w(l) = 0\}$
- Na H zavedme skalární součin $(w, v)_H = \int_0^l wv dx$

Variační formulace

Dle Galerkinovy metody má variační formulace tvar

$$(Aw - \lambda Bw, v) = 0 \quad \forall v \in H$$

$$\int_0^l w'v' dx = \lambda \int_0^l \frac{1}{EI_y} wv dx$$

Variační formulace

$$\int_0^l w'v' dx = \lambda \int_0^l \frac{1}{EI_y} wv dx$$

$$(w, v) = \int_0^l \frac{1}{EI_y} wv dx$$

$$a(w, v) = \int_0^l w'v' dx$$

$$a(w, v) = \lambda(w, v)$$

Variační formulace

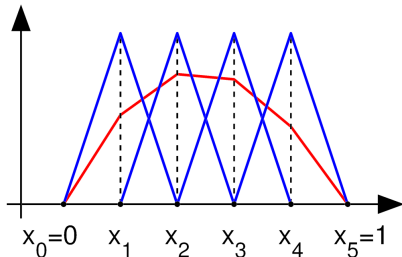
Pro variačně formulovanou úlohu platí:

- Pokud je λ vlastním číslem úlohy, má úloha nekonečně mnoho řešení
- Variačně formulovaná úloha má stejná vlastní čísla jako klasicky formulovaná úloha
- Všechny zmíněné vlastnosti vlastních čísel zůstávají v platnosti
- Vlastní funkce jsou ortogonální vzhledem ke skalárním součinům (w, v) , $a(w, v)$
- Platí Friedrichs-Poincarého nerovnost

$$\lambda_{1,l_y} \|w\|^2 \leq \|w\|_A^2, \quad \forall v \in H$$

Metoda konečných prvků

- $a(w, v_i) = \lambda(w, v_i), \quad \forall v_i, i = 1 \dots n, n \in \mathbf{N}$
- Za v_i budeme volit po částech lineární funkce
- Úloha vede k úloze najít zobecněný vlastní vektor a zobecněná vlastní čísla matic v rovnici $\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{B}\mathbf{v} = 0$



Metoda konečných prvků

- Metodou konečných prvků dostaneme přibližnou hodnotu λ_{1h}
- Pomocí Friedrichs-Poincarého nerovnosti je možné ukázat, že vždy platí $\lambda_1 \leq \lambda_{1h}$

Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků

Předpoklady:

- 1) Musíme znát dolní odhad λ_2 úlohy, který nazvěme $\lambda_{2,L}$, který je ale větší než λ_1 úlohy, tedy

$$0 < \lambda_{1,LL} \leq \lambda_1 < \lambda_{2,L} < \lambda_2$$

- 2) Musíme znát, byť třeba velmi hrubý, dolní odhad λ_1 úlohy, který si označme $\lambda_{1,LL}$

Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků

$$\lambda_{1,L} = \lambda_{1h} - (1 - \lambda_{1h}/\lambda_{2,L})^{-2} (1 - \alpha_h^2/4)^{-1} \|\eta_h\|_a^2$$

$$\alpha_h = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \beta_h^2} \right)}$$

$$\beta_h = (1 - \lambda_{1h}/\lambda_{2,L})^{-1} \|\eta_h\|$$

$$\beta_h < 1$$

Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků

Podle Rieszovy věty o reprezentaci platí

$$0 = \lambda_{1h}(w_h, v) - a(w_h, v), \quad \forall v \in H_n,$$

$$a(\eta_h, v) = \lambda_{1h}(w_h, v) - a(w_h, v), \quad \forall v \in H_n.$$

Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků

Podle Rieszovy věty o reprezentaci platí

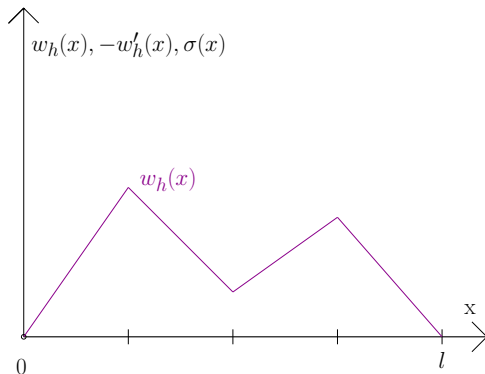
$$\begin{aligned} a(\eta_h, v) &= \lambda_{1h}(w_h, v) - a(w_h, v) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h v \, dx - \int_0^1 w_h' v' \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h v \, dx - \int_0^1 (w_h' + \sigma) v' \, dx + \int_0^1 \sigma v' \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right) v \, dx - \int_0^1 (w_h' + \sigma) v' \, dx \end{aligned}$$

Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků

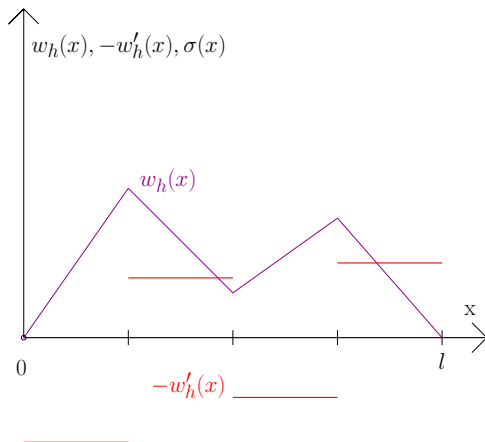
Úpravami a dosazením η_h za v , dostáváme

$$\begin{aligned}\|\eta_h\|_A &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,LL}}} \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma'\right)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 (w_h' + \sigma)^2 dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,LL}}} \left\| \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right\| + \|w_h' + \sigma\|\end{aligned}$$

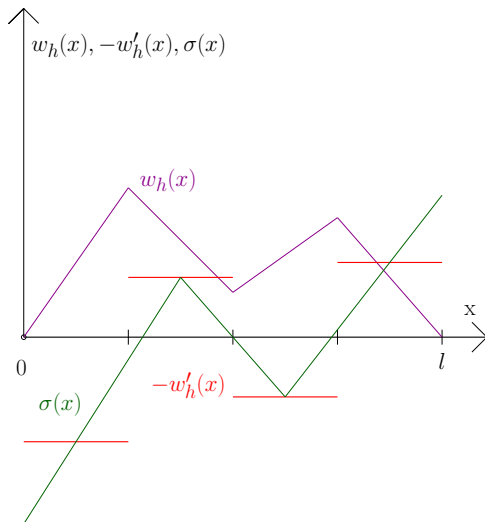
Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků



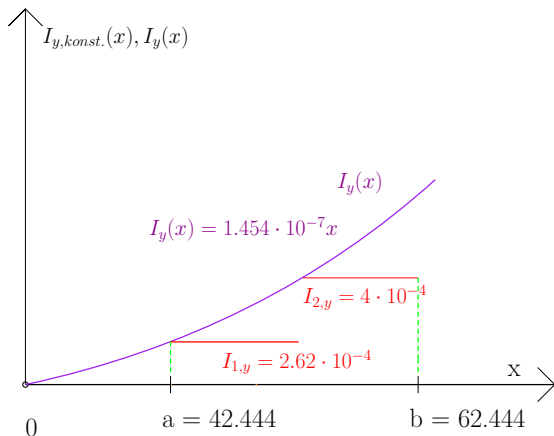
Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků



Zaručený dolní odhad získaný metodou konečných prvků



Numerické výsledky



Numerické výsledky

NUMERICKÉ VYJÁDRĚNÍ v kN

| Počet funkcí konečných prvků | 100 | 200 | 1000 |
|---|-------------|-------------|-------------|
| Přesná hodnota F_k | 773,2677427 | 773,2677427 | 773,2677427 |
| Metoda horního odhadu pomocí MKP | 773,3288372 | 773,2831685 | 773,2683647 |
| Metoda dolního odhadu pomocí MKP | 758,8768322 | 769,8628868 | 773,1376626 |
| Metoda konstantní aproximace | 517,2089692 | 517,177799 | 517,1676952 |
| Metoda po částech konstantní aproximace | 618,3495012 | 618,3495012 | 618,3495012 |

PERCENTUÁLNÍ VYJÁDRĚNÍ (v procentech přesné hodnoty F_k)

| Počet funkcí konečných prvků | 100 | 200 | 1000 |
|---|-------------|-------------|-------------|
| Přesná hodnota F_k | 100 | 100 | 100 |
| Metoda horního odhadu pomocí MKP | 100,0079008 | 100,0019949 | 100,0000804 |
| Metoda dolního odhadu pomocí MKP | 98,13894856 | 99,55967956 | 99,98317787 |
| Metoda konstantní aproximace | 66,88614313 | 66,88211216 | 66,88080552 |
| Metoda po částech konstantní aproximace | 79,96576956 | 79,96576956 | 79,96576956 |

Numerické výsledky

PERCENTUÁLNÍ VYJÁDRĚNÍ (v procentech přesné hodnoty F_k)

| Počet funkcí konečných prvků | 100 | 200 | 1000 |
|---|-------------|-------------|-------------|
| Přesná hodnota F_k | 100 | 100 | 100 |
| Metoda horního odhadu pomocí MKP | 100,0079008 | 100,0019949 | 100,0000804 |
| Metoda dolního odhadu pomocí MKP | 98,13894856 | 99,55967956 | 99,98317787 |
| Metoda konstantní aproximace | 66,88614313 | 66,88211216 | 66,88080552 |
| Metoda po částech konstantní aproximace | 79,96576956 | 79,96576956 | 79,96576956 |

ROZDÍLY PERCENTUÁLNÍHO VYJÁDRĚNÍ (pro různý počet kon.prvků)

| Počet funkcí kon. prvků (hrubší odhad)- počet funkcí kon. prvků (jemnější odhad) | 100-200 | 200-1000 | 100-1000 |
|--|-------------|-------------|-------------|
| Metoda horního odhadu pomocí MKP | 0,005905932 | 0,001914457 | 0,007820389 |

ROZDÍLY PERCENTUÁLNÍHO VYJÁDRĚNÍ (pro různý počet kon.prvků)

| Počet funkcí konečných prvků (jemnější odhad) - počet funkcí kon. prvků (hrubší odhad) | 200-100 | 1000-200 | 1000-100 |
|--|-------------|-------------|-------------|
| Metoda dolního odhadu pomocí MKP | 1,420730999 | 0,423498308 | 1,844229308 |

Závěry

Závěry

Děkuji za pozornost