Řetězovky

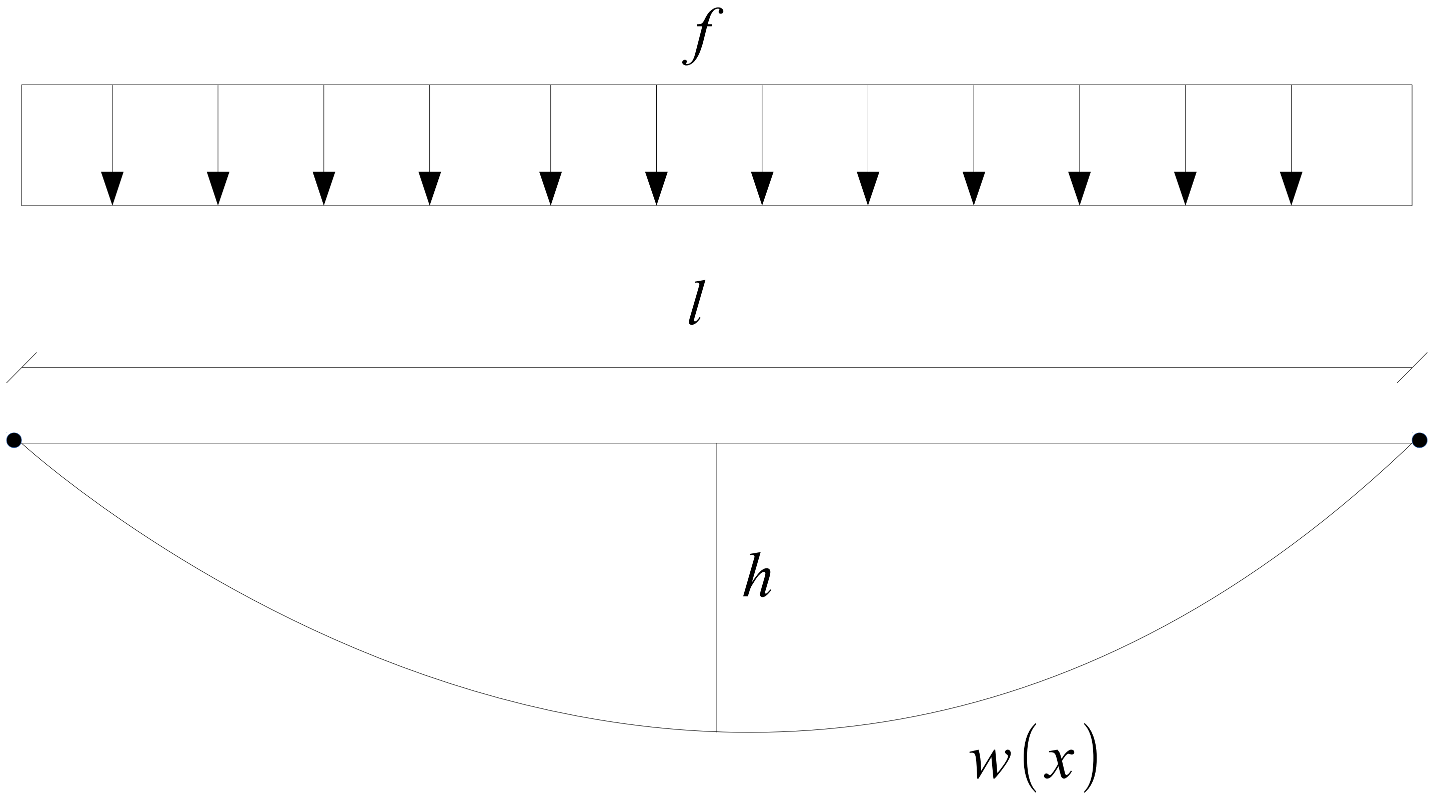
Dokonale tuhé vlákno(nemění svou délku), dokonale ohebné, nepřenáší žádné posouvající síly, pouze normálové. Vlákno je na obou koncích uchyceno neposuvným kloubem.

Zadání úlohy:

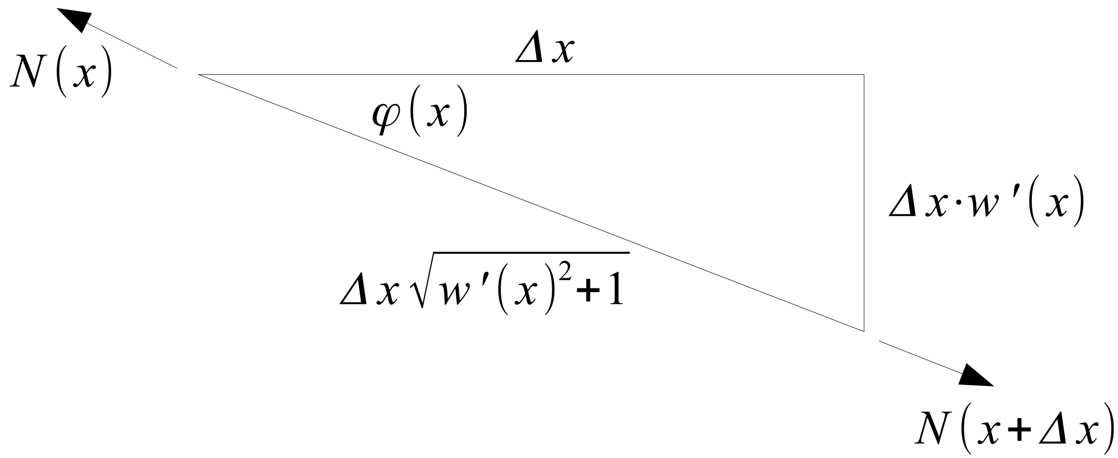
Známe: L – skutečná délka
l – délka průmětu(tzn. vzdálenost uchycených bodů)
f – zatížení (uvažujeme konstantní)

Zjišťujeme: w(x) – funkce popisující tvar zatížené řetězovky
N(x) – průběh normálové síly
h – maximální průvěs vlákna

Grafické zadání



Elementární segment



$$Přepona : Pyth.\, věta : \sqrt{((\Delta x \cdot w'(x))^2 + (\Delta x)^2)} = \Delta x \sqrt{w'(x)^2+1}$$

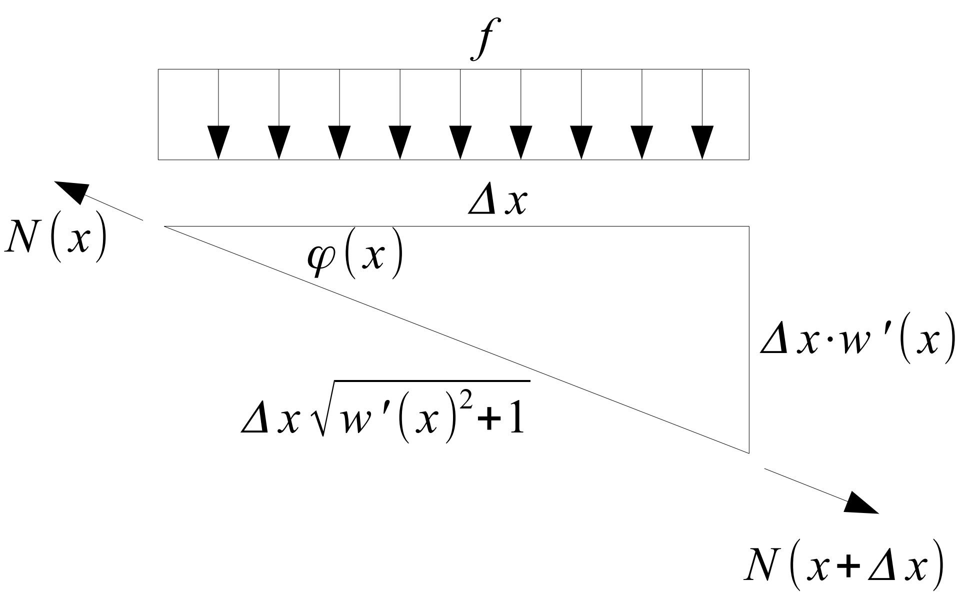
$$\sin(\varphi(x)) = \frac{\Delta x \cdot w'(x)}{\Delta x \sqrt{w'(x)^2+1}} = \frac{w'(x)}{\sqrt{w'(x)^2+1}}$$

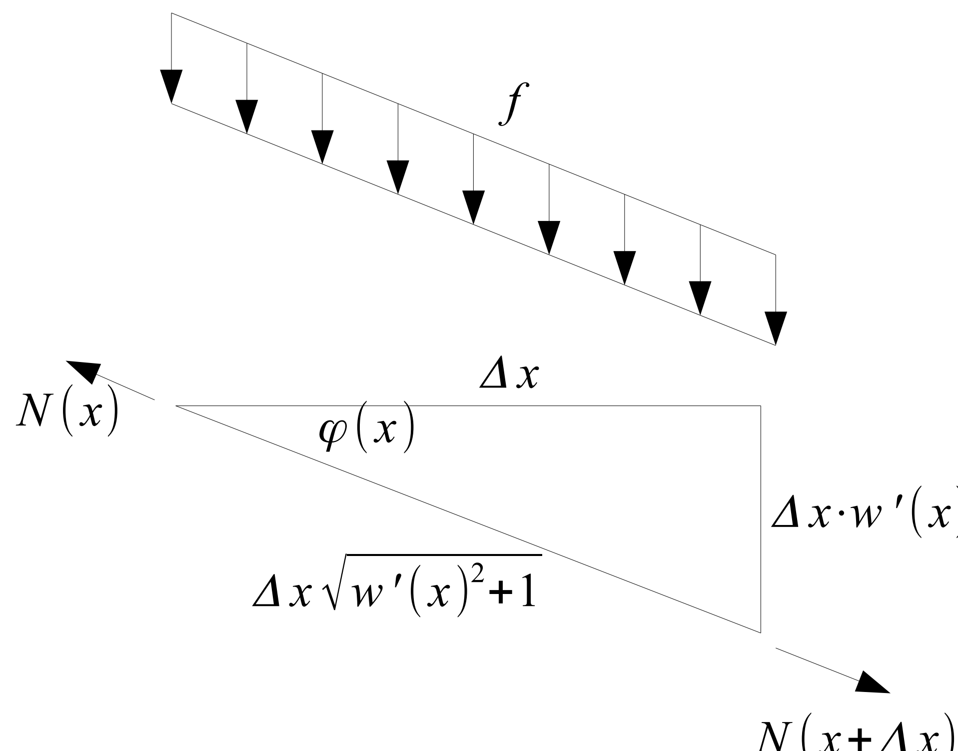
$$\cos(\varphi(x)) = \frac{\Delta x}{\Delta x \sqrt{w'(x)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{w'(x)^2+1}}$$

Rozdělení řetězovek

Falešná řetězovka — *zatížení vztaženo na průmět*

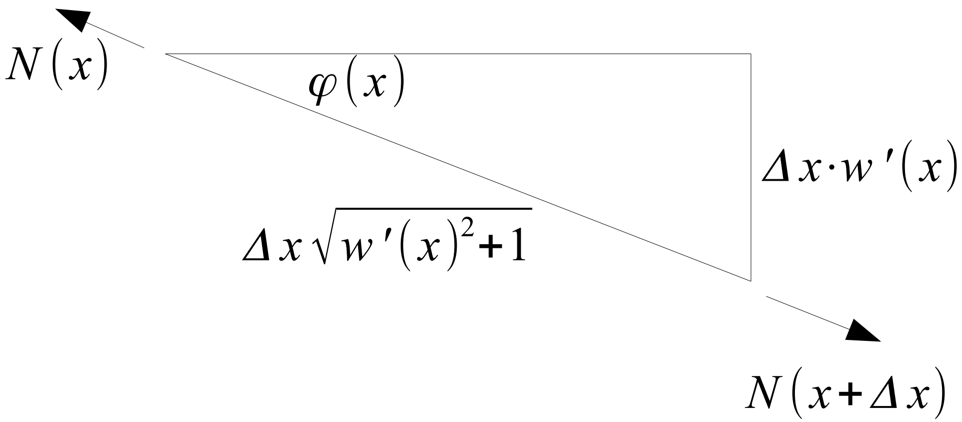
Pravá (tížná) řetězovka — *zatížení vztaženo na skutečnou délku*





Vodorovná podm. rovnováhy

Společná pro oba případy, f irelevantní.



$$\sum \rightarrow : -N(x)\cdot\cos(\varphi(x)) + N(x+\Delta x)\cdot\cos(\varphi(x+\Delta x)) = 0$$

$$N(x)\cdot\cos(\varphi(x)) = N(x+\Delta x)\cdot\cos(\varphi(x+\Delta x))$$

$$\cos(\varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)^2+1}}$$

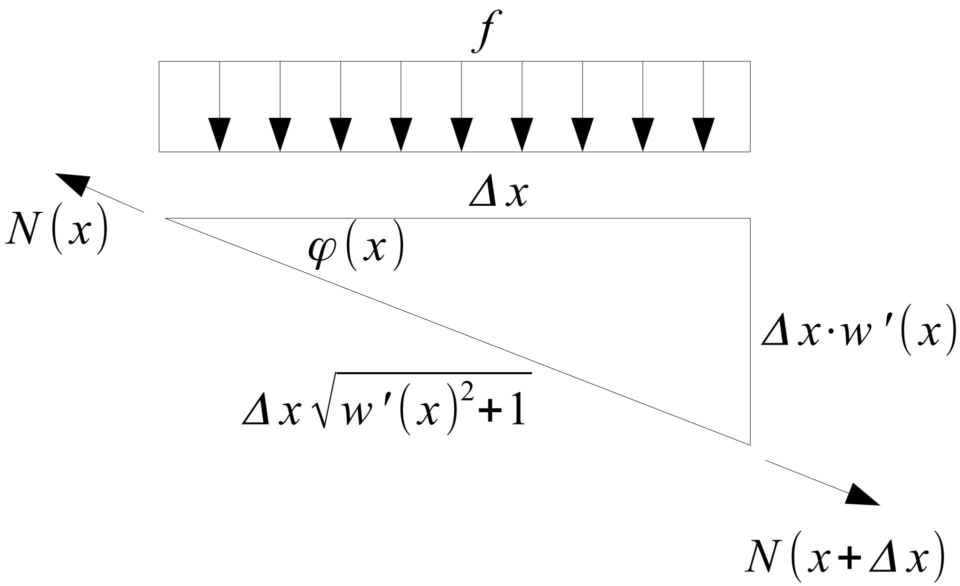
Vodorovná podm. rovnováhy

$$\frac{N(x)}{\sqrt{w'(x)^2+1}}=\frac{N(x+\Delta x)}{\sqrt{w'(x+\Delta x)^2+1}}$$

$$Poměr\ \frac{N(x)}{\sqrt{w'(x)^2+1}}\ je\ konstantí \rightarrow zavedeme\ konstantu\ K\ tak\ ,\ že:$$

$$\boxed{N(x)=K\cdot\sqrt{w'(x)^2+1};\ K>0}$$

Falešná řetězovka



$$\sum \downarrow : -N(x)\cdot\sin(\varphi(x)) + N(x+\Delta x)\cdot\sin(\varphi(x+\Delta x)) + f\cdot\Delta x = 0$$

$$/ \quad \sin(\varphi(x)) = \frac{w'(x)}{\sqrt{w'(x)^2+1}}$$

Falešná řetězovka

$$-N(x)\cdot\frac{w'(x)}{\sqrt{w'(x)^2+1}}+N(x+\Delta)\cdot\frac{w'(x+\Delta)}{\sqrt{w'(x+\Delta)^2+1}}+f\cdot\Delta x=0$$

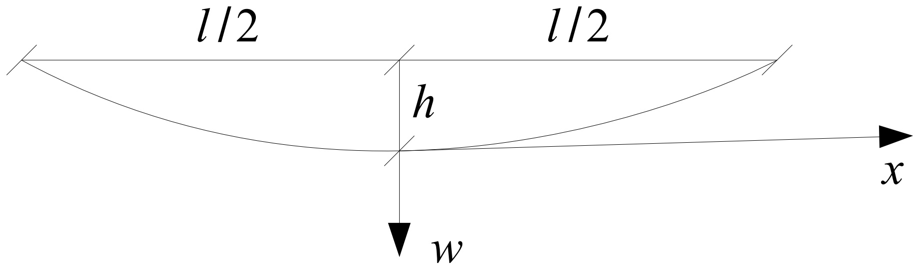
$$/\qquad N(x)=K\cdot\sqrt{w'(x)^2+1}$$

$$-K\cdot w'(x)+K\cdot w'(x+\Delta x)+f\cdot\Delta x=0\qquad/\qquad :\Delta x$$

$$K\cdot\frac{w'(x+\Delta x)-w'(x)}{\Delta x}+f=0\qquad/\qquad \lim_{(\Delta x\to 0)}\left(K\cdot\frac{w'(x+\Delta x)-w'(x)}{\Delta x}\right)$$

$$K\cdot w''(x)+f=0$$

Falešná řetězovka



$$K \cdot w''(x) + f = 0 \qquad / \qquad \iint$$

$$w(x) = \frac{-f \cdot x^2}{2 \cdot K} + c_1 \cdot x + c_2$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

Falešná řetězovka

$$\textit{Okrajové podmínky}\quad w(\pm l/2) = -h:$$

$$(1)\qquad -h = \frac{-f\cdot l^2}{8\cdot K} + \frac{c_1\cdot l}{2}$$

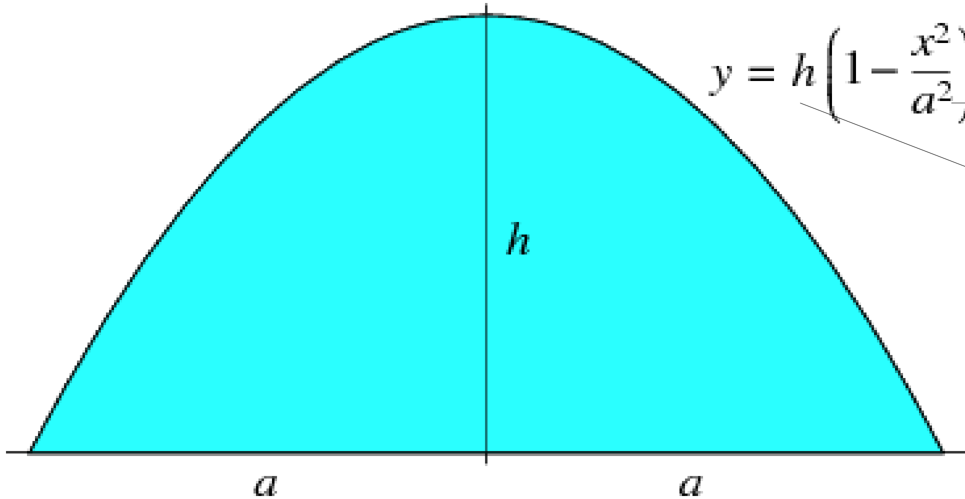
$$(2)\qquad -h = \frac{-f\cdot l^2}{8\cdot K} - \frac{c_1\cdot l}{2}$$

$$(1)-(2):\quad 0 = 0 + c_1\cdot l \quad\rightarrow\quad c_1 = 0$$

$$\boxed{w(x) = \frac{-f\cdot x^2}{2\cdot K}}$$

$$w(\pm l/2) = -h \;\rightarrow\; \boxed{h = \frac{f\cdot l^2}{8\cdot K}}$$

Falešná řetězovka



$$y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$a = \frac{l}{2}$$

$$h = \frac{f \cdot l^2}{8 \cdot K}$$

$$Skutečná\ délka\ L = \sqrt{\left(a^2 + 4 \cdot h^2\right)} + \frac{a^2}{2\mathrm{h}} \cdot arcsinh\left(\frac{2\mathrm{h}}{a}\right)$$

Falešná řetězovka

Postup výpočtu :

1. *Ze vztahu* $L=\sqrt{(a^2+4\cdot h^2)}+\frac{a^2}{2h}\cdot arcsinh(\frac{2h}{a});\, a=\frac{l}{2}$ *dostaneme h.*

   (Nutno použít numerický výpočet)

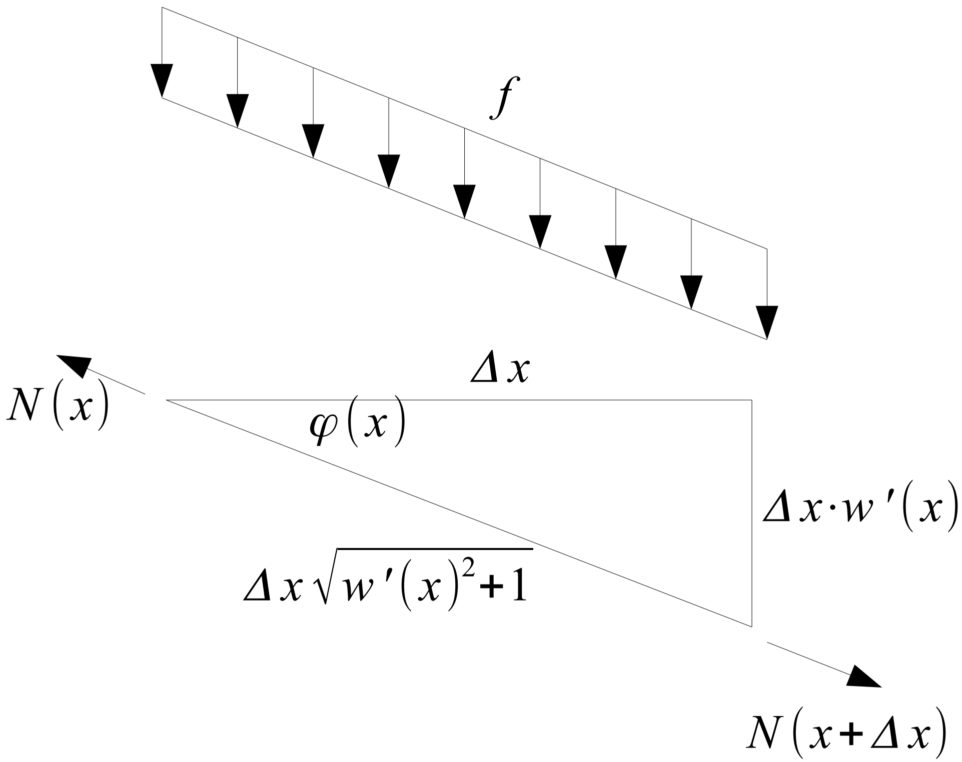
2. *Ze vztahu* $h=\frac{f\cdot l^2}{8\cdot K}$ *dostaneme K.*

3. *Pomocí dříve odvozených rovnic pro* $w(x)$ *a* $N(x)$ *můžeme vykresit průběh* $w(x)$ *a* $N(x)$*, popř. určit jejich hodnotu v livobolném bodě.*

$$w(x)=\frac{-f\cdot x^2}{2\cdot K}$$

$$N(x)=K\cdot\sqrt{w'(x)^2+1}=K\cdot\sqrt{(\frac{-fx}{K})^2+1}$$

Pravá řetězovka



$$\sum \downarrow : -N(x)\cdot\sin(\varphi(x)) + N(x+\Delta x)\cdot\sin(\varphi(x+\Delta x)) + f\cdot\Delta x\cdot\sqrt{w'(x)^2+1} = 0$$

$$/ \quad \sin(\varphi(x)) = \frac{w'(x)}{\sqrt{w'(x)^2+1}}$$

Pravá řetězovka

$$-N(x)\cdot\frac{w'(x)}{\sqrt{w'(x)^2+1}}+N(x+\Delta)\cdot\frac{w'(x+\Delta)}{\sqrt{w'(x+\Delta)^2+1}}+f\cdot\Delta x\cdot\sqrt{w'(x)^2+1}=0$$

$$/ \qquad N(x)=K\cdot\sqrt{w'(x)^2+1}$$

$$-K\cdot w'(x)+K\cdot w'(x+\Delta x)+f\cdot\Delta x\cdot\sqrt{w'(x)^2+1}=0 \qquad / \qquad :\Delta x$$

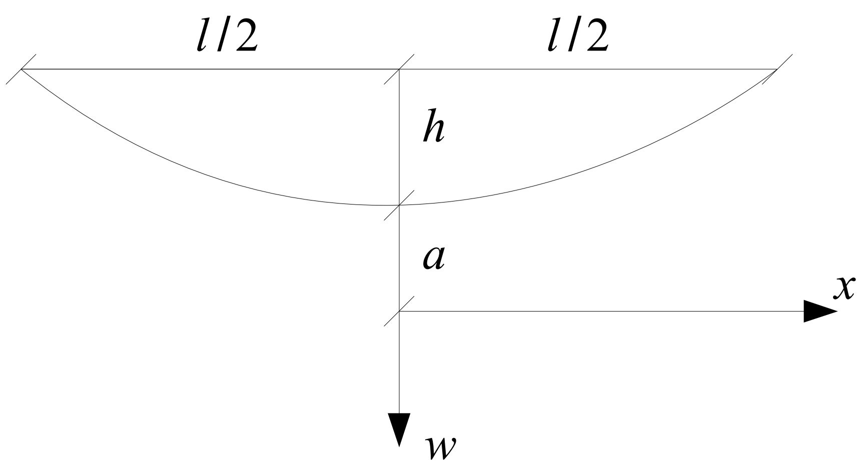
$$K\cdot\frac{w'(x+\Delta x)-w'(x)}{\Delta x}+f\cdot\sqrt{w'(x)^2+1}=0$$

$$/ \qquad \lim_{(\Delta x\to 0)}\left(K\cdot\frac{w'(x+\Delta x)-w'(x)}{\Delta x}\right)$$

$$K\cdot w''(x)+f\cdot\sqrt{w'(x)^2+1}=0$$

Pravá řetězovka

Uhodneme řešení diferenciální rovnice jako: $w(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$,
kde 'a' bude geometrický parametr řetězovky.



Díky volbě souřadného systému 'a' očekáváme jako zápornou hodnotu.

Pravá řetězovka

$$w(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$w'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$w''(x) = \frac{1}{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$Dosadíme\ do: \quad K \cdot w''(x) + f \cdot \sqrt{w'(x)^2 + 1} = 0$$

$$\frac{K}{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + f \cdot \sqrt{\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) + 1} = 0 \quad / \quad 1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$

$$\frac{K}{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + f \cdot \sqrt{\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) + \cosh^2(x) - \sinh^2(x)} = 0$$

Pravá řetězovka

$$\frac{K}{a}\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)+f\cdot\sqrt{\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)+\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)-\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}=0$$

$$\frac{K}{a}\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)+f\cdot\sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}=0 \quad / \quad \cosh(x)>0 \; pro \;\; \forall\, x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{K}{a}\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)+f\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)=0 \quad / \quad :\cosh(x/a)$$

$$\frac{K}{a}+f=0$$

Získáme rovnici pro K : $\boxed{K=-f\cdot a}$

Pravá řetězovka

$$L=\int_{-l/2}^{l/2}\sqrt{w'(x)^2+1}\,dx=\int_{-l/2}^{l/2}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx=2\cdot\int_{0}^{l/2}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

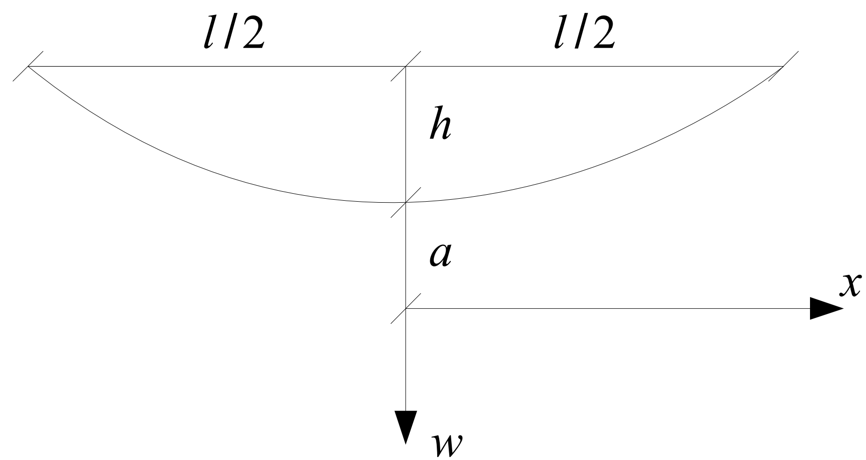
$$\boxed{L=2a\cdot\sinh\left(\frac{l}{2a}\right)}$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right)=-(|a|+|h|)$$

$$a\cdot\cosh\left(\frac{l}{2a}\right)=a-h$$

$$h=a-a\cdot\cosh\left(\frac{l}{2a}\right)$$

$$\boxed{h=a\left(1-\cosh\left(\frac{l}{2a}\right)\right)}$$



Pravá řetězovka

$$L=2a\cdot\sinh(\frac{l}{2a}) \longrightarrow \frac{l}{2a}=arcsinh(\frac{L}{2a})$$

$$w(\frac{l}{2})=-(|a|+|h|)=a-h$$

$$a\cdot\cosh(\frac{l}{2a})=a-h$$

$$a\cdot\cosh(arcsinh(\frac{L}{2a}))=a-h \quad / \quad :\cosh(arcsinh(x))=\sqrt{(x^2+1)}$$

$$h=a\cdot(1-\sqrt{(\frac{L}{2a})^2+1})$$

Pravá řetězovka

Postup výpočtu :

1. *Ze vztahu* $L = 2\mathrm{a} \cdot \sinh\left(\frac{l}{2\mathrm{a}}\right)$ *dostaneme a.*

   (*Nutno použít numerický výpočet*)

2. *Ze vztahu* $K = -f \cdot a$ *dostaneme K.*

3. *Ze vztahu* $h = a\left(1 - \cosh\left(\frac{l}{2\mathrm{a}}\right)\right)$ *dostaneme h.*

4. *Pomocí dříve odvozených rovnic pro* $w(x)$ *a* $N(x)$ *můžeme vykresit průběh* $w(x)$ *a* $N(x)$, *popř. určit jejich hodnotu v livobolném místě.*

$$w(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$N(x) = K \cdot \sqrt{w'(x)^2 + 1} = K \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Zpět k N(x)

$$N(x) = K \cdot \sqrt{w'(x)^2 + 1}$$

$Vlatnosti\ výrazu\ w'(x)^2\ pro\ oba\ případy\ řetězovky:$

$1.\ w'(0)^2 = 0$

$2.\ chová\ se\ jako\ sudá\ funkce\ (w'(x)^2 = w'(-x)^2)$

$Díky\ těmto\ vlastnostem\ můžeme\ odvodit,\ že\ N(0) = K,$
$což\ zároveň\ bude\ globální\ minimum\ funkce\ N(x).$

Příklad

$$l=80\mathrm{m}\,,\,L=90\mathrm{m}\,,\,f=50\mathrm{N}/m$$

$$Falešná:$$

$$1.\quad Ze\,vztahu\quad L=\sqrt{(a^2+4\cdot h^2)}+\frac{a^2}{2\mathrm{h}}\cdot arcsinh\left(\frac{2\mathrm{h}}{a}\right);\,a=\frac{l}{2}\quad dostaneme\,h.$$

$$L=\sqrt{(40^2+4\cdot h^2)}+\frac{40^2}{2\mathrm{h}}\cdot arcsinh\left(\frac{2\mathrm{h}}{40}\right);\quad h=18{,}2366\,m$$

$$2.\quad Ze\,vztahu\quad h=\frac{f\cdot l^2}{8\cdot K}\,dostaneme\,K.$$

$$K=\frac{50\cdot 80^2}{8\cdot 18{,}2366}=2193{,}39132$$

Příklad

$l = 80\text{m}\,,\ L = 90\text{m}\,,\ f = 50\text{N}/m$

Pravá :

1. *Ze vztahu* $L = 2\text{a}\cdot\sinh\left(\frac{l}{2\text{a}}\right)$ *dostaneme a.*

$$90 = 2\text{a}\cdot\sinh\left(\frac{80}{2\text{a}}\right);\ a = -47{,}0302$$

2. *Ze vztahu* $K = -f\cdot a$ *dostaneme K.*

$$K = -50\cdot(-47{,}0302) = 2351{,}51$$

3. *Ze vztahu* $h = a\left(1 - \cosh\left(\frac{l}{2\text{a}}\right)\right)$ *dostaneme h.*

$$h = -47{,}0302\cdot\left(1 - \cosh\left(\frac{40}{-47{,}0302}\right)\right) = 18{,}0608\,m$$

Příklad

$$l=80\mathrm{m}\,,\ L=90\mathrm{m}\,,\ f=50\mathrm{N}/m$$

Falešná:

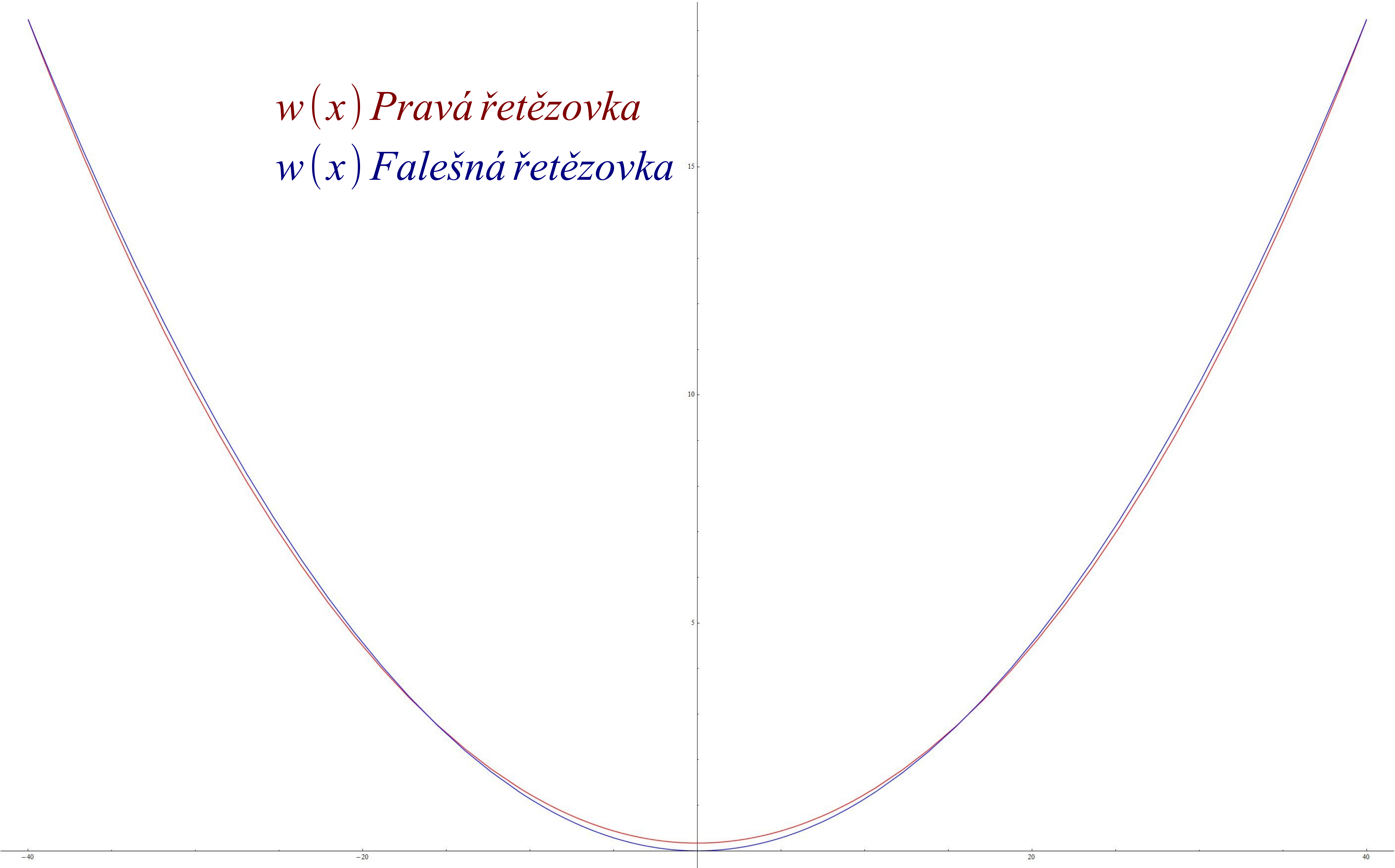
$$K=2193{,}39132$$
$$h=18{,}2366\,m$$
$$w(x)=\frac{-50\mathrm{x}^2}{2193{,}39139\cdot 2}$$
$$N(x)=2193{,}39139\cdot\sqrt{\left(\frac{50\mathrm{x}}{2193{,}39132}\right)^2+1}$$

Pravá:

$$a=-47{,}0302$$
$$K=2351{,}51$$
$$h=18{,}0608\,m$$
$$w(x)=-47{,}0302\cdot\cosh\left(\frac{x}{-47{,}0302}\right)$$
$$N(x)=2351{,}51\cdot\cosh\left(\frac{x}{-47{,}0302}\right)$$

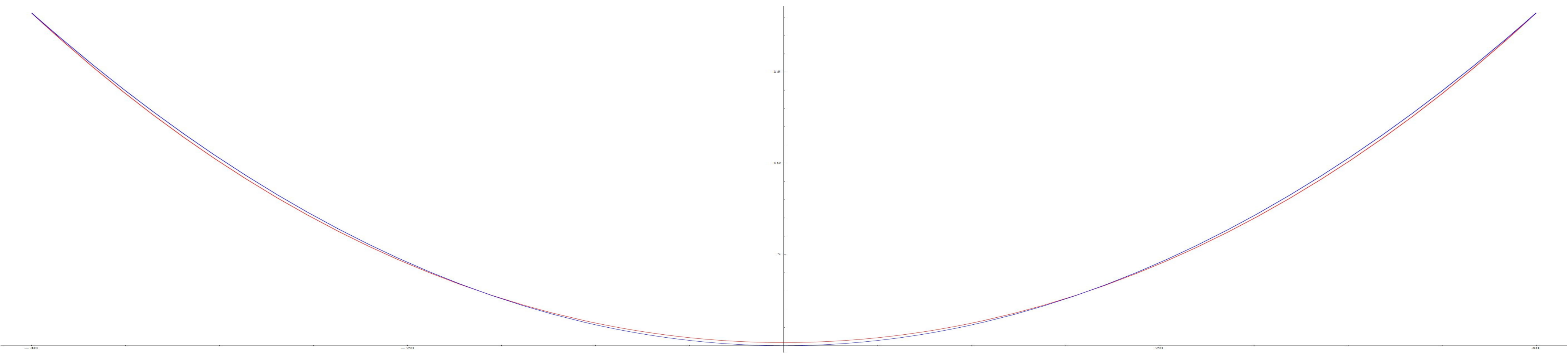
$$\Delta h=0{,}1758\,m\quad(tzn.\,odchylka\ pod\ 1\,\%)$$

Vykreslení w(x)



Vykreslení w(x)

$V\ meřítku:$



Vykreslení N(x)