Analýza řetězovek

Jan Vobecký, SI-I2-22

Osnova

I. Základní předpoklady
II. Rozdělení řetězovek
III. Zavedení neznámých
IV. Odvození rovnice tížné řetězovky
V. Výpočet dalších veličin (síla v bodě, délka vlákna…)
VI. Ukázkový příklad
VII. Využití řetězovek v praxi
VIII. Zdroje

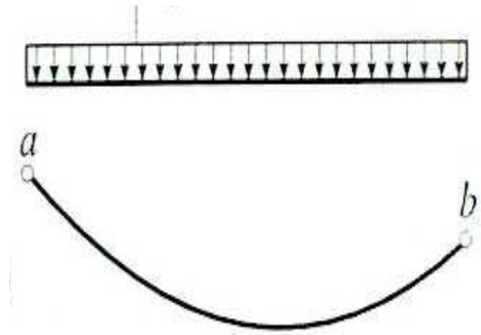
I. Základní předpokady

- Vlákno je dokonale ohebné, neprodloužitelné (na závěr ukážeme, jak se systém chová, když je elastické), namáhané pouze tahem, převládá délkový rozměr
- Vlákno je uloženo v neposuvných kloubech
- Tvar lana závisí pouze na zatížení
- Působící zatížení je spojité (x osamělé síly)

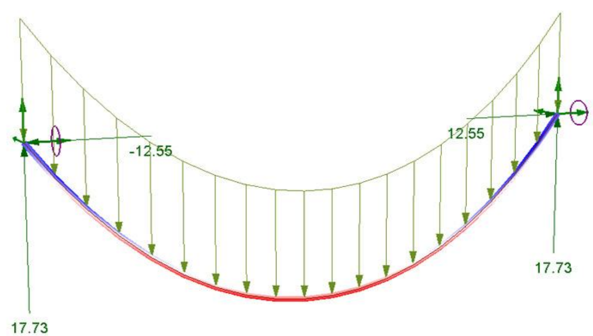
II. Rozdělení řetězovek

Podle působícího zatížení:

❑Parabolické řetězovky – zatížení je vztaženo na průmět vlákna do horizontální roviny

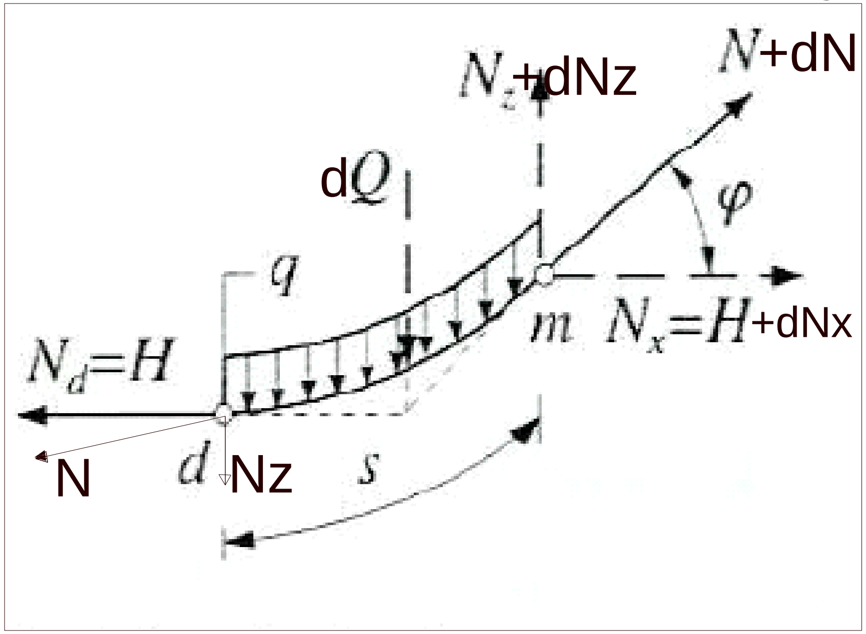


❑Pravé (tížné) řetězovky – zatížení rozloženo na střednici (ose) vlákna
- zatížením je většinou vlastní tíha



Dále se budeme zabývat pouze případem tížné řetězovky

III. Zavedení neznámých



N – tahová síla namáhající vlákno

N_x, N_0 - vodorovná složka tahové síly

N_z - svislá složka tahové síly

q – spojité svislé zatížení vztažené ke střednici

Q – výslednice spojitého zatížení

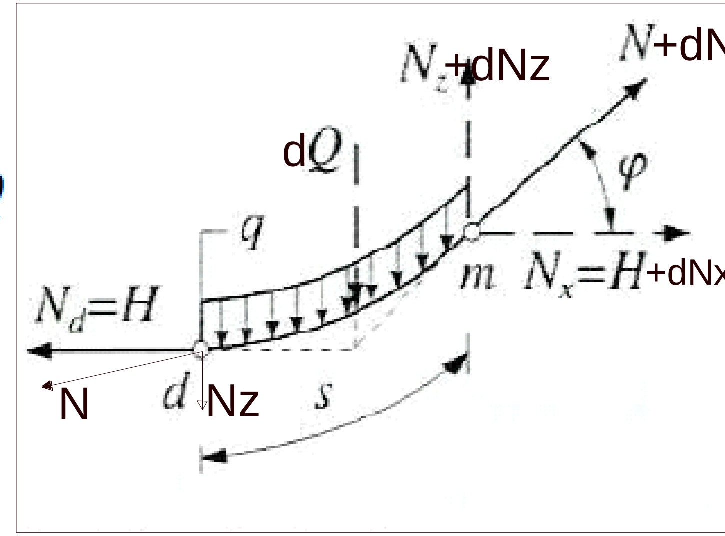
s – délka vlákna

IV. Odvození rovnice tížné řetězovky

Rovnováha:

$$X: -N_x + N_x + dN_x = 0 \qquad dN_x = 0$$

$$Z: -N_z + (N_z + dN_z) - dQ = 0 \qquad dN_z = dQ$$



Podmínka dokonalé ohebnosti vlákna:

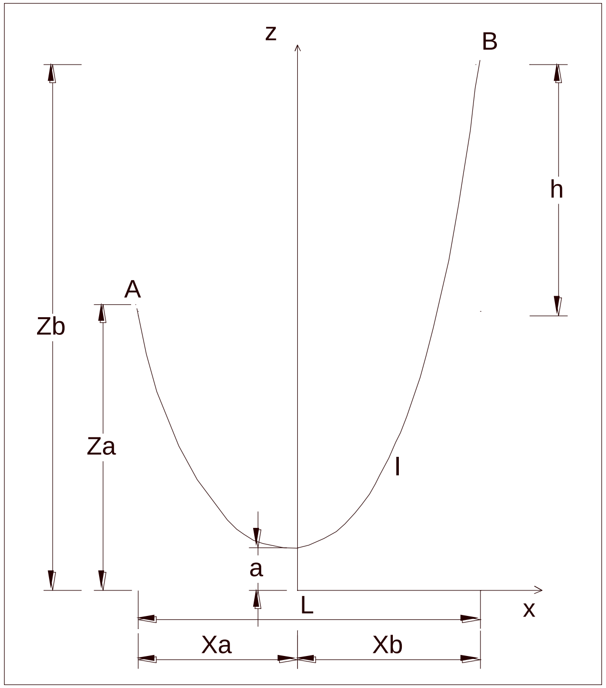
$$\frac{dz}{dx} = \tan\varphi = \frac{N_z}{N_x}$$

$$N_x = N_0 \text{ » } \frac{dz}{dx} = \frac{N_z}{N_0}$$

po zderivování obou stran rovnosti:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{N_0}\frac{dN_z}{dx} \text{ » } dN_z = dQ \text{ » } \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{N_0}\frac{dQ}{dx}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{N_0}\frac{dQ}{dx}$$ se nazývá diferenciální rovnice zatížené řetězovky



Pro zatížení platí: $$dQ = q\,ds$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{N_0}\frac{q\,ds}{dx}$$

Dále: $$N_0 = aq, \textit{ kde a je reálný parametr}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

$$z'' = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{\mathrm{aq}}\mathrm{q}\frac{\sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dz}^2}}{\mathrm{dx}}$$

Lze psát také ve tvaru:

$$z'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + z'^2}$$

Jedná se o diferenciální rovnici pravé-tížné řetězovky

Po použití vztahů $\frac{dz}{dx} = z' \ldots z'\mathrm{dx} = \mathrm{dz}$ upravíme rovnici řetězovky na:

$$dz = \frac{az'dz'}{\sqrt{1 + z'^2}} \qquad dx = \frac{adz'}{\sqrt{1 + z'^2}}$$

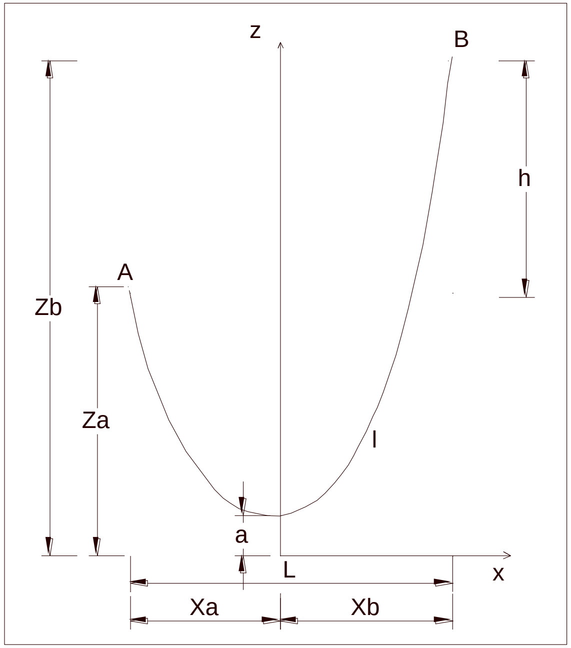
Integrací předchozích výrazů dostaneme:

I. $x = a \ln(z' + \sqrt{1 + z'^2}) + c_1$

II. $z = a\sqrt{1 + z'^2} + c_2$

Integrační konstanty dopočteme z počátečních podmínek:

- Osu x umístíme do vzdálenosti **a** od nejnižšího bodu řetězovky, osa **z** prochází tímto bodem **$z(0)=a$**
- V nejnižším bodě řetězovky je derivace nulová **$z'(0)=0$**



Poté integrační konstanty jsou:

$c_1=0 \quad c_2=0$

Algebraickou úpravou rovnic I. a II. , osamostatníme z:

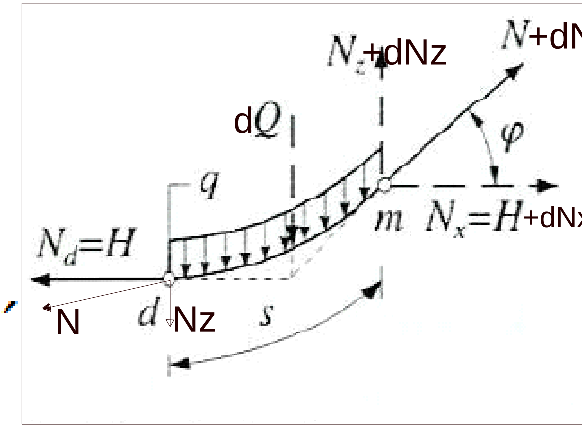
$$z = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$$

nebo:

$$z = a \cosh \frac{x}{a}$$

Jedná se o rovnici pravé-tížné řetězovky v explicitním tvaru

V. Další veličiny



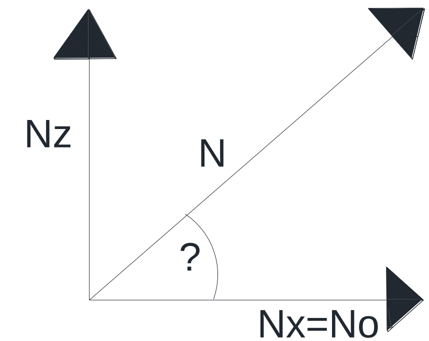
- Výpočet osové síly

III: $$\tan\varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{N_z}{N_x} = \frac{qs}{N_0} = \frac{qs}{aq} = \frac{s}{a} = z'$$

Z rovnice II. a III. získáme úpravou tzv. Bernoulliho rovnici

II: $$z = a\sqrt{1 + z'^2}$$

$$z^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{s}^2$$



Poté síla v libovolném bodě řetězovky je:

$$N = \sqrt{{N_x}^2 + {N_z}^2} = \sqrt{(aq)^2 + (qs)^2} = \mathrm{q}\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{s}^2} = \mathrm{qz}$$

Nejmenší hodnotu má v nejnižším bodu řetězovky

$$N = aq$$

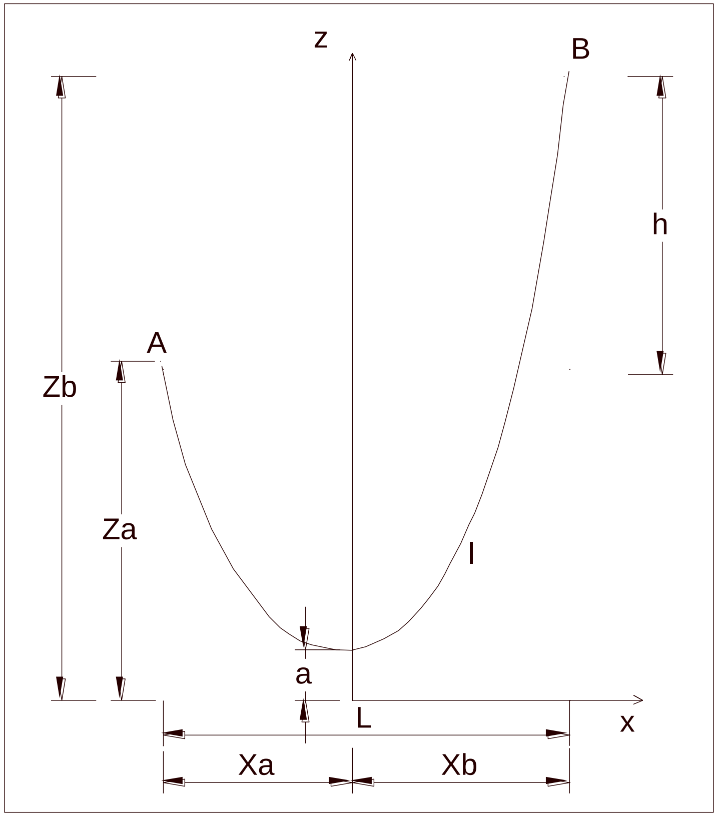
Pro velikost síly v jakémkoliv bodě platí:

$$N = \frac{N_0}{\cos\varphi}$$

➢ Délka vlákna (**l**) řetězovky:

$$l = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\sinh\frac{x}{a}\right)^2}\, dx = \left[a \sinh\frac{x}{a}\right]_A^B$$

A,B jsou x-ové souřadnice bodů závěsu

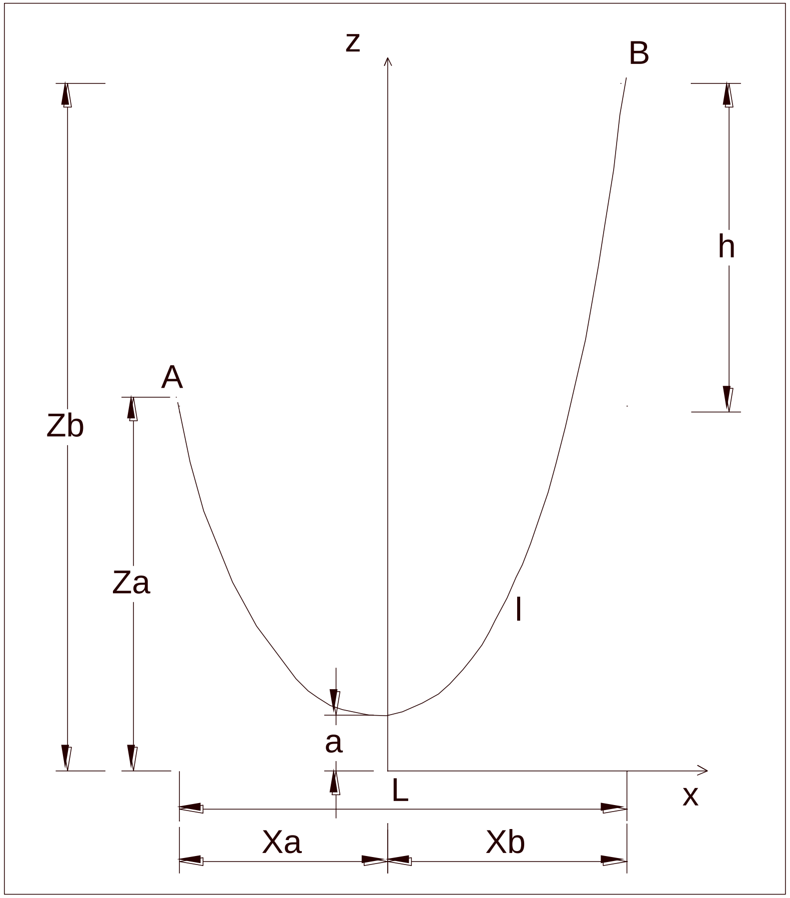


Příklad

Jsou dány 2 body A, B vzdálené 80m. Rozdíl jejich výšek je 10m (bod B je výše). Chceme je spojit lanem délky 85m. Jaký tvar zaujme lano, bude-li:

a) dokonale tuhé, tj. $E=\infty$GPa
b) modul pružnosti blízký nule?
c) jeho modul pružnosti 210GPa
d) modul pružnosti 210MPa

Lano je zatíženo pouze vlastní váhou 4,11kg/m, jeho průřez je kruhový s průměrem 35,5mm.



$L=80$m
$l= 85$m
h(rozdíl výšek)$=10$m
$q=41{,}1$N/m
$A=0{,}0009898\text{m}^2$

a) Odvození rovnice řetězovky

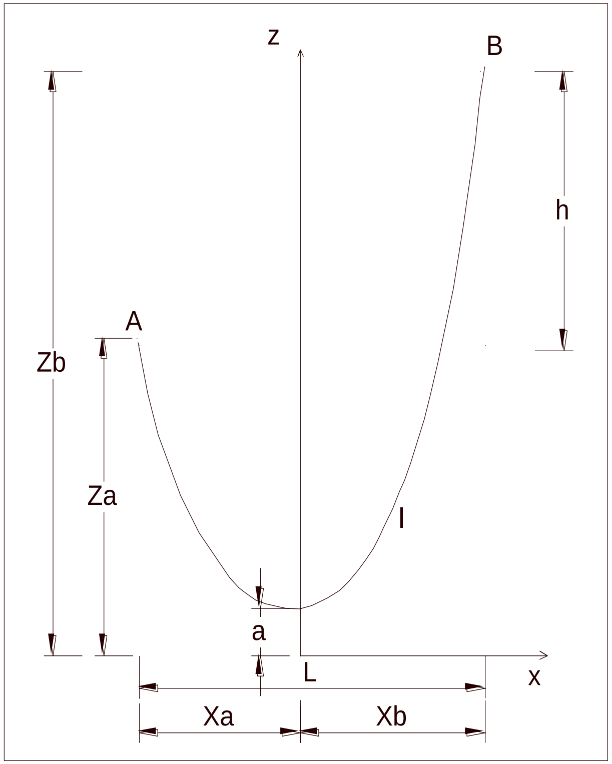
$$h = z_B - z_A = a\cosh\frac{x_B}{a} - a\cosh\frac{x_A}{a}$$

$$= \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_B}{a}} + e^{\frac{-x_B}{a}} - e^{\frac{x_A}{a}} - e^{\frac{-x_A}{a}}\right)$$

$$l = a\sinh\frac{x_B}{a} - a\sinh\frac{x_A}{a}$$

$$= \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_B}{a}} - e^{\frac{-x_B}{a}} - e^{\frac{x_A}{a}} + e^{\frac{-x_A}{a}}\right)$$

$$l^2 - h^2 = a^2\left(e^{\frac{x_A - x_B}{2a}} - e^{\frac{x_B - x_A}{2a}}\right)^2$$



$$\sqrt{l^2 - h^2} = \left|2a \sinh \frac{x_A - x_B}{2a}\right| = 2a \sinh \frac{x_B - x_A}{2a} = 2a \sinh \frac{L}{2a}$$

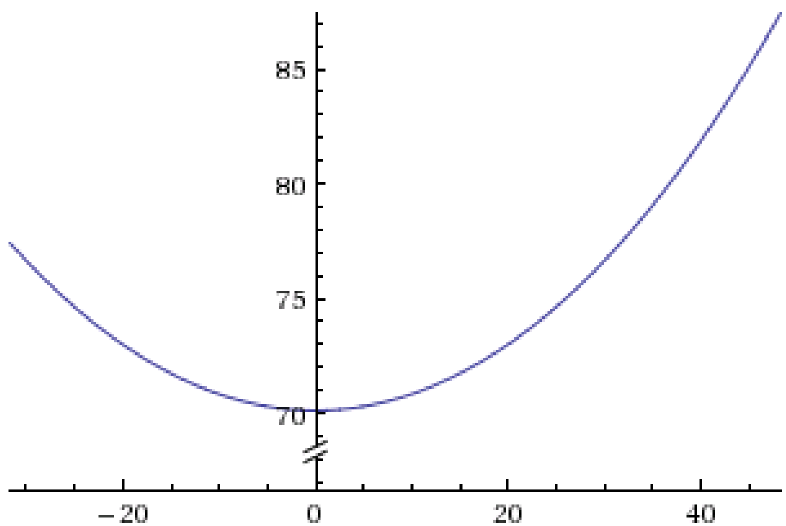
Po dosazení zadaných hodnot a) nepružné vlákno:

$$a = 70{,}1222m$$

$$z = 70{,}1222\cosh(0{,}014261x)$$

$$10 = 70{,}1222cosh\frac{80 - x_A}{70{,}1222} - 70{,}1222cosh\frac{x_A}{70{,}1222}$$

$$x_A = 31{,}7119m \qquad x_B = 80 - x_A = 48{,}2881m$$



b), c), d) vlákno není dokonale tuhé, může se protáhnout

- Velikost tahové osové síly:

$$N = qz = q\left(\mathrm{a}\cosh\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)$$

- Napětí na laně:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{q\left(\mathrm{a}\cosh\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)}{A}$$

- Poměrná deformace:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{q\left(\mathrm{a}\cosh\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)}{AE}$$

- Změna délky lana:

$$\Delta l = \int_A^B \varepsilon(x)\,ds = \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(t)|\varphi(t)|dt = \frac{aq}{AE}\int_{x_A}^{x_B} cosh\frac{t}{a}\left(\sqrt{1+\sinh\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right)dt$$

$$\Delta l = \int_A^B \varepsilon(x)\,ds = \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(t)|\varphi(t)|dt = \frac{aq}{AE}\int_{x_A}^{x_B} cosh\frac{t}{a}\left(\sqrt{1+\sinh\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right)dt$$

a) Pokud jde E k nekonečnu, Δl=0 a platí předchozí rovnice pro tvar řetězovky

b) Pokud je E blízké nule, Δl se blíží nekonečnu

c) Pokud je E=210GPa, Δl=0,0012568m

$$a_2 = 70{,}1123m$$

$$l_2 = 85{,}0012568m$$

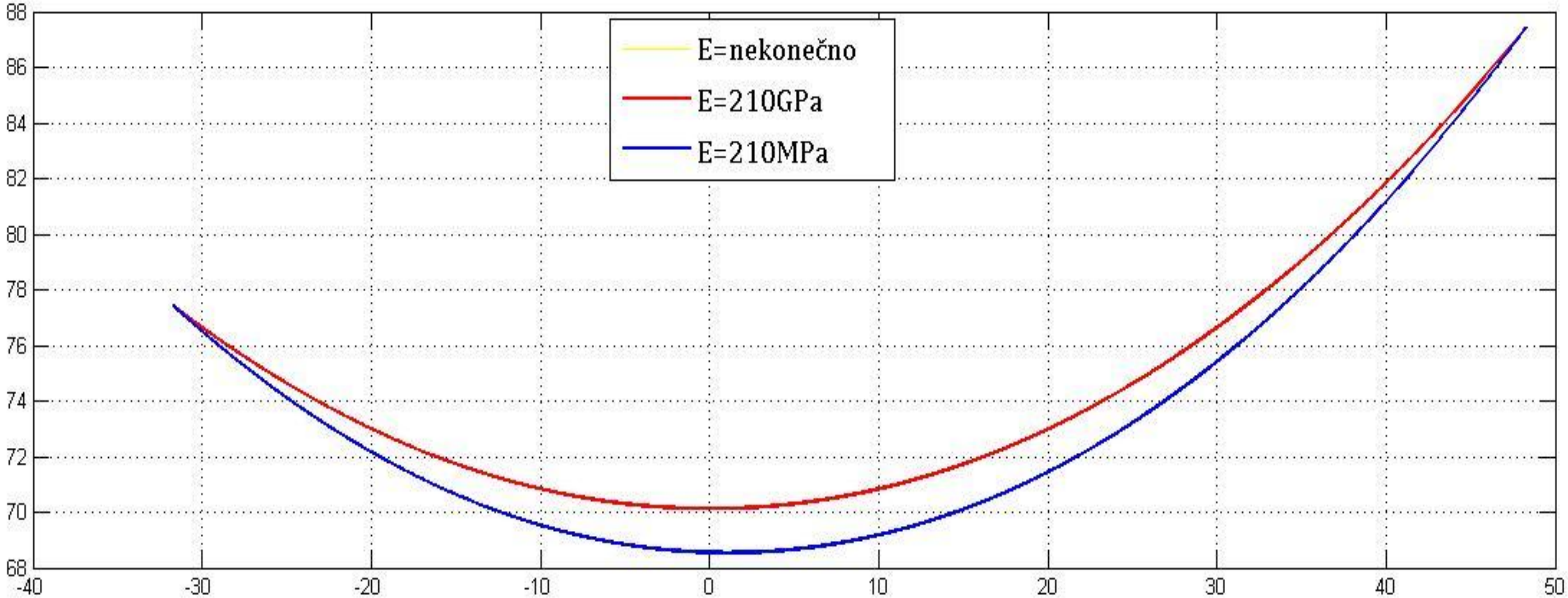
$$x_{A_2} = 31{,}7123m \qquad x_{B_2} = 48{,}2877m$$

d) Pokud je E=210MPa, Δl=1,2568m

$$a_3 = 61{,}9532m$$

$$l_3 = 86{,}2568m$$

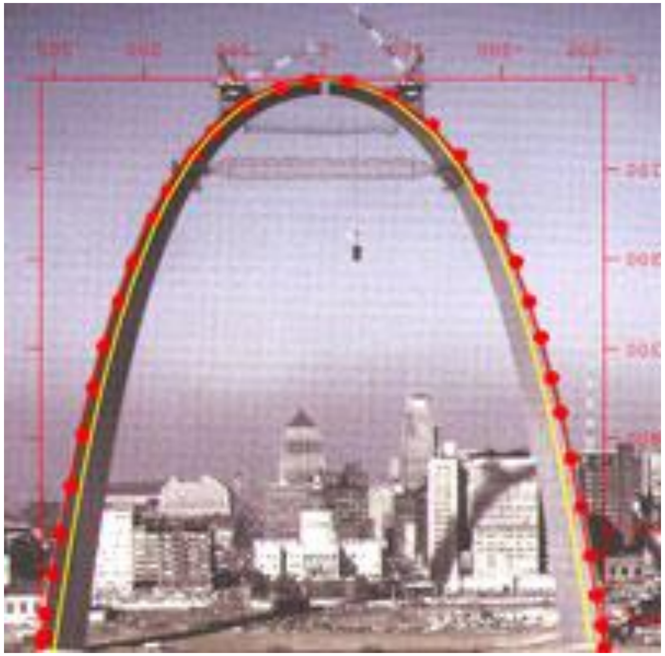
$$x_{A_3} = 32{,}78516m \qquad x_{B_3} = 47{,}21484m$$



E=nekonečno
E=210GPa
E=210MPa
88
86
84
82
80
78
76
74
72
70
68
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40
50

VII. Řetězovky v praxi

- V architektuře, tvar řetězovek mají samonosné klenby
- Vedení vysokého napětí (důležitý průvěs v závislosti na zatížení – sníh, námraza…)
- Kotevní lana lodí
- Lanové mosty



The St. Louis Arch

VIII. Použitá literatura:

CHOBOT, Karel a kolektiv. *Statika stavebních konstrukcí I. díl.* vyd. SNTL ,1982

KADLČÁK, Jaroslav a Jiří KYTÝR. *Statika stavebních konstrukcí*. 2. vyd. Brno: VUTIUM, 2001, 349 s. Učebnice (VUTIUM). ISBN 80-214-1877-X.

Děkuji za pozornost