

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební



Soutěž o cenu akademika Bažanta

Soutěžní práce

2013/2014

SIMULACE ŠÍŘENÍ TRHLINY PŘI OBECNÉM NAMÁHÁNÍ

Karel Mikeš

5. ročník, obor K

Vedoucí práce: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Oponent: Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

Obsah

1	Úvod.....	3
2	Koncept faktoru intenzity napětí.....	4
2.1	Kritérium pro šíření trhliny	5
2.1.1	Lokální Irwinovo kritérium	5
2.1.2	Globální Griffithovo kritérium	5
2.1.3	Ekvivalence lokálního a globálního kritéria	6
3	Způsob simulace šíření trhlin	8
4	Šíření trhliny ve smíšeném módu.....	9
4.1	Výpočetní příklady pro simulace šíření trhliny ve smíšeném módu .	9
4.2	Kritérium maximálního obvodového napětí	10
4.2.1	Popis metody	10
4.2.2	Simulace šíření trhliny pomocí kritéria maximálního obvodového napětí s určením poměru K_{II}/K_I	11
4.2.3	Simulace šíření trhliny pomocí kritéria maximálního obvodového napětí s hledáním maximální normované hodnoty napětí .	13
4.2.4	Hodnocení kritéria maximálního obvodového napětí	14
4.3	Kritérium maximální hodnoty hnací síly trhliny.....	15
4.3.1	Popis metody	15
4.3.2	Trhlina s konečnou šířkou	17
4.3.3	Trhlina s ostrou špičkou	19
4.4	Porovnání kritérií pro nosník s trhlinou.....	20
4.5	Srovnávací výpočty	20
4.5.1	Panel s šikmou trhlinou.....	23
4.5.2	Panel s dvojicí otvorů	23
5	Závěr	27
6	Použitá literatura	28

1 Úvod

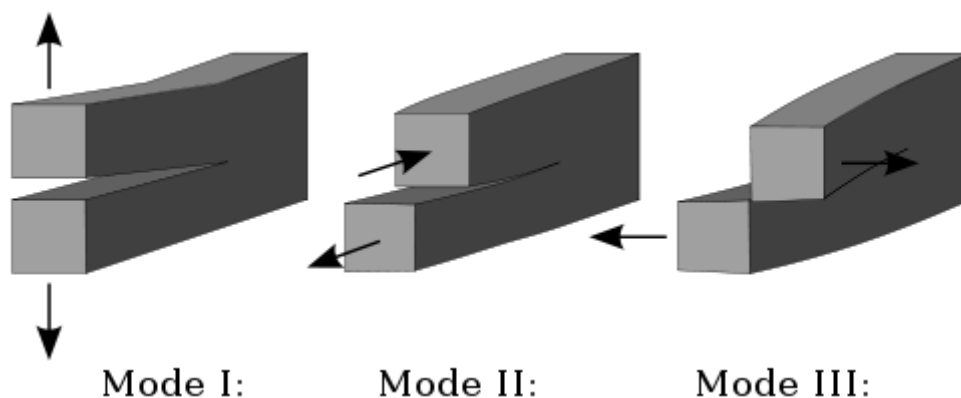
Tato práce navazuje na práci z minulého roku [1], ve které jsme se snažili odpovědět na otázku „Při jak velkém zatížení se trhlina začne šířit?“. Ve zmíněné práci bylo představeno několik způsobů, jak numericky určit veličinu zvanou faktor intenzity napětí, která se používá v lomové mechanice k popisu asymptotického pole napětí v blízkém okolí kořene trhliny a rozhoduje o tom, zda se trhlina bude šířit. Nejvhodnější způsob byl použit k numerické simulaci šíření trhlín v případech, kdy byl směr jejich šíření předem znám.

V této práci se zaměříme na případy, u kterých směr šíření předem znám není. V těchto případech bude nutné rozhodnout jednak o tom, zda se trhlina bude šířit. A pokud ano, tak i o tom, jakým směrem bude její šíření probíhat. Pro tento účel navrhneme několik kritérií pro určení směru šíření. Získané výsledky otestujeme na příkladech dostupných v literatuře.

Stejně jako v předchozí práci se i v této práci zaměříme na materiály, které se porušují křehkým lomem. To je způsob porušení, během kterého nedochází v okolí kořene trhliny k plastickým deformacím a nevzniká téměř žádná nelineární zóna. Porušení nastává v tak malé oblasti, že materiál lze uvažovat jako elastický i v okolí kořene trhliny. Toto chování je typické především pro křehké materiály, jako je například sklo. V případech, kdy je nelineární zóna ve srovnání s rozměry celého tělesa tak malá, že její vliv je možné zanedbat, lze tímto způsobem velice dobře popsat i běžně se vyskytující stavební materiály, jakými je například beton.

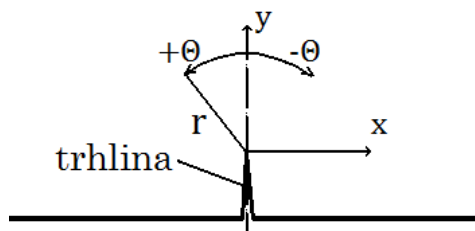
2 Koncept faktoru intenzity napětí

Nejprve připomeneme základní koncept faktoru intenzity napětí a kritéria pro šíření trhliny. Faktor intenzity napětí je veličina charakterizující asymptotické pole napětí v okolí kořene trhliny. Existuje ve třech podobách K_I , K_{II} a K_{III} , pro tři různé způsoby namáhání trhliny. Indexy značí, v jakém módu je trhlina namáhána, viz Obrázek 2.1. Úplně obecnému případu namáhání trhliny odpovídá kombinace všech tří módů. V předchozí práci jsme se zabývali šířením trhliny v čistém módu I. V této práci budeme řešit případy s kombinací módů I a II.



Obrázek 2.1: Způsob namáhání trhliny při jednotlivých módech; převzato z Wikipedia [online]. [cit. 2013-04-08] Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fracture_modes_v2.svg

Napjatost v těsném okolí kořene trhliny popsal Irwin [2] v roce 1957. Když se přibližujeme ke kořeni trhliny, napětí roste nepřímě úměrně odmocnině ze vzdálenosti. Přímě v kořeni trhliny napětí dosahuje nekonečné hodnoty, jedná se tedy o singularitní bod. Vzhledem k rozložení napětí hovoříme o singularitě $r^{-1/2}$. V okolí kořene zavedeme polární souřadnice r, θ se středem v kořeni trhliny, viz Obrázek 2.2. Pokud se ke kořeni blížíme ve směru osy trhliny, lze napětí popsat vztahem $\sigma(r, 0^\circ) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$.



Obrázek 2.2: Zavedení souřadnic v okolí kořene trhliny

Pro jednotlivá napětí platí pro mód I a II následující vztahy

$$\sigma_x(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1)$$

$$\sigma_y(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2)$$

$$\tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (3)$$

Odtud plyne fyzikální rozměr jednotky faktoru intenzity napětí $[\text{Nm}^{-3/2}]$.

Pro zjištění směru šíření trhliny ve smíšeném módu budeme používat takzvané obvodové napětí, které je definováno v [3], jako

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

a odpovídá normálovému napětí na plošce procházející daným bodem ve směru jeho spojnice s kořenem trhliny.

2.1 Kriterium pro šíření trhliny

Jak jsme ukázali na začátku této kapitoly, pokud se blížíme ke kořeni trhliny, rostou hodnoty napětí nade všechny meze. Hodnota napětí v kořeni trhliny bude tedy teoreticky vycházet nekonečná i pro libovolně malé (nenulové) zatížení. Proto nelze kritérium pro šíření trhliny založit na hodnotách napětí, ale je nutné použít jiné veličiny.

2.1.1 Lokální Irwinovo kritérium

Toto kritérium vychází z myšlenky, že dvě různá tělesa, pro která vychází hodnota faktoru intenzity napětí K_I totožně, mají v okolí kořene trhliny stejné rozložení napětí. A tedy pokud se bude šířit trhlina u jednoho z nich, očekáváme, že se bude šířit i druhého a naopak. Musí tedy existovat určitá kritická hodnota faktoru intenzity napětí, při jejímž dosažení začne šíření trhliny. Tato hodnota je určitou vlastností materiálu, která vyjadřuje jeho odolnost proti šíření trhliny. Nazýváme ji „lomová houževnatost“ a značíme K_c . Fyzikální rozměr je stejný jako u faktoru intenzity napětí, tedy $[\text{Nm}^{-3/2}]$.

Pravidla pro šíření trhliny podle lokálního kritéria jsou následující:

$$K_I < K_c \Rightarrow \text{k šíření trhliny nedochází} \quad (5)$$

$$K_I = K_c \Rightarrow \text{trhlina se šíří} \quad (6)$$

$$K_I > K_c \Rightarrow \text{nepřípustný stav} \quad (7)$$

2.1.2 Globální Griffithovo kritérium

Toto kritérium navrhl Griffith [4] v roce 1920. Je založeno na bilanci přeměny energie v průběhu zatěžování, proto se také někdy nazývá energetické kritérium. Na rozdíl od lokálního Irwinova kritéria, které sleduje pouze blízké okolí kořene trhliny, zkoumá globální Griffithovo kritérium těleso

jako celek. Pokud se trhlina v lineárně pružném tělese nešíří, je veškerá práce konaná vnějšími silami přeměněna na potenciální energii pružné deformace. Pokud k šíření trhliny dochází, nastávají v materiálu nevratné změny (oddělení původně spojených částí), které určitou část energie spotřebují. Trhlina se může šířit pouze tehdy, je-li k dispozici dostatečné množství energie potřebné k tomuto šíření. Prakticky si to lze představit tak, že je nutné překonat soudržnost daného materiálu, která představuje odpor k jeho roztržení. Zavedme materiálovou veličinu G_f , tzv. „lomovou energii“ [$\text{Jm}^{-2} = \text{Nm}^{-1}$], která bude představovat energii nutnou k roztržení daného materiálu vztaženou na jednotku plochy nově vzniklé trhliny. Podmínka říkající, že se při šíření trhliny uvolní právě tolik energie, kolik je k tomuto šíření potřeba, bude vypadat následovně:

$$W_e(u, a) - W_e(u, a + da) = G_f t da \quad (8)$$

kde

$W_e(u, a)$ je potenciální energie uložená v pružné deformaci pro předepsaný posun u a délku trhliny a .

$W_e(u, a) - W_e(u, a + da)$ je energie uvolněná při zvětšení trhliny o da při nezměněném posunu u

t je tloušťka tělesa (uvažujeme panel za rovinné napjatosti)

G_f je výše zmíněná lomová energie

$G_f t da$ je energie spotřebovaná na rozšíření trhliny o da .

Rovnici (8) lze převedením $t da$ na levou stranu upravit do tvaru

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = G_f \quad (9)$$

kde $\mathcal{G}(u, a)$ je tzv. „hnací síla trhliny“ [$\text{Jm}^{-2} = \text{Nm}^{-1}$], která představuje energii pružné deformace uvolněnou při šíření trhliny, vztaženou na jednotku nově vytvořené plochy trhliny.

Pravidla pro šíření trhliny podle globálního kritéria jsou následující:

$$\mathcal{G}(u, a) < G_f \Rightarrow \text{k šíření trhliny nedochází} \quad (10)$$

$$\mathcal{G}(u, a) = G_f \Rightarrow \text{trhlina se šíří} \quad (11)$$

$$\mathcal{G}(u, a) > G_f \Rightarrow \text{nepřípustný stav} \quad (12)$$

2.1.3 Ekvivalence lokálního a globálního kritéria

Představili jsme dvě různá kritéria, pomocí kterých jsme schopni rozhodnout, zda se trhlina bude šířit. Obě představená kritéria vycházejí z přirozených a logických předpokladů, ale jejich charakter je naprosto odlišný. První (Irwinovo) kritérium zkoumá rozložení napětí v těsném okolí

kořene trhliny a má tedy ryze lokální charakter. Naproti tomu druhé (Griffithovo) kritérium je založeno na energetické bilanci celého tělesa, jeho charakter je globální. Přesto je možné ukázat, že obě kritéria jsou v jistém smyslu ekvivalentní.

V díle [3] je dokázáno, že při šíření trhliny v módu I (za předpokladu rovinné napjatosti) platí

$$G(u, a) = \frac{K_I^2}{E} \quad (13)$$

K popisu daného materiálu tedy stačí stanovit pouze hodnotu lomové energie G_f nebo hodnotu lomové houževnatosti K_c . Druhou z těchto hodnot lze určit ze vztahu

$$G_f = \frac{K_c^2}{E} \quad \text{resp.} \quad K_c = \sqrt{EG_f} \quad (14)$$

3 Způsob simulace šíření trhlin

Jednotlivé příklady byly modelovány jako rovinné a výpočty byly prováděny pomocí metody konečných prvků za předpokladu rovinné napjatosti. K výpočtům byl použit program OOFEM. Jedná se o objektově orientovaný, volně šiřitelný software určený pro řešení multifyzikálních problémů metodou konečných prvků, který je vyvíjen na katedře mechaniky Stavební fakulty ČVUT [5].

Postup simulace šíření trhlin byl následující. Nejprve byla pomocí vstupního souboru zadána geometrie příkladu s počáteční trhlinou. Pomocí generátoru sítě T3D [6] byla vygenerována vstupní síť konečných prvků. A pomocí programu OOFEM byly pro jednotlivé uzly dané sítě vypočteny hodnoty posunů a uzlových reakcí a pro jednotlivé prvky sítě byly vypočteny hodnoty deformací a napětí. Tato data byla zpracována pomocí programu vytvořeného v jazyce Delphi Object Pascal. Pomocí příslušného kritéria byl určen směr šíření trhliny a bylo provedeno její rozšíření o předem zvolený přírůstek. Nová geometrie příkladu na konci prvního kroku byla zapsána do souboru a celý proces se opakoval, dokud se trhlina nedostala k okraji vzorku a nedošlo tak k jeho porušení.

Spouštění nástrojů T3D a OOFEM je prováděno vytvořeným programem automaticky a komunikace je realizována pomocí externích souborů. Tento postup umožňuje, že výpočet, od zadání vstupní geometrie do kolapsu vzorku, probíhá plně automaticky.

Generování nové sítě v každém kroku bylo prováděno jednak proto, aby bylo možné provést rozšíření trhliny v libovolném směru, a také proto, aby bylo v každém kroku zajištěno dostatečné zjemnění v okolí kořene trhliny.

Jednotlivá kritéria pro určení směru šíření jsou představena v následující kapitole.

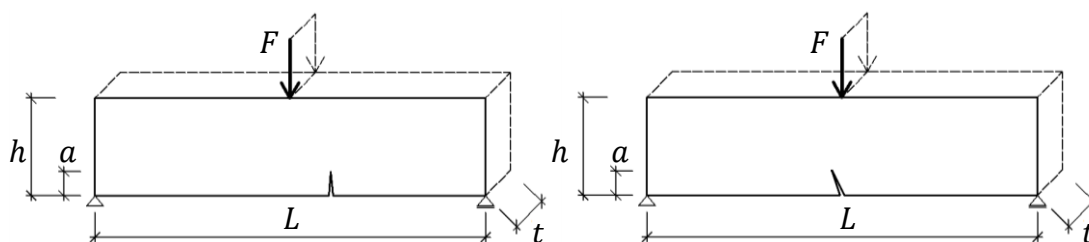
4 Šíření trhliny ve smíšeném módu

Ve smíšeném módu namáhání trhliny jsou obecně nenulové všechny složky faktoru intenzity napětí K_I , K_{II} i K_{III} . My však uvažujeme úlohu jako rovinnou, tím je vyloučeno namáhání trhliny v módu III (viz Obrázek 2.1) a můžeme předpokládat, že $K_{III} = 0$.

Při namáhání trhliny, kdy jsou nenulové hodnoty K_I a K_{II} , je důležité určit nejen, zda se trhlina bude šířit, ale také v jakém směru bude případné šíření trhliny probíhat. Pro výběr směru šíření neexistuje v současné době jednoznačně přijímané kritérium. V literatuře je navrženo několik způsobů od téměř empirických až po velmi propracované s dobrým teoretickým základem. V poslední době je velmi často používáno kritérium využívající hodnotu obvodového napětí [3].

4.1 Výpočetní příklady pro simulace šíření trhliny ve smíšeném módu

Pokud chceme efektivně testovat kritérium pro šíření trhliny ve smíšeném módu, tedy kritérium říkající, zda se trhlina pro dané zatížení bude šířit, a pokud ano, i jakým směrem bude šíření probíhat, musíme zkoumat případ, pro který bude zaručeno, že trhlina není namáhána v čistém módu I. To je možné splnit, pokud budeme uvažovat prostý nosník namáhaný tříbodovým ohybem s počátečním vrubem, který uděláme buď šikmý, anebo ho umístíme jinam než na osu symetrie, viz Obrázek 4.1. Tyto úpravy zaručí, že složka K_{II} bude nenulová. A i pokud se na takovéto nosníky jen podíváme, můžeme odhadnout, že trhlina se asi nebude šířit ve svém původním směru.



Obrázek 4.1: Příklady nosníků s namáháním trhliny ve smíšeném módu

Na takovéto nosníky pak můžeme aplikovat kritérium pro smíšený mód. Pokud se ukáže, že se trhlina pro dané zatížení bude šířit, provedeme její rozšíření v příslušném směru o předem zvolenou délku. Vygenerujeme novou síť a celý proces můžeme opakovat. Tímto způsobem lze zvětšovat trhlinu, dokud nedojde k úplnému roztržení nosníku.

4.2 Kritérium maximálního obvodového napětí

V poslední době se zdá být kritérium založené na maximální hodnotě obvodového napětí nejpoužívanější a srovnávacími výpočty je dosaženo v řadě případů velmi dobré shody s experimentálními výsledky [3].

4.2.1 Popis metody

Obvodové napětí je definováno jako normálové napětí na plošce procházející daným bodem ve směru jeho spojnice s kořenem trhliny. Pro jeho hodnotu lze pomocí podmínek rovnováhy odvodit vztah

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (15)$$

S použitím vztahů (1)-(3) dostaneme:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (16)$$

Kritérium maximálního obvodového napětí říká, že trhlina se bude šířit ve směru, ve kterém je největší hodnota obvodového napětí σ_{θ} . Pochopitelně nemá význam zjišťovat maximální možnou hodnotu σ_{θ} , protože jak je vidět z (16), s klesající vzdáleností od kořene trhliny r roste hodnota σ_{θ} nade všechny meze. Pokud však vzdálenost r zafixujeme a sledujeme pouze body ležící na kružnici se středem v kořeni trhliny a poloměrem r , pak σ_{θ} nabývá maximální hodnoty právě pro hodnotu úhlu θ_{\max} , který odpovídá směru, ve kterém se trhlina bude šířit. Hodnotu maximálního napětí lze také použít k rozhodnutí, zda se trhlina vůbec začne šířit. V tomto případě nelze porovnávat maximální hodnotu σ_{θ} se samotnou kritickou hodnotou, která je vlastností materiálu, protože, jak víme, maximální hodnota σ_{θ} se mění s tím, jak měníme průměr sledované kružnice r . Rozhodovací podmínka by musela mít tvar

$$\sigma_{\theta}(r, \theta_{\max}) = \frac{K_c}{\sqrt{r}} \quad (17)$$

Otázkou vůbec zůstává, jak pro výpočet volit vzdálenost r . Pro hodně malé r bude nejspíše výpočet dosti nepřesný, protože jak je možné vidět v [1] v části 4.1.2, pro malé r jsou hodnoty σ_{θ} dost rozptýleny od křivky představující teoretické rozložení, viz Obrázek 4.6 v [1]. Ve velkých vzdálenostech (řádově čtvrtina výšky nosníku) nebude zase dominantní asymptotické pole napětí, které je pro šíření trhliny rozhodující. Mezi těmito případy však lze očekávat dostatečně velkou oblast, ve které nebude výsledný směr šíření ovlivněn volbou vzdálenosti.

4.2.2 Simulace šíření trhliny pomocí kritéria maximálního obvodového napětí s určením poměru K_{II}/K_I

Při numerickém určení směru šíření lze zjistit úhel šíření θ_{\max} jako argument, který maximalizuje obvodové napětí σ_θ definované podle (16). Výhodnější však je používat ekvivalentní formulaci problému. Pokud má σ_θ nabývat minima, musí platit, že $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$. Z této podmínky lze odvodit rovnici

$$\sin \theta + \frac{K_{II}}{K_I} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (18)$$

úhel θ_{\max} se pak hledá jako její řešení při splnění následujících podmínek převzatých z [7]

$$\theta \in (-\pi, \pi) \quad (19)$$

$$K_I > 0 \quad (20)$$

$$K_{II} \sin \frac{\theta}{2} < 0 \quad (21)$$

Není však nutné prohledávat celý interval $(-\pi, \pi)$. Lze ukázat, že existuje limitní úhel θ_0 , který odpovídá porušení čistým smykem [7]. Jeho hodnotu získáme tak, že budeme předpokládat namáhání pouze smykem, potom je $K_I = 0$ a z rovnice (18) dostaneme hodnotu $\theta_0 = \pm 70,53^\circ$. Při hledání směru šíření tedy stačí prohledávat interval $(-\theta_0, \theta_0)$.

Pro nalezení úhlu šíření pomocí této formulace je nutné znát poměr K_{II}/K_I , což je poměr faktorů intenzity napětí v módu II a I, který udává, jak moc je trhlina namáhána smykem oproti rozevírání. K určení tohoto poměru použijeme hodnoty napětí. Konkrétně hodnoty smykového napětí, protože, jak je možné vidět v [1] v části 4.1, hodnoty této složky napětí se nejvíce podobají asymptotickému poli napětí, které dominuje v okolí kořene trhliny. Víme, že hodnoty smykového napětí v okolí kořene trhliny jsou v módu II popsány pomocí vztahu

$$\tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (22)$$

Zvolme sledovanou oblast ve tvaru kruhové výseče s parametry r_{\max} , φ_{\max} a počátkem v kořeni trhliny. Pokud máme ve sledované oblasti k dispozici alespoň dva Gaussovy body, můžeme s použitím metody nejmenších čtverců pro jednotlivé faktory intenzity napětí odvodit vztahy

$$K_I = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_{xy_i} f_{I_i} \sum_{i=1}^n f_{II_i}^2 - \sum_{i=1}^n \tau_{xy_i} f_{II_i} \sum_{i=1}^n f_{I_i} f_{II_i}}{\sum_{i=1}^n f_{I_i}^2 \sum_{i=1}^n f_{II_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n f_{I_i} f_{II_i} \right)^2} \quad (23)$$

$$K_{II} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_{xy_i} f_{II_i} \sum_{i=1}^n f_{I_i}^2 - \sum_{i=1}^n \tau_{xy_i} f_{I_i} \sum_{i=1}^n f_{I_i} f_{II_i}}{\sum_{i=1}^n f_{I_i}^2 \sum_{i=1}^n f_{II_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n f_{I_i} f_{II_i} \right)^2} \quad (24)$$

kde $n \geq 2$ je počet hodnot napětí ve sledované oblasti,

τ_{xy_i} je hodnota smykového napětí pro i -tý Gaussův bod,

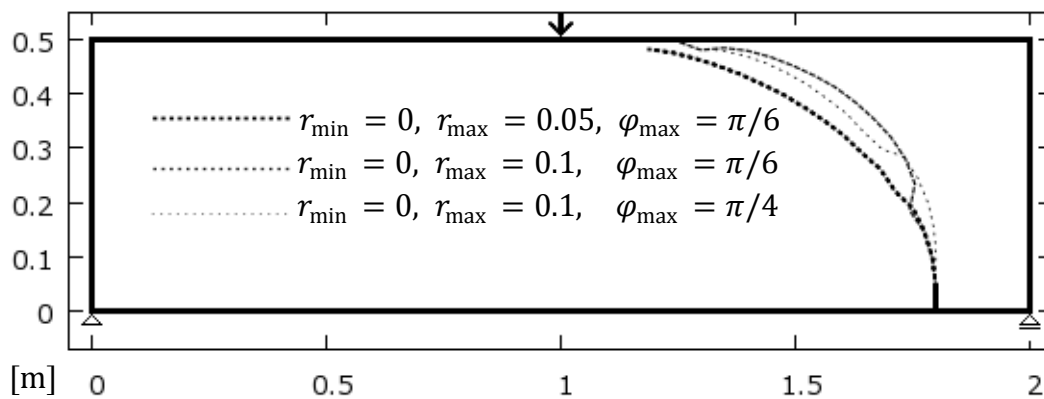
$f_I(r, \theta)$, $f_{II}(r, \theta)$ jsou funkce polohy daného bodu definované jako

$$f_I(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (25)$$

$$f_{II}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (26)$$

Je patrné, že vypočtený poměr K_{II}/K_I bude záviset na parametrech sledované oblasti r_{\min} , r_{\max} a φ_{\max} , ze které načítáme hodnoty napětí. Parametry r_{\min} resp. r_{\max} představují minimální resp. maximální délku průvodiče sledovaného bodu. Parametr φ_{\max} udává maximální absolutní hodnotu úhlu bodu v polárních souřadnicích, viz Obrázek 2.2. V těsné blízkosti kořene trhliny jsou hodnoty napětí zatíženy velkou chybou, ve větších vzdálenostech zase slábne vliv asymptotického pole napětí. Na přesnost konečného výsledku, kterým je dráha šířící se trhliny, má výrazný vliv nejen samotná velikost a orientace sledované oblasti, ale také velikost prvků sítě a zhuštění prvků v okolí kořene trhliny. Správné nastavení všech parametrů je největším úskalím této metody.

Obrázek 4.2 ukazuje, jak se může lišit výsledná trajektorie šíření trhliny při různém nastavení parametrů této metody.



Obrázek 4.2: Různé trajektorie trhliny pro různá nastavení parametrů kritéria maximálního obvodového napětí

Pro opravdu nevhodně zvolené parametry může dojít i k tomu, že se trhlina šíří evidentně špatným směrem. Toto chování je velice nepříjemné a vede k pochybnostem o praktické použitelnosti této varianty metody maximálního obvodového napětí.

4.2.3 Simulace šíření trhliny pomocí kritéria maximálního obvodového napětí s hledáním maximální normované hodnoty napětí

V této variantě kritéria maximálního obvodového napětí se nepočítá poměr K_{II}/K_I , ale hodnoty σ_θ se určí ze vztahu, který definuje obvodové napětí

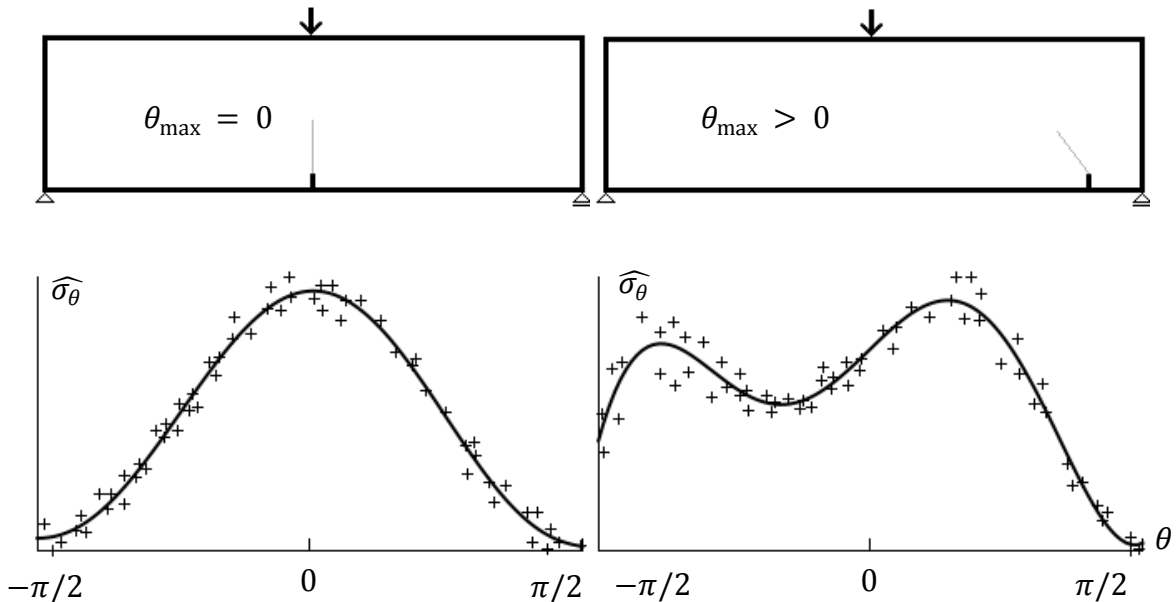
$$\sigma_\theta(r, \theta) = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (27)$$

Sledovanou oblast zvolíme jako výseč z mezikruží s poloměry r_{\max} , r_{\min} a úhlem $\pm\varphi_{\max}$. Pro Gaussovy body ve sledované oblasti určíme hodnotu σ_θ ze vztahu (27). Protože se jednotlivé body nacházejí v různé vzdálenosti od kořene a napětí v této části má singulární charakter typu $1/\sqrt{r}$, je nutné hodnoty normovat následujícím způsobem

$$\widehat{\sigma}_\theta(r, \theta) = \sqrt{\frac{r}{r_{\text{ref}}}} \sigma_\theta(r, \theta) \quad (28)$$

Tímto normováním převedeme hodnoty obvodového napětí na stejnou referenční vzdálenost r_{ref} , kterou můžeme uvažovat jednotkovou. Získané hodnoty $\widehat{\sigma}_\theta$ proložíme polynomem a získáme průběh obvodového napětí na intervalu $(-\varphi_{\max}, \varphi_{\max})$. Směr šíření trhliny získáme jako úhel $\theta_{\max} \in (-\theta_0, \theta_0)$, který maximalizuje hodnotu polynomu na daném intervalu.

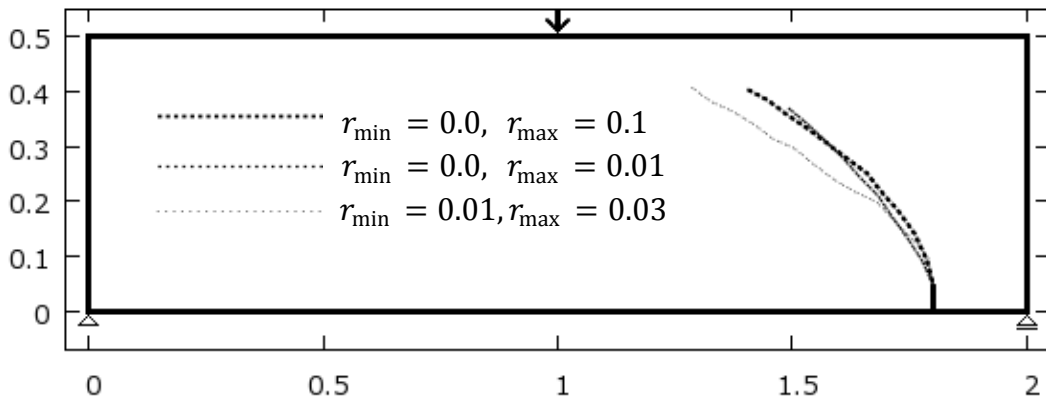
Obrázek 4.3 znázorňuje jednotlivé hodnoty normovaného obvodového napětí pro dva nosníky s různou polohou počáteční trhliny.



Obrázek 4.3: Průběh normovaného obvodového napětí pro nosníky s různou polohou trhliny

V prvním případě je počáteční trhlinka umístěna na ose symetrie a je tedy namáhána pouze v módu I. Vidíme, že maximálního normovaného napětí je dosaženo pro úhel $\theta_{\max} = 0$, tomu odpovídá šíření trhliny v původním směru, jak je v obrázku naznačeno světlou čarou. U druhého nosníku je počáteční trhlinka umístěna u pravé podpory, v jedné desetíně rozpětí. V průběhu normovaného obvodového napětí pozorujeme dvě maxima. Globální maximum nastává pro kladnou hodnotu úhlu θ a odpovídá naznačenému směru šíření směrem doleva. Lokální maximum, které nastává pro zápornou hodnotu úhlu θ , by znamenalo šíření trhliny směrem doprava, ale hodnota úhlu, která mu odpovídá, se nenachází v intervalu $(-\theta_0, \theta_0)$. V těsné blízkosti podpory, kde je dominantní smykové namáhání, se může stát, že toto lokální maximum převládne, trhlinka se pak skutečně bude šířit doprava a nosník se poruší usmýknutím kolem podpory.

Pokud tento postup aplikujeme na šíření trhliny pro případ druhého nosníku, dostáváme trajektorie šíření trhliny, které představuje Obrázek 4.4. Vidíme, že trajektorie se opět liší v závislosti na volbě parametrů sledované oblasti. Pokud do sledované oblasti nezahrneme nejtěsnější okolí trhliny, dostáváme trajektorie trhliny jdoucí přímočařeji do zatěžovaného bodu. Zatímco pokud uvažujeme i těsné okolí kořene trhliny, dostáváme podobné trajektorie jako v předešlé variantě a výsledek se příliš neliší v závislosti na parametru r_{\max} . Tato varianta se při volbě parametru $r_{\min} = 0$ zdá být stabilnější než předešlá varianta používající poměr K_{II}/K_I .



Obrázek 4.4: Různé trajektorie trhliny pro různá nastavení parametrů kritéria maximálního obvodového napětí

4.2.4 Hodnocení kritéria maximálního obvodového napětí

Přestože je metoda maximálního obvodového napětí často používána v nejrůznější literatuře, detaily spojené s její numerickou implementací bývají zmiňovány jen zřídka [7]. Pro vhodně nastavené parametry lze touto metodou dosáhnout velice dobrých výsledků, ale její lokální charakter způ-

sobuje výraznou citlivost na detaily numerické implementace, a proto je její použití značně komplikované.

Samotná hodnota obvodového napětí σ_θ se ukázala pro výpočet faktoru intenzity napětí v módu I jako téměř nepoužitelná, viz kapitola 4.1 v [1]. Mnohem lepších výsledků bylo dosaženo s použitím globální energetické metody, proto se nabízí vyzkoušet kritérium pro šíření trhliny ve smíšeném módu používající právě tuto globální metodu a zbavit se tak závislosti na lokálních parametrech sledované oblasti.

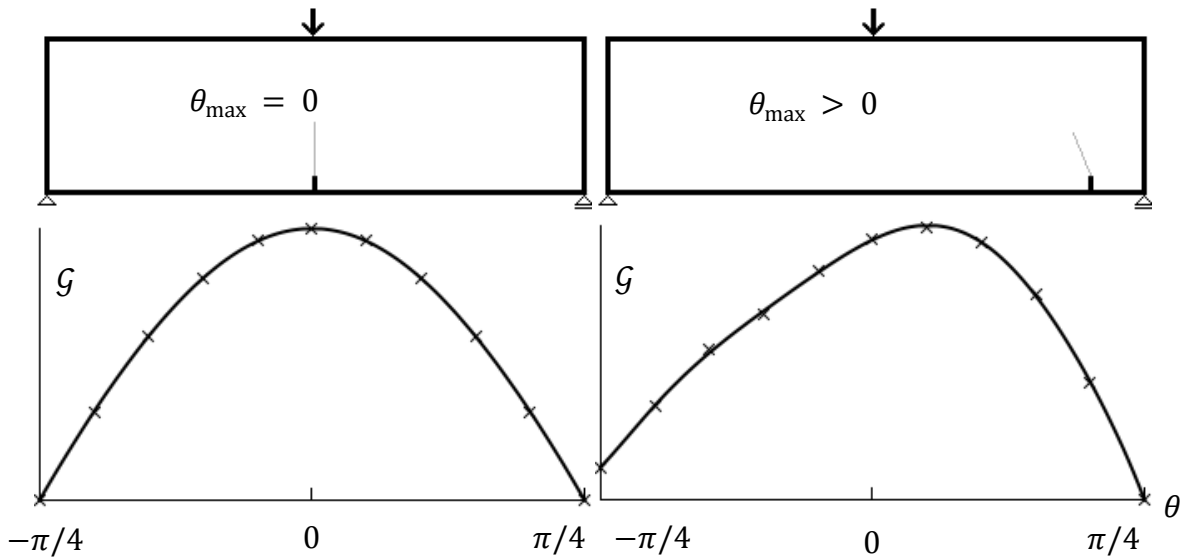
4.3 Kritérium maximální hodnoty hnací síly trhliny

Motivací k používání tohoto kritéria jsou dobré výsledky, kterých bylo dosaženo globální energetickou metodou při výpočtu hnací síly trhliny [1].

4.3.1 Popis metody

Postup by mohl být podobný jako při výpočtu hnací síly trhliny v módu I, kdy jsme provedli ve směru, ve kterém očekáváme šíření trhliny, několik výpočtů pro různě zvětšenou délku trhliny a z výsledků určili hnací sílu trhliny \mathcal{G} v tomto směru. Zde však předem neznáme směr šíření θ , ale právě naopak ho chceme určit. Proto potřebujeme určit hodnotu \mathcal{G} pro všechny možné hodnoty, kterých může úhel θ nabývat. Výpočet \mathcal{G} pro jeden směr je však časově dosti náročný (obsahuje několik výpočtů MKP, které jsou nejdlejší částí programu), proto by nebylo efektivní provádět ho mnohokrát pro postupně se měnící θ . Mnohem lepší a rychlejší bude, pokud provedeme výpočet \mathcal{G} v několika předem stanovených směrech a výsledné hodnoty proložíme polynomelem. Tím získáme hodnoty \mathcal{G} pro všechny přípustné směry šíření a najít pro ně na polynomu maximum už je snadnou numerickou záležitostí. Úhel θ , pro který nabývá polynom představující hnací sílu trhliny \mathcal{G} maxima, představuje hledaný směr šíření trhliny. Hodnotu hnací síly \mathcal{G} je také možno využít k rozhodnutí, zda k šíření trhliny pro dané zatížení bude docházet, jak je popsáno v části 2.1.2.

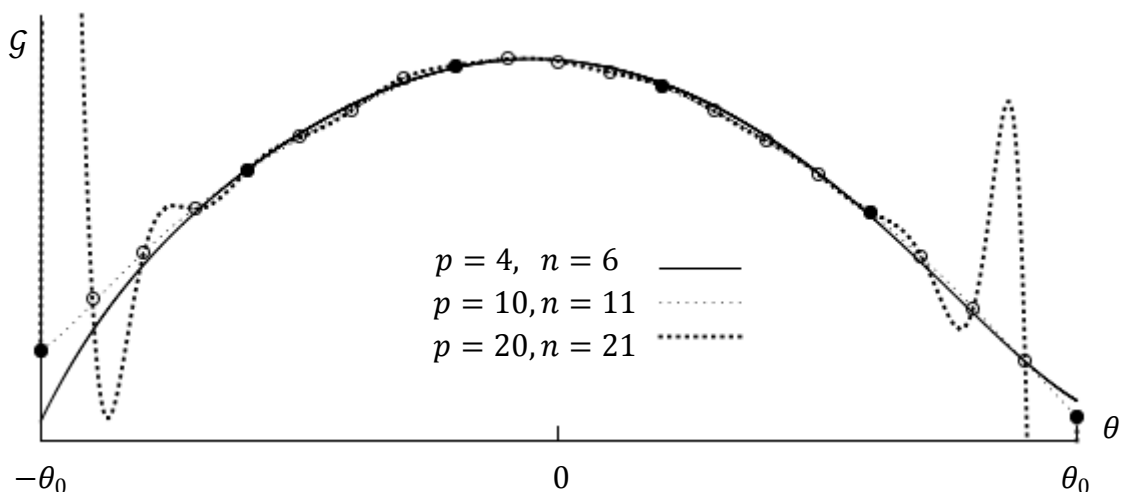
Obrázek 4.5 znázorňuje jednotlivé hodnoty hnací síly \mathcal{G} proložené polynomelem pro dva nosníky s různou polohou počáteční trhliny, stejně jako v kapitole 4.2.3.



Obrázek 4.5: Průběh hnací síly pro nosníky s různou polohou trhliny

V prvním případě je počáteční trhlina umístěna na ose symetrie a je tedy namáhána pouze v módu I. V tomto případě dostáváme maximální hodnotu \mathcal{G} pro úhel $\theta_{\max} = 0$, tomu odpovídá šíření trhliny v původním směru, jak je v obrázku naznačeno světlou čarou. U druhého nosníku je počáteční trhlina umístěna u pravé podpory, v jedné desetíně rozpětí. V tomto případě nastává maximum \mathcal{G} pro kladnou hodnotu úhlu θ , která odpovídá naznačenému směru šíření směrem doleva.

Každý bod na Obrázku 4.5 představuje jeden výpočet MKP s trhlinou prodlouženou ve směru, který odpovídá příslušnému úhlu θ . Protože tyto výpočty představují časově nejnáročnější část celého programu, je na místě zabývat se tím, kolik takovýchto výpočtů je k dostatečně přesnému určení θ_{\max} potřeba. Proto byla provedena analýza, jak závisí určená hodnota θ_{\max} na počtu zvolených bodů n , pro které se provádí výpočet MKP, a stupni interpolačního polynomu p , kterým jsou tyto body prokládány. Ukázalo se, že velký počet zvolených bodů, který představuje výraznou časovou zátěž, nevede k přesnějšímu určení maxima \mathcal{G} , ale právě naopak může přinášet komplikace. Pokud je při velkém počtu bodů zvolen i vysoký stupeň interpolačního polynomu, dochází často k tomu, že interpolační polynom na krajích intervalu silně osciluje, viz Obrázek 4.6. To zpravidla vede k chybnému určení maxima \mathcal{G} a tedy i směru šíření θ_{\max} . Jako naprosto postačující se ukázalo používat polynom stupně 4 pro 6 zvolených bodů, které jsou rovnoměrně rozprostřeny v intervalu $(-\theta_0, \theta_0)$. Pro takovéto nastavení dává interpolační polynom v okolí maxima téměř totožný výsledek jako přesnější polynomy, viz Obrázek 4.6.



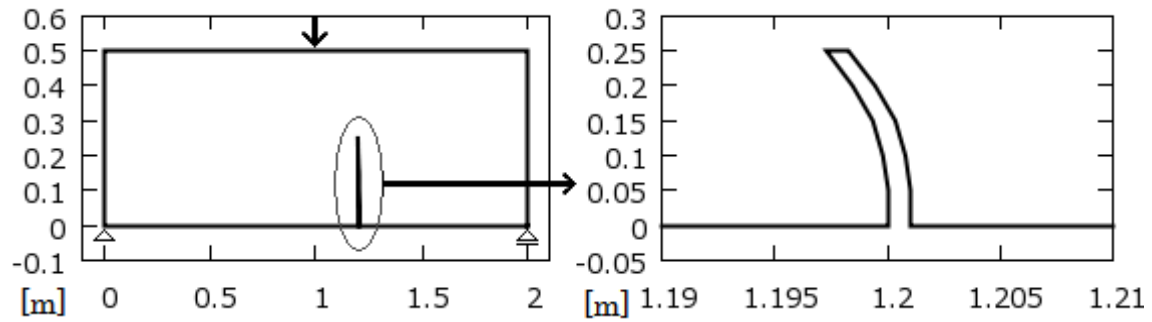
Obrázek 4.6: Proložení rovnoměrně rozložených bodů interpolačním polynomem, při různě zvoleném stupni polynomu p a počtu bodů n

Jinou variantou je postupné přidávání bodů do oblasti maxima G a postupná aktualizace polynomu. Takto získané zpřesnění θ_{\max} je však zanedbatelné, vzhledem k tomu, jak zpomaluje celý výpočet. Proto byly vždy používány hodnoty $p = 4$ a $n = 6$, které vedou k velmi přesnému výsledku v rozumném čase.

Přestože myšlenka realizace této metody je velice jednoduchá, při numerické implementaci se ukazuje, že výsledky jsou silně závislé na způsobu modelování trhliny a jejího rozšiřování. Pokud prodlužujeme trhlínu v šikmém směru, dochází ke zlomu nespojitosti sítě. Pak se může stát, že pro různé směry šíření je vygenerována různě hustá síť. Tím je ovlivněna tuhost modelu a není možné přesně určit hnací sílu trhliny. Při snaze vyhnout se těmto nežádoucím změnám hustoty sítě jsme zkoušeli modelovat trhlínu jako zářez s konečnou šířkou. Tento způsob se však ukázal jako naprosto nepoužitelný. Jednotlivé způsoby modelování trhliny jsou představeny v kapitolách 4.3.2 a 4.3.3.

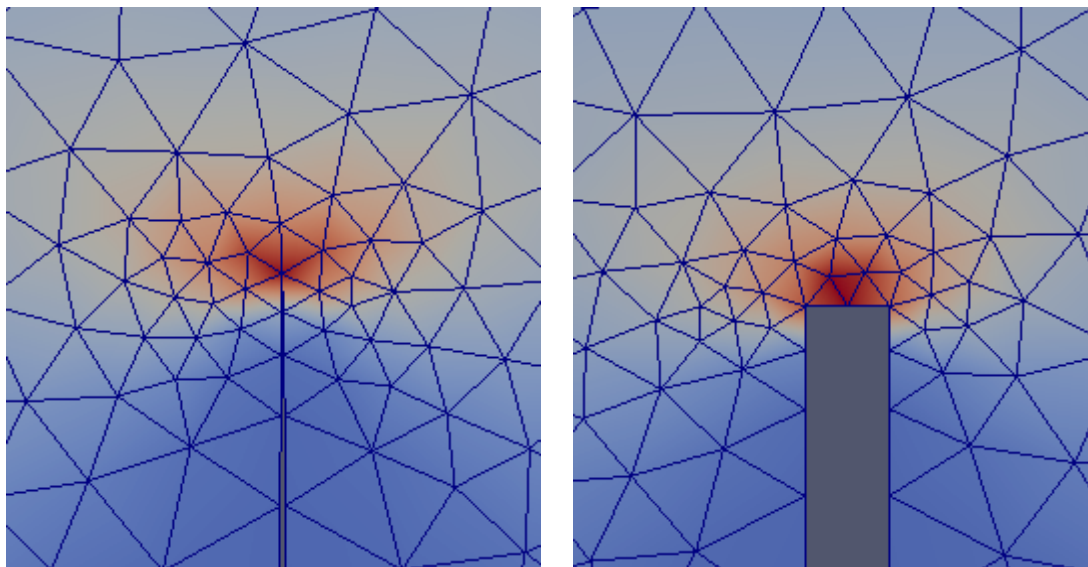
4.3.2 Trhlina s konečnou šířkou

Metodu navrženou v části 4.3.1 jsme aplikovali na betonový nosník z kapitoly 4.2.3. S tím rozdílem, že trhlina s počáteční délkou 50 mm byla posunuta o 200 mm doprava od osy symetrie a měla konečnou šířku 1 mm. Trhlínu jsme zvětšili v každém kroku o 50 mm, dokud nedosahovala do poloviny výšky nosníku. Očekáváme, že trhlina se bude šířit doleva a bude směřovat do bodu, který je zatížen osamělou silou. Výsledek vidíme na Obrázku 4.7.



Obrázek 4.7: Šíření trhliny ve smíšeném módu pro trhlínu s šířkou 1 mm

Trhlina se podle očekávání začíná šířit vlevo, ale jen nepatrně a nezdá se, že by směřovala do zatíženého bodu. Naopak má silnou tendenci preferovat původní směr, podobné chování sledujeme i tehdy, pokud počáteční trhlínu umístíme dále od osy symetrie. Příčinou tohoto chování je způsob modelování trhliny. Pokud trhlínu modelujeme jako zářez s konečnou šířkou, jsou v okolí kořene dvě singularity, viz Obrázek 4.8. Každý z rohů představuje singularitu, která má tendenci určit směr šíření právě tímto rohem. Výsledné rozložení napětí je dáno spojením obou singularit. To způsobuje, že výsledný směr šíření je vždy téměř totožný s původním směrem trhliny, a to i v případech kdy je evidentní, že trhlina se nebude šířit v původním směru. Proto je tento způsob modelování trhliny pro určení směru šíření naprosto nevhodný.



Obrázek 4.8: Detail sítě a porovnání napětí σ_x pro různé způsoby modelování trhliny

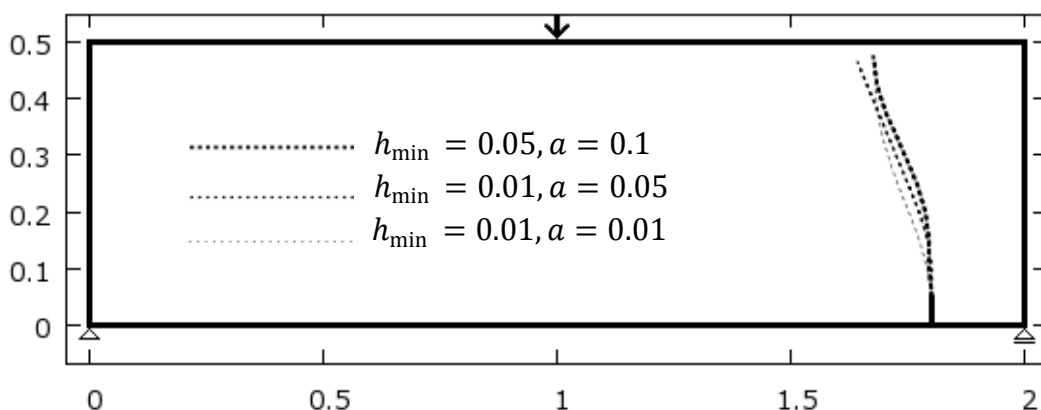
Při snaze vyhnout se problémům s různým zahušťováním sítě pomocí modelování trhliny s konečnou šířkou, bylo zjištěno, že tento způsob modelování je pro určování směru šíření naprosto nepoužitelný. Proto je nutné se vrátit

k předchozímu způsobu modelování a problémy se zahušťováním sítě vyřešit jiným způsobem.

4.3.3 Trhlina s ostrou špičkou

Při tomto způsobu modelování trhliny dochází k různému zahušťování sítě, především pokud je přírůstek trhliny a výrazně menší než nastavená velikost prvku v okolí kořene trhliny h_{\min} . V tomto případě totiž generátor sítě automaticky vytváří v okolí trhliny prvky o velikosti a , které s rostoucí vzdáleností plynule přechází na základní velikost prvku h . Pro různé natočení trhliny se tento přechod odehrává v různě velké oblasti. To znamená, že jednotlivé sítě se liší v počtu prvků až o desítky procent, což výrazně ovlivňuje jejich tuhost a znemožňuje přesné určení \mathcal{G} . Tomuto chování lze předjet, pokud budeme volit přírůstek trhliny větší a jako násobek h_{\min} . Přičemž velikost zmenšených prvků h_{\min} není vhodné volit menší než desetinu základní velikosti prvku h . Takto nastavené parametry vedou ke generování sítě s podobným počtem prvků. Z tohoto pohledu by bylo ideální volit $h_{\min} = h$, tedy neprovádět zjemňování prvků vůbec. Pak skutečně dostáváme síť s téměř totožným počtem prvků, ale síť je v tomto případě buď příliš hrubá v okolí kořene, což způsobuje značné nepřesnosti, nebo naopak zbytečně jemná v okolních částech, což představuje neúnosné zvýšení časové náročnosti výpočtu. Proto je vhodné volit kompromis $h_{\min}/h \cong 0.1$.

Pro různě nastavené parametry h_{\min} a a dostáváme podobné trajektorie trhliny, viz Obrázek 4.9. Vidíme, že trajektorie se nejprve stáčí ve směru hlavního napětí, ale když už je nosník významně porušen, preferují spíše jeho kolaps pro nejkratší možnou dráhu trhliny.

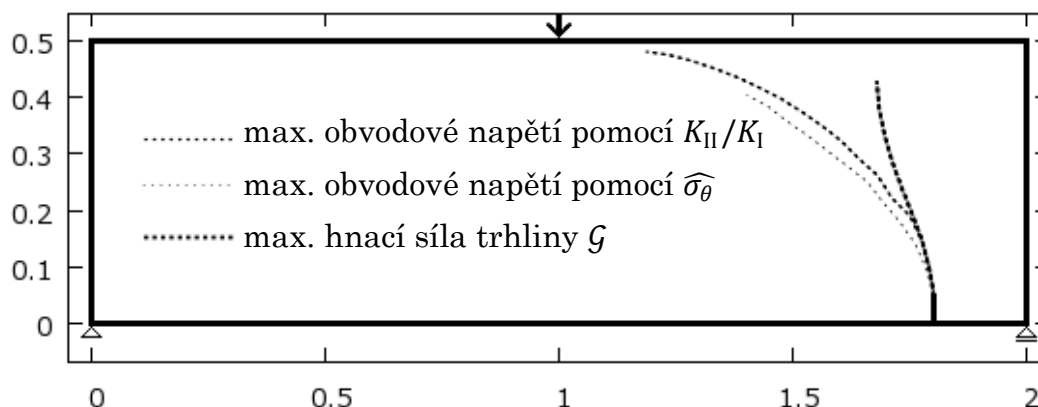


Obrázek 4.9: Různé trajektorie trhliny, získané metodou maximální hnací síly trhliny, pro různé hodnoty velikosti prvků v okolí trhliny h_{\min} a jednotlivých přírůstku trhliny a , při základní velikosti prvku $h = 0.1$

4.4 Porovnání kritérií pro nosník s trhlinou

Celkem jsme otestovali tři metody pro určení směru šíření trhliny ve smíšeném módu. První dvě vychází z kritéria maximálního obvodového napětí a dávají podobný výsledek. Třetí metoda používá kritérium maximální hnací síly trhliny a výsledky získané pomocí této metody se liší od předchozích dvou. Porovnání jednotlivých metod můžeme vidět na Obrázku 4.10.

Tento příklad, kdy pro dvě kritéria, která jsou obě odvozena na základě rozumných fyzikálních předpokladů, dostáváme různé výsledky, jasně ilustruje aktuálnost celé problematiky šíření trhliny ve smíšeném módu.



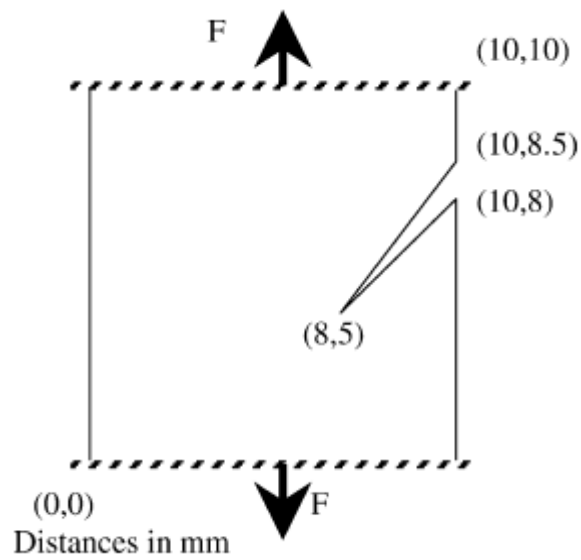
Obrázek 4.10: Porovnání metod pro určení směru šíření

4.5 Srovnávací výpočty

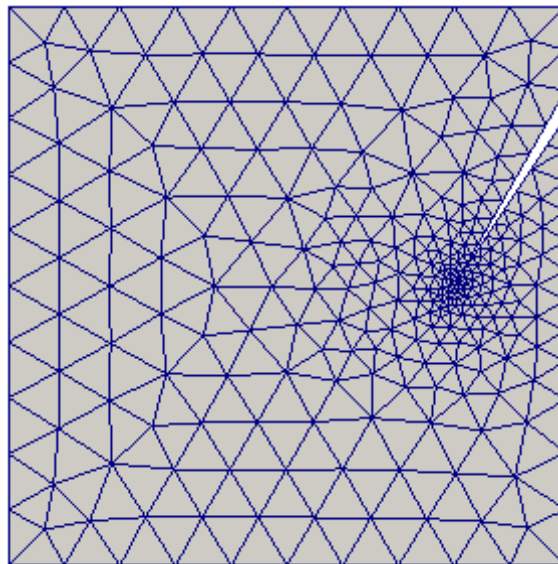
K otestování správnosti výsledků, které jsme obdrželi pro nosník s nesymetricky umístěnou trhlinou, použijeme další dva příklady převzaté z článku [7]. Jedná se o čtvercový panel s šikmou počáteční trhlinou trojúhelníkového tvaru, viz Obrázek 4.11. A obdélníkový panel, který obsahuje dva kruhové otvory a dvě počáteční trhliny umístěné tak, že panel je středově symetrický, viz Obrázek 4.13. V obou případech je panel vystaven svislému tahu. Tento způsob namáhání budeme modelovat pomocí následujících okrajových podmínek:

- Každému bodu spodní hrany panelu je bráněno v posunu ve vodorovném i svislém směru.
- Každému bodu horní hrany je předepsán svislý posun směrem nahoru a zároveň je bráněno vodorovnému posunu.
- Všechny ostatní body zůstávají volné.

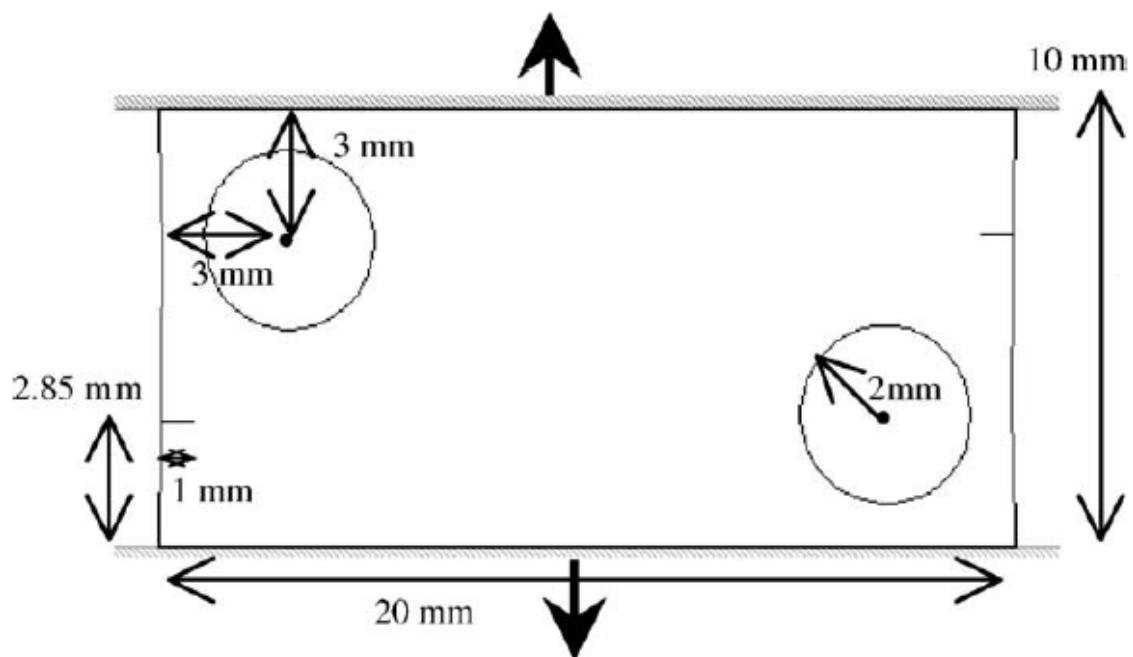
Materiál obou panelů uvažujeme dokonale elastický s modulem pružnosti $E = 98 \text{ GPa}$ a Poissonovým součinitelem $\nu = 0,3$.



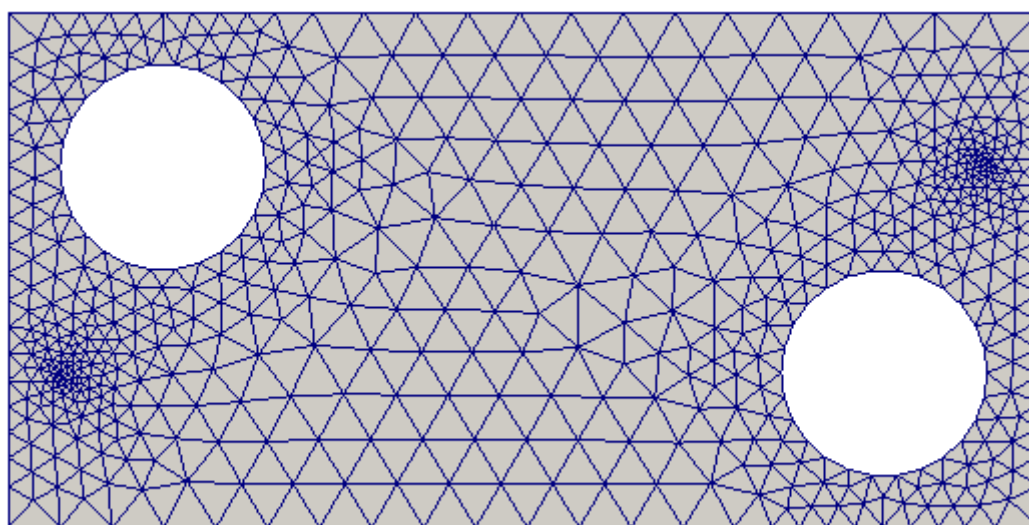
Obrázek 4.11: Geometrie čtvercového panelu s šikmou trhlinou, převzato z [7]



Obrázek 4.12: Výchozí konečněprvková síť



Obrázek 4.13: Geometrie obdélníkového panelu s otvory, převzato z [7]

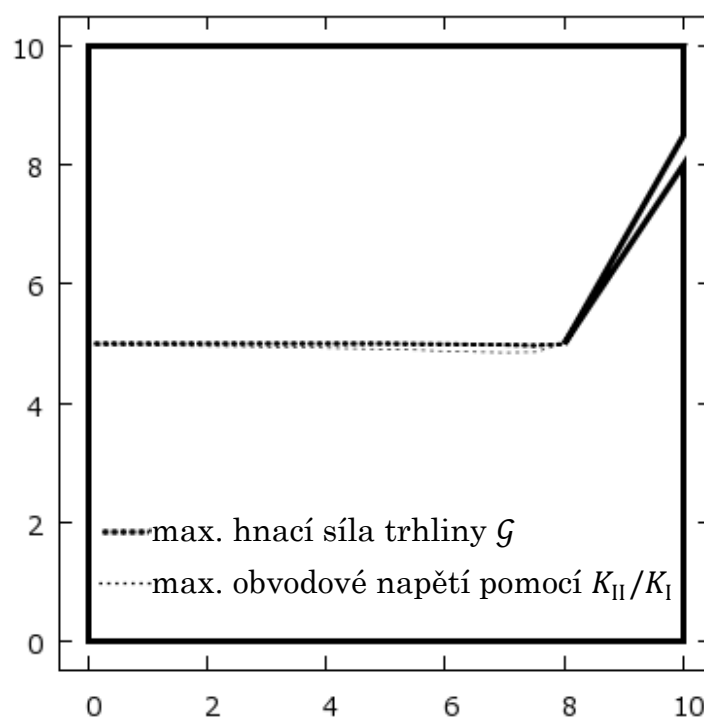


Obrázek 4.14: Výchozí konečněprvková síť

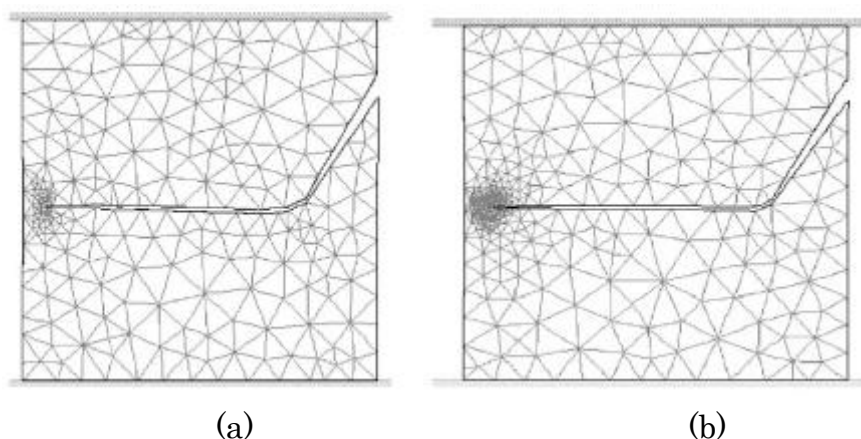
Výsledky pro tyto dva modely bude možné porovnat s výsledky uvedenými v článku [7], kde jsou použity tři různé metody pro určení směru šíření. Toto porovnání použijeme k ověření, zda námi používané metody dávají rozumné výsledky.

4.5.1 Panel s šikmou trhlinou

Pokud panel s šikmou trhlinou vystavíme svislému tahu, dostáváme pomocí kritéria maximální hnací síly trhliny téměř dokonale vodorovnou trajektorii šíření. Při použití kritéria maximálního obvodového napětí (varianta s poměrem K_{II}/K_I) pozorujeme, že směr šíření trhliny je zprvu nepatrně ovlivněn jejím původním natočením, ale velmi rychle přechází na téměř vodorovný, viz Obrázek 4.15.



Obrázek 4.15: Trajektorie trhliny pro různé metody určení směru šíření. Stejně chování pozorujeme i u výsledků z článku [7], viz Obrázek 4.16



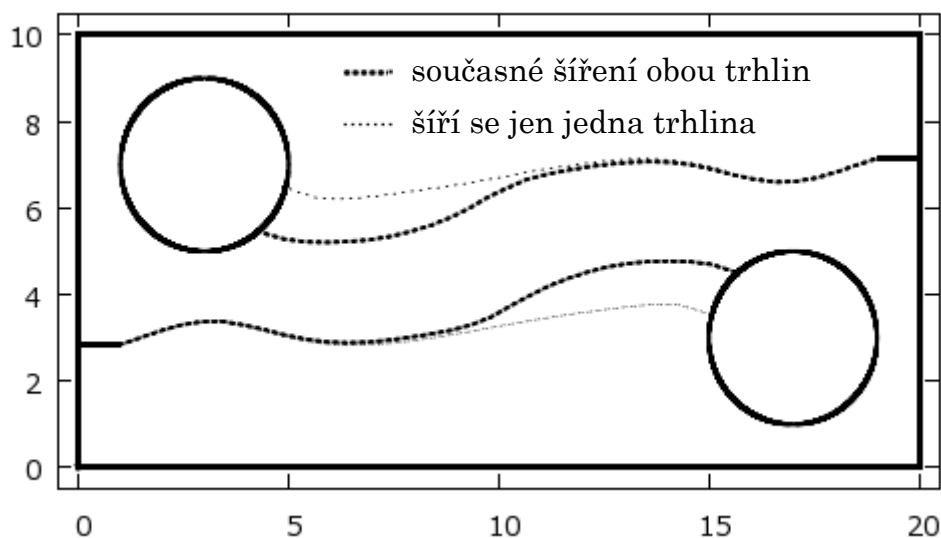
Obrázek 4.16: Trajektorie trhliny pro (a) maximální obvodové napětí, (b) maximální hnací sílu trhliny, převzato z [7]

4.5.2 Panel s dvojicí otvorů

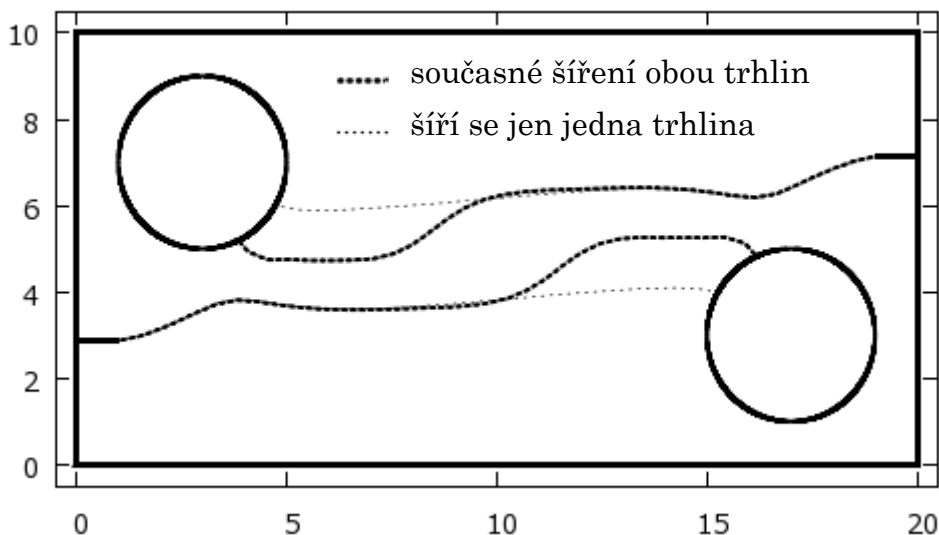
V tomto panelu se nachází dvě vodorovné počáteční trhliny. V obecném případě by bylo nutné určit hodnotu prodloužení v jednom kroku pro každou

trhlinu zvlášť. Tato hodnota by mohla pro danou trhlinu záviset například na velikosti její hnací síly nebo hodnotě obvodového napětí v referenční vzdálenosti. V tomto případě však můžeme díky symetrii předpokládat, že trhliny se budou šířit stejně rychle. Můžeme tedy používat stejně velký přírůstek pro obě trhliny, stejně jako autoři v článku [7].

Při svislém tahu očekáváme, že trhlina se bude nejprve přibližovat k otvoru, poté dojde k přeorientování a převládne vodorovný směr, dokud se trhlina nedostane do blízkosti druhého otvoru nebo okraje panelu. Takovéto trajektorie skutečně pozorujeme, pokud necháme jednu trhlinu šířit se celým panelem samostatně. Na Obrázcích 4.17 a 4.18 tomu odpovídají trajektorie zobrazené tenkou čarou. Naproti tomu při současném šíření obou trhlín dostáváme trajektorie zobrazené čarou tlustou. V tomto případě pozorujeme, že když se obě trhliny dostanou přibližně do jedné třetiny, přiblíží se natolik, že se začnou navzájem ovlivňovat. A trajektorie obou trhlín se začnou stáčet k sobě. Potom opět u obou trhlín převládne vodorovný směr, dokud nejsou trhliny ovlivněny druhým otvorem. Obrázek 4.17 zobrazuje tyto trajektorie získané pomocí kritéria maximálního obvodového napětí (varianta s poměrem K_{II}/K_I). Podobné, ale o něco přímočařejší trajektorie dostáváme s použitím kritéria maximální hnací síly trhliny, viz Obrázek 4.18.

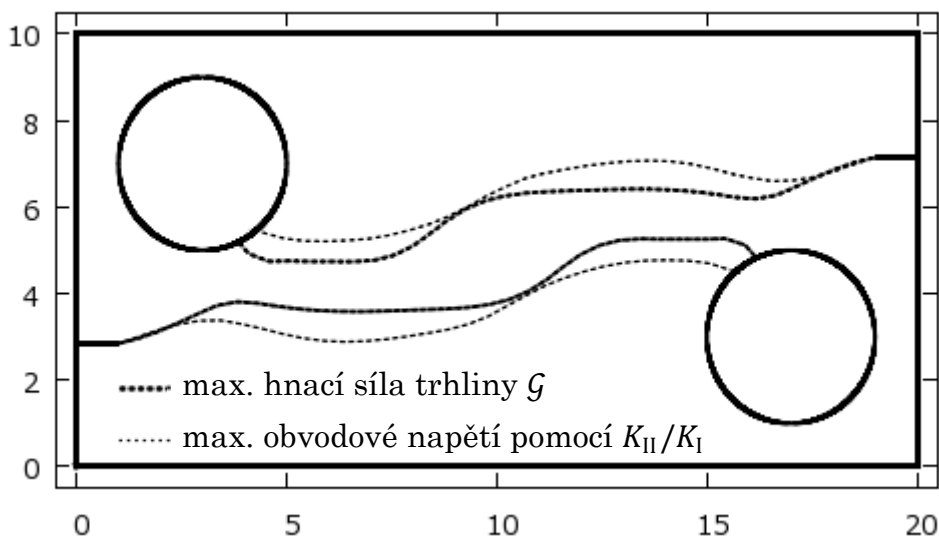


Obrázek 4.17: Trajektorie s použitím maximálního obvodového napětí



Obrázek 4.18: Trajektorie s použitím maximální hnací síly trhliny

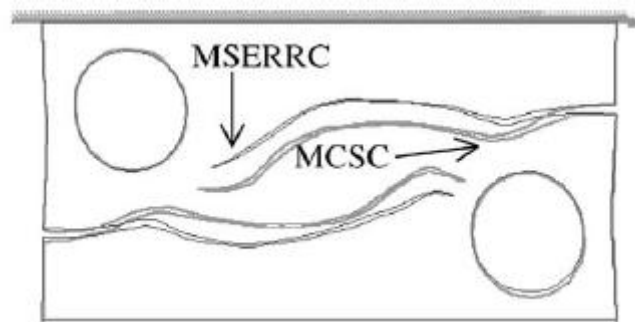
Jednotlivé trajektorie pro dané kritérium se opět drobně liší v závislosti na nastavení jeho parametrů. Základní tendence změn směru jsou však stejné. To platí i při porovnání obou kritérií, viz Obrázek 4.19.



Obrázek 4.19: Porovnání trajektorií pro různá kritéria

Pomocí obou metod dostáváme pro obě trhliny téměř dokonale symetrické trajektorie. Kritérium, pro které vycházejí trajektorie blíže u sebe, je sice opačné než v článku [7], ale jinak mají výsledky velice podobný charakter, viz Obrázek 4.20. Kritériu maximálního obvodového napětí odpovídá křivka MCSC (maximum circumferential stress criterion) a kritériu maximální hnací síly zase křivka MSERRC (maximum strain energy release rate criterion). Nutno však podotknout, že v článku [7] je u obou metod použit jiný způsob numerické implementace. Hnací síla trhliny je počítána pomocí „ $G\theta$

method“ a k určení směru maximálního obvodového napětí je použito hlavních napětí.



Obrázek 4.20: Trajektorie trhliny pro maximální obvodové napětí (MCSC) a maximální hnací sílu trhliny (MSERRC), převzato z [7]

5 Závěr

Pro určení směru šíření trhliny ve smíšeném módu byly navrženy dvě varianty kritéria maximálního obvodového napětí, které byly porovnány s kritériem maximální hnací síly trhliny. Ukázalo se, že dvě různá kritéria dávají pro případ taženého panelu s šikmou počáteční trhlinou nebo s dvojicí trhlin a otvorů téměř stejné výsledky, které jsou totožné s výsledky dostupnými v literatuře. Ale pro ohýbaný nosník s nesymetricky umístěným vrubem dává každé kritérium jiný výsledek.

Detailně byly prostudovány jednotlivé numerické aspekty všech použitých metod. Ukázalo se, že obě lokální varianty, které k určení směru šíření používají kritérium maximálního obvodového napětí, jsou velice citlivé na změnu parametrů sledované oblasti. Oproti tomu globální metoda, která používá kritérium maximální hnací síly, dává pro různé nastavení parametrů této metody téměř totožné výsledky. Proto se zdá být vhodnější než lokální metody. V některých případech však tato metoda může dávat odlišné trajektorie trhliny než lokální metody a v takovém případě nelze jednoznačně rozhodnout, která trajektorie je správná.

Součástí práce bylo vytvoření robustního programu pro simulaci šíření trhliny, který kombinuje vždy příslušnou metodu s automatickou generací sítě pomocí generátoru T3D a programem pro výpočet metodou konečných prvků OOFEM.

6 Použitá literatura

1. MIKEŠ, K. Numerická simulace šíření trhliny založená na lineární lomové mechanice. Katedra mechaniky, Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze, 2013. Dostupné také z: http://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/7/70/Bazant_2013_mikes.pdf
2. IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957, č. 24, s. 361-64.
3. JIRÁSEK, M. a J. ZEMAN. *Přetváření a porušování materiálů*. Praha: ČVUT, 2008.
4. GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1921, č. 221, s. 163-98.
5. PATZÁK, B. *OOFEM project home page* [online]. [cit. 2014-02-21]. Dostupné z: <http://www.oofem.org>
6. RYPL, D. *T3D Mesh Generator* [online]. [cit. 2014-02-21]. Dostupné z: <http://ksm.fsv.cvut.cz/~dr/t3d.html>
7. BOUCHARD, P. O. F. BAY a Y. CHASTEL. Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2003, č. 192, s. 3887-908.