Vplyv geometrie na hodnotu efektívneho Poissonovho súčiniteľa auxetického metamateriálu

-

Soutěž o cenu akademika Bažanta

Katedra mechaniky
Fakulta stavební
ČVUT

Nataša Jošková

17. 4. 2023

Poďakovanie

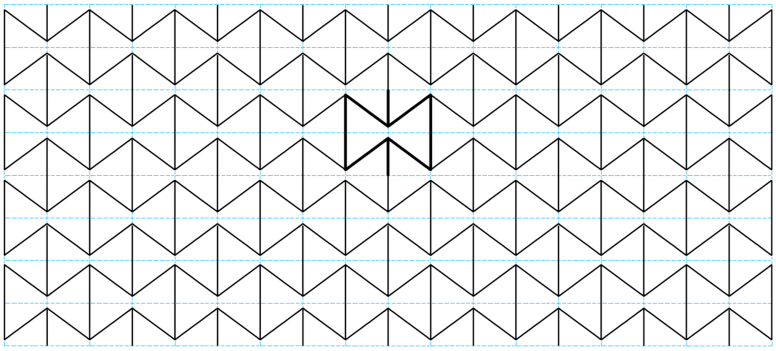
Ďakujem pánovi inžinierovi Martinovi Doškářovi za cenné rady ohľadom semestrálnej práce a všetok čas, ktorý mi venoval.

Obsah

1 Teoretický úvod

Metamateriál je umelo vytvorený materiál so špeciálnymi vlastnosťami, ktoré sa bežne u prírodných materiálov nevyskytujú. Väčšinou sa tento materiál skladá z periodicky sa opakujúcich buniek s určitou štruktúrov, vďaka ktorej získavajú svoje vlastnosti. V našej práci budeme skúmať auxetický metamateriál, ktorý má zápornú hodnotu Poissonovho súčiniteľa, čím sa líši od väčšiny materiálov.

Konkrétne vlastnosti metamateriálov vieme priamo navrhnúť, čo nám umožňuje vopred si určiť, ako sa materiál bude správať. Vďaka tomu nemusíme zdĺhavo experimentálne hľadať materiál, ktorý by spĺňal naše požiadavky, stačí ho navrhnúť. Pri návrhu metamateriálov sa pracuje s ich mikoštruktúrou, ktorá môže byť rozlične usporiadaná. V závislosti od geometrie mikroštruktúry majú auxetické metamateriály rozličné využitie. Používajú sa napríklad ako tepelné a akustické izolácie, ochranné obleky a časti v autách za účelom zvýšenia bezpečnosti, pretože vďaka negatívnemu Poissonovmu číslu dokážu distribuovať silu, čím sú odolnejšie voči nárazom.



Obr. 1: Vybraná štruktúra auxetického metamateriálu

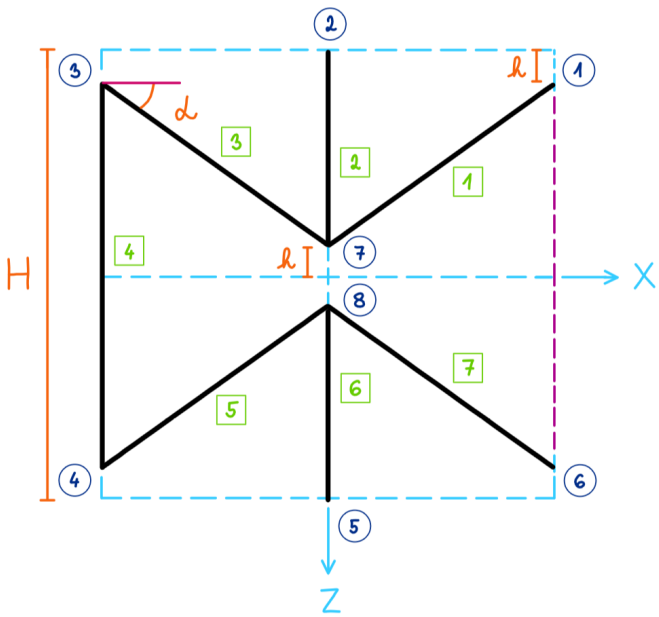
Cieľom našej práce je určiť vplyv geometrie mikroštruktúry auxetického metamateriálu z Obr. 1 na hodnotu Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} a ν_{zx}. V sekcii 2 použijeme obecnú deformačnú metódu na vytvoreniu matice tuhosti mikroskopickej štruktúry metamateriálu. V sekcii 3 sa budeme zaoberať homogenizáciou metamateriálu a následným vyjadrením ν_{xz} a ν_{zx} z homogenizovanej matice tuhosti.

2 Štrukúra metamateriálu

2.1 Geometria

Na Obr. 1 je znázornená štruktúra vybraného auxetického metamateriálu, ktorý pozostáva z periodicky sa opakujúcej bunky, čo nám umožňuje si zvoliť jednu reprezentatívnu bunku, s ktorou budeme ďalej pracovať.

Bunka sa nachádza v súradnicovom systéme $x - z$ so začiatkom v jej strede. Zavedieme si orientáciu kladnej poloosi x doprava a kladnej poloosi z dolu. Reprezentatívna bunka má štvorcový tvar a je tvorená 7 prutmi a 8 styčníkmi. Číslovanie prutov a styčníkov môžeme vidieť na Obr. 2.



Obr. 2: Geometria reprezentatívnej bunky

Vyjadríme si dĺžku jednotlivých prutov v závislosti na výške bunky H a uhle α, ktorý zviera prut 3 s priamkou rovnobežnou s osou x a prechádzajúcou styčníkom 3. Práve pomocou spomínaného uhlu α budeme meniť geometriu metamateriálu a tým jeho vlastnosti. Preto si všetky nasledujúce vzťahy vyjadríme v závislosti od uhlu α, ktorý z dôvodu zachovania zvolenej štruktúry zobrazenej na Obr. 2 patrí do intervalu $(0, 45\rangle$ stupňov.

2.2 Numerický model

V nasledujúcich častiach budeme používať obecnú deformačnú metódu na určenie vzťahov medzi koncovými silami, posunmi a pootočeniami v jednotlivých styčníkoch geometrického modelu z Obr. 2.

2.2.1 Lokálna matica tuhosti prutu

Rovnica (1) uvádza maticu tuhosti prutu v lokálnom súradnom systéme. Práve z nej budeme vychádzať pri tvorbe lokálnych matíc tuhosti konkrétnych prutov našej štruktúry.

$$\mathsf{K}_i^l = \begin{bmatrix} \frac{A\,\mathrm{E}}{L_i} & 0 & 0 & -\frac{A\,\mathrm{E}}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,\mathrm{E\,I}}{L_i^3} & -\frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} & 0 & -\frac{12\,\mathrm{E\,I}}{L_i^3} & -\frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} \\ 0 & -\frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} & \frac{4\,\mathrm{E\,I}}{L_i} & 0 & \frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} & \frac{2\,\mathrm{E\,I}}{L_i} \\ -\frac{A\,\mathrm{E}}{L} & 0 & 0 & \frac{A\,\mathrm{E}}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\,\mathrm{E\,I}}{L_i^3} & \frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} & 0 & \frac{12\,\mathrm{E\,I}}{L_i^3} & \frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} \\ 0 & -\frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} & \frac{2\,\mathrm{E\,I}}{L_i} & 0 & \frac{6\,\mathrm{E\,I}}{L_i^2} & \frac{4\,\mathrm{E\,I}}{L_i} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Lokálne matice tuhosti pre jednotlivé pruty získame dosadením vyjadrených dĺžok prutov, pričom plocha prierezu A, Youngov modul pružnosti E a moment zotrvačnosti I zavedieme pre všetky pruty zhodné. Šírku prierezu budeme uvažovať jednotkovú, výškou prierezu t tak definujeme všetky prierezové charakteristiky.

2.2.2 Globálna matica tuhosti prutu

Získané lokálne matice tuhosti teraz potrebujeme transformovať do globálnych matíc tuhosti prutov. Výsledkom bude vyjadrenie koncových posunov a pootočení v globálnom súradnom systéme, čo je oveľa praktickejšie a lepšie sa nám s tým bude ďalej pracovať. Transformačná matica T_i i-teho prutu v závislosti od natočenia prutu z vodorovnej polohy vyjadreného uhlom α má tvar

$$\mathsf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Lokálne matice tuhosti prutov K_i^l transformujeme do globálneho súradnicového systému nasledujúcimi vzťahmi

$$\mathsf{K}_i^g = \mathsf{T}_i \mathsf{K}_i^l \mathsf{T}_i^\mathsf{T} \,. \tag{3}$$

2.2.3 Globálna matica tuhosti štruktúry

Zjednotili sme orientácie posunov a pootočení matíc tuhosti jednotlivých prutov do globálneho súradného systému, čím sme umožnili ich spojenie do jednej globálnej matica tuhosti štruktúry prutov K. Máme 8 styčníkov, na každom 2 posuny a 1 pootočenie, preto naša matica bude mať veľkosť 24×24. Prvky tuhosti matice K dostaneme sčítaním koeficientov prislúchajúcich k posunom a pootočeniam v danom styčníku, čoho dosiahneme lokalizáciou globálnych matíc tuhosti prutov K_i^g do jedinej matice tuhosti K, reprezentujúcej celú štruktúru bunky pomocou lokalizačných matíc L_i.

$$\mathsf{K} = \sum_i \mathsf{L}_i^\mathsf{T} \mathsf{K}_i^g \mathsf{L}_i \tag{4}$$

Napríklad na styčník 7 nám vplývajú posuny a potočenia z troch prutov: 1, 2 a 3. V tomto prípade dostaneme prvky tuhosti matice príslušné k posunom a pootočeniu v styčníku sčítaním všetkých posunov a pootočení zo styčníku 7 spomínaných prutov. Uvádzame tu ako príklad lokalizačnú maticu L_1, prislúchajúcu prutu 1 so začiatočným bodom 7 a koncovým bodom 1, a tým maticu K_1^g.

$$\mathsf{L}_1 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

3 Homogenizácia

Doteraz sme pracovali s diskrétnym prutovým modelom, ktorý sa dá popísať lineárnym vzťahom

$$\mathsf{F} = \mathsf{K}\mathsf{u}\,, \tag{5}$$

pričom vektor F obsahuje sily a momenty pôsobiace postupne na všetky styčníky, K je matica tuhosti a u je vektor styčníkových posunov obsahujúci u_i, w_i, φ_i, postupne pre jednotlivé styčníky.

V nasledujúcich častiach bude naším cieľom určiť homogenizované vlastnosti auxetického metamateriálu na základe usporiadania jeho mikroštruktúry. Umožní nám to skúmať správanie bunky metamateriálu ako celku, pričom zoberieme do úvahy vlastnosti jednotlivých jej častí. Dostaneme sa tým z diskétneho heterogénneho modelu metamateriálu na mikroúrovni na homogénny makroskopický model.

3.1 Energetické úvahy

Materiál sa prirodzene snaží dostať do stavu, v ktorom má najmenej energie, pretože je to preňho najvýhodnejšie. Z toho môžeme usúdiť, že pri každej deformácii existuje určitý tvar, do ktorého sa bunka zdeformuje, pretože vyžaduje najmenej energie. Ako motivácia nám slúži potenciálna energia $\mathcal{E}_p$ lineárnej pružiny, ktorá je priamo úmerná tuhosti k a kvadrátu posunu konca x.

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{6}$$

Analogicky je možné napísať energiu $\mathcal{E}$ diskrétneho systému prutov, ktorý reprezentuje našu bunku zloženú z prutov a styčníkov, ako

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathsf{u}^\mathsf{T}\mathsf{K}\mathsf{u}\,. \tag{7}$$

Obdobne môžeme pre lineárne pružný materiál na makroskopickej úrovni, o objeme V, ktorý je vystavený uniformnej deformácií E, písať vzťah pre energiu

$$\mathcal{E}_M = V\frac{1}{2}\mathsf{E}^\mathsf{T}\mathsf{D}\mathsf{E}\,, \tag{8}$$

v ktorom je D matica tuhosti hľadaného efektívneho materiálu a vektor E obsahuje jednotlivé makroskopické zložky tenzoru pretvorenia

$$\mathsf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{zz} & E_{xz} \end{bmatrix}^\mathsf{T}\,. \tag{9}$$

3.2 Kinematika prvého radu

V práci budeme uvažovať homogenizáciu prvého radu, v ktorej je pole posunov $\vec{u}(\vec{x})$ možné písať ako

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^E(\vec{x}) + \vec{u}^*(\vec{x}), \tag{10}$$

kde $\vec{u}^E$ označuje makroskopickú a $\vec{u}^*$ fluktuačnú časť. Makroskopická časť poľa posunov odpovedá stavu, kedy by bola celá bunka zložená z homogénneho materiálu vystavená konštantnému makroskopickému tenzoru pretvorenia (vo vektorovej forme) E. Vzťah medzi posunmi a pootočeniami diskrétneho modelu od makroskopickej časti deformácie $\vec{u}^E$, súradnicami daného bodu a vektorom E je vyjadrený ako

$$\begin{bmatrix} u_i^E \\ w_i^E \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & 0 & z_i \\ 0 & z_i & x_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \\ E_{\mathrm{xz}} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Pre homogenizáciu prvého radu ďalej platí, že objemový priemer gradientu poľa posunov $\vec{u}(\vec{x})$ musí odpovedať E. Zavedením operátora symetrického gradientu ∇^s definovaného ako

$$\nabla^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

dostaneme jeho aplikáciou a priemerovaním cez jednotkovú bunku Ω vzťah

$$\mathsf{E} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}^E(\vec{x}) + \nabla^s \vec{u}^*(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}\,. \tag{13}$$

Vďaka tomu, že $\vec{u}^E(\vec{x})$ je volené práve tak, aby $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}^E(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = \mathsf{E}$, dostávame obmedzujúci požiadavok na fluktuačnú časť posunov

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla^s \vec{u}^*(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = \mathsf{0}\,. \tag{14}$$

Pre diskrétny model môžeme následne napísať pôvodné stupne voľnosti u v závislosti na vektore E a fluktuačných neznámych u^*. Pre zjednodušenie označme

$$\widehat{\mathsf{u}} = \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{u}^* \end{bmatrix}, \tag{15}$$

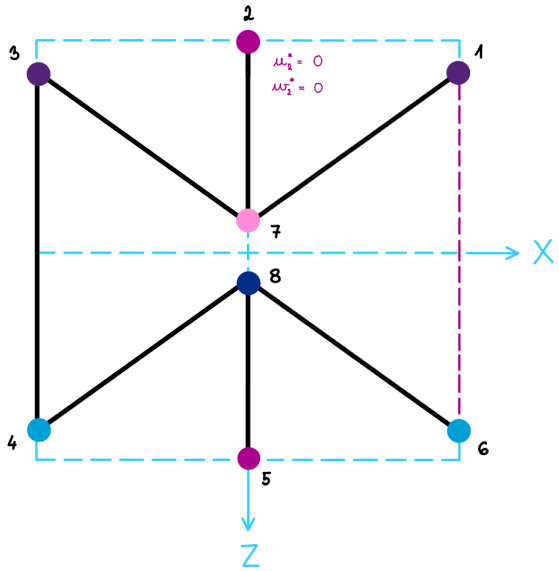
potom môžeme písať

$$\mathsf{u} = \begin{bmatrix} \mathsf{Q}^E & \mathsf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{u}^* \end{bmatrix} = \mathsf{Q}\,\widehat{\mathsf{u}}\,, \tag{16}$$

kde I je štvorcová matica identity a Q^E je zložená z blokov odpovedajúcich výrazu (11).

3.3 Periodické okrajové podmienky

Nulový priemerný gradient fluktuačnej časti poľa posunov je možné dosiahnuť s uvažovaním periodických okrajových podmienok pre fluktuačné posuny. Umožňuje nám ich zaviesť práve štruktúra skúmaného metamateriálu, v ktorej sa periodicky opakuje jedna reprezentatívna bunka. Tieto podmienky sú zároveň prirodzeným modelovým predpokladom pri materiáli, v ktorom sa jeho geometria periodicky opakuje. Pri deformácií našej bunky sa jej okolité bunky, pre zachovanie štruktúry, budú deformovať rovnako. Pripomeňme, že pôvodný model má 3×8 fluktuačných stupňov voľnosti. Zavedieme si vektor a^*, do ktorého usporiadame 3×5 fluktuačných premiestnení (na 5 styčníkoch štruktúry budú rozdielne premiestnenia). Nahradíme nimi pôvodné posuny a pootočenia bodov homogenizovanej bunky na miestach, kde sa nachádzali styčníky.



Obr. 3: Periodické okrajové podmienky

Na Obr. 3 sú zobrazené rovnakou farbou body, v ktorých budú zhodné posuny a pootočenia. V mieste styčníku 2 predpíšeme nulový posun u_2^* a w_2^*, pričom pootočeniu φ_2^* nebudeme brániť. Týmto krokom dosiahneme, že bunka sa nám nebude v priebehu deformácie samovoľne pohybovať v priestore, ale ostane ukotvená. Z dôvodu periodickosti štruktúry metamateriálu budeme mať nulové aj posuny u_6^* a w_6^* v bode styčníku 6, pretože zdola susedí s reprezentatívnou bunkou rovnaká bunka, ktorej bod styčníku 2 pred homogenizáciou je zhodný s bodom 6 diskrétneho modelu bunky.

Nezávislé stupne voľnosti pre periodické posuny a pootočenia a^* je možné pomocou matice P spojiť s premiestneniami styčíknov odpovedajúcich fluktuačnej

časti deformácie u^*. Obdobne, ako v (15) je možné rozšíriť tieto nezávislé stupne voľnosti o stupne voľnosti odpovedajúce makroskopickému pretvoreniu, matica $\widehat{\mathsf{P}}$ prepája makroskopické pomerné deformácie a fluktuačné premiestnenia $\widehat{\mathsf{u}}$ s periodickými okrajovými podmienkami a_i^*.

$$\widehat{\mathsf{u}} = \begin{bmatrix} E \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{I} & 0 \\ 0 & \mathsf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{a}^* \end{bmatrix} = \widehat{\mathsf{P}}\,\widehat{\mathsf{a}} \tag{17}$$

Spojením makroskopickej a fluktuačnej zložky deformácie dostaneme vzťah pre posuny a pootočenia jednotlivých bodov bunky metamateriálu

$$\mathsf{u} = \mathsf{Q}\widehat{\mathsf{P}}\,\widehat{\mathsf{a}}\,. \tag{18}$$

3.4 Eliminácia styčníkových premiestnení

Teraz môžeme vyjadrť energiu diskrétneho modelu periodickej bunky v závislosti na makroskopickej deformácií E a fluktuačných neznámych a^* dosazením výrazu (17) do (7) ako

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{a}^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \widehat{\mathsf{K}}_{EE} & \widehat{\mathsf{K}}_{Ea^*} \\ \widehat{\mathsf{K}}_{a^*E} & \widehat{\mathsf{K}}_{a^*a^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{E} \\ \mathsf{a}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\,\widehat{\mathsf{a}}^T \widehat{\mathsf{K}}\,\widehat{\mathsf{a}}\,. \tag{19}$$

V ďalšom kroku si vyjadríme pomerné deformácie bunky E s ohľadom na premiestnenia a^*, pretože nás zaujíma, ako sa správa celá homogenizovaná bunka, nie jej jednotlivé body. Pomocou Schurovho doplnku odkondenzujeme hornú ľavú submaticu 3x3, prislúchajúcu pomerným deformáciam E, z matice $\widehat{K}$. Týmto krokom získame energiu bunky $\mathcal{E}$, závislú iba na pomerných deformáciach bunky E.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\mathsf{E}^T(\widehat{\mathsf{K}}_{EE} - \widehat{\mathsf{K}}_{Ea^*}\widehat{\mathsf{K}}_{a^*a^*}^{-1}\widehat{\mathsf{K}}_{a^*E})\,\mathsf{E} = \frac{1}{2}\,\widehat{\mathsf{E}}^T \mathsf{K}^{\mathrm{eff}}\,\widehat{\mathsf{E}} \tag{20}$$

Porovnaním vyššie uvedeného výrazu (20) a výrazu pre energiu homogénneho materiálu o objeme $V = |\Omega|$, podrobeného konštantnej deformácií E v rovnici (8) získame výsledný vzťah pre homogenizovanú materiálovú tuhosť auxetického metamateriálu

$$\mathsf{D}^{\mathrm{hom}} = \frac{1}{|\Omega|}\mathsf{K}^{\mathrm{eff}}\,. \tag{21}$$

3.5 Určenie Poissonovho súčiniteľa

Náš metamateriál je ortotropný, z čoho vyplýva, že bude mať 2 hodnoty Poissonovho súčiniteľa v závislosti od smeru pomernej deformácie, ktorú predpíšeme. Napätie v metamateriáli budeme značiť Σ, aby sme odlíšili makroskopickú úroveň, na ktorej práve pracujeme od mikroskopickej. Keďže očakávame výsledný lineárny vzťah medzi makroskopickou deformáciou E a makroskopickým napätím $\mathsf{\Sigma}$, platí

$$\mathsf{\Sigma} = \mathsf{D}^{\mathrm{hom}}\mathsf{E}\,. \tag{22}$$

Rozpísaním výrazu (22) po zložkách dostaneme

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{zz} \\ \Sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} & 0 \\ d_{zx} & d_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{zz} \\ E_{xz} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Zložky d_{xz} a d_{zx} sú rovnaké, pretože celková matica tuhosti musí byť symetrická. Pre stanovenie Poissonovho čísla ν_{ij} prevedieme myšlienkový jednoosý ťahový/tlakový experiment, v ktorom predpíšeme makroskopickú deformáciu v smere i a z podmienky nulového makroskopického napätia v smere j dopočítame nevyhnutnú deformáciu v smere j. Výsledkom tohto myšlienkového experimentu sú dva nasledujúce vzťahy

$$E_{zz} = -\frac{d_{xz}}{d_{zz}} E_{xx}\,, \tag{24}$$

$$E_{xx} = -\frac{d_{zx}}{d_{xx}} E_{zz}\,, \tag{25}$$

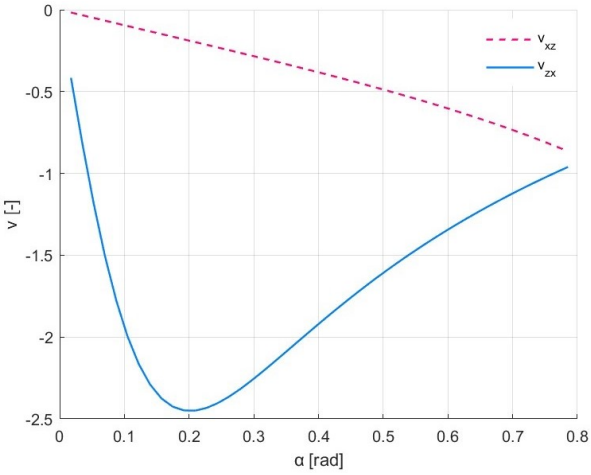
pomocou ktorých už jednoducho vyjadríme hodnotu Poissonovho súčiniteľa pre obidva smery, keďže sa jedná o záporný pomer dopočítanej a predpísanej veličiny. Získané vzťahy pre výpočet Poissonovho súčiniteľa majú tvar

$$\nu_{xz} = -\frac{E_{zz}}{E_{xx}} = \frac{d_{xz}}{d_{zz}}\,, \tag{26}$$

$$\nu_{zx} = -\frac{E_{xx}}{E_{zz}} = \frac{d_{zx}}{d_{xx}}\,. \tag{27}$$

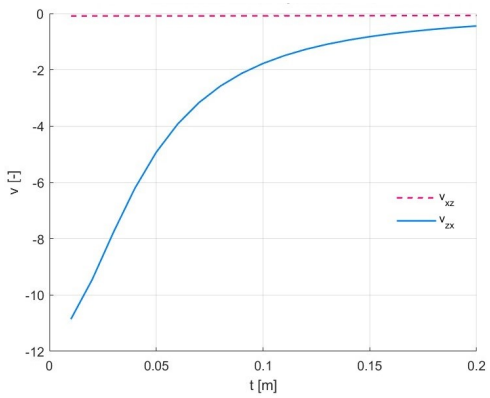
4 Výsledky

Závislosť Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} a ν_{zx} je zobrazená na Obr. 4. So zväčšujúcim sa uhlom α rastie absolútna hodnota Poissonovho súčiniteľa ν_{xz}. Poissonov súčinteľ ν_{zx} má extrém o veľkosti $\nu_{xz} = -2.45$ pri uhle $\alpha = 11.57°$. Do tohto bodu jeho absolútna hodnota prudko rastie a následne potom začne klesať.

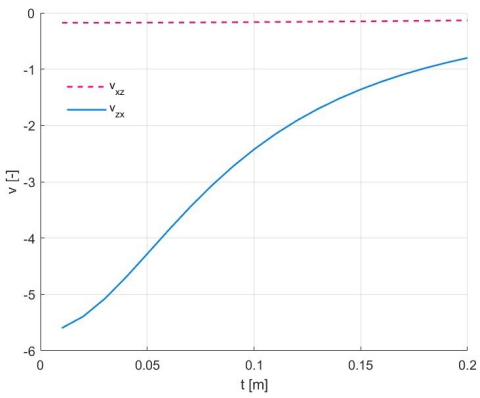


Obr. 4: Poissonov súčiniteľ v závislosti od uhlu α

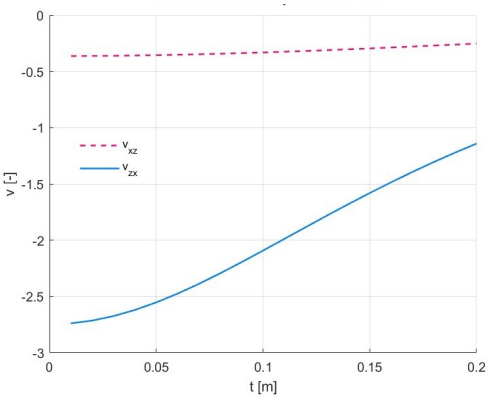
Poissonov súčiniteľ sme v závislosti od uhlu α vyjadrili s vopred stanovenou výškou prierezu jednotlivých prutov $t = 0.1$ m. V nasledujúcich grafoch môžete vidieť hodnoty ν_{xz} a ν_{zx} v závislosti na hrúbke prierezu s rozličnou geometriou štruktúry, ktorá je ovládaná pomocou uhlu α. Absolútna hodnota Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} aj ν_{zx} klesá so zväčšujúcou sa hrúbkou prierezu. Je nutné tu poznamenať, že celý model je založený na Bernoulliho-Navierovej hypotéze, ktorá je presná pre relatívne štíhle pruty. Výška prierezu nad 0.1 m je už nad bežne odporúčanú hranicu platnosti tejto hypotézy nehľadiac na fakt, že pre väčšie hodnoty už prestáva stačiť prutový model.



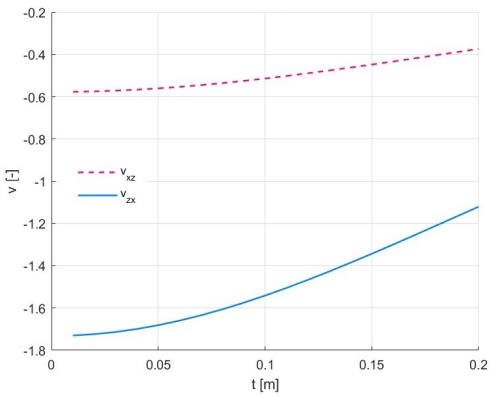
(a) $\alpha = 5°$



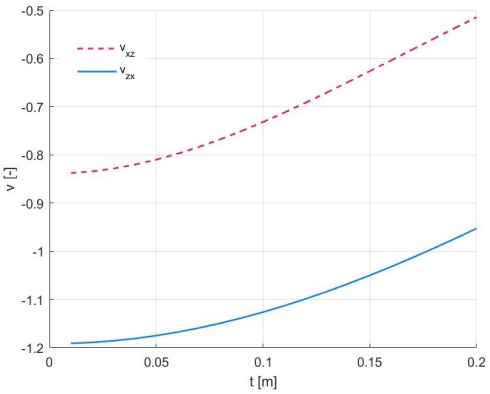
(b) $\alpha = 10°$



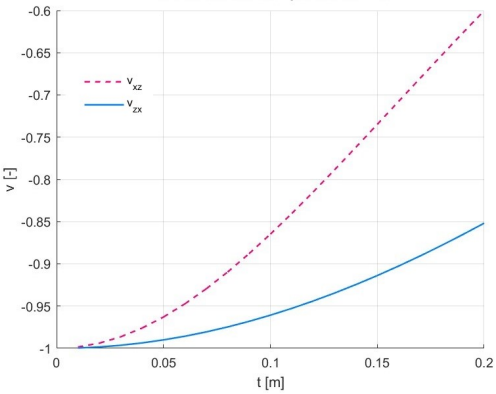
(c) $\alpha = 20°$



(d) $\alpha = 30°$



(e) $\alpha = 40°$



(f) $\alpha = 45°$

Obr. 5: Závislosť Poissonovho súčiniteľa na výške prierezu t pre vybrané uhly α.

5 Záver

Cieľom práce bolo určiť vplyv geometrie, parametrizovanej pomocou uhlu α, vybranej topológie auxetického metamateriálu na efektívne hodnoty Poissonovho súčiniteľa pre dva na seba kolmé smery.

Pre dosiahnutie tohto cieľa sme na začiatku práce, s využitím obecnej deformačnej metódy, vyjadrili lokálne matice tuhosti pre jednotlivé pruty. Následne sme ich transformovali do globálneho súradnicového systému a prepojili do jednej matice tuhosti K štruktúry bunky. V ďalšom kroku sme zaviedli predpoklady homogenizácie prvého radu a pôvodné stupne voľnosti diskrétneho modelu sme vyjadrili pomocou stupňov príslušných makroskopických pretvorení a fluktuačných stupňov voľnosti. Pre fluktuačné stupne voľnosti sme ďalej zaviedli predpoklady periodicity a u vybraného bodu sme zabránili posunom pre zabránenie posunu bunky ako tuhého celku. Na základe energetických úvah sme zostavili výraz pre energiu diskrétneho systému s uvažovaním vyššie uvedených stupňov voľnosti. Keďže sa fluktuačné stupne voľnosti dajú chápať ako vnútorné premenné diskrétneho modelu metamateriálu, je možné tieto neznáme odkondenzovať pomocou Schurových doplnkov a získať tak, po vydelení efektívnym objemom periodickej bunky, výslednú homogenizovanú tuhosť skúmaného metamateriálu. Ako posledný krok sme z vyjadrenej homogenizovanej matice tuhosti určili efektívne hodnoty Poissonovho súčiniteľa pre dva na seba kolmé smery.

Z výsledných grafov závislosti efektívneho Poissonovho súčiniteľa na zvolenom uhle α vyplýva, že absolútna hodnota Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} rastie so zväčšujúcim sa uhlom α. Poissonov súčiniteľ ν_{xz} v smere kolmom na ν_{xz} má odlišný priebeh. Jeho absolútna hodnota dosahuje maxima pri uhle $\alpha = 11.57°$, odkiaľ začne klesať a približovať sa hodnotám ν_{xz}. Hrúbka prierezov jednotlivých prutov, z ktorých sa štruktúta metamateriálu skladá, výrazne ovplyvňuje veľkosť Poissonovho súčiniteľa ν_{xz} aj ν_{zx}, pričom jeho absolútna hodnota s rastúcou hrúbkou klesá.