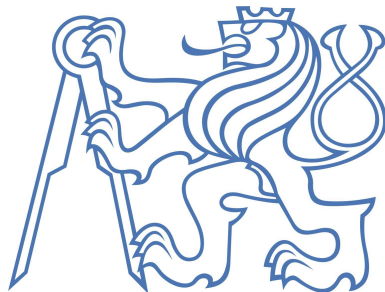


České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební



SVOČ

Lokalizační vlastnosti modelů poškození

Martin Horák

Vedoucí práce: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Studijní program: Stavební inženýrství

Obor: Konstrukce a dopravní stavby

květen 2008

Obsah

Seznam obrázků	ii
Seznam tabulek	ii
1 Úvod	2
2 Mechanika poškození	3
2.1 Jednoosý model poškození	3
2.2 Víceosý izotropní model poškození	4
2.3 Zákon poškození	5
2.4 Matice tečné tuhosti	7
3 Lokalizace poškození	9
4 Lokalizační analýza	11
4.1 Lokalizační analýza izotropního modelu poškození	12
4.2 Lokalizační analýza pro rovinnou napjatost	14
5 Ověření výsledků výpočtem metodou konečných prvků	18
Reference	22

Seznam obrázků

1 Model poškození jako svazek pružných vláken	3
2 Pracovní diagramy pro různé modely poškození	6
3 Tažený prut	9
4 Dvě hodnoty deformace pro dané napětí a rozložení napětí po délce prutu	9
5 Módy lokalizace (a) Tahový mód (b) Smykový mód	12
6 Úhly lokalizace, α udává poměr mezi hlavními napětími, θ je uhel pod kterým se bude poškození lokalizovat	15
7 Úhly lokalizace pro různá k s ekvivalentní deformací podle Misesa	16
8 Úhly mezi vektory \mathbf{m} a \mathbf{n} v závislosti na poměru hlavních napětí	17
9 Poměr mezi E_{ed} a E_u pro Misesův model v závislosti na poměru hlavních napětí	17
10 Ukázka použité sítě s natočením středního pásu prvků o $\Theta = 18^\circ$	18
11 Mazarsův model, $\Theta =$ (a) 27° (b) 33° (c) 41° (d) 46°	20
12 Rankinův model, $\Theta =$ (a) 27° (b) 33° (c) 41° (d) 46°	20
13 Misesův model, $\Theta = 33^\circ$ (a) $k = 1$ (b) $k = 2$ (c) $k = 10$ (d) $k = 20$	21

Seznam tabulek

1	Základní hodnoty pro jednoosý tah	16
2	Výsledky výpočtů MKP - Mazars	18
3	Výsledky výpočtů MKP - Rankine	19
4	Výsledky výpočtů MKP - Mises, $\Theta = 33$	19

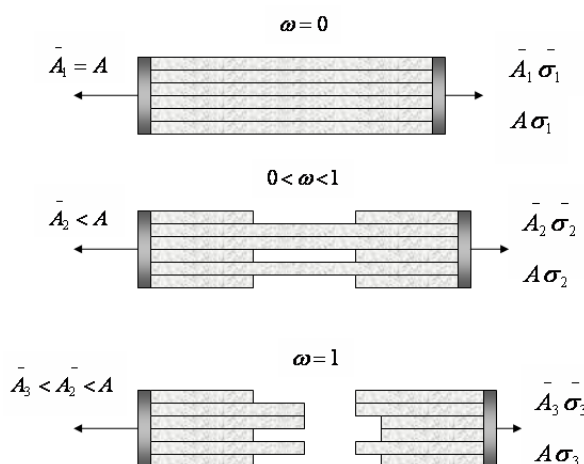
1 Úvod

Cílem je popsat lokalizační vlastnosti založené na mechanice poškození používané pro popis porušení kvazikřehkých materiálů jako je beton. Pro různé varianty izotropního modelu poškození bude provedena teoretická analýza založená na klasické podmínce singularity akustického tenzoru. Její výsledky pak budou ověřeny pomocí simulací lokalizace poškození metodou konečných prvků.

2 Mechanika poškození

Mechanika poškození popisuje chování materiálů při vzniku, šíření a vzájemném spojování malých trhlin nebo jiných defektů. Využívá se spíše při počátečním stádiu poškození materiálu, kdy jsou trhliny ještě poměrně malé a rovnoměrně rozptýlené. Vycházíme z představy kontinua a vliv trhlin popíšeme snížením tuhosti a pevnosti materiálu.

2.1 Jednoosý model poškození



Obrázek 1: Model poškození jako svazek pružných vláken

Pro lepší pochopení si můžeme materiál představit jako svazek vláken, která se chovají pružně až po dosažení jisté meze, poté křehce praskají. Jelikož tato mez je pro různá vlákna různá, zavedeme efektivní plochu \bar{A} , která vyjadřuje plochu vláken, která nepraskla. Musíme tedy rozlišovat jak mezi nominální plochou A a efektivní plochou \bar{A} , tak mezi nominálním napětím σ , definovaným jako síla vztažená na nominální plochu A a efektivním napětím $\bar{\sigma}$, definovaným jako síla vztažená na efektivní plochu \bar{A} . Efektivní napětí vypočítáme z Hookeova zákona

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon. \quad (1)$$

Zcela zřejmá je rovnost

$$\bar{\sigma}\bar{A} = \sigma A. \quad (2)$$

Parametr poškození zavedeme jako

$$\omega = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (3)$$

Spojením rovnic (1), (2) a (3) dostáváme

$$\sigma = (1 - \omega)E\varepsilon. \quad (4)$$

I když poškození definujeme parametrem, ve skutečnosti se nejedná o neměnnou veličinu, ale o veličinu, která se vyvíjí a nabývá hodnot od 0, což značí nepoškozený materiál, až do 1, tedy materiál úplně poškozený. Vývoj poškození lze charakterizovat tzv. zákonem poškození, který udává jak se poškození mění v závislosti na deformaci. Parametr poškození nezávisí přímo na okamžité hodnotě deformace, ale na maximální hodnotě, které bylo dosaženo během zatěžování. Je výhodné zavést vnitřní proměnnou $\kappa = \max_{\tilde{t} < t} \varepsilon(\tilde{t})$, kde t značí čas, ve kterém ω zjišťujeme a \tilde{t} probíhá všechny předchozí časy. Tato vnitřní veličina nám zajišťuje, že se parametr poškození nemůže zmenšovat, přestože dochází k odtěžování. Nyní můžeme zapsat funkci poškození

$$f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa \quad (5)$$

a zatěžovací-odtěžovací podmínky jednoosého modelu poškození

$$f(\varepsilon, \kappa) \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad \dot{\kappa} f(\varepsilon, \kappa) = 0 \quad (6)$$

První podmínka značí přípustné stavy deformace, druhá určuje, že poškození může pouze růst. Podle třetí podmínky může poškození růst jen pokud je $\kappa = \varepsilon$, nazveme ji podmínkou komplementarity.

2.2 Vícesý izotropní model poškození

Zobecnění jednoosého modelu poškození do více rozměrů je velice jednoduché a přímočaré. Napětí se vypočítá jako

$$\sigma = (1 - \omega)D_e : \varepsilon \quad (7)$$

kde σ a ε jsou tenzory druhého řádu a D_e je tenzor čtvrtého řádu, má význam tenzoru pružné tuhosti materiálu, ω má stejný význam jako u jednoosého modelu. Jelikož se zabýváme izotropním modelem poškození, postačí nám pouze jeden parametr ω . Komplikace nastává u zatěžovacích-odtěžovacích podmínek. Zde je nutné určit při jaké hladině deformace se materiál začne poškozovat. Tuto deformaci označíme jako $\tilde{\varepsilon}$ a nazveme ji

ekvivalentní deformace. Jednou z možností je ekvivalentní deformace podle Mazarse

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle} \quad (8)$$

Dále budeme používat Rankinovu normu deformace definovanou následovně

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{E} \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \sigma_I \rangle} \quad (9)$$

kde ε_I a σ_I , $I = 1, 2, 3$, jsou hlavní deformace a hlavní napětí, závorky značí kladnou část čísla

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Další alternativní definicí je modifikovaná von Misesova ekvivalentní deformace

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{(k-1)I_{1\varepsilon}}{2k(1-2\nu)} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon}^2 + \frac{12kJ_{2\varepsilon}}{(1+\nu)^2}} \quad (10)$$

kde

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

je první invariant tenzoru deformace,

$$J_{2\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{6} I_{1\varepsilon}^2$$

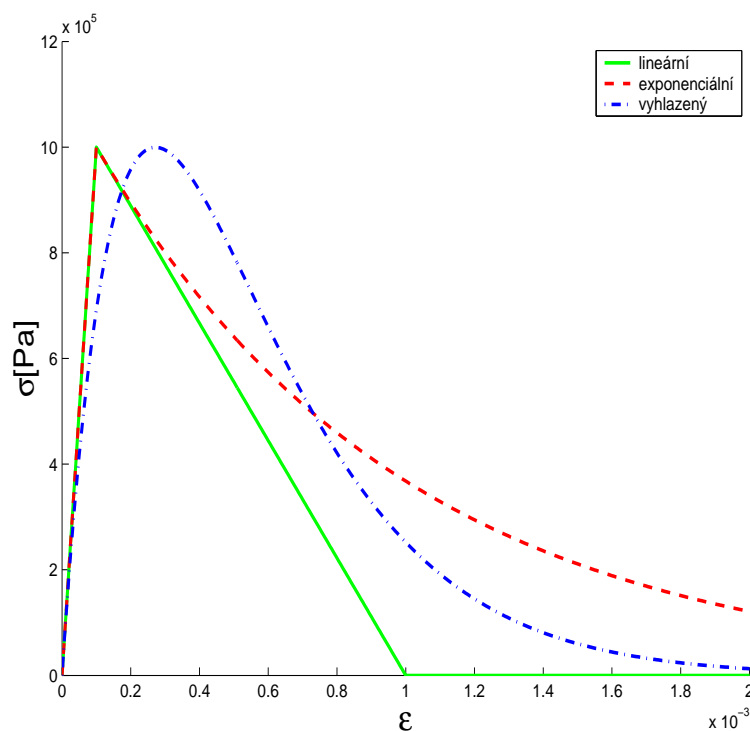
je druhý deviatorický invariant deformace a k je parametr udávající poměr mezi pevností v tlaku a tahu, pokud $k = 1$, dostáváme standartní von Misesovu ekvivalentní deformaci. Funkci poškození a zatěžovací-odtěžovací podmínky přepíšeme pomocí $\tilde{\varepsilon}$

$$f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \quad (11)$$

$$f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad \dot{\kappa} f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = 0 \quad (12)$$

2.3 Zákon poškození

Pokud chceme, aby zákon poškození odpovídal skutečnému chování materiálů, můžeme vyjít z pracovního diagramu jednoosé tahové zkoušky. Zde zmíníme tři typy zákona poškození.



Obrázek 2: Pracovní diagramy pro různé modely poškození

Při použití lineárního zákona poškození dostáváme jak vzestupnou tak sestupnou část pracovního diagramu lineární. Vztah pro poškození zapíšeme

$$g(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \kappa \leq \varepsilon_0, \\ \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa}\right) & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \kappa \leq \varepsilon_f, \\ 1 & \text{pro } \varepsilon_f \leq \kappa \end{cases} \quad (13)$$

U exponenciálního zákona poškození se materiál chová pružně až po dosažení meze pevnosti, poté napětí klesá exponenciálně při zvyšující se deformaci.

$$g(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \kappa \leq \varepsilon_0, \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa} e^{-\frac{\kappa - \varepsilon_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0}} & \text{pro } \varepsilon_0 < \kappa. \end{cases} \quad (14)$$

Pokud dochází k rozvoji defektů již krátce po začátku zatěžování, zvolíme vyhlazený zákon poškození.

$$g(\kappa) = 1 - e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon_0}} \quad (15)$$

2.4 Matice tečné tuhosti

Při analýze modelu poškození mohou nastat dva stavy. Materiál je v pružném stavu a poškození se nemění. Vztah mezi napětím a deformací (7) můžeme diferencovat podle času a hodnotu poškození považovat za konstantnu. Tím dospějeme k přírůstkovému tvaru

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

Pokud okamžitý stav splňuje podmínku $\tilde{\varepsilon} = \kappa$, může docházet k pružnému odtížení za konstantního poškození nebo k růstu poškození. Poškození tedy není konstantní a musíme ho taky diferencovat podle času

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \dot{\omega} \quad (17)$$

Parametr poškození ω je funkcí vnitřní proměnné κ , vyjádříme ho tedy jako $\omega = g(\kappa)$ a pomocí pravidla pro derivaci složené funkce

$$\dot{\omega} = \dot{g}(\kappa) = \frac{dg(\kappa)}{d\kappa} \frac{d\kappa(t)}{dt} = g' \dot{\kappa} \quad (18)$$

V případě růstu poškození je funkce poškození nulová a platí rovnost $\dot{\kappa} = \dot{\tilde{\varepsilon}}$. Při derivaci ekvivalentní deformace podle času opět použijeme pravidlo o derivaci složené funkce, neboť ekvivalentní deformace je funkcí deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = \frac{d\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))}{dt} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (19)$$

kde

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Je třeba dodat, že k rozvoji poškození materiálu dochází pokud je

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0$$

a rychlost poškození je dána vztahem

$$\dot{\omega} = g' \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (20)$$

Po dosazení do (17) získáme hledaný vztah mezi přírůstkem napětí a přírůstkem deformace

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [(1 - \omega) \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta}] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (21)$$

Výraz $[(1 - \omega) \mathbf{D}_e - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta}]$ je matice tečné tuhosti poškozujícího se materiálu. Konkrétní hodnota matice tečné tuhosti závisí na okamžitém stavu, ve kterém se materiál nachází, ale také na volbě ekvivalentní deformace. Ve výrazu pro výpočet matice tečné

tuhosti se objevuje vektor $\boldsymbol{\eta}$, který jsme definovali jako $\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$. Pokud uvažujeme ekvivalentní deformaci podle Mazarse, vychází $\boldsymbol{\eta}$ následovně

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\tilde{\varepsilon}} \quad (22)$$

Obdobně vypočítáme $\boldsymbol{\eta}$ pro zbylé dvě definice ekvivalentní deformace. Rankinova definice

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\sum_{I=1}^3 \langle \sigma_I \rangle \frac{\partial \langle \sigma_I \rangle}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}{E \tilde{\varepsilon}} \quad (23)$$

Použitím pravidla o derivování složené funkce

$$\frac{\partial \langle \sigma_I \rangle}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \sigma_I}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p}) : \boldsymbol{D}_e = \lambda \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p} \quad (24)$$

Nakonec dostáváme

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{E^2 \tilde{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \frac{\langle \sigma_2 \rangle}{E^2 \tilde{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \frac{\langle \sigma_3 \rangle}{E^2 \tilde{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \quad (25)$$

Kde λ a μ značí Lamého konstanty.

Při derivaci Misesovy ekvivalentní deformace využijeme těchto vztahů

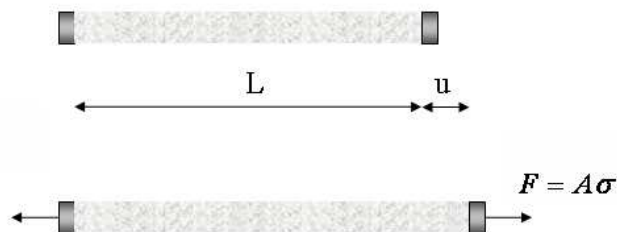
$$\frac{\partial I_{1\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\delta} \quad \frac{\partial J_{2\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{e}$$

kde \boldsymbol{e} značí deviatorickou část deformace.

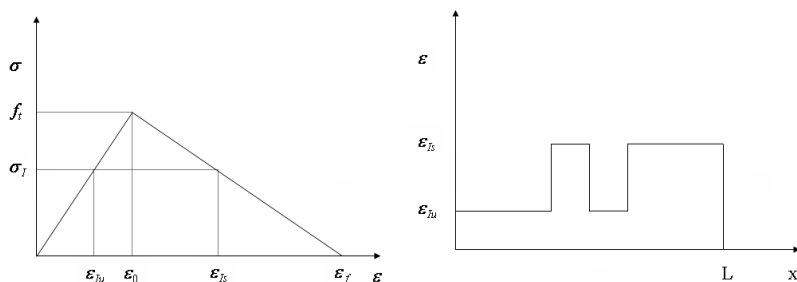
$$\boldsymbol{\eta} = \frac{k-1}{2k(1-\nu)} \boldsymbol{\delta} + \frac{\frac{2(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon} \boldsymbol{\delta} + \frac{12k}{(1+\nu)^2} \boldsymbol{e}}{\sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon}^2 + \frac{12kJ_{2\varepsilon}}{(1+\nu)^2}}} \quad (26)$$

3 Lokalizace poškození

Problém lokalizace poškození objasníme na jednoduchém příkladu taženého prutu. Uvažujme prut o konstantním průřezu A , délky L , který je natahován silou F .



Obrázek 3: Tažený prut



Obrázek 4: Dvě hodnoty deformace pro dané napětí a rozložení napětí po délce prutu

Prut se chová lineárně pružně až po dosažení deformace ε_0 , které odpovídá napětí, jež označíme jako mez pevnosti v tahu f_t . Poté uvažujme ten nejjednodušší (lineární) zákon poškození. V každé části prutu klesá napětí, buď při klesající deformaci (prut se pružně odtěžuje) nebo při rostoucí deformaci (prut změkčuje). Ze statických rovnic plyne, že napětí musí zůstat stejné po celé délce prutu. Pro jakékoliv efektivní napětí $\bar{\sigma}$ mezi 0 a f_t existují dvě hodnoty deformace, které vyhovují statickým rovnicím. Problém nastává v tom, že žádná rovnice nám neurčuje jaká část prutu se pružně odtěžuje a která část prutu změkčuje. Řešení tedy není jednoznačné. O Pokud má malá část prutu menší průřez, například v důsledku nějaké imperfekce, pak je v tomto průřezu dosaženo pevnosti f_t dříve, než v ostatních částech prutu. V této části prutu začne docházet ke změkčování, zatímco zbylá délka prutu se pružně odtěžuje, neboť pevnosti f_t ještě nebylo dosaženo. Z toho vyplývá že velikost oblasti, která změkčuje, je dána velikostí oblasti s nejmenší pevností. Při výpočtech metodou konečných prvků můžeme síť zjemňovat a měli bychom dostávat stále přesnější řešení. Avšak v tomto případě dochází k tomu, že se poškození může lo-

kalizovat stále do menšího segmentu prutu. Velikost tohoto segmentu je dána rozměrem nejmenšího prvku. Lokalizaci poškození při výpočtech metodou konečných prvků ovlivňuje nejenom velikost prvků, ale také jejich orientace, pravidelnost sítě a další faktory. Otázkou tedy zůstává, jak se bude chovat skutečná konstrukce, neboť poškození, které vzniká rozvojem trhlin a jiných defektů se nemůže lokalizovat do libovolně malého segmentu prutu, ale lokalizuje se do zóny o velikosti, která odpovídá vnitřní charakteristické délce materiálu. Izotropní model poškození však o této vnitřní charakteristické délce materiálu nic neudává. Z matematického hlediska je důsledkem nejednoznačnosti řešení při změkčování materiálu ztáta eliptičnosti diferenciální rovnice, kterou je problém popsán. Při popisu materiálu izotropním modelem poškození dochází k těmto nesrovnalostem

1. Deformace a poškození se lokalizují do zóny, která může být libovolně malá. .
2. Práce vykonaná vnějšími silami(práce vykonaná na porušení konstrukce) je libovolně malá.
3. Při řešení metodou konečných prvků výsledek závisí na počtu konečných prvků.

Informace o tom, jak zamezit těmto fyzikálně nesmyslným jevům lze najít v [1] nebo [2].

4 Lokalizační analýza

Uvažujme těleso rozdělené plochou nespojitosti na dvě části. Označíme je V^- a V^+ . Vektor \mathbf{n} je normálový vektor na tuto plochu a je orientován z V^- do V^+ . Rychlosti napětí jsou vázány podmínkou

$$\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (27)$$

a rychlosti deformací v jedné a druhé části tělesa

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}}\right)^+ = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}}\right)^- + \mathbf{c} \otimes \mathbf{n} \quad (28)$$

Pro lepší představu můžeme \mathbf{c} rozložit jako součin $\mathbf{c} = \dot{\epsilon} \mathbf{m}$, $\dot{\epsilon}$ značí velikost skoku a $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$ je tenzor prvního řádu zvaný polarizační tenzor. Úhel mezi vektory \mathbf{n} a \mathbf{m} nám udává o který mód porušení se jedná. Pokud $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ jedná se o tzv. tahový mód. Jeli \mathbf{m} kolmé na \mathbf{n} jedná se o mód smykový. V teorii malých deformací je deformace definovaná jako symetrická část gradientu posunů. Rovnici (28) vyjádříme ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ \frac{1}{2} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \dot{\epsilon} \quad (29)$$

Vztah mezi napětím a deformací v oblasti V^+ a V^-

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{D}^+ : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- = \mathbf{D}^- : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- \quad (30)$$

Po dosazení rovnice (29), využití malé symetrie tenzoru tuhosti a několika úpravách dostáváme rovnici

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \dot{\epsilon} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^- - \mathbf{D}^+) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- \quad (31)$$

Pokud uvažujeme tenzor tuhosti na obou stranách tělesa stejný, rovnice se nám zjednoduší. Vyloučíme $\dot{\epsilon} = 0$ neboť tato situace neodpovídá skutečné bifurkaci. Po těchto úpravách dostáváme

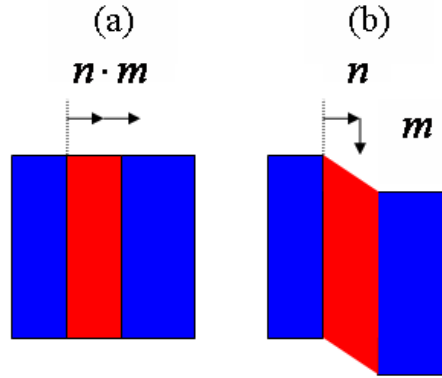
$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (32)$$

Výraz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ označíme jako \mathbf{Q} a nazveme lokalizační tenzor. Z rovnice (32) je zřejmé, že lokalizační podmínka je ekvivalentní singularitě lokalizačního tenzoru. Vektor \mathbf{m} odpovídá vlastnímu vektoru, pro nulové vlastní číslo lokalizačního tenzoru. Dostáváme tedy klasickou lokalizační podmínku

$$\det \mathbf{Q} = 0 \quad (33)$$

Singularita lokalizačního tenzoru je ekvivalentní již zmíněné ztrátě eliptičnosti.

Při lokalizační analýze musíme najít vektor \mathbf{n} tak, aby byla splněna rovnice (32). Když



Obrázek 5: Módy lokalizace (a)Tahový mód (b)Smykový mód

takový vektor neexistuje, pole napětí musí zůstat spojité.

4.1 Lokalizační analýza izotropního modelu poškození

Při lokalizační analýze musíme rozlišovat tři stavy

1. Pružné odtěžování na obou stranách. V tomto případě můžeme položit

$$D^- = D^+ = D_u = (1 - \omega)D_e$$

Lokalizační tenzor poté vypadá následovně

$$Q_u = (1 - \omega)\mathbf{n} \cdot D_e \cdot \mathbf{n} = (1 - \omega)Q_e \quad (34)$$

Není těžké ukázat, že Q_u je pozitivně definitní, lokalizační podmínka tedy nemůže být splněna.

2. K růstu poškození dochází na obou stranách. Tentokrát je opět tenzor tuhosti na obou stranách stejný, ale má význam tečné tuhosti materiálu.

$$D^- = D^+ = D_{ed}$$

$$Q_{ed} = (1 - \omega)Q_e - g'(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n}) = Q_u - g'\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n \otimes \boldsymbol{\eta}_n \quad (35)$$

Je-li Q_{ed} singulární, musí existovat nenulový vektor \mathbf{m} tak, že $Q_{ed}\mathbf{m} = 0$, po

dosazení dostáváme

$$\mathbf{Q}_u \cdot \mathbf{m} = g' \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n (\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{m}) \quad (36)$$

Jelikož je \mathbf{Q}_u vždy pozitivně definitní, je invertibilní. Pravá strana rovnice je pouze skalárním násobkem $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$, \mathbf{m} můžeme vyjádřit jako $a \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$. Po dosazení do rovnice (35)

$$(1 - g' \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n) a \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \mathbf{0} \quad (37)$$

Pokud je a nebo $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ rovno nule, dostáváme triviální řešení, které neodpovídá skutečné bifurkaci. Pokud chceme, aby rovnice (37) byla rovna nule, musí být nulový výraz v závorce.

$$g' \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = 1 \quad (38)$$

Výsledek součinu $\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ závisí na elastických konstantách, na okamžitém stavu materiálu a na směru plochy nespojitosti. Pro daný materiál a daný stav materiálu je výsledek funkcí jednotkového vektoru \mathbf{n} . Minimální hodnota g' potřebná k bifurkaci je

$$g'_{crit} = \frac{1}{\max_{\|\mathbf{n}\|=1} (\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)} \quad (39)$$

3. V tomto případě je tenzor tuhosti na každé straně tělesa jiný a musíme vycházet z rovnice (31) Řešení je v tomto případě komplikovanější a zde ho zmiňovat nebudeme. Dá se ukázat, že podmínka singularity lokalizačního tenozru je postačující. Řešení je k nalezení v [3].

Definujeme funkci

$$f(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \frac{1}{(1-\omega)G} \left[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})}{2(1-\nu)} \right] \quad (40)$$

Ve složkovém zápisu

$$f(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{(1-\omega)G} \left[\sum_{I=1}^3 \eta_I \bar{\sigma}_I n_I^2 - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{I=1}^3 \eta_I n_I^2 \sum_{I=1}^3 \bar{\sigma}_I n_I^2 \right] \quad (41)$$

Pokud tuto funkci maximalizujeme za podmínky $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ dostaneme $\frac{1}{g'_{crit}}$. Substitucí $n_1^2 = N_1$, $n_2^2 = N_2$ a $n_3^2 = N_3$ převedeme funkci f na kvadratickou funkci a omezení na lineární. Musíme ale splnit ještě další omezení v podobě nerovností $1 \geq N_1 \geq 0$, $1 \geq N_2 \geq 0$ a $1 \geq N_3 \geq 0$. Řešení tohoto problému obdržíme metodami kvadratického

programování. Úlohy kvadratického programování se většinou udávají ve tvaru

$$\max_x \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

s omezujícími podmínkami v podobě rovností $\mathbf{A}_e \mathbf{x} = \mathbf{b}_e$ a v podobě nerovností $\mathbf{A}_n \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_n$. Přepíšeme problém do této podoby. Matice \mathbf{Q} má tvar

$$\frac{-1}{(1-\nu)} \begin{bmatrix} \eta_1 \sigma_1 & \eta_2 \sigma_1 & \eta_3 \sigma_1 \\ \eta_1 \sigma_2 & \eta_2 \sigma_2 & \eta_3 \sigma_2 \\ \eta_2 \sigma_3 & \eta_2 \sigma_3 & \eta_3 \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \eta_1 \sigma_1 & \eta_2 \sigma_2 & \eta_3 \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Omezující podmínky vypadají takto

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{n1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{n2} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ b_e &= 1 & b_{n1} &= b_{n2} = 0 \end{aligned}$$

4.2 Lokalizační analýza pro rovinnou napjatost

Rovinná napjatost definujeme vztahem $\sigma_1 > \sigma_2$ a $\sigma_3 = 0$. Dále zavedeme úhel α , který nám bude udávat poměr mezi hlavními napětími.

$$\sigma_1 = |\sigma| \cos \alpha \quad \sigma_2 = |\sigma| \sin \alpha \quad (42)$$

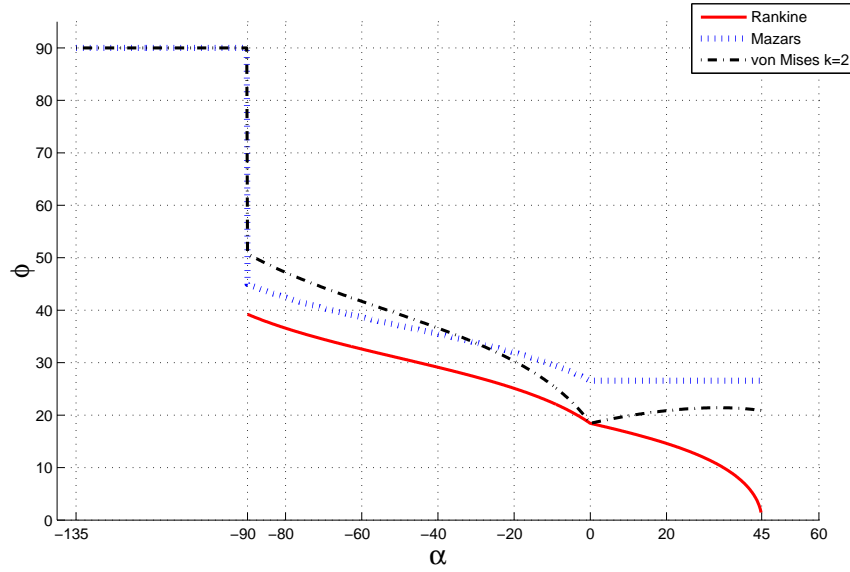
Pro $\alpha = -90^\circ$ dostáváme jednoosý tlak, $\alpha = -45^\circ$ udává smyk a $\alpha = 0^\circ$ jednoosý tah. Pro $-\frac{3\pi}{4} \geq \alpha \geq \frac{\pi}{4}$ dostáváme všechny možné poměry mezi σ_1 a σ_2 pro rovinnou napjatost za předpokladu $\sigma_1 > \sigma_2$.

Při použití Misesovy ekvivalentní deformace záleží na tom, jaký je poměr mezi pevností v tlaku a v tahu, pro beton je typická hodnota kolem $k = 10$, až $k = 20$.

Další zajímavou otázkou zůstává, kdy začne docházet k lokalizaci. U lineárního a exponenciálního zákona poškození k lokalizaci dochází při dosažení vrcholu pracovního diagramu. Pracovní diagram vyhlazeného zákona poškození nemá ostrý vrchol a není zcela jasné, v jakém okamžiku začne k lokalizaci docházet. Vyjdeme ze vztahu pro tečný tenzor tuhosti.

$$\mathbf{D}_{ed} = [(1-\omega)\mathbf{D}_e - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta}] \quad (43)$$

Zajímá nás poměr mezi tečným modulem pružnosti při kritické hodnotě g' a sečným modulem pružnosti. Tenzor tuhosti nahradíme Youngovým modulem pružnosti, dále využijeme vztahu (1) a toho, že všechny vztahy pro ekvivalentní deformaci jsou homogenní



Obrázek 6: Úhly lokalizace, α udává poměr mezi hlavními napětími, θ je uhel pod kterým se bude poškození lokalizovat

funkce stupně jedna, pro které platí

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (44)$$

V našem případě

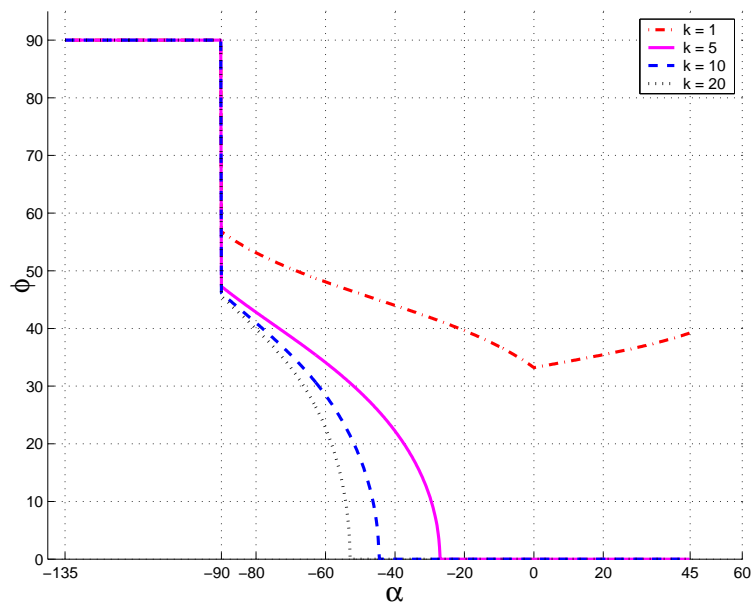
$$f(\mathbf{x}) = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{\eta}$$

Uplatněním těchto vztahů se výraz pro tečný modul pružnosti převede na

$$E_{ed} = (1 - \omega)E_e - \frac{(1 - \omega)E_e}{(1 - \omega)} g'_{crit} \tilde{\varepsilon} = \frac{E_u g'_{crit} \tilde{\varepsilon}}{(1 - \omega)} \quad (45)$$

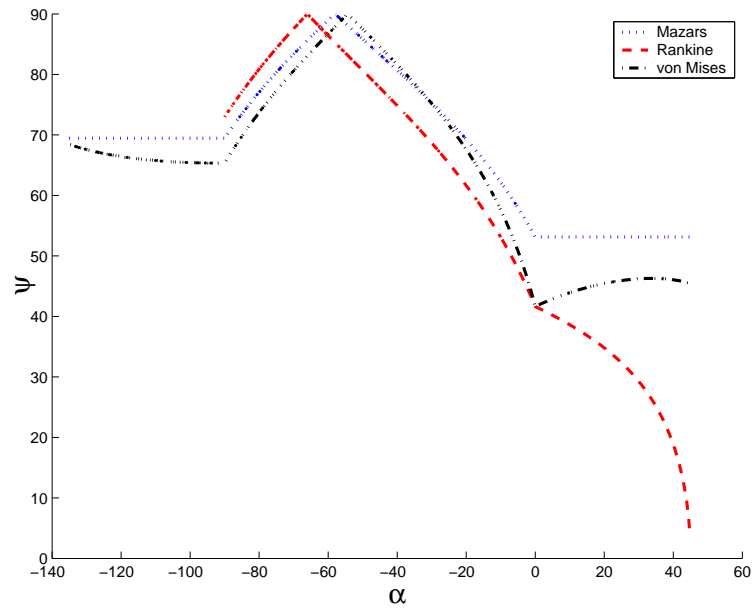
Je-li poměr mezi E_{ed} a E_u kladný může k lokalizaci docházet ještě před dosažením vrcholu pracovního diagramu. Pro von Misesovu definici ekvivalentní s $k = 20$ dosahuje tento poměr při jednoosém tahu dokonce hodnoty 0,3. Naopak pro záporné hodnoty můžeme očekávat bifurkaci za vrcholem pracovního diagramu.

Pro Mazarsův i Rankinův model vycházejí v případě jednoosého tahu velice nečekané výsledky. Dalo by se předpokládat, že úhel mezi diskontinuitou a zatížením bude nulový a mód bude tahový. Výsledky pro tyto dva modely tomuto předpokladu nevyhovují. U Misesova modelu záleží na poměru mezi pevnostmi v tahu a tlaku. Pro malé poměry vychází opět nečekané výsledky, zatímco pro hodnoty k od pěti výše se již výsledky shodují s naším očekáváním. Zatížení je kolmé na nespojitost a vektory \mathbf{n} a \mathbf{m} mají stejný směr.

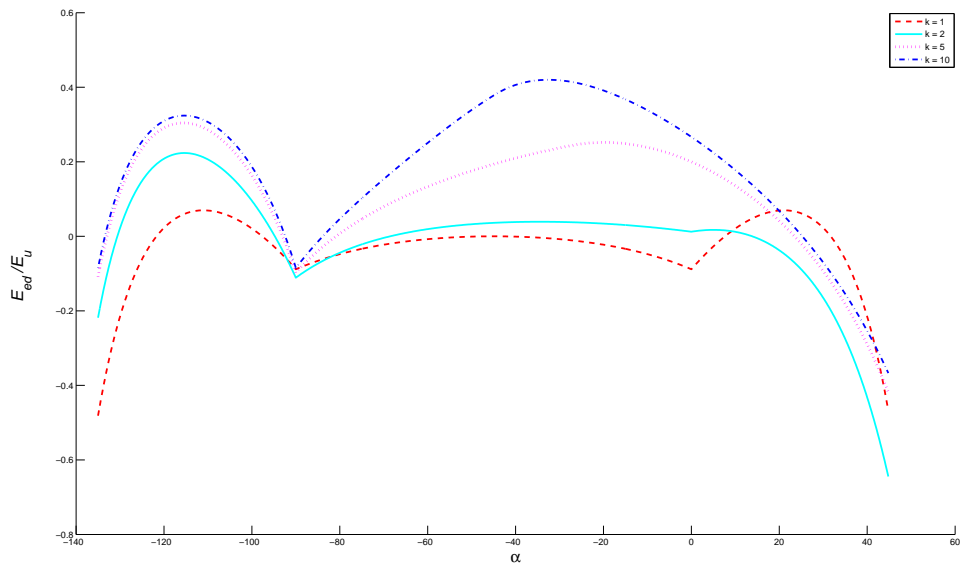
Obrázek 7: Úhly lokalizace pro různá k s ekvivalentní deformací podle Misesa

ekvivalentní deformace	úhel ϕ	uhel mezi \mathbf{n} a \mathbf{m}	$\frac{E_{ed}}{E_u}$
Mazars	26,53	53,13	-0,417
Rankine	18,43	41,63	
Mises			
$k = 1$	33,21	60,19	-0,088
$k = 2$	18,43	41,63	0,0123
$k = 5$	0	0	0,2000
$k = 10$	0	0	0,2667
$k = 20$	0	0	0,3000

Tabulka 1: Základní hodnoty pro jednoosý tah



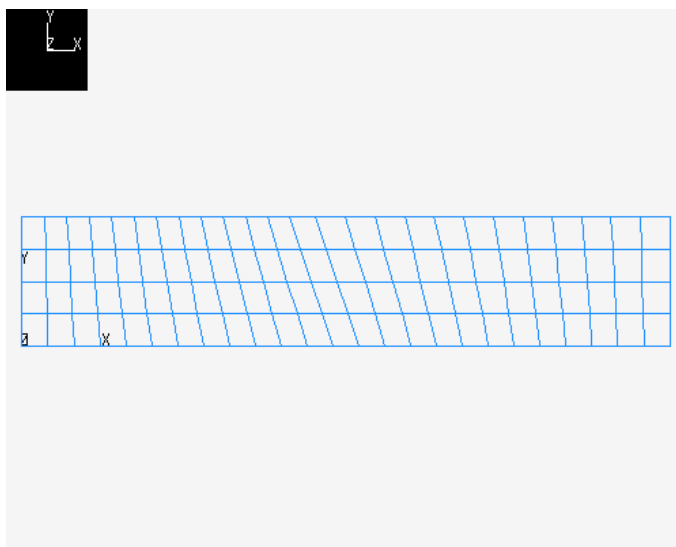
Obrázek 8: Úhly mezi vektory \mathbf{m} a \mathbf{n} v závislosti na poměru hlavních napětí



Obrázek 9: Poměr mezi E_{ed} a E_u pro Misesův model v závislosti na poměru hlavních napětí

5 Ověření výsledků výpočtem MKP

Výsledky představené v minulé kapitole jsou velice překvapivé. Dále bude ověřena jejich platnost při výpočtech modelů založených na izotropním modelu poškození metodou konečných prvků. Výpočet byl proveden za předpokladu rovinné napjatosti, prvky byly čtyřúhelníkové izoparametrické s bilineární aproximací a čtyřbodovou integrací. Bylo sestrojeno několik sítí se 100 prvky a různým úhlem natočení prostředního pásu prvků, tento úhel označíme Θ . V ostatních pásích prvků dochází k postupnému zmenšování natočení, krajní prvky jsou již ortogonální. Testování bylo provedeno pro všechny zmíněné modely ekvivalentní deformace za jednoosého tahu s exponenciálním zákonem poškození s parametry $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-4}$ a $\varepsilon_f = 5 \times 10^{-3}$. Elastické konstanty byly zvoleny $E = 20GPa$ a $\nu = 0,2$. Výpočty byly provedeny softwarem OOFEM, který byl vyvinut na katedře mechaniky Fakulty stavební, ČVUT v Praze.



Obrázek 10: Ukázka použité sítě s natočením středního pásu prvků o $\Theta = 18^\circ$

$\Theta [^\circ]$	úhel lokalizace $[^\circ]$
26,5	26,5
33	27,5
41	24
46	26,8

Tabulka 2: Výsledky výpočtů MKP - Mazars

První sloupec tabulky udává natočení prostředního pásu prvků, druhý úhel vyjadřuje natočení pásu prvků, do které se lokalizuje poškození. Jak je vidět z tabulky, při numerickém modelování MKP jsou pro Mazarsův model výsledky v dobré shodě s analytickým

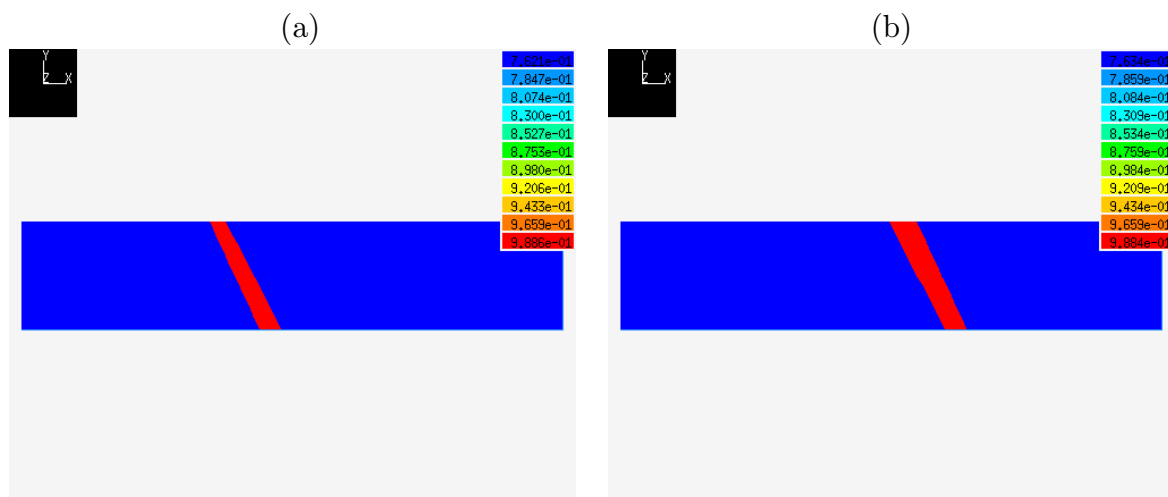
výpočtem kritického úhlu, při kterém se lokalizační tenzor stává singulárním. Poškození má tendenci se lokalizovat do těch pásů sítě, jež jsou pootočený právě o tento úhel. Pro zbylé dva modely ekvivalentní deformace byla provedena stejná analýza. Ukázalo se, že i zbylé dva modely ekvivalentní deformace mají lokalizační vlastnosti ve shodě s teoretickou analýzou. Je zřejmé, že síť konečných prvků má velký vliv na lokalizaci deformace a poškození. Natočení sítě může mít stejný význam jako imperfekce prvku v podobě zmenšené plochy prvku. Poškození má tendenci se lokalizovat do jedné vrstvy prvků, natočené o úhel blízký úhlu vypočítanému z lokalizační podmínky.

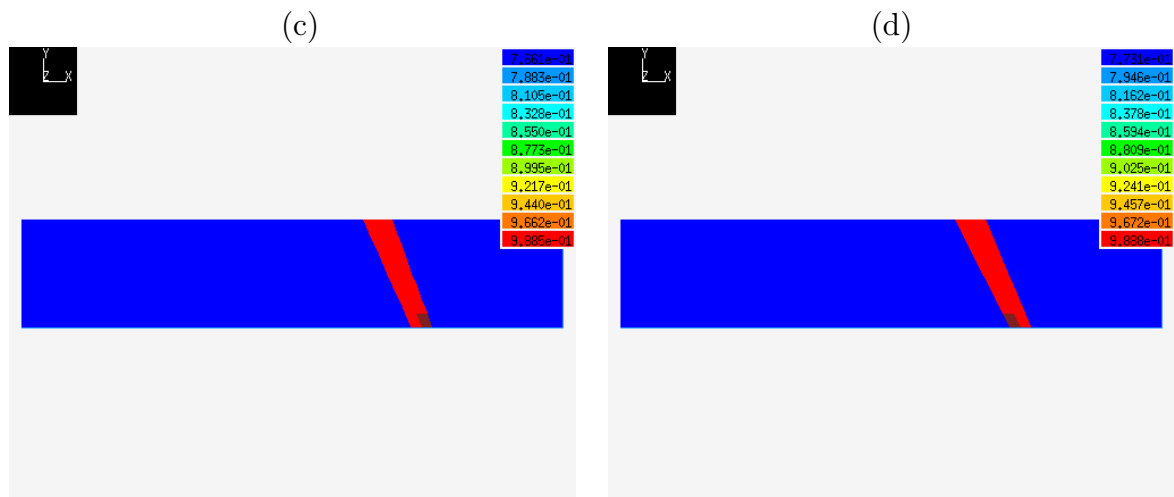
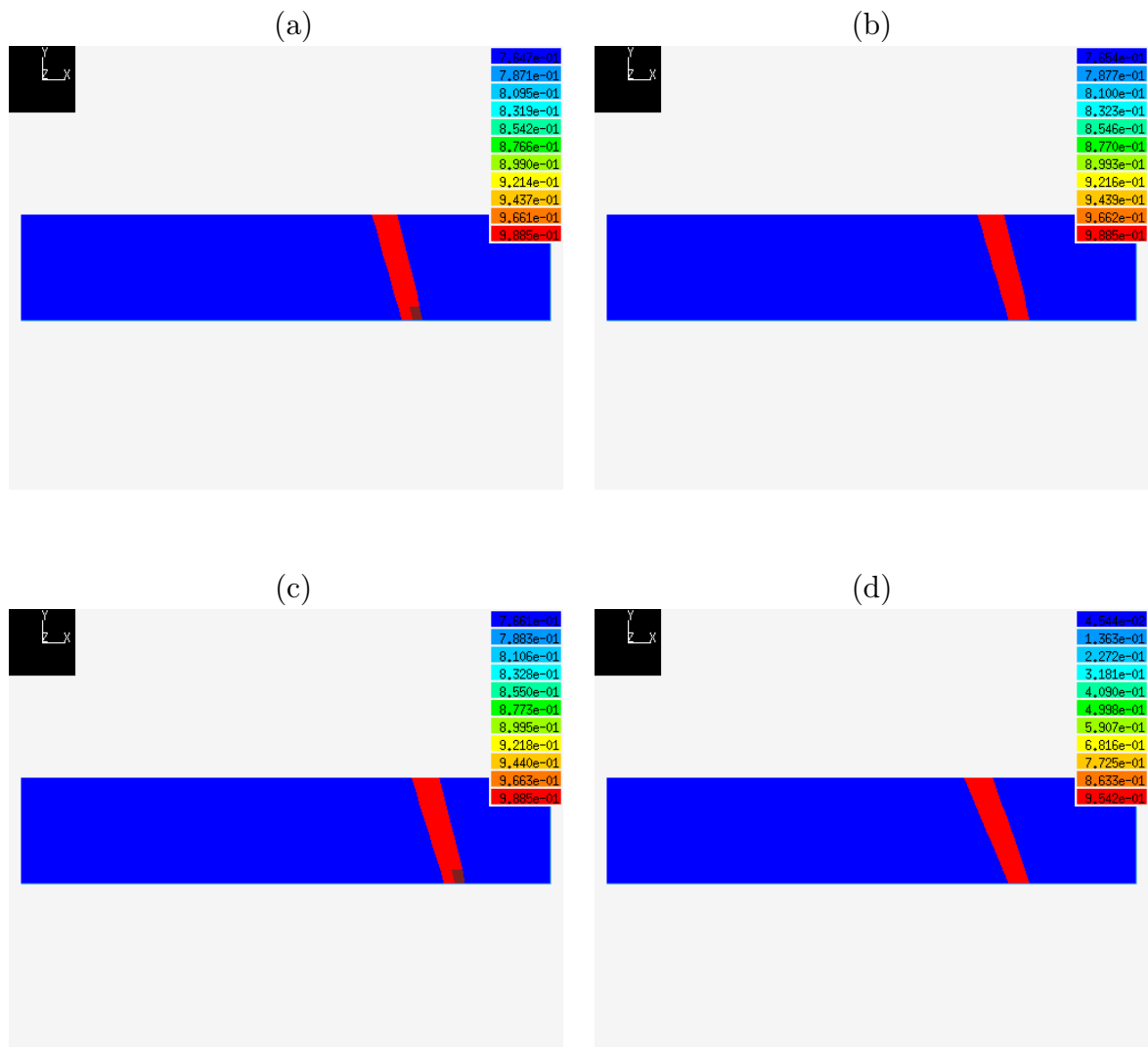
Θ [°]	úhel lokalizace[°]
26,5	16,8
33	17,5
41	17,1
46	18

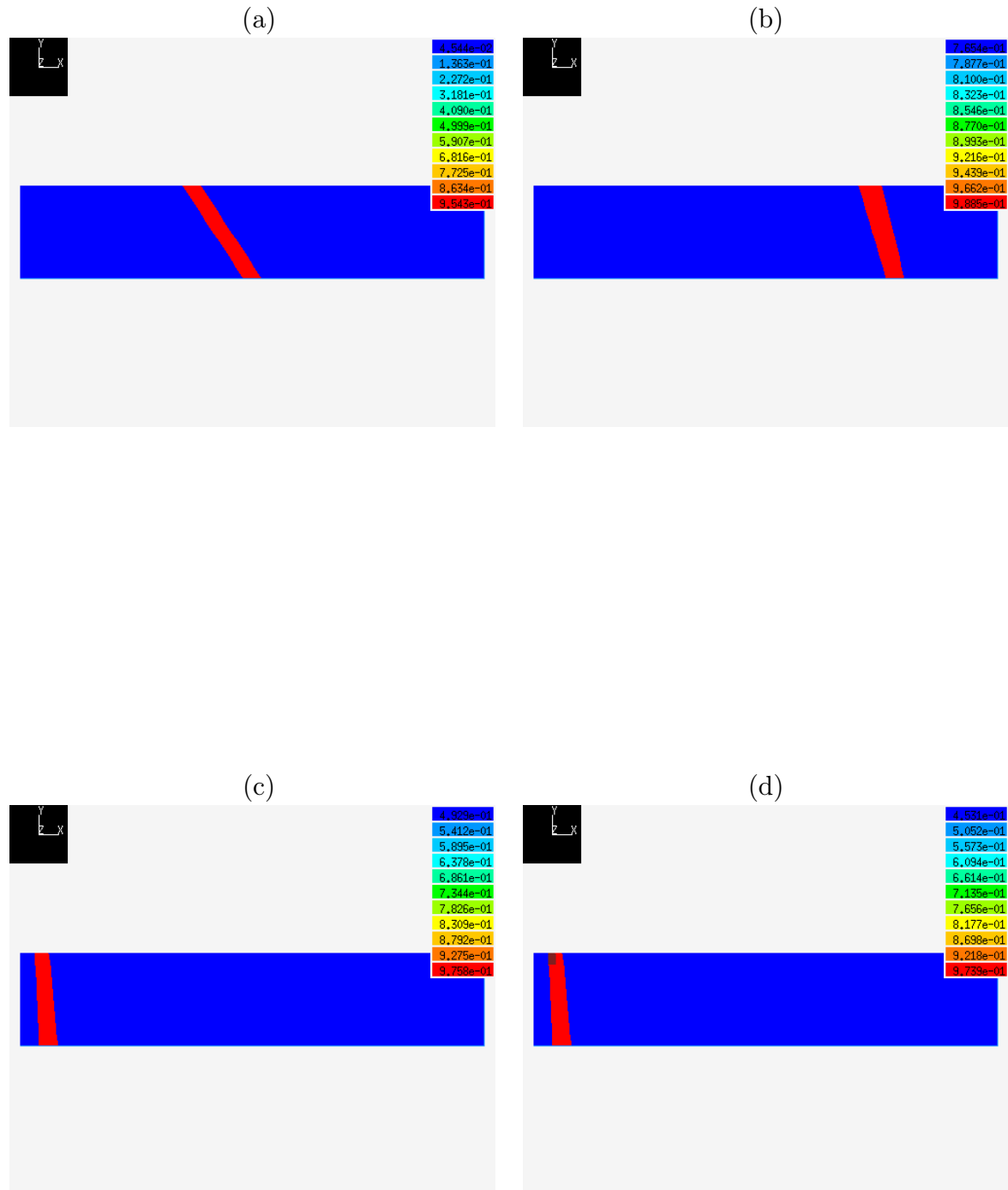
Tabulka 3: Výsledky výpočtů MKP - Rankine

k	úhel lokalizace[°]
1	33
2	17,5
10	4
20	4

Tabulka 4: Výsledky výpočtů MKP - Mises, $\Theta = 33$



Obrázek 11: Mazarsův model, $\Theta =$ (a) 27° (b) 33° (c) 41° (d) 46° Obrázek 12: Rankinův model, $\Theta =$ (a) 27° (b) 33° (c) 41° (d) 46°

Obrázek 13: Misesův model, $\Theta = 33^\circ$ (a) $k = 1$ (b) $k = 2$ (c) $k = 10$ (d) $k = 20$

Reference

- [1] Z. Bittnar and J. Šejnoha. *Numerické metody mechaniky*. Nakladatelství ČVUT, 1992.
- [2] M. Jirásek. Mathematical analysis of strain localization. *REDC-Damage and Fracture in Geomaterials*, September 2007.
- [3] M. Jirásek and J. Zeman. *Přetváření a porušování materiálů*. Nakladatelství ČVUT, Listopad 2006.