



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta stavební
Katedra mechaniky**

Metoda pro tvorbu návrhů s omezujícími podmínkami ve dvou dimenzích

Method for constrained designs of experiments in two dimensions

Soutěžní práce

Studijní program: Stavební inženýrství
Studijní obor: Materiálové inženýrství

Vedoucí práce: Ing. Matěj Lepš, Ph.D.

Eva Myšáková

Praha 2012

Abstrakt: *Tato práce prezentuje nový přístup k tvorbě návrhů experimentů v ne-regulárních dvoudimenzionálních doménách s omezujícími podmínkami. Metoda je založena na Delaunayově triangulaci přípustné domény. Následně je ve ztriangulovaném prostoru použita heuristická metoda pro generování rovnoměrných sítí pro metodu konečných prvků k získání rovnoměrně rozprostřeného návrhu. Ačkoli není prezentovaná metoda 100% spolehlivá, produkuje návrhy s lepšími vlastnostmi než mají dosud známá optimální řešení.*

Abstract: *This paper presents a new approach for generating a Design of Experiments in constrained and non-regular two-dimensional spaces. The methodology is based on the triangulation of the admissible space by Delaunay Triangulation method. Then, a heuristic smoothing method for generating uniform Finite Element meshes within the triangulated space is applied to obtain uniformly spaced designs. Although not 100% reliable, the proposed method can produce superior designs to already known optimal solutions.*

Obsah

1	Úvod	3
2	Cílové funkce	3
3	Referenční metoda založená na GA a SLP	5
4	Metoda založená na Delaunayově triangulaci a nástroji Distmesh	5
5	Výsledky	6
6	Závěr	9
7	Poděkování	9
A Výpočet objemu simplexu		12
B Výsledky sedmi jednotlivých příkladů		13
C Výsledky znázorněné krabicovými grafy		17

1 Úvod

Strategie tvorby rovnoměrně rozprostřených návrhů známé jako *design of experiments* (DoE) tvoří základní část každého experimentu. Tato práce je zaměřena na konkrétní oblast návrhových prostorů s omezujícími podmínkami. Nejčastějším takovým případem je pak *návrh směsi*, ve kterém součet vstupních parametrů tvoří jednotkový objem nebo hmotnost [Montgomery, 2000, Chapter 11-5]. Tato jediná podmínka vede k návrhovému prostoru ve tvaru simplexu; další omezující podmínky jednotlivých vstupů pak vedou k prostoru ve tvaru *polytopu*, stále konvexního, ale obecně neregulárního prostoru. Proto zde tradiční návrhy experimentů [Montgomery, 2000] zkonstruované pro hyperkrychle nemohou být použity.

Ačkoli je problém znám po desetiletí, současný vývoj v oblasti počítačových experimentů není následován pokrokem v metodách tvorby návrhů těchto experimentů [Fang et al., 2006]. Hlavní rozdíl mezi klasickými a moderními návrhy experimentů je počet návrhových bodů, v případě druhých jmenovaných se často jedná o stovky bodů. Zde se pak klasické přístupy založené na šablonách s nízkým počtem bodů [Cornell, 1973, Cornell, 1979] nedají použít. Dosud našli autoři pouze několik referencí na návrhy experimentů v omezených návrhových prostorech. V [Petelet et al., 2010] a [Fuerle and Sienz, 2011] aplikují autoři tradiční Latin Hypercube (LH) návrhy na opsanou hyperkrychli následované genetickým algoritmem (GA), respektive hill-climbing optimalizačním algoritmem, k získání návrhů splňujících původní omezení. LH metodologie je zde použita spíše k minimalizaci prohledávaného prostoru než pro své vlastní příznivé vlastnosti. Jiný přístup je představen v [Hofwing and Strömberg, 2010], kde jsou zajímavé body nalezeny pomocí GA a výsledného řešení je poté dosaženo sekvenčním lineárním programováním (SLP). Řešení je v tomto případě obecné, metoda má ovšem enormní výpočetní nároky.

Tato práce představuje odlišný přístup založený na *Delaunayově triangulaci* (DT) přípustné domény a využití užitečných vlastností nástroje *Distmesh* (DM) [Persson and Strang, 2004]. Naše metoda je zde aplikována na 7 příkladů s omezujícími podmínkami ve dvou dimenzích prezentovaných v [Hofwing and Strömberg, 2010], konkrétně se jedná o umístění šesti bodů v trojúhelníku, rovnoběžníku, pravidelném pětiúhelníku, pravidelném šestiúhelníku, pravidelném sedmiúhelníku, pravidelném osmiúhelníku a dvanácti bodů v nepravidelném šestiúhelníku. Optimální návrhy z [Hofwing and Strömberg, 2010] ukazuje Obrázek 1.

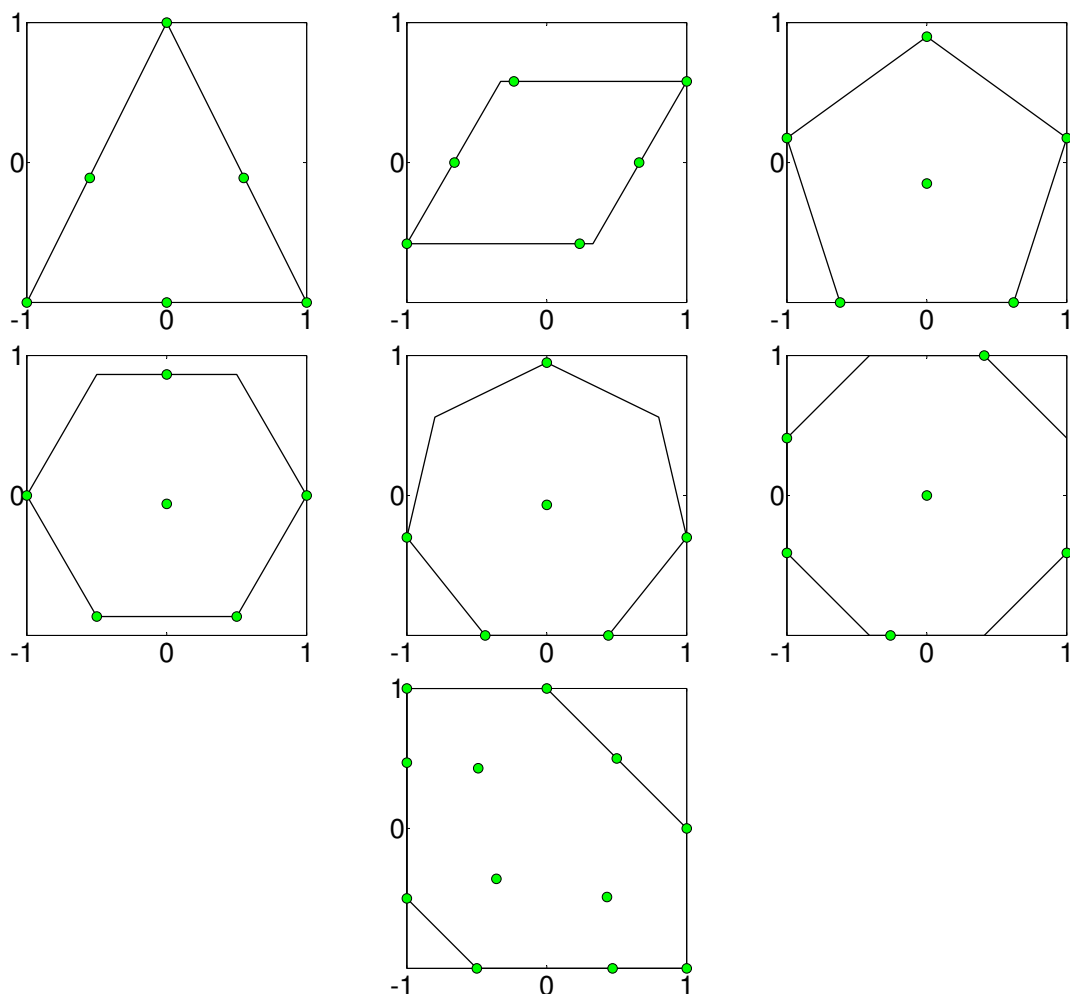
Práce je uspořádána následovně. Sekce 2 popisuje tři cílové funkce, které budou dále použity pro porovnání vlastností návrhů. Další metriky a popis jejich vlastností může čtenář nalézt v [Janouchová and Kučerová, 2011]. Sekce 3 krátce představuje metodologii použitou v referenční práci [Hofwing and Strömberg, 2010] a náš přístup je popsán v Sekci 4. Konečně, Sekce 5 přináší výsledky a jejich analýzu společně s porovnáním s referenčními návrhy.

2 Cílové funkce

Jelikož nás zajímá rovnoměrnost pokrytí dané domény, jsou návrhy hodnoceny třemi nejčastěji používanými cílovými funkcemi, které tuto vlastnost hodnotí. První je *Euklidovská Maximin* metrika (*EMM*) [van Dam et al., 2009, Husslage, 2006] zvolená pro svou jednoduchost a snadnost zobrazení. *EMM* je nejkratší ze všech vzájemných vzdáleností mezi body návrhu a je maximalizována:

$$E^{EMM} = \min\{\dots, L_{ij}, \dots\}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = (i + 1), \dots, n \quad , \quad (1)$$

2. CÍLOVÉ FUNKCE



Obrázek 1: Referenční návrhy [Hofwing and Strömberg, 2010]. Návrhy jsou generovány v bezrozměrné doméně $[-1, 1] \times [-1, 1]$; skutečné návrhy se vytvoří lineární transformací do uživatelem daných mezí.

kde n je počet návrhových bodů a L_{ij} je euklidovská vzdálenost mezi body i a j . Z pohledu experimentů je *EMM* metrika tou, která nejlépe poukazuje na nežádoucí vzájemnou blízkost experimentů. I v případě počítačových experimentů je platný předpoklad, že vyhodnocení experimentu může být nákladné. Proto je omezení možné duplicity návrhových bodů stále jedním z rozhodujících úkolů.

Druhou je cílová funkce *Audze-Eglais* (*AE*) představená v [Audze and Eglais, 1977]. Tato funkce je založena na analogii s potenciální energií sady bodů. Body jsou rozloženy rovnoměrně, pokud je potenciální energie E^{AE} nepřímo úměrná čtverci vzdáleností mezi body minimalizována, tj.

$$E^{AE} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{L_{ij}^2} \quad (2)$$

Jelikož je tato metrika v podstatě sumou vzdáleností, neodhaluje na první pohled nevhodnou pozici bodů. *AE* tak ukazuje průměrnou kvalitu sady bodů. Třetí cílovou funkcí je *D-optimalita*

(D_{opt}) představená v [Smith, 1918]. Minimalizujeme zápornou hodnotu determinantu lineární informační matice \mathbf{Z} , tj.

$$E^{D_{opt}} = -\det(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}), \text{ kde} \quad (3)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

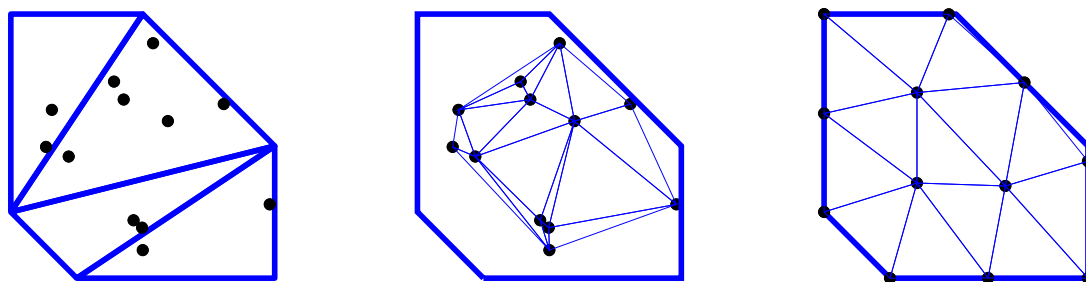
3 Referenční metoda založená na genetickém algoritmu a sekvenčním lineárním programování

V [Hofwing and Strömberg, 2010] byla k řešení neregulárních DoE problémů představena hybridní optimalizační metoda založená na efektivní kombinaci genetického algoritmu (GA) a metodologii sekvenčního lineárního programování (SLP). GA je použit k určení pozic výchozích pro SLP, které nalezne nejbližší lokální optimum. Konkrétně je použita binární verze GA a metoda vnitřních bodů dostupná v programu Matlab. Jako výchozí cílová funkce je zde použita výše popsaná D-optimalita ve své lineární formě. Globální optimum pro takto specifikovaný problém má ovšem duplicitu, tj. několik bodů sdílí tutéž pozici. Ačkoli mohou být duplikované body v některých experimentech vítány, zde jsou považovány za nedostatek návrhu. Autoři v [Hofwing and Strömberg, 2010] proto k eliminaci výskytu duplicit aplikovali bayesovskou modifikaci informační matice, která je založena na přidání podmínek vyššího řádu do matice \mathbf{Z} . Příklady z referenční práce jsou konkrétně řešeny s přidáním kvadratických podmínek. Rovněž je nutné přidat určité konstanty na diagonální prvky ($\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$), aby nebyla výsledná matice singulární, více v referencích [DuMouchel and Jones, 1994] a [Janouchová and Kučerová, 2011]. Popsaná metoda je schopná nalézt optimální řešení, nejedná se však vždy o globální optimum a rovněž výpočetní nároky nejsou nízké. Proto je v další sekci představena metoda nová.

4 Metoda založená na Delaunayově triangulaci a nástroji `Distmesh`

Triangulace je termín vhodný pro 2D, obecně se jedná o rozdělení domény na simplexu. Nejčastěji používaná je Delaunayova triangulace (DT) [Chen and Holst, 2011]. Je založena na konvexním obalu daných bodů V popisujícím přípustnou doménu; konvexní obal je nejmenší konvexní doména obsahující všechny body z V . DT poté ztrianguluje konvexní obal za dodržení té podmínky, že žádný bod z V neleží uvnitř kružnice (obecně hyperkoule) opsané kterémukoli simplexu triangulace.

Jelikož je poměrně snadné vytvořit DT a spočítat objem simplexu (výpočet objemu je uveden v Příloze A), případně další vlastnosti jednotlivých simplexů, získáváme snadno hrubý odhad podoby přípustné domény. Poprvé byla takováto metoda představena v [Crombecq et al., 2009] pro regulární návrhové prostory. Zde jsme využití tohoto přístupu rozšířili na návrhové prostory s omezujícími podmínkami začleněním nástroje `Distmesh` (DM) [Persson and Strang, 2004].



(a) Triangulace domény s náhodně generovanými body. (b) Triangulace náhodných bodů vytvářející systém prutů. (c) Výsledný návrh po aplikaci nástroje `Distmesh`.

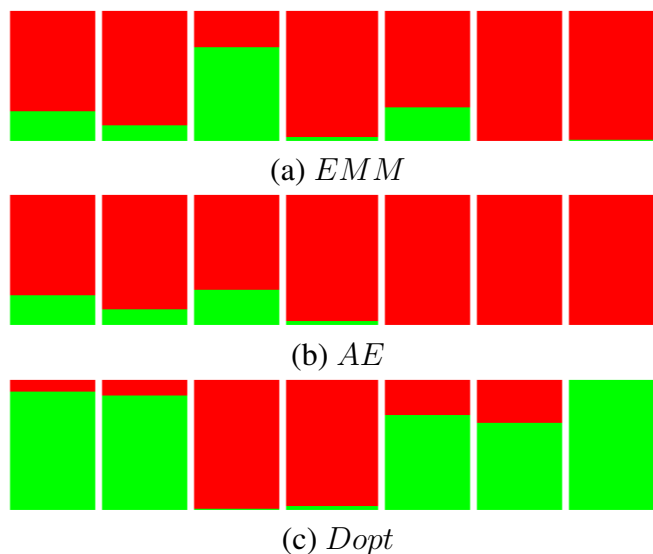
Obrázek 2: Tvorba rovnoměrné sítě z náhodně generovaných bodů.

V naší metodě je doména popsaná svými vrcholy ztriangulována pomocí DT a uvnitř je náhodně vytvořen požadovaný počet bodů, viz Obrázek 2a). V každém trojúhelníku je vytvořen počet bodů odpovídající poměru obsahu daného trojúhelníku a obsahu celé přípustné domény. Jelikož je v této proceduře použit příkaz `floor`, je součet bodů vytvořených v jednotlivých trojúhelnících menší nebo roven požadovanému počtu bodů. Chybějící body jsou poté doplněny do největšího z trojúhelníků, jak je vidět i na ilustračním Obrázku 2a), kde jsou v menších trojúhelnících vytvořeny dva body a v největším trojúhelníku tři a tři chybějící do požadovaného počtu. A opět, jelikož je výpočet objemu simplexu velmi jednoduchý, jak je vidět v Příloze A, procedura je velice rychlá.

Následně je použit nástroj `Distmesh`. Jedná se o heuristický algoritmus pro generování rovnoměrných sítí [Chen and Holst, 2011]. Jak je dobře známo, nejrovnoměrnější sítě pro metodu konečných prvků - *Finite Element Method* (FEM) jsou charakterizovány rovnoměrným rozestupem uzlů (ale ne naopak!). Proto jsme se pokusili využít této příznivé vlastnosti nástroje DM. DM je založen na jednoduchém dynamickém systému rozpínající se příhradové konstrukce. Té odpovídá druhá síť, znázorněná na Obrázku 2b). Krátké pruty vyvolávají odpuzivé síly mezi příliš si blízkými uzly a ty se tak posouvají směrem od sebe až po vytvoření rovnoměrné sítě. Obrázek 2c) ukazuje výsledné řešení. Kromě vysokých výpočetních nároků je hlavní nevýhodou nástroje potřeba procedury na vracení bodů, které opustily hranice, zpět do přípustné domény. DM obsahuje tato řešení pro základní objekty. Polygon, který používáme ve zde prezentovaných příkladech, je jedním z nich, více v článku [Persson and Strang, 2004].

5 Výsledky

Pro účely statistického vyhodnocení byla prezentovaná procedura spuštěna 100krát. V referenční práci [Hofwing and Strömberg, 2010] je uvedena pouze jedna hodnota z jednoho spuštění, proto není srovnání těchto dvou algoritmů zcela přesné. Detailní řešení každého z řešených příkladů (trojúhelník, rovnoběžník, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, pravidelný sedmiúhelník, pravidelný osmiúhelník, nepravidelný šestiúhelník) je uvedeno v Tabulkách B.1-B.7 v Příloze B ve formě sloupcových grafů spolu s vizualizací nejlepšího a nejhoršího návrhu z pohledu jednotlivých metrik. Nejlepší návrhy generované referenční procedurou znázorňuje



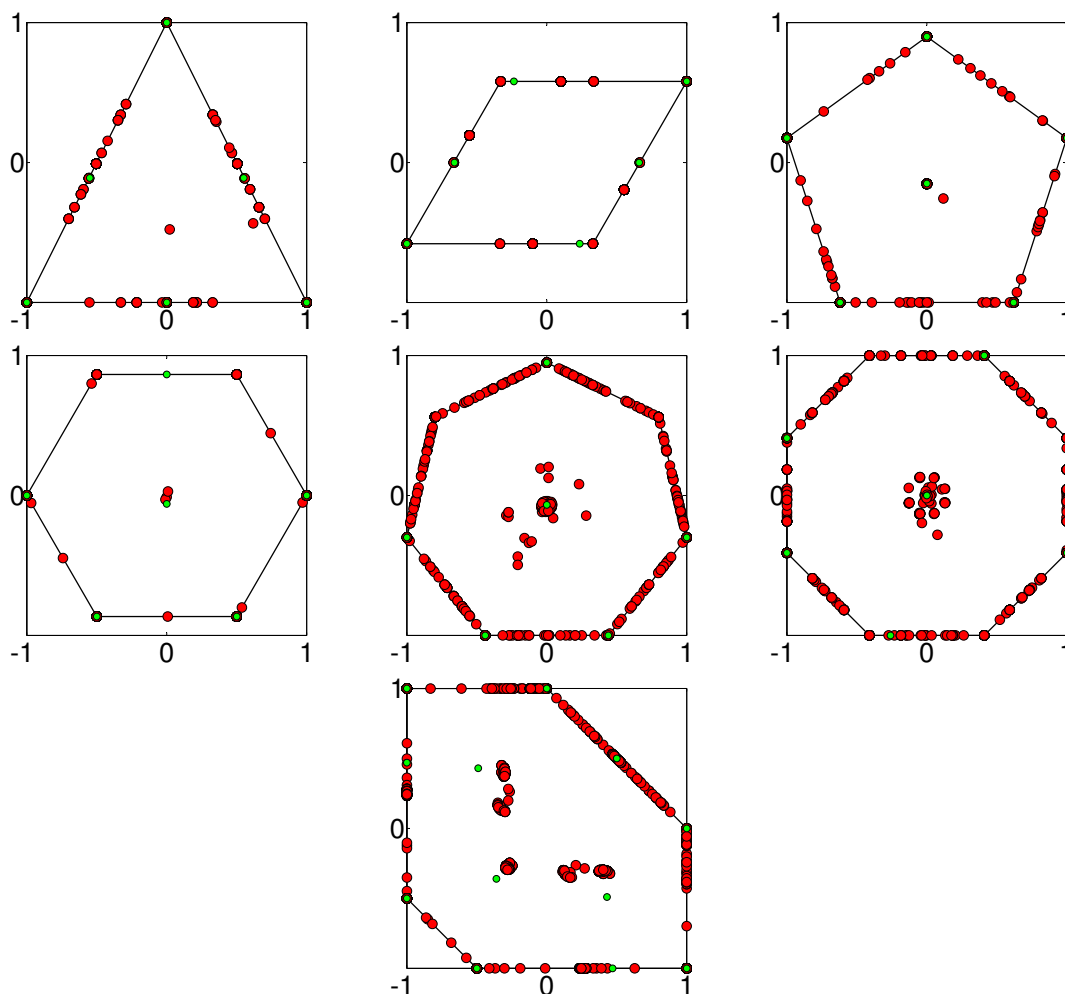
Obrázek 3: Srovnání výsledků nástroje DM a referenčního algoritmu [Hofwing and Strömberg, 2010] ve třech cílových funkcích; svislá osa značí procento úspěšnosti (větší oblast, lepší metoda), vodorovná osa 7 jednotlivých příkladů (trojúhelník, rovnoběžník, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, pravidelný sedmiúhelník, pravidelný osmiúhelník, nepravidelný šestiúhelník). Klíč: červená barva = DM, zelená barva = referenční algoritmus.

Obrázek 1. Na Obrázku 3 je znázorněna procentuální úspěšnost - *relative winning score* (RWS)¹ [Nosek and Lepš, 2011] našeho algoritmu a referenčního algoritmu. RWS grafy ukazují rozdělení 100 spuštění algoritmu na ty s výsledky lepšími než jsou referenční hodnoty a na ty s výsledky horšími. Můžeme si všimnout, že naše metoda jasně vítězí v *EMM* a *AE* cílových funkcích, tj. zaujímá zde větší plochu. Srovnání pomocí RWS grafů je zvoleno k úspoře místa, detailnější analýza výsledků je uvedena na Obrázcích C.1-C.2 v Příloze C pomocí krabicových grafů generovaných z výsledků sta spuštění algoritmu pro každý ze sedmi příkladů. Konečně, na Obrázku 4 ukazujeme všechny výsledné návrhové body ze sta spuštění naší metody na řešených příkladech. Všimněme si, že v několika příkladech vznikají lokální optima rotací optimálního řešení okolo centrálního bodu.

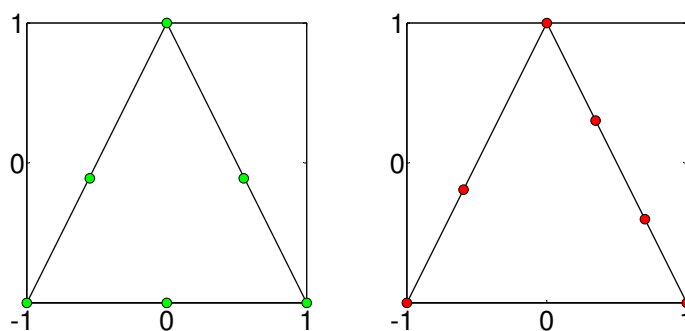
Referenční algoritmus byl optimalizován pro funkci *Dopt*, není tak překvapivé, že v této metrice vítězí, ne však zcela. Ve všech příkladech kromě posledního byla naše metoda schopná nalézt řešení s výsledkem lepším i v této metrice. Tento případ je znázorněn na Obrázku 5, kde naše řešení dosáhlo lepší hodnoty metriky *Dopt*. Důvodem je pravděpodobně přidání podmínek v rámci bayesovské aktualizace, které referenční proceduře brání nalézt globální optimum.

Jelikož zatím kódy nebyly optimalizovány z pohledu implementace, nemůže být provedena přesná analýza výpočetních nároků. Můžeme ovšem uvést obecné požadavky navrhované metody. Generátor náhodných bodů používaný pro tvorbu výchozích bodů před použitím nástroje DM je velmi rychlý a neobsahuje žádný optimalizační cyklus. Nejnáročnější je samotný nástroj DM. Obsahuje několik triangulací uvnitř cyklu potřebných k zachování fyzikální konzistence vnitřní struktury. Jak je navíc patrné i z výsledků metriky *EMM*, má Distmesh problém s kvalitou sítě na povrchu řešené domény, jak je diskutováno např. v [Chen and Holst, 2011].

¹RWS grafy jsou generovány pomocí Merlin Statistical Software pro Microsoft Excel <http://www.heckgrammar.kirklees.sch.uk/index.php?p=10310>, konkrétně byl použit *Mosaic Plot*.



Obrázek 4: Červené body označují výsledné návrhové body ze všech sta spuštění naší metody, zelené body ukazují referenční návrhy [Hofwing and Strömberg, 2010].



Obrázek 5: Srovnání návrhů pro Příklad 1 (trojúhelník a 6 návrhových bodů). Obrázek vlevo ukazuje referenční návrh ($D_{opt} = -50.0598$), obrázek vpravo ukazuje návrh s nejlepším výsledkem cílové funkce D_{opt} vytvořený novou metodou ($D_{opt} = -53.0001$). Nižší hodnota je lepší.

6 Závěr

Návrhy experimentů pro omezené prostory a počítačové experimenty představují relativně novou a neprozkoumanou oblast. Omezující podmínky komplikují aplikaci všech současných algoritmů pro tvorbu návrhů v regulárních prostorech. Tato práce přináší novou metodu a dosud nepublikované výsledky. Je důležité zmínit, že prezentovaná metoda je nezávislá na počtu dimenzí, pokud je i ve vyšších dimenzích zajištěna procedura vracející body, které leží mimo, zpět do předepsané domény. Použitím DT jsme schopni aplikovat DM na jakoukoli neregulární doménu v N -dimenzionálním prostoru. Aplikaci metody ve vyšších dimenzích mohou limitovat pouze výpočetní nároky.

7 Poděkování

Autoři by rádi poděkovali za finanční podporu Grantové agentury České republiky GAČR v rámci grantu č. P105/12/1146.

Literatura

- [Audze and Eglais, 1977] Audze, P. and Eglais, V. (1977). New approach for planning out of experiments. *Problems of Dynamics and Strengths*, 35:104–107. Zinatne Publishing House.
- [Chen and Holst, 2011] Chen, L. and Holst, M. (2011). Efficient mesh optimization schemes based on Optimal Delaunay Triangulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12):967–984.
- [Cornell, 1973] Cornell, J. A. (1973). Experiments with Mixtures: A Review. *Technometrics*, 15(3):437–455.
- [Cornell, 1979] Cornell, J. A. (1979). Experiments with Mixtures: An Update and Bibliography. *Technometrics*, 21(1):95–106.
- [Crombecq et al., 2009] Crombecq, K., Couckuyt, I., Gorissen, D., and Dhaene, T. (2009). Space-filling sequential design strategies for adaptive surrogate modelling. In Topping, B. H. V. and Tsompanakis, Y., editors, *Proceedings of the First International Conference on Soft Computing Technology in Civil, Structural and Environmental Engineering*. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK.
- [DuMouchel and Jones, 1994] DuMouchel, W. and Jones, B. (1994). A simple Bayesian modification of D-optimal designs to reduce dependence on an assumed model. *Technometrics*, 36(1):37–47.
- [Fang et al., 2006] Fang, K.-T., Li, R., and Sudjianto, A. (2006). *Design and modeling for computer experiments*. Chapman & Hall/CRC.
- [Fuerle and Sienz, 2011] Fuerle, F. and Sienz, J. (2011). Formulation of the Audze–Eglais uniform Latin hypercube design of experiments for constrained design spaces. *Advances in Engineering Software*, 42(9):680 – 689.
- [Hofwing and Strömberg, 2010] Hofwing, M. and Strömberg, N. (2010). D-optimality of non-regular design spaces by using a Bayesian modification and a hybrid method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42:73–88.
- [Husslage, 2006] Husslage, B. (2006). *Maximin Designs for Computer Experiments*. PhD thesis, Tilburg University.
- [Janouchová and Kučerová, 2011] Janouchová, E. and Kučerová, A. (Sent for publication, 2011). Competitive comparison of optimal designs of experiments for sampling-based sensitivity analysis. *Computers & Structures*.

- [MathPages, 2011] MathPages (2011). Simplex volumes and the Cayley-Menger determinant. www pages:
<http://www.mathpages.com/home/kmath664/kmath664.htm>.
- [Montgomery, 2000] Montgomery, D. C. (2000). *Design and Analysis of Experiments, 5th Edition*. Wiley, 5 edition.
- [Nosek and Lepš, 2011] Nosek, J. and Lepš, M. (2011). More practical graphical methodology for comparison of single-objective optimization algorithms. *Sent for publication*.
- [Persson and Strang, 2004] Persson, P.-O. and Strang, G. (2004). A simple mesh generator in MATLAB. *SIAM Review*, 46(2):329–345.
- [Petelet et al., 2010] Petelet, M., Iooss, B., Asserin, O., and Loredó, A. (2010). Latin hypercube sampling with inequality constraints. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 94:325–339.
- [Smith, 1918] Smith, K. (1918). On the standard deviations and interpolated values of an observed polynomial function and its constants and the guidance they give towards a proper choice of the distribution of observations. *Biometrika*, 1/2:1–85.
- [van Dam et al., 2009] van Dam, E. R., Rennen, G., and Husslage, B. (2009). Bounds for maximin latin hypercube designs. *Operations Research*, 57:595–608.

Příloha A

Výpočet objemu simplexu

Jelikož známe souřadnice vrcholů simplexu, používáme k výpočtu jeho objemu vztah využívající právě (a pouze) souřadnice vrcholů [MathPages, 2011].

Výpočet objemu simplexu ve 2D (3 vrcholy):

$$V_2 = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} \end{vmatrix}$$

Výpočet objemu simplexu ve 3D (4 vrcholy):

$$V_3 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & x_{3(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & x_{3(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & x_{3(3)} \\ 1 & x_{1(4)} & x_{2(4)} & x_{3(4)} \end{vmatrix}$$

Výpočet objemu simplexu v n D ($n + 1$ vrcholů):

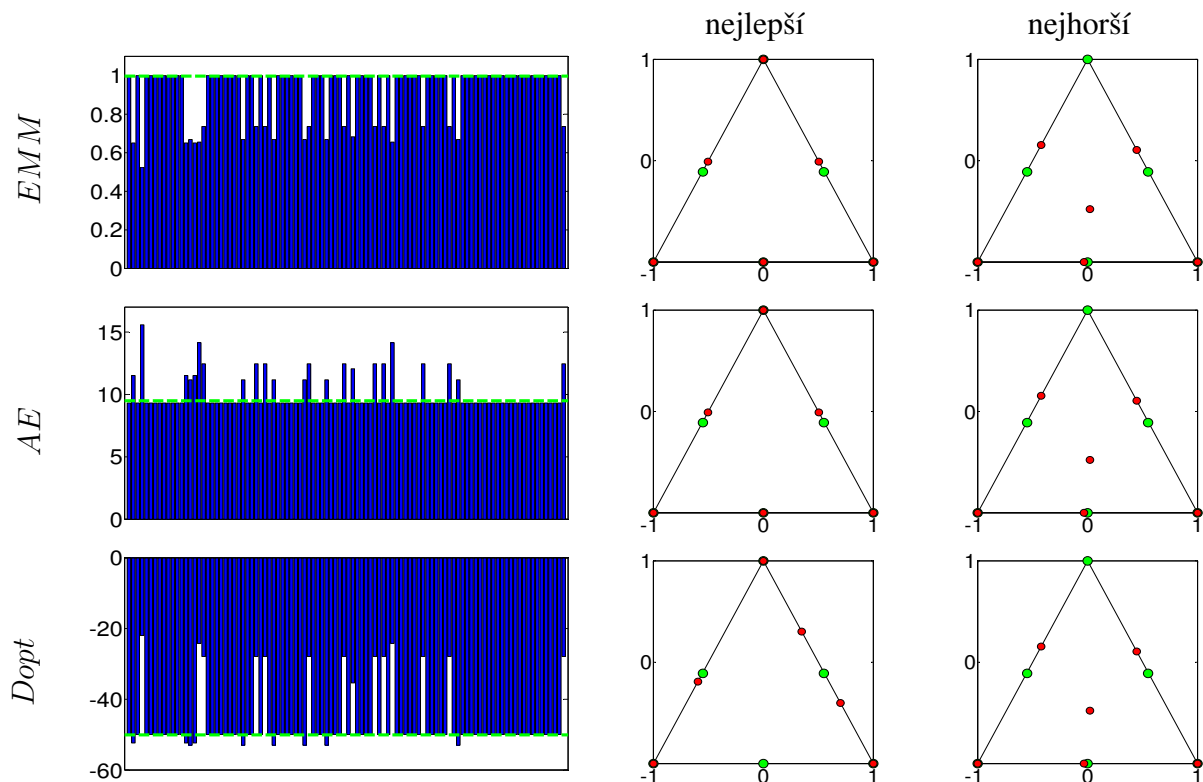
$$V_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \dots & \dots & x_{n(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \dots & \dots & x_{n(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1(n+1)} & x_{2(n+1)} & \dots & \dots & x_{n(n+1)} \end{vmatrix}$$

V zápisu $x_{a(b)}$ a značí proměnnou (dimenzi), b označuje bod návrhu.

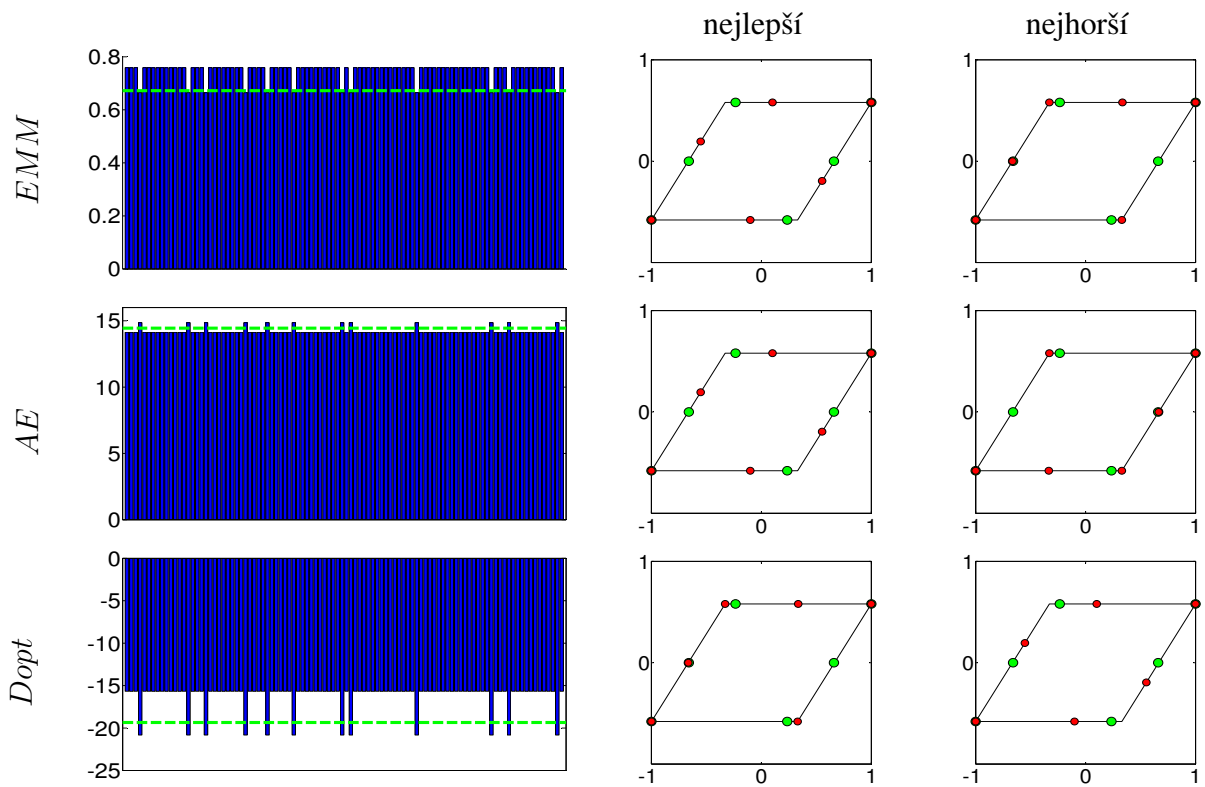
Příloha B

Výsledky sedmi jednotlivých příkladů

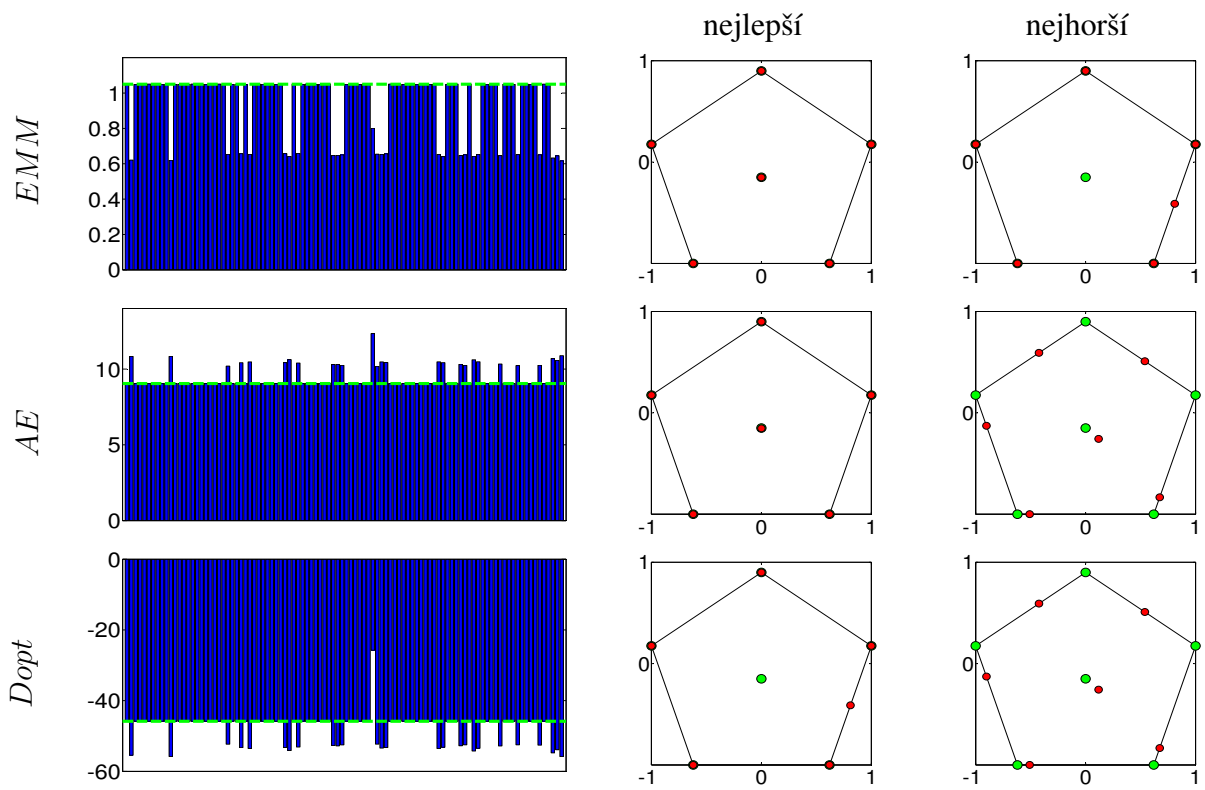
Legenda pro Tabulky B.1-B.7: Výsledky sta spuštění nástroje DM pro 7 příkladů. První řádek ukazuje výsledky *EMM* metriky (vyšší hodnota je lepší), druhý řádek ukazuje výsledky *AE* funkce (nižší hodnota je lepší) a třetí řádek ukazuje výsledky cílové funkce *Dopt* (nižší hodnota je lepší). První sloupec představuje sloupcové grafy s výsledky jednotlivých cílových funkcí ze 100 spuštění. Druhý sloupec ukazuje nejlepší a třetí sloupec nejhorší návrh z hlediska dané cílové funkce. Referenční hodnoty z [Hofwing and Strömberg, 2010] jsou znázorněny zelenou čárkovanou linií, zelené body znázorňují referenční návrhy.



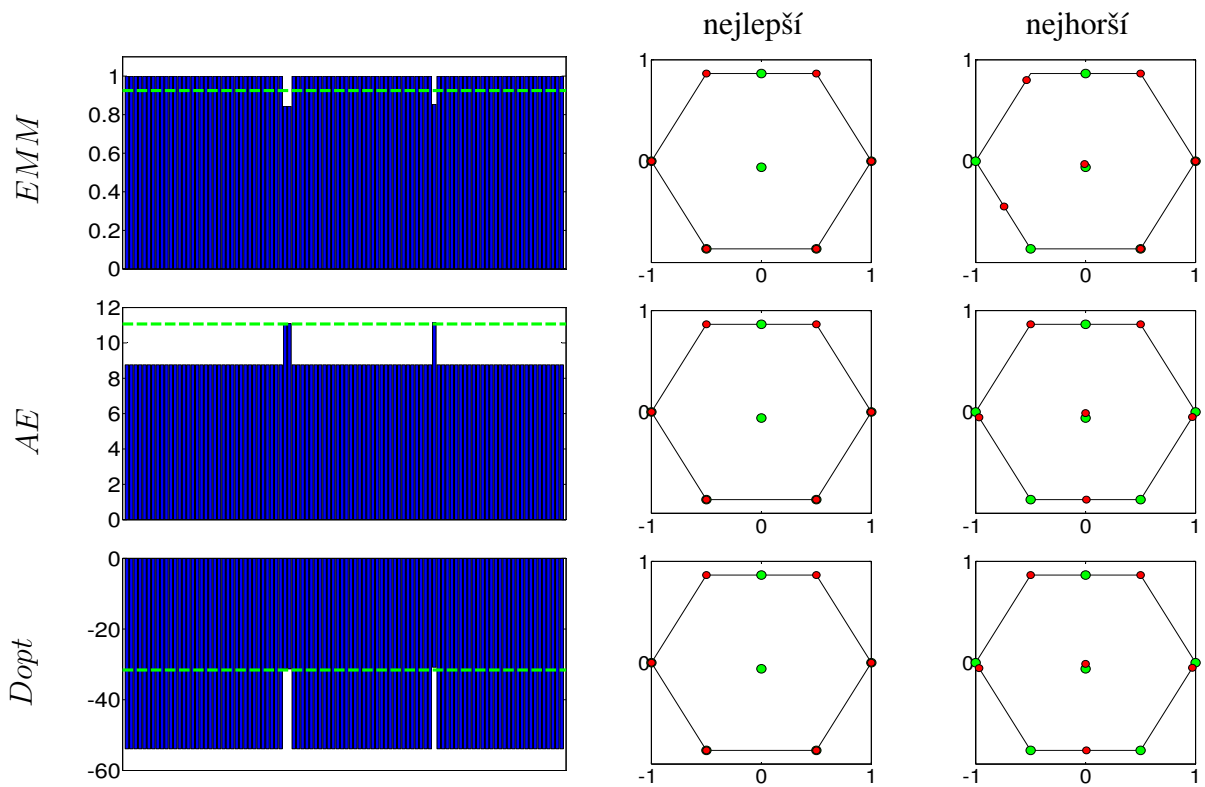
Tabulka B.1: Příklad 1 (trojúhelník a 6 návrhových bodů).



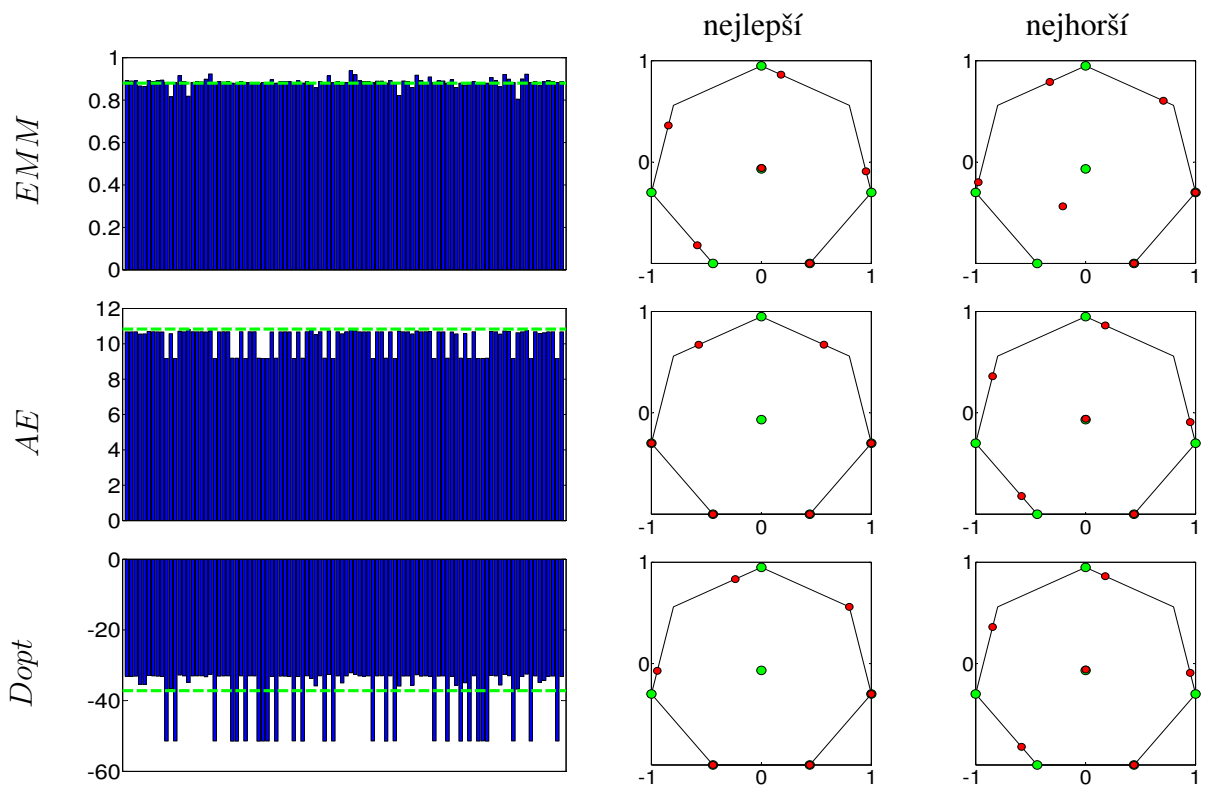
Tabulka B.2: Příklad 2 (rovnooběžník a 6 návrhových bodů).



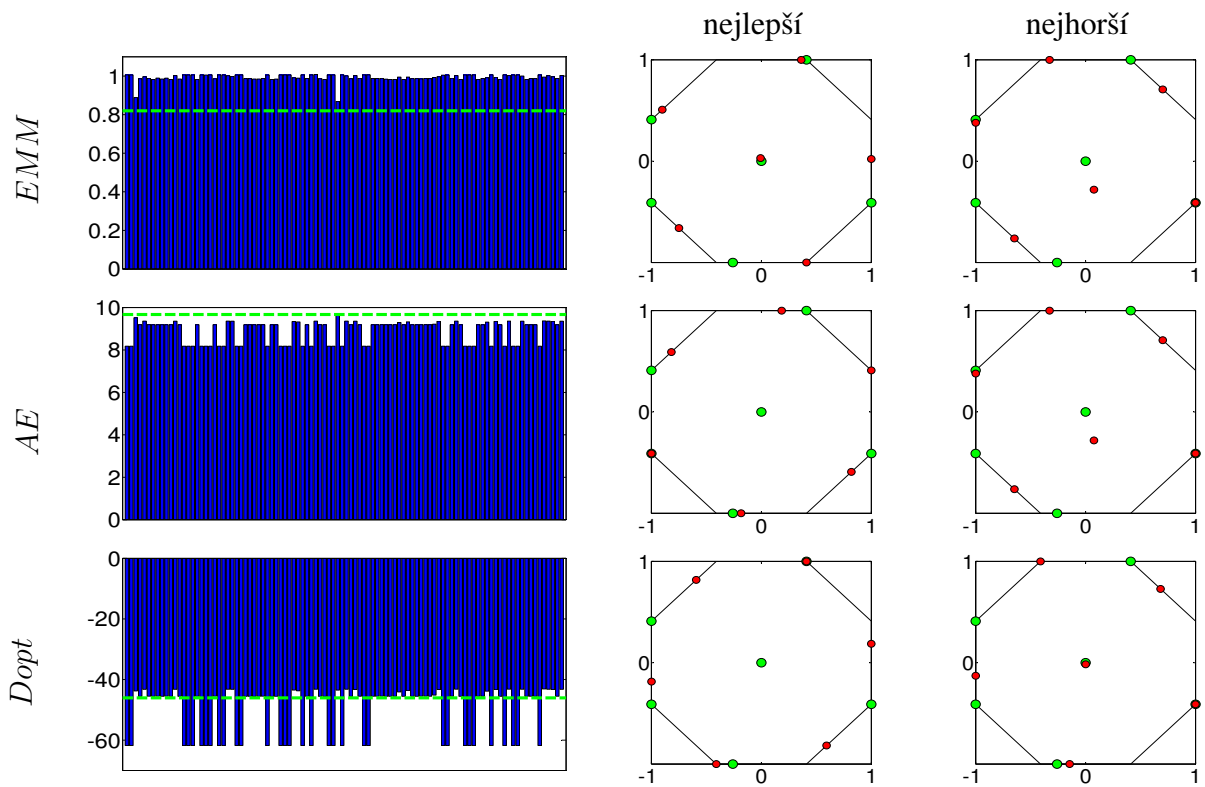
Tabulka B.3: Příklad 3 (pravidelný pětiúhelník a 6 návrhových bodů).



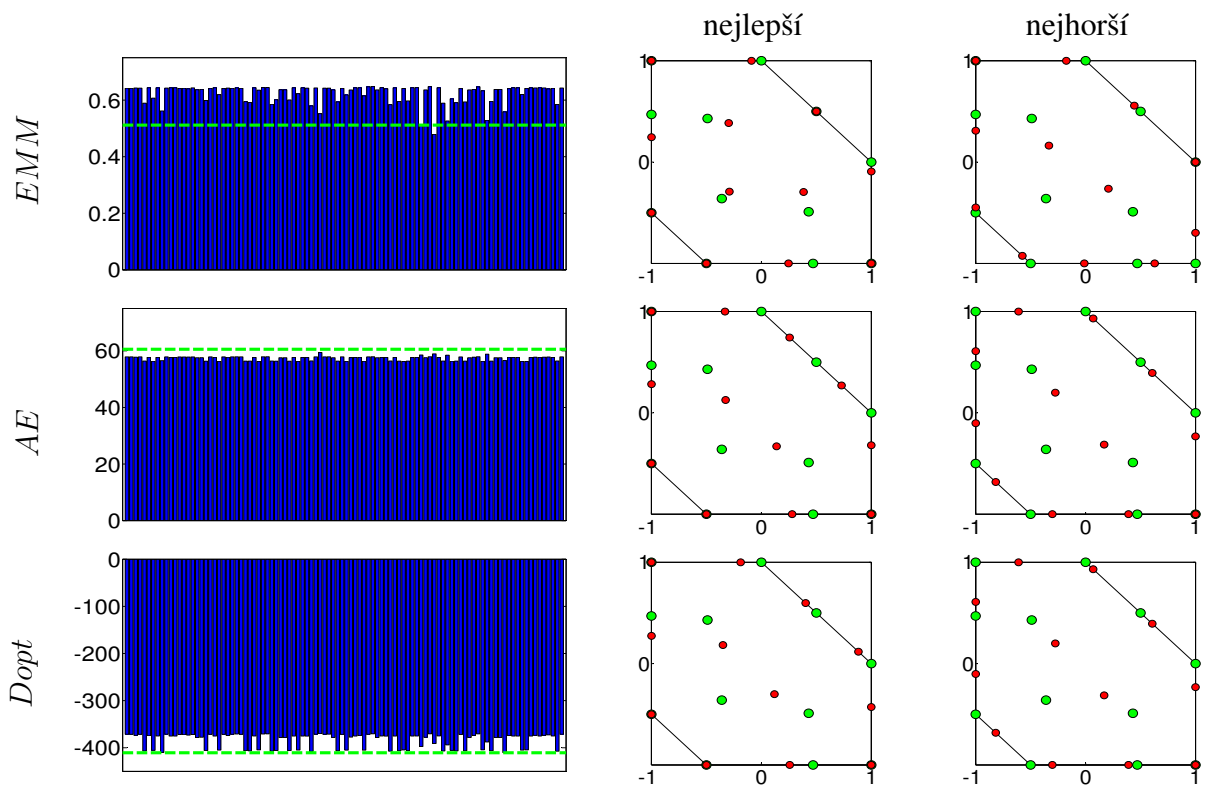
Tabulka B.4: Příklad 4 (pravidelný šestiúhelník a 6 návrhových bodů).



Tabulka B.5: Příklad 5 (pravidelný sedmiúhelník a 6 návrhových bodů).



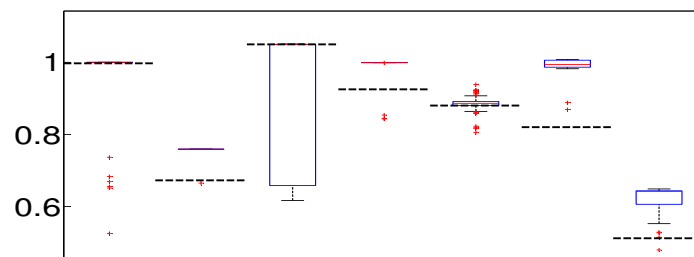
Tabulka B.6: Příklad 6 (pravidelný osmiúhelník a 6 návrhových bodů).



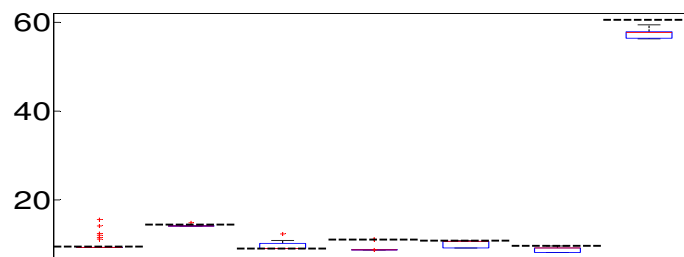
Tabulka B.7: Příklad 7 (nepravidelný šestiúhelník a 12 návrhových bodů).

Příloha C

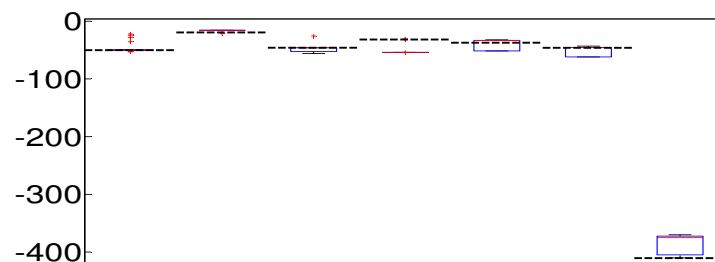
Výsledky znázorněné krabicovými grafy



(a) EMM (vyšší hodnota je lepší)

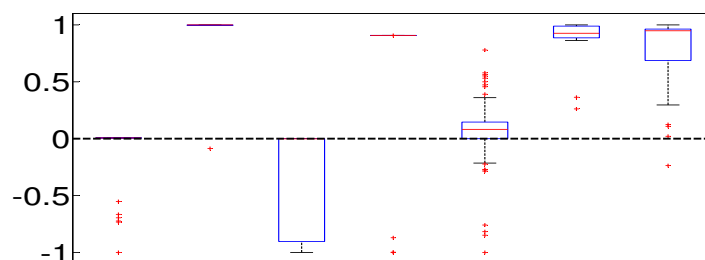


(b) AE (nižší hodnota je lepší)

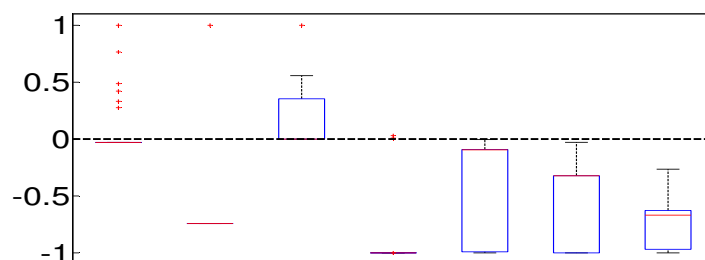


(c) D_{opt} (nižší hodnota je lepší)

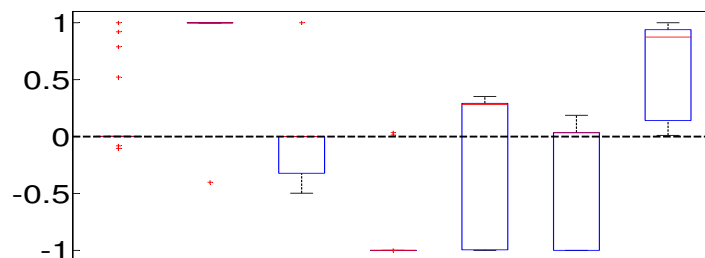
Obrázek C.1: Krabicové grafy pro 7 jednotlivých příkladů (trojúhelník, rovnoběžník, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, pravidelný sedmiúhelník, pravidelný osmiúhelník, nepravidelný šestiúhelník) a 3 cílové funkce. Černé čárkované linie značí referenční hodnoty z [Hofwing and Strömberg, 2010].



(a) *EMM* (vyšší hodnota je lepší)



(b) *AE* (nižší hodnota je lepší)



(c) *Dopt* (nižší hodnota je lepší)

Obrázek C.2: Krabicové grafy pro 7 jednotlivých příkladů (trojúhelník, rovnoběžník, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, pravidelný sedmiúhelník, pravidelný osmiúhelník, nepravidelný šestiúhelník) a 3 cílové funkce. Hodnoty jsou normalizovány. Černé čárkované linie značí referenční hodnoty z [Hofwing and Strömberg, 2010].