Aposteriorní odhad hodnoty lineární funkce chyby přibližného řešení eliptické diferenciální rovnice druhého řádu

Edita Dvořáková

VEDOUCÍ PRÁCE:
RNDr. Ivana Pultarová, Ph.D.

Semestrální práce ze SM3

Cíl práce

Cílem mé práce bylo vypočítat moment tuhosti průřezu ve volném kroucení I_k pomocí metody konečných prvků a následně spočítat ukazatel chyby řešení.

Moment tuhosti v kroucení

$$I_k = \int_\Omega x^2 + y^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \, dxdy.$$

Laplaceova rovnice pro ψ

$$\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Okrajová podmínka

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = n_x y - n_y x.$$

Hledáme minimum lineárního funkcionálu $A(u)$, kde

$$A(u) = B(u,u) - 2F(u), \qquad u \in V,$$

kde $V = \{v; v \in H^1(\Omega), \int_\Omega v\,dx = 0\}$. F je spojitý lineární funkcionál na V a B je bilineární pozitivně definitní forma na V,

$$B(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\,dxdy,$$

$$F(u) = \int_{\partial\Omega} (yn_x - xn_y)u\,ds,$$

kde (n_x, n_y) je vektor jednotkové vnější normály ke hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω.

Naším cílem je určit hodnotu L a odhad chyby L. Platí

$$L(u) = \int_\Omega x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}\,dxdy.$$

$$I_k = \int_\Omega x^2 + y^2 + \frac{\partial\psi}{\partial y}x - \frac{\partial\psi}{\partial x}y\,dxdy.$$

Uvažujeme prostor $V_h \subset V$, $\dim V_h = N_h < \infty$. Nechť

$$u_1, ..., u_{N_h}$$

tvoří bázi prostoru V_h. Libovolný prvek $u \in V_h$ lze tedy zapsat jako lineární kombinaci

$$u = \sum_{i=1}^{N_h} c_i u_i,$$

kde $c_i \in R, i = 1, ..., N_h$. Místo podmínky $\int_\Omega u \, dxdy = 0$ můžeme požadovat splnění podmínky

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N_h} c_i u_i \, dxdy = 0,$$

tedy

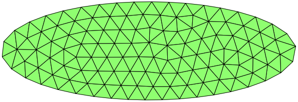
$$\sum_{i=1}^{N_h} c_i \int_\Omega u_i \, dxdy = 0.$$

Hledáme tedy extrém lineárního funkcionálu

$$A(\sum_{i=1}^{N_h} c_i u_i) = B(\sum_{i=1}^{N_h} c_i u_i, \sum_{i=1}^{N_h} c_i u_i) - 2F(\sum_{i=1}^{N_h} c_i u_i).$$

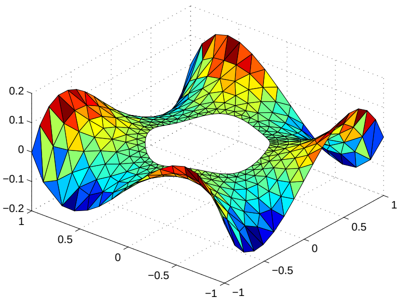
Řešení této úlohy označíme u_h.

- Triangulace na eliptické oblasti.

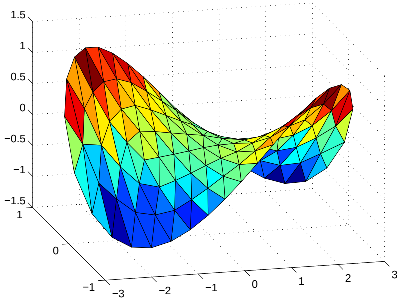


Persson, P.-O.; Strang, G., *A Simple Mesh Generator in MATLAB*, June 2004
`http://persson.berkeley.edu/distmesh/`

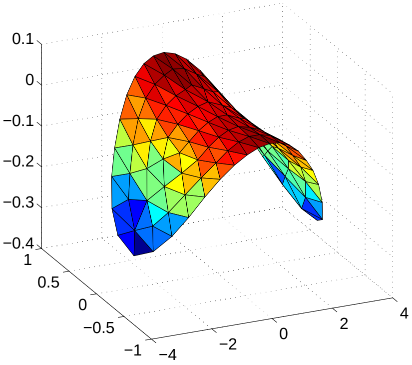
- Řešení u_h na čtvercové oblasti s kruhovým výřezem.



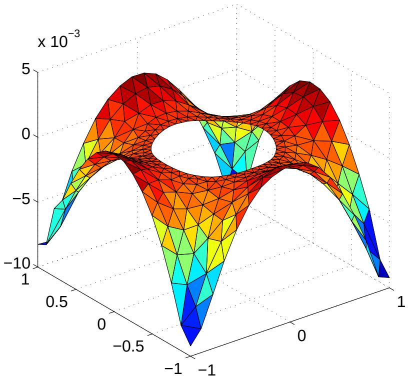
- Řešení u_h na eliptické oblasti.



- $L(u_h)$ na eliptické oblasti.



- $L(u_h)$ na čtvercové oblasti s kruhovým výřezem.



Chybu přibližného řešení u_h označíme $e \in V$,

$$e = u - u_h,$$

$$L(e) = L(u) - L(u_h).$$

Platí

$$B(e, v) = B(u - u_h, v) = 0, \qquad v \in V_h.$$

Dále označíme reziduum

$$R_h(v) = F(v) - B(u_h, v).$$

Dá se ukázat, že platí

$$R_h(v) = 0 \quad \text{pro} \quad v \in V_h.$$

Jelikož prostor V, ve kterém leží chyba e je nekonečnědimenzionální, nelze určit přesnou hodnotu e a tedy ani $L(e)$.

Zvolíme vhodný konečnědimenzionální prostor $V_1, V_h \subset V_1 \subset V$ a určíme $e_1 \in V_1$. Potom platí

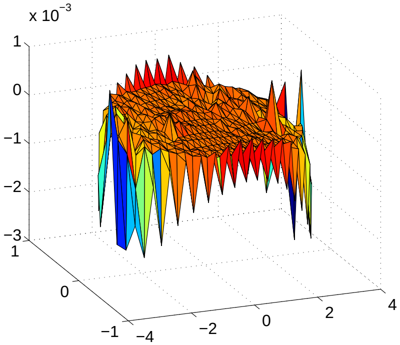
$$e_1 = u_1 - u_h,$$

kde $u_1 \in V_1$ je řešení rovnice

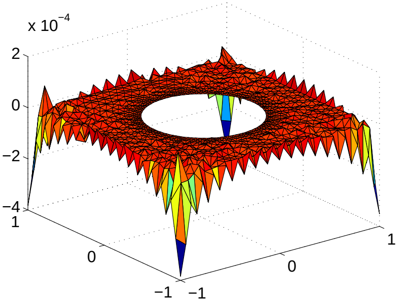
$$B(u_1, v) = F(v).$$

Máme tedy odhad chyby e_1 a můžeme vyjádřit odhad $L(e_1)$.

- Příspěvky jednotlivých elementů do $L(e_1)$ na eliptické oblasti.



- Příspěvky jednotlivých elementů do $L(e_1)$ na čtvercové oblasti s kruhovým výřezem.



Vztah mezi reziduem $R_h(v)$ a hodnotou $L(e)$ je lineární na V, neboť oba výrazy závisí lineárně na $e = u - u_h$. To znamená, že existuje lineární funkcionál ω takový, že

$$L(e) = \omega(R_h).$$

Z vlastností rezidua však plyne, že platí i rovnost $R_h(\omega) = L(e)$, tedy

$$B(u - u_h, \omega) = L(e),$$

$$B(e, \omega) = L(e).$$

To je splněno například, pokud

$$B(v, \omega) = L(v),$$

pro každé $v \in V$. Tato úloha je tzv. **duální úlohou** k naší původní úloze. Označíme $\omega_h \in V_h$ přibližné řešení ́duální ulohy , potom platí

$$B(v, \omega_h) = L(v), \qquad v \in V_h.$$

Obdobně jako v původní úloze můžeme určit chybu $\varepsilon = \omega - \omega_h \in V$. Platí $B(e, \omega_h) = 0$. To znamená

$$L(e) = B(e, \omega - \omega_h) = B(e, \varepsilon),$$

Oden, J.T.; Prudhomme, S., *Goal-Oriented Error Estimation and Adaptivity for the Finite Element Method*, 1999

Zajímavost

Během řešení duální úlohy se ukázalo, že pravé strany úlohy původní a dualní úlohy jsou stejné, tudíž i obě řešení se shodují.

$$F(v) = \int_{\partial\Omega} (yn_x - xn_y)v \, ds = \int_{\partial\Omega} yv \, dy + xv \, dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x} \, dxdy = \int_{\partial\Omega} yv \, dy + xv \, dx,$$

$$F(v) = L(v).$$

Máme

$$L(e) = B(e, \omega - \omega_h) = B(e, \varepsilon),$$

$$L(e) = B(e, \varepsilon).$$

Potom

$$|L(e)| = |B(e, \varepsilon)| \leq \sum_K |B(e, \varepsilon)_K| \leq \sum_K |||e|||_K |||\varepsilon|||_K,$$

kde součet probíhá přes všechny elementy K a index K znamená restrikci na element K.Označme

$$L_E(e) = \sum_K |||e|||_K^2.$$

Dá se ukázat, že

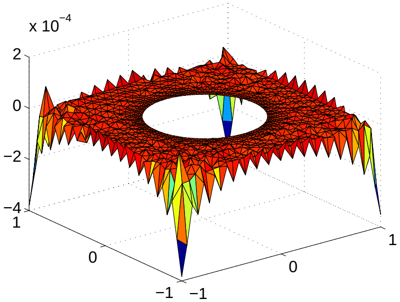
$$|||e||| \leq \frac{1}{1-\beta} |||u_1 - u_h|||,$$

kde β je tzv. saturační konstanta, $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$. Saturační konstanta pro prostory V_h a V_1, $V_h \leq V_1$, je dána vztahem

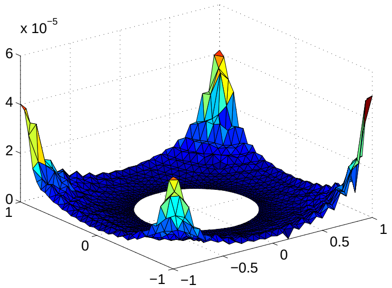
$$|||u - u_1||| \leq \beta |||u - u_h|||.$$

Hodnota saturační konstanty není známá. Avšak pro malé hodnoty h může být považována za např. $\frac{1}{2}$.

- Příspěvky jednotlivých elementů do $L(e_1)$ na čtvercové oblasti s kruhovým výřezem.



- Odhad příspěvků jednotlivých elementů do $L_E(e)$ na čtvercové oblasti s kruhovým výřezem.

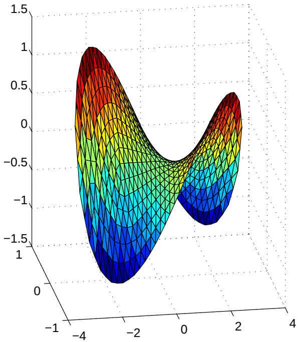


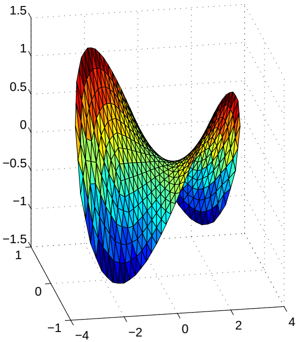
Pro eliptickou oblast známe přesnou hodnotu deplanační funkce, díky tomu můžeme porovnat některé výsledky. Platí

$$\psi(x,y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy,$$

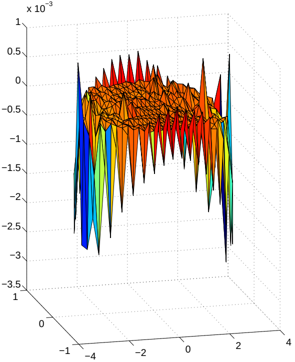
kde a a b jsou velikosti poloos dané elipsy.

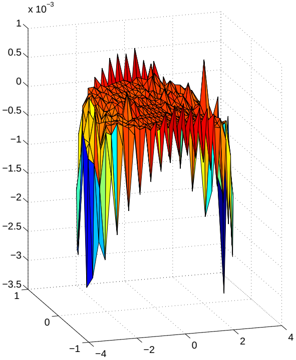
- Řešení u_h na eliptické oblasti a přesná hodnota deplanační funkce ψ.



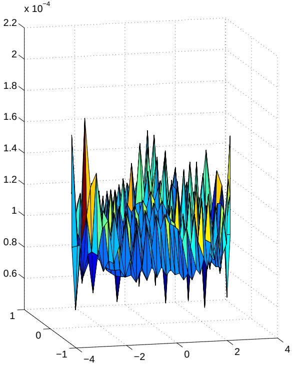


- Příspěvky jednotlivých elementů do $L(e_1)$ na eliptické oblasti v porovnání s příspěvky do $L(e)$.





- Odhad příspěvků jednotlivých elementů do $L_E(e)$ na eliptické oblasti v porovnání s přesnou hodnotou.



- Tabulka výsledných hodnot.

Veličina	**h**		
	0.6	**0.3**	**0.1**
$L(e)$	-1.7459	-0.3243	-0.0305
$L(e1)$	-1.2937	-0.2160	-0.0192
$L_E(e)$	1.3555	0.2205	0.0192
$L_E(e1)$	1.2937	0.2160	0.0192
$L(e^*)$	-3.9231	-0.8238	-0.0883

SHRNUTÍ:

- Provedli jsme dva různé postupy výpočtu odhadu chyby.
  - Heuristický odhad založený na úvaze, že přesná chyba řešení je přibližně rovna odchylce řešení v původním prostoru V_h a ve zvětšeném prostoru V_1.
  - Odhad popsaný ve zmíněném textu, jehož výhodou je, že je podložen výpočtem a že výsledná chyba je spočítána v energetické normě.
- Při řešení duální úlohy jsme zjistili, že duální úloha je totožná s úlohou původní.
- Díky znalosti přesné hodnoty deplanační funkce ψ pro eliptickou oblast jsme mohli ověřit správnost některých našich výpočtů.
- V řešení této úlohy bychom mohli i dále pokračovat, stále se dá mnoho částí rozšířit nebo vylepšit.

Děkuji Vám za pozornost