

Přehled okruhů - SM3

1. Výpočet přemístění užitím principu virtuálních sil (17)

- Princip virtuálních sil (PVs) pro prut namáhaný tahem nebo tlakem, ohybem a smykem.
- Postup výpočtu průhybu a pootočení průřezu pomocí PVs na staticky určitých rovinných nosnících a prutových soustavách – jednoduché příklady.
- Postup výpočtu posunutí styčniců v rovinných příhradových konstrukcích pomocí PVs – jednoduché příklady.
- Princip použití PVs pro staticky neurčité konstrukce, redukční věta, kontrola splnění podmínek spojitosti (kompatibility).

2. Řešení staticky neurčitých konstrukcí – silová a deformační metoda (16)

- Postup řešení jednoduchých konstrukcí (rovinné složené soustavy, rámu, spojitého nosníku, příhradové konstrukce) **silovou metodou** – vytvoření základní soustavy, zavedení základních neznámých, sestavení základních rovnic, význam a způsob určení jednotlivých koeficientů a proměnných v těchto rovnicích.
- Postup řešení jednoduchých konstrukcí (rovinné složené soustavy, rámu, spojitého nosníku, příhradové konstrukce) **deformační metodou** – zavedení základních neznámých, sestavení základních rovnic, význam a způsob určení jednotlivých koeficientů a proměnných v těchto rovnicích. Varianty DM – obecná, zjednodušená, pro příhradové konstrukce – jaké jsou předpoklady a jejich důsledky, vhodnost použití jednotlivých variant.
- **Rozbor**: posouzení **statické neurčitosti (sn)**, určení **počtu neznámých posunů a pootočení ve styčnicích (pn)** nosníků, rámu, složených prutových soustav a příhradových konstrukcí v rovině.
- Rozdíl mezi chováním staticky určitých a staticky neurčitých konstrukcí při působení přímých (silových) a nepřímých zatížení (změna teploty, přemístění podpor).



Title Page



Page 1 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Vzorce: Princip virtuálních sil a silová metoda (prof. P. Kabele)

Povolená pomůcka ke zkoušce ze SM3 (zkouší prof. Petr Kabele)

Princip virtuálních sil

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^* &= \delta W_{ext}^* \\ &= \sum_p \left(\int_0^{L_p} \delta N(x) \epsilon(x) dx + \int_0^{L_p} \delta V(x) \gamma(x) dx + \int_0^{L_p} \delta M(x) \kappa(x) dx \right) \\ &= \delta F_k u_k + \sum_i \delta R_{ix} \tilde{u}_i + \sum_j \delta R_{jz} \tilde{w}_j + \sum_m \delta M_{Rm} \tilde{\varphi}_m \\ \epsilon(x) &= \frac{N(x)}{EA} + \alpha_T \Delta t_s \quad \gamma(x) = \frac{V(x)}{GA_s} \quad \kappa(x) = \frac{M(x)}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h} \end{aligned}$$

Silová metoda

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_p \int_0^{L_p} \left(\frac{M_i(x) M_j(x)}{EI} + \frac{N_i(x) N_j(x)}{EA} + \frac{V_i(x) V_j(x)}{GA_s} \right) dx \\ \delta_{i0} &= \sum_p \int_0^{L_p} \left(\frac{M_i(x) M_0(x)}{EI} + \frac{N_i(x) N_0(x)}{EA} + \frac{V_i(x) V_0(x)}{GA_s} \right) dx \\ &+ \sum_p \int_0^{L_p} \left(M_i(x) \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h} + N_i(x) \alpha_T \Delta t_s \right) dx \\ &- \sum_k R_{x,i} \tilde{u} - \sum_l R_{z,i} \tilde{w} - \sum_m M_{R,i} \tilde{\varphi} \end{aligned}$$



Title Page



Page 2 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Vzorce: Princip virtuálních sil a silová metoda



TABULKA 1

HODNOTY $\int M \bar{M} dx$

1		$\frac{1}{2} M_a \bar{M}_a \ell$	$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{1}{6} M_a (2\bar{M}_a + \bar{M}_b) \ell$
2		$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{6} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{6} M_b (\bar{M}_a + 2\bar{M}_b) \ell$
3		$\frac{1}{2} (M_a + M_b) \bar{M}_a \ell$	$\frac{1}{6} (2M_a + M_b) \bar{M}_a \ell$	$\frac{1}{6} [\bar{M}_a (2M_a + M_b) + \bar{M}_b (M_a + 2M_b)] \ell$
4		$M_a \bar{M}_a \ell$	$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{1}{2} (\bar{M}_a + \bar{M}_b) M_a \ell$
5		$\frac{2}{3} \bar{M}_a M_c \ell$	$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_c \ell$	$\frac{1}{3} M_c (\bar{M}_a + \bar{M}_b) \ell$
6		$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{1}{12} M_a (3\bar{M}_a + \bar{M}_b) \ell$
7		$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{12} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{12} M_b (\bar{M}_a + 3\bar{M}_b) \ell$
8		$\frac{4}{3} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{5}{12} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{1}{12} M_a (5\bar{M}_a + 3\bar{M}_b) \ell$
9		$\frac{2}{3} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{12} M_b (3\bar{M}_a + 5\bar{M}_b) \ell$
10		$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{20} \bar{M}_a M_b \ell$	$\frac{1}{20} M_b (\bar{M}_a + 4\bar{M}_b) \ell$
11		$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_a \ell$	$\frac{1}{20} M_a (4\bar{M}_a + \bar{M}_b) \ell$

Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 3 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Vzorce: Deformační metoda

DEFORMAČNÍ METODA – Celkové koncové momenty a síly

$k = \frac{2EI}{L}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">prut typu V-V</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> $M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$ </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> $M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$ </td> </tr> </tbody> </table>	prut typu V-V		$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$	$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$
prut typu V-V					
$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$	$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$				
$n = \frac{EA}{L}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">prut typu V-K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> $M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left(1,5\varphi_a + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_a + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$ </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> \times $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$ </td> </tr> </tbody> </table>	prut typu V-K		$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left(1,5\varphi_a + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_a + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$	\times $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$
prut typu V-K					
$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left(1,5\varphi_a + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_a + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$	\times $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$				
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2" style="text-align: center;">prut typu K-V</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> \times $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$ </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> $M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$ </td> </tr> </tbody> </table>	prut typu K-V		\times $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$	$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$
prut typu K-V					
\times $Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$	$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(1,5\varphi_b + 1,5\frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$ $X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$				
	Transformace koncových sil $X^g = X^l \cos \alpha - Z^l \sin \alpha$ $Z^g = X^l \sin \alpha + Z^l \cos \alpha$				
	Transformace styčnickových posunů $u^l = u^g \cos \alpha + w^g \sin \alpha$ $w^l = -u^g \sin \alpha + w^g \cos \alpha$				

Vladimír Štáta, Petr Purnánský, Václav Šmilauer ver. 2018/09/27



Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 4 of 53

Go back

Full Screen

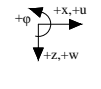
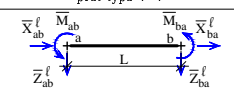
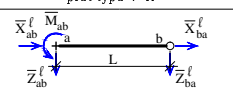
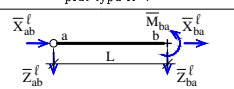
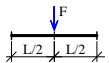
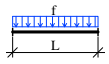
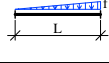
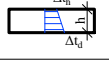
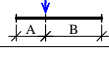
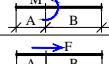
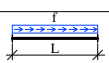
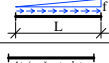
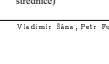

Close

Quit

Vzorce: Deformační metoda

DEFORMAČNÍ METODA – Koncové momenty a síly od prutového zatížení



	prut typu V-V		prut typu V-K		prut typu K-V	
						
	$\bar{M}_{ab} = \frac{FL}{8}$	$\bar{M}_{ba} = -\frac{FL}{8}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{3}{16}FL$	✘	✘	$\bar{M}_{ba} = -\frac{3}{16}FL$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{F}{2}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{F}{2}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{11F}{16}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{5F}{16}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{5F}{16}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{11F}{16}$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{fl^2}{12}$	$\bar{M}_{ba} = -\frac{fl^2}{12}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{fl^2}{8}$	✘	✘	$\bar{M}_{ba} = -\frac{fl^2}{8}$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{fl}{2}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{fl}{2}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{5fl}{8}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{3fl}{8}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{3fl}{8}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{5fl}{8}$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{fl^2}{30}$	$\bar{M}_{ba} = -\frac{fl^2}{20}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{7fl^2}{120}$	✘	✘	$\bar{M}_{ba} = -\frac{fl^2}{15}$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{3fl}{20}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{7fl}{20}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{27fl}{120}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{33fl}{120}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{fl}{10}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{2fl}{5}$
	$\bar{M}_{ab} = EI\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$	$\bar{M}_{ba} = -EI\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{3}{2}EI\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$	✘	✘	$\bar{M}_{ba} = -\frac{3}{2}EI\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$
	$\bar{Z}_{ab} = 0$	$\bar{Z}_{ba} = 0$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{3EI}{2L}\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$	$\bar{Z}_{ba} = \frac{3EI}{2L}\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$	$\bar{Z}_{ab} = \frac{3EI}{2L}\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{3EI}{2L}\alpha_t \frac{\Delta t_d - \Delta t_h}{h}$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{FAB^2}{L^2}$	$\bar{M}_{ba} = -\frac{FA^2B}{L^2}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{FAB}{2L^2}(B+L)$	✘	✘	$\bar{M}_{ba} = -\frac{FAB}{2L^2}(A+L)$
	$\bar{Z}_{ab}, \bar{Z}_{ba}$ se dopočítají z podmínek rovnováhy prutu					
	$\bar{M}_{ab} = \frac{MB}{L^2}(2L-3B)$	$\bar{M}_{ba} = \frac{MA}{L^2}(2L-3A)$	$\bar{M}_{ab} = \frac{M}{2L^2}(L^2-3B^2)$	✘	✘	$\bar{M}_{ba} = \frac{M}{2L^2}(L^2-3A^2)$
	$\bar{Z}_{ab}, \bar{Z}_{ba}$ se dopočítají z podmínek rovnováhy prutu					
	$\bar{X}_{ab} = -\frac{FB}{L}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{FA}{L}$	$\bar{X}_{ab} = -\frac{FB}{L}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{FA}{L}$	$\bar{X}_{ab} = -\frac{FB}{L}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{FA}{L}$
	$\bar{X}_{ab} = -\frac{fl}{2}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{fl}{2}$	$\bar{X}_{ab} = -\frac{fl}{2}$	$\bar{X}_{ba} = \frac{fl}{2}$	$\bar{X}_{ab} = -\frac{fl}{2}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{fl}{2}$
	$\bar{X}_{ab} = -\frac{fl}{6}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{fl}{3}$	$\bar{X}_{ab} = -\frac{fl}{6}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{fl}{3}$	$\bar{X}_{ab} = -\frac{fl}{6}$	$\bar{X}_{ba} = -\frac{fl}{3}$
	$\bar{X}_{ab} = EA\alpha_t\Delta t_s$	$\bar{X}_{ba} = -EA\alpha_t\Delta t_s$	$\bar{X}_{ab} = EA\alpha_t\Delta t_s$	$\bar{X}_{ba} = -EA\alpha_t\Delta t_s$	$\bar{X}_{ab} = EA\alpha_t\Delta t_s$	$\bar{X}_{ba} = -EA\alpha_t\Delta t_s$

Title Page

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Page 5 of 53

Go back

Full Screen

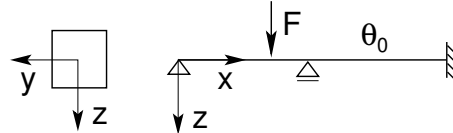
Close

Quit

Princip virtuálních sil vs Princip virtuálních posunutí

V celém textu se omezíme na kombinaci tahu/tlaku a jednoduchého ohybu v rovině xz . Osy průřezu yz jsou hlavní centrální. Rovina zatížení obsahuje jednu z hlavních centrálních os.

Kinematika přemístění, přetvoření a Hookeův zákon



- Bernoulli-Navierova hypotéza

$$w(x, z) = w(x)$$

$$u(x, z) = u_0(x) - w'(x)z, \quad -w'(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \varphi_y(x) \Rightarrow \gamma_{xz} = 0$$

smykové napětí τ_{xz} neurčíme z Hookeova zákona

$$\varepsilon_x(x, z) = u'_0(x) - w''(x)z$$

$$\sigma_x(x, z) = E(\varepsilon_x(x, z) - \varepsilon_0(x, z)) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y}z$$

- Mindlinova teorie ohybu

$$w(x, z) = w(x)$$

$$u(x, z) = u_0(x) + \varphi_y(x)z, \quad \gamma(x, z) = \bar{\gamma}_{xz}(x) \rightarrow \bar{\tau}_{xz}(x) = \kappa G \bar{\gamma}_{xz}(x) \neq 0 = \frac{Q_z(x)}{A}$$

$$\bar{\gamma}_{xz}(x) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x)}{\partial x} = \varphi_y(x) + w'(x) = \frac{Q_z(x)}{\kappa GA} = \frac{Q_z(x)}{GA^*} = \frac{Q_z(x)}{GA_s}$$

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = u'_0(x) + \varphi'_y(x)z$$

$$\sigma_x(x, z) = E(\varepsilon_x(x, z) - \varepsilon_0(x, z)) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y}z$$



Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 6 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Princip virtuálních sil vs Princip virtuálních posunutí

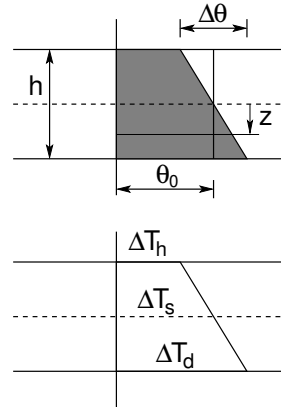
Pro jednoduchost zavedeme označení:

$$\sigma_x(x, z) = \sigma, \varepsilon_x(x, z) = \varepsilon, \bar{\gamma}_{xz}(x) = \gamma, \bar{\tau}_{xz}(x) = \tau$$

Nerovnoměrné ohřátí/ochlazení:

$$\theta = \theta(x, z) \rightarrow \theta(x, z) = \theta_0(x) + \Delta\theta(x) \frac{z}{h}$$

$$\Delta T = \Delta T(x, z) = \Delta T_s(x) + \frac{\Delta T_d(x) - \Delta T_h(x)}{h} z$$



1. Princip virtuálních sil

$$\delta E_i^* = \delta E_e^*$$

- δE_i^* - práce virtuálních sil (napětí) na skutečných přetvořeních
- Silový virtuální stav je staticky přípustný

$$\begin{aligned} \delta E_i^* &= \int_{\Omega} \delta W^*(\sigma, \tau) d\Omega = \int_{\Omega} (\varepsilon \delta \sigma + \gamma \delta \tau) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \right) \delta \sigma + \frac{\tau}{\kappa G} \delta \tau \right] d\Omega \\ &= \int_0^L \left\{ \underbrace{\left(\frac{N}{EA} + \alpha \theta_0 \right)}_{u'_0} \delta N + \underbrace{\left(\frac{M_y}{EI_y} + \alpha \frac{\Delta\theta}{h} \right)}_{\varphi'_y} \delta M_y + \underbrace{\frac{Q_z}{\kappa GA}}_{\varphi_y + w'} \delta Q_z \right\} dx \end{aligned}$$



Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 7 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

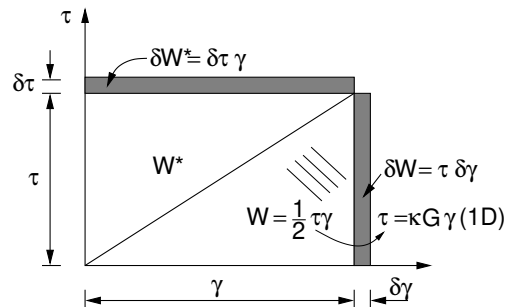
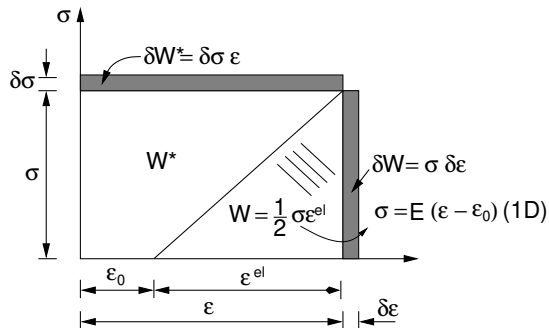
2. Princip virtuálních posunutí

$$\delta E_i = \delta E_e$$

- δE_i - práce skutečných sil (napětí) na virtuálních přetvořeních
- Deformační virtuální stav je kinematicky přípustný

$$\begin{aligned} \delta E_i &= \int_{\Omega} \delta W(\varepsilon, \gamma) d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma \delta \varepsilon + \tau \delta \gamma) d\Omega = \int_{\Omega} [E(\varepsilon - \varepsilon_0) \delta \varepsilon + \kappa G \gamma \delta \gamma] d\Omega \\ &= \int_0^L \left\{ \underbrace{(EAu'_0 - EA\alpha\theta_0)}_N \delta u'_0 + \underbrace{(EI_y \varphi'_y - EI_y \alpha \frac{\Delta\theta}{h})}_{M_y} \delta \varphi'_y + \underbrace{\kappa GA(\varphi_y + w')}_{Q_z} (\delta \varphi_y + \delta w') \right\} dx \end{aligned}$$

Pracovní diagram - 1D



Title Page



Page 8 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Výpočet přemístění užitím principu virtuálních sil (PVs)

- Základní rovnice

$$\delta E_i^* = \delta E_e^* \quad (1)$$

$$\delta E_i^* = \int_0^L \left\{ \left(\frac{N}{EA} + \alpha \theta_0 \right) \delta N + \left(\frac{M_y}{EI_y} + \alpha \frac{\Delta \theta}{h} \right) \delta M_y + \frac{Q_z}{\kappa GA} \delta Q_z \right\} dx \quad (2)$$

$$\delta E_e^* = \sum_k \Delta^k \delta F_{\Delta}^k + \sum_j \varphi_y^m \delta M^m + \sum_m \bar{\Delta}^n \delta R_{\Delta}^n + \sum_n \bar{\varphi}_y^p \delta M_R^p \quad (3)$$

Virtuální práce sil vnějších je práce virtuálního zatížení δF_{Δ} , δM na jim odpovídajících posunech, respektive pootočeních, a práce virtuálních reakcí, které tato zatížení vyvolávají, na předepsaných posunech a pootočeních podpor (např. δR_{Δ}^m je celková virtuální silová reakce od všech virtuálních zatížení působící ve směru předepsaného posunu $\bar{\Delta}^m$).

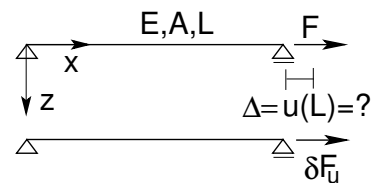
- Virtuální vs jednotkový stav

Př. Určete vodorovný posun koncového bodu nosníku $u(L)$

$$\delta E_i^* = \int_0^L \frac{N}{EA} \delta N dx = \int_0^L \frac{F}{EA} \delta F_u dx$$

$$\delta E_e^* = u(L) \delta F_u$$

$$\int_0^L \frac{F}{EA} \delta F dx = u(L) \delta F_u$$



Je zřejmé, že virtuální zatížení se vyskytuje na obou stranách rovnice. Lze jej tedy s výhodou volit jako jednotkové: $\delta F = 1$. V následujícím textu budeme průběhy vnitřních sil, příslušné jednotkovým zatěžovacím stavům, značit s pruhem např. $\delta N|_{\delta F=1} = \bar{N}$.



Výpočet přemístění užitím principu virtuálních sil (PVs)

- Typy úloh
 1. Staticky určité rovinné nosníky a prutové konstrukce
 2. Příhradové konstrukce
 3. Staticky neurčité konstrukce - použití redukční věty
- Bez ohledu na typ úlohy bude vaším úkolem vysvětlit postup řešení na zadané úloze
 - Posoudit, který z členů v rov. (2) má pro dané zadání smysl uvažovat.
 - Načrtnout průběhy vnitřních sil od skutečného a virtuálního zatížení.
 - Zapsat výslednou rovnici pro výpočet požadovaného typu přemístění.
 - Student by měl být schopen vyjádřit význam jednotlivých členů v rov. (2)
 - Studenta by nemělo překvapit, pokud se v úloze objeví účinek teploty, předepsaného poklesu či pootočení podpor, případně zda úkolem bude stanovení relativního (vzájemného) posunu dvojice bodů či relativního natočení dvojice průřezů.



Title Page



Page 10 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

PVs - Staticky určité rovinné nosníky a prutové konstrukce



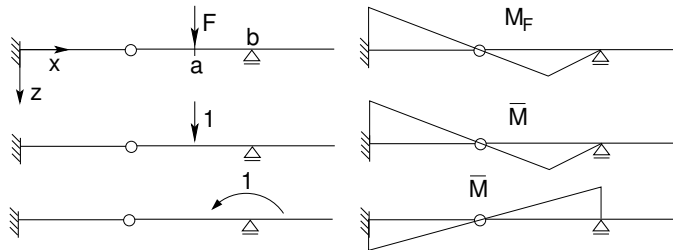
- **Staticky určitý rovinný nosník**

Zadání:

Uvažujte nosník na obrázku ($EI_y = konst$). V bodě a určete svislý posun w^a a v bodě b pootočení průřezu φ_y^b . Uvažujte Bernoulli-Navierovu hypotézu.

Řešení:

1. Vykreslení průběhů momentů od zatížení a jednotkových virtuálních stavů

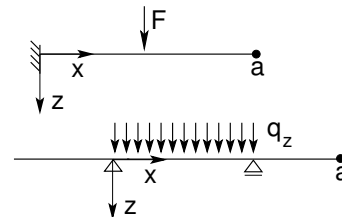


2. Vyjádření principu virtuálních sil

$$\sum_k \int_{L_k} \frac{M_F^k}{EI_y} \bar{M}^k dx = w^a \cdot 1 \quad (\text{nebo } \varphi_y^b \cdot 1)$$

3. Případné další dotazy a variantní zadání (posun/pootočení v bodě a)

- Co vyjadřuje výraz EI_y ?
- Co vyjadřuje výraz $\frac{M_F}{EI_y}$?



PVs - Staticky určité rovinné nosníky a prutové konstrukce



• Staticky určitý rám

Zadání:

Uvažujte konstrukci na obrázku ($EI_y = konst$). V bodě c určete vodorovný posun u^c od účinku rovnoměrného spojitého zatížení q a rovnoměrného gradientu změny teploty $\frac{\Delta\theta}{h}$ na prvku bc , kde h je výška průřezu. Účinek posouvajících sil zanedbejte.

Řešení:

Protože průměrná změna teploty $\theta_0 = 0$, můžeme psát

$$\delta E_i^* = \delta E_e^*$$

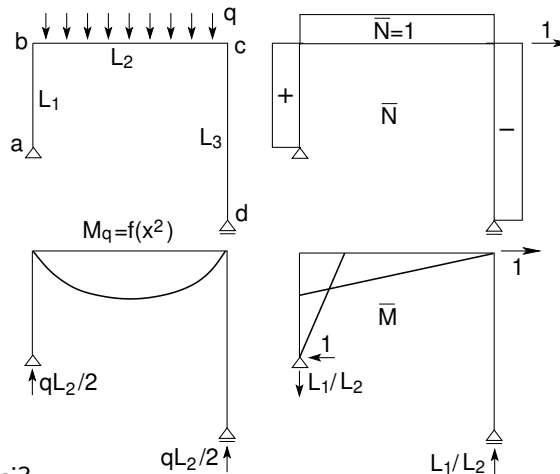
$$\delta E_i^* = \sum_k \int_{L_k} \frac{M_q^k}{EI_y} \bar{M}^k dx + \int_{L_2} \frac{\alpha \Delta\theta}{h} \bar{M}^{L_2} dx$$

$$\delta E_e^* = u_c \cdot 1$$

Případná doplňující otázka:

- Co vyjadřuje výraz $\frac{\alpha \Delta\theta}{h}$
- Ovlivní teplotní účinky nějakým způsobem reakce a vnitřní síly na staticky určité konstrukci?
- Jak by se změnil vzorec pro výpočet δE_i^* , pokud by na prutu bc platilo $\Delta\theta = 0, \theta_0 \neq 0$?

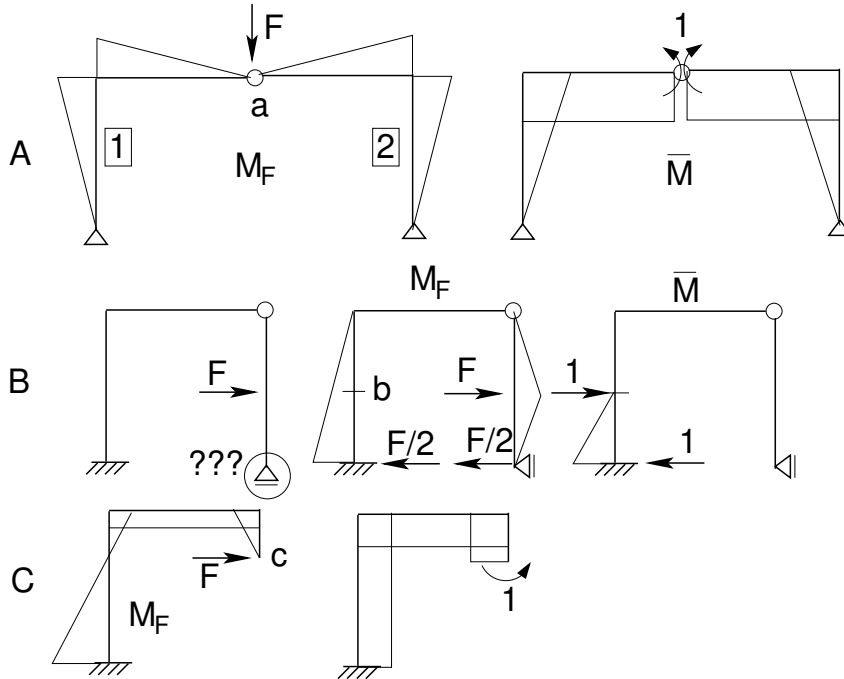
$$\text{(hint: připomeňme rov. (2) } \delta E_i^* = \sum_k \int_{L_k} \frac{M_q^k}{EI_y} \bar{M}^k dx + \underbrace{\int_{L_2} \alpha \theta_0 \bar{N}^{L_2} dx}_{= \alpha \theta_0 L_2 \text{ (}\theta_0(x)=\theta_0\text{)}} \text{)}$$



PVs - Staticky určité rovinné nosníky a prutové konstrukce

Variantní zadání:

- Varianta A - v bodě a určete relativní pootočení průřezů φ_y^{12}
- Varianta B - v bodě b určete vodorovný posun u^b
- Varianta C - v bodě c určete pootočení průřezu φ_y^c



Title Page

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Page 13 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

PVs - Staticky určité rovinné příhradové konstrukce



Připomeňme, že příhradové konstrukce předpokládají přenos zatížení do konstrukce pouze styčnickovými vazbami. Z povahy geometrie jednotlivých konstrukčních prvků (prutů) a styčnickových vazeb lze zanedbat ohybovou tuhost prutů a uvažovat pouze přenos osových (normálových) sil. Komplementární virtuální práce vnitřních sil se pak redukuje na tvar

$$\delta E_i^* = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{N}{EA} + \alpha\theta_0 \right)}_{\varepsilon = u'_0} \delta N dx$$

Připomeňme, že θ_0 představuje konstantní změnu teploty po průřezu. Za předpokladu, že $EA = \text{konstanta}$, $N = \text{konstanta}$ a $\delta N = \text{konstanta}$, lze integrací předchozí rovnice přejít na tvar

$$\delta E_i^* = \underbrace{\left(\frac{N}{EA} + \alpha\theta_0 \right)}_{\Delta L} L \delta N = \Delta L \delta N$$

kde $\Delta L = \varepsilon L$ je skutečné protažení prutu. Předchozí rovnice odpovídá komplementární virtuální práci pro jeden prvek (prut) příhradové konstrukce. Celkovou práci obržíme součtem přes všechny prvky, tedy

$$\delta E_i^* = \sum_k \left(\frac{N^k}{E^k A^k} + \alpha^k \theta_0^k \right) L_k \delta N^k = \sum_k \Delta L_k \delta N^k$$

Title Page

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Page 14 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

PVs - Staticky určité rovinné příhradové konstrukce

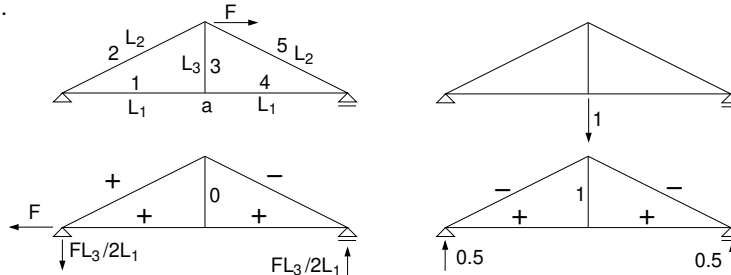


Zadání:

Uvažujte konstrukci na obrázku ($EA = konst$). Určete svislý posun w^a ve styčnicku a .

Řešení:

1. Identifikujte nezátížené pruty. Případně posuďte, které pruty jsou namáhané tahem a které tlakem.



2. Formulujte princip virtuálních sil (**zapište rovnost virtuálních prací sil vnějších a vnitřních**).

$$\frac{1}{EA} \sum_k (N^k L_k) \bar{N}^i = w^a \cdot 1 \quad (4)$$

Případná doplňující otázka:

- Jak se změní reakce, pokud prut 1 ohřejeme o 20°C ($\theta_0 = 20^\circ\text{C}$)?
- Jak se změní δE_i^* , pokud prut 1 ochladíme o 20°C ($\theta_0 = -20^\circ\text{C}$)?

$$\delta E_i^* = \frac{1}{EA} \sum_k (N^k L_k) \bar{N}^k + \alpha \theta_0 L_1 \bar{N}^1$$
- Jak se změní δE_e^* , pokud pevnému kloubu předepíšeme svislý posun $\bar{w} = 2\text{cm}$?

$$\delta E_e^* = w^a \cdot 1 - 0.02 \cdot 0.5$$

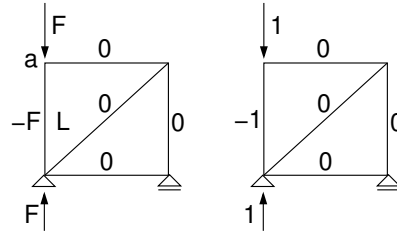
Title Page	
◀	▶
◀◀	▶▶
Page 15 of 53	
Go back	
Full Screen	
Close	
Quit	

PVs - Staticky určité rovinné příhradové konstrukce



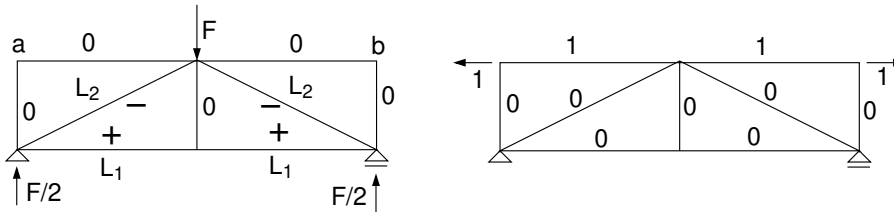
Variantsní zadání:

Uvažujte konstrukci na obrázku ($EA = konst$). Určete svislý posun w^a ve styčnicku a .



$$\underbrace{-\frac{F}{EA}L}_{\Delta L = \varepsilon L = \frac{N}{EA}L = u'_0 L} \cdot (-1) = w^a \cdot 1$$

Uvažujte konstrukci na obrázku ($EA = konst$). Určete vzájemný vodorovný posun u^{ab} styčníků a a b .



$$u^{ab} = 0$$

Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 16 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

PVs - Staticky určité konstrukce. Účinek předepsaného přemístění podpor

Poznamenejme, že při vynuceném přemístění podpor u staticky určitých konstrukcí se jednotlivé prvky přemísťují jako tuhé desky. Virtuální práce sil vnitřních $\delta E_i^* = 0$. Tudiž, s ohledem na rov. (3), dostaneme:

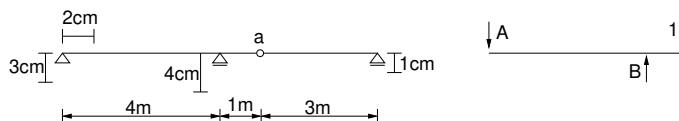
$$\delta E_e^* = \Delta \cdot 1 + \sum_j \bar{w}^j \delta R_x^j + \sum_m \bar{w}^m \delta R_z^m + \sum_n \bar{\varphi}_y^n \delta M_R^n = 0$$

Zadání:

Uvažujte konstrukci na obrázku. Určete svislý posun w^a ve styčnicku a .

Řešení:

1. Identifikujte nenulové reakce a jejich směry.

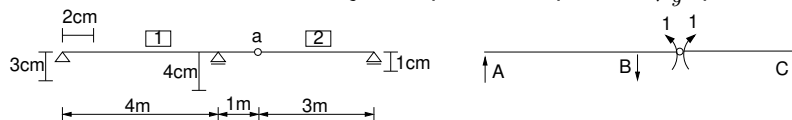


2. Formulujte princip virtuálních sil ($\delta E_e^* = 0$).

$$\delta E_e^* = w^a \cdot 1 + A \cdot 3 - B \cdot 4 = 0 \rightarrow w^a \text{ [cm]}$$

Variantní zadání:

Uvažujte konstrukci na obrázku. Určete vzájemné pootočení průřezů φ_y^{12} prutů 12 ve styčnicku a .



$$\delta E_e^* = \varphi_y^{12} \cdot 1 - A \cdot 0.03 + B \cdot 0.04 - C \cdot 0.01 = 0 \rightarrow \varphi_y^{12} \text{ [rad]}$$



Title Page



Page 17 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

PVs - Staticky neurčité konstrukce. Použití redukční věty



Princip redukční věty

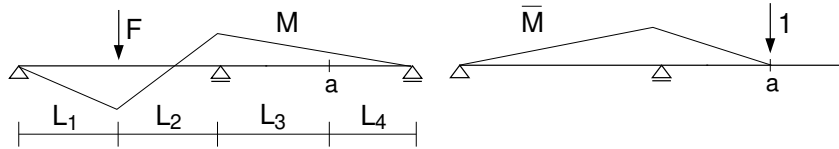
Pokud známe skutečný průběh vnitřních sil (přetvoření) na staticky neurčité konstrukci, tak virtuální zatěžovací stav můžeme definovat na libovolné (staticky přípustné) základní soustavě.

Zadání:

Uvažujte konstrukci na obrázku. Určete svislý posun w^a ve styčnicku a . Vliv smyku zanedbejte.

Řešení:

1. Načrtněte průběh momentů na staticky neurčité konstrukci. Zvolte základní soustavu a definujte virtuální zatěžovací stav.

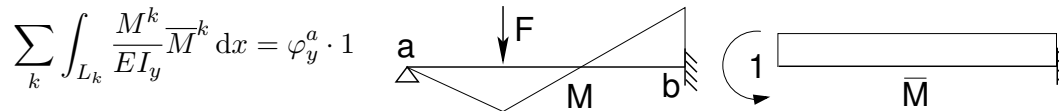


2. Formulujte princip virtuálních sil ($\delta E_i^* = \delta E_e^*$).

$$\sum_k \int_{L_k} \frac{M^k}{EI_y} \bar{M}^k dx = w^a \cdot 1$$

Variantní zadání:

Uvažujte konstrukci na obrázku. S využitím redukční věty určete pootočení průřezu φ_y^a ve styčnicku a . Výsledek ověřte užitím deformační metody ($M_{ab} = 0 \rightarrow \varphi_a$).



$$\sum_k \int_{L_k} \frac{M^k}{EI_y} \bar{M}^k dx = \varphi_y^a \cdot 1$$

Title Page	
◀	▶
◀◀	▶▶
Page 18 of 53	
Go back	
Full Screen	
Close	
Quit	

PVs - Statically neurčité konstrukce. Použití redukční věty



Případná doplňující otázka:

- Ověřte podmínky spojitosti (kompatibility)

Zadání:

Uvažujte nosník na obrázku s odpovídajícím průběhem skutečných momentů. S využitím principu virtuálních sil ověřte nulovou hodnotu pootočení v místě vetknutí.

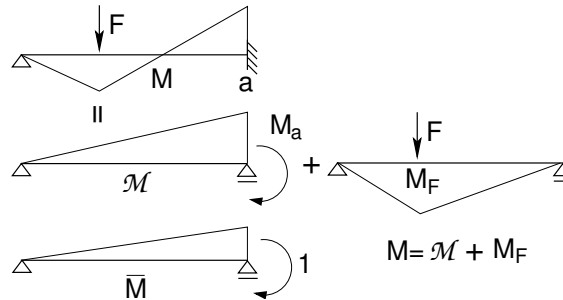
Řešení:

Podmínka spojitosti

$$\delta_{11} M_a + \Delta_1^0 = 0$$

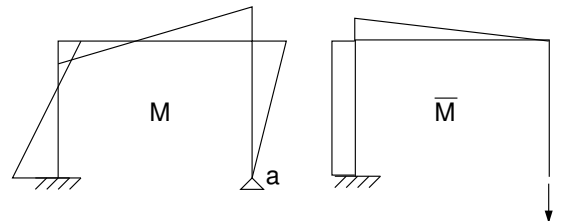
$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{\bar{M}}{EI_y} \bar{M} dx$$

$$\Delta_1^0 = \int_0^L \frac{M_F}{EI_y} \bar{M} dx$$



Variálně: Ověřte hodnotu nulového svislého posunu ve styčnicku a . Připomeňme, že moment M představuje skutečný moment na staticky neurčité konstrukci a \bar{M} je moment na základní soustavě, viz poznámky k silové metodě.

$$w^a \cdot 1 = \sum_k \int_{L_k} \frac{M^k}{EI_y} \bar{M}^k dx = 0$$



Title Page



Page 19 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Řešení staticky neurčitých konstrukcí – silová a deformační metoda

• Silová metoda

- Vychází z principu virtuálních sil.
- Základní neznámé představují staticky neurčité reakce.
- Určíme je z deformačních podmínek (podmínečných rovnic), které jsou konzistentní s podmínkami podepření. Počet rovnic je dán stupněm statické neurčitosti (**sn**).

$$[C] \{X\} = \{f\}$$

• Deformační metoda

- Vychází z principu virtuálních posunutí.
- Základní neznámé představují v případě prutových konstrukcí neznámé posuny a pootočení ve styčném úhlu.
- Určíme je z podmínek rovnováhy (podmínečných rovnic) sestavených ve styčnicích. Počet rovnic je dán počtem neznámých posunů a pootočení ve styčnicích (**pn**).

$$[K] \{r\} = \{f\}$$



Title Page



Page 20 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Řešení staticky neurčitých konstrukcí – silová metoda

- Typy úloh
 1. Staticky neurčitý spojitý nosník v rovině
 2. Staticky neurčitý rám (složená soustava) v rovině
 3. Staticky neurčitá příhradová konstrukce
- Bez ohledu na typ úlohy bude vaším úkolem vysvětlit postup řešení na zadané úloze. Student by měl být schopen:
 - Určit stupeň statické neurčitosti.
 - Definovat vhodnou základní soustavu. Pro zvolenou ZS identifikovat základní neznámé a vysvětlit, jaké typy rovnic budou použity pro jejich určení.
 - Vysvětlit význam jednotlivých členů ve vzorci vyjadřující princip virtuálních sil. Pro daný typ úlohy zvolit vhodný člen.
 - Popsat postup pro stanovení prvků δ_{ij} , Δ_{i0} a vysvětlit, co tyto prvky znamenají.
 - Kvalifikovaným odhadem načrtnout průběhy vnitřních sil, které se při výpočtu výše uvedených prvků uplatní.
 - Vysvětlit, jakým způsobem se do výpočtu zavedou účinky poklesu/natočení podpor, případně účinky rovnoměrné a nerovnoměrné změny teploty.



Title Page



Page 21 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

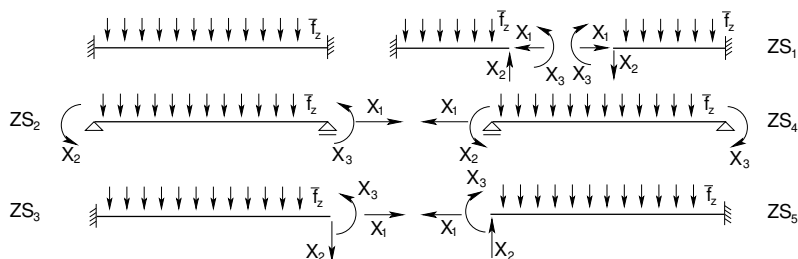
Řešení staticky neurčitých konstrukcí – silová metoda



Postup řešení staticky neurčité konstrukce silovou metodou

1. Určení stupně statické neurčitosti
2. Vytvoření staticky přípustné základní soustavy - staticky určitá konstrukce, která vznikne uvolněním příslušného počtu vazeb, a to tak, že nevznikne mechanismus
3. Užitím principu virtuálních sil se určí přemístění (posun/pootočení) v místě uvolněných vazeb a sestaví se příslušné deformační podmínky odpovídající typu uvolněné vazby (podmínečné rovnice, podmínky konzistence).
4. Řešení výsledné soustavy rovnic
5. Z podmínek rovnováhy na staticky určité základní soustavě se dopočtou zbylé reakce
6. Výpočet a vykreslení vnitřních sil

Příklady základních soustav dokonale vetknutého nosníku



Kolik základních soustav můžeme na staticky neurčité konstrukci vytvořit?

Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 22 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

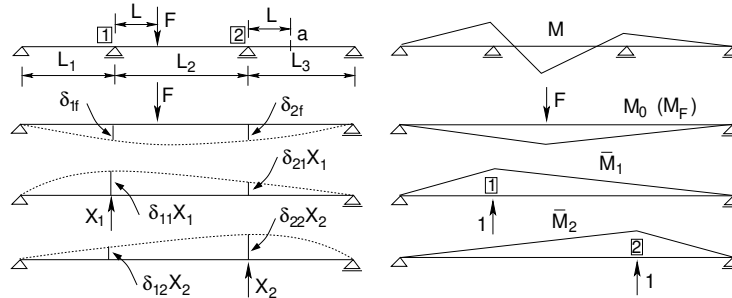
Silová metoda - staticky neurčitý spojitý nosník v rovině



Zadání:

Uvažujte staticky neurčitý spojitý nosník. S využitím silové metody určete vnitřní síly.

Řešení:



1. Určete stupeň statické neurčitosti a definujte vhodnou základní soustavu.
2. Užitím principu virtuálních sil určete přemístění v místech uvolněných vazeb: prvek $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ vyjadřuje přemístění (posun/pootočení) v místě i od jednotkového zatížení působící v místě j . Tudíž jednotkový virtuální zatěžovací stav definuji v místě i . Prvek Δ_{i0} vyjadřuje přemístění v místě i od předepsaného zatížení (obecně od předepsaných silových zatížení $\{\delta_f\}$, účinků teploty $\{\delta_\theta\}$ a předepsaných posunů/pootočení podpor $\{\delta_r\}$, $\{\Delta_0\} = \{\delta_f\} + \{\delta_\theta\} + \{\delta_r\}$).

$$\delta_{ij} = \int_0^L \frac{M_j|_{X_j=1}}{EI_y} \delta M_i|_{\delta X_i=1} dx = \int_0^L \frac{\bar{M}_j}{EI_y} \bar{M}_i dx$$

$$\Delta_{i0} = \delta_{if} = \int_0^L \frac{M_0}{EI_y} \bar{M}_i dx$$

Title Page



Page 23 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

3. Sestavte příslušné deformační podmínky (podmínečné rovnice). Soustavu vyřešte.

$$\sum_j^2 \delta_{ij} X_j + \delta_{if} = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2$$

nebo přehledně v maticové formě

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} = \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix}}_{[C_K]} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{1f} \\ \delta_{2f} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. Z podmínek rovnováhy určete zbývající reakce. Vypočtete a vykreslete průběhy výsledných vnitřních sil.

Případná doplňující otázka:

- Užitím redukční věty vyjádřete svislý posun w^a v bodě a .
- Jak ovlivní výpočet reakcí zatížení daného nosníku rovnoměrnou změnou teploty $\theta_0(x) = \theta_0$?
- Jak ovlivní výpočet reakcí zatížení daného nosníku rovnoměrným gradientem změny teploty $\frac{\Delta\theta}{h}(x) = \frac{\Delta\theta}{h}$? Naznačte postup výpočtu.
- Co vyjadřuje člen δ_{ij} ?



Title Page



Page 24 of 53

Go back

Full Screen

Close

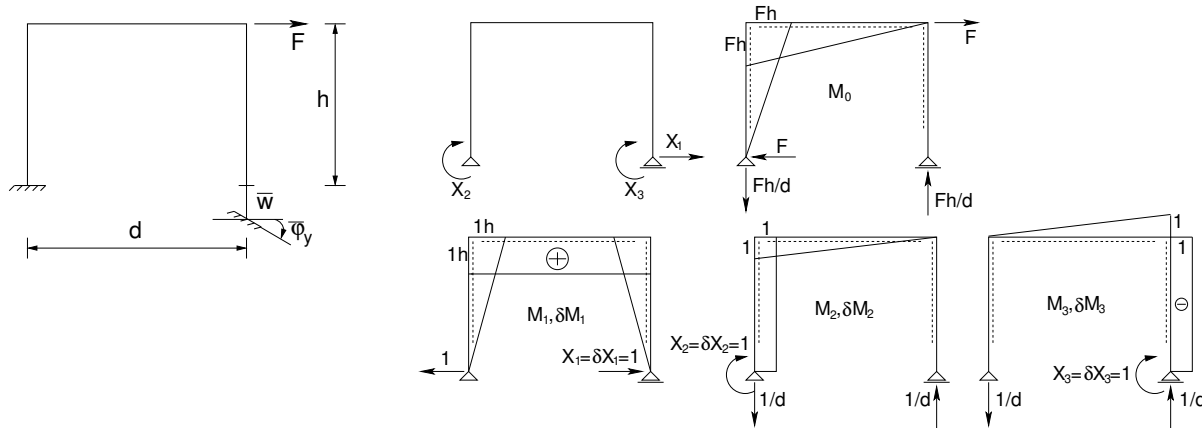
Quit

Silová metoda - staticky neurčitý rovinný rám



Zadání:

Uvažujte staticky neurčitý rovinný rám. S využitím silové metody určete vnitřní síly.



Řešení:

Budeme postupovat ve shodě s předcházejícím příkladem, tedy:

- Vytvoření základní soustavy a vykreslení průběhů vnitřních sil od předepsaného zatížení a staticky neurčitých reakcí $X_i = 1$, pouze kvalifikovaný odhad - počítat nic nebudete. Vzhledem k předepsanému posunu a pootočení podpory je nutné také stanovit virtuální reakce od virtuálních zatěžovacích stavů, viz rov. 3.
- Určení posunů v místě odebraných podpor od účinku předepsaného zatížení a staticky neurčitých reakcí.
- Sestavení podmíněčných rovnic.

Title Page



Page 25 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Silová metoda - staticky neurčitý rovinný rám



Výsledná soustava rovnic

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}}_{[C_K]} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \frac{M_0^k}{EI_y} \overline{M}_1^k dx \right.}_{\{\Delta_0\}} \underbrace{\left. \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \frac{M_0^k}{EI_y} \overline{M}_2^k dx \right.}_{\{\delta_r\}} \underbrace{\left. \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \frac{M_0^k}{EI_y} \overline{M}_3^k dx \right.}_{\{\delta_r\}} \left. \right\}}_{\{\Delta_0\}} + \begin{Bmatrix} \delta_{1r} \\ \delta_{2r} \\ \delta_{3r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{\varphi} \end{Bmatrix}$$

Na námi zvolené základní soustavě se celkové pootočení ve směru δX_3 (třetí deformační podmínka) od síly F a staticky neurčitých reakcí X_i , bude rovnat předepsanému natočení $\overline{\varphi}$. Členy δ_{ir} pak představují přemístění (posun/pootočení) v místě a směru X_i vlivem předepsaného posunu podpory \overline{w} . (Pozn. Pokud bychom zvolili jinou základní soustavu, kde zůstane zachováno vetknutí v podpoře zatížené předepsanými přemístěními podpory, členy δ_{ir} by představovaly součet přemístění (posun/pootočení) v místě X_i od obou předepsaných přemístění.). S ohledem na rov. (3) a směru kladných virtuálních reakcí platí, viz obrázek:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1r} &= -\delta R_z|_{\delta X_1=1} \cdot \overline{w} = 0 \\
 \delta_{2r} &= -\delta R_z|_{\delta X_2=1} \cdot \overline{w} = \frac{1}{d} \overline{w} \\
 \delta_{3r} &= -\delta R_z|_{\delta X_3=1} \cdot \overline{w} = \frac{1}{d} \overline{w}
 \end{aligned}$$

Title Page

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Page 26 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit



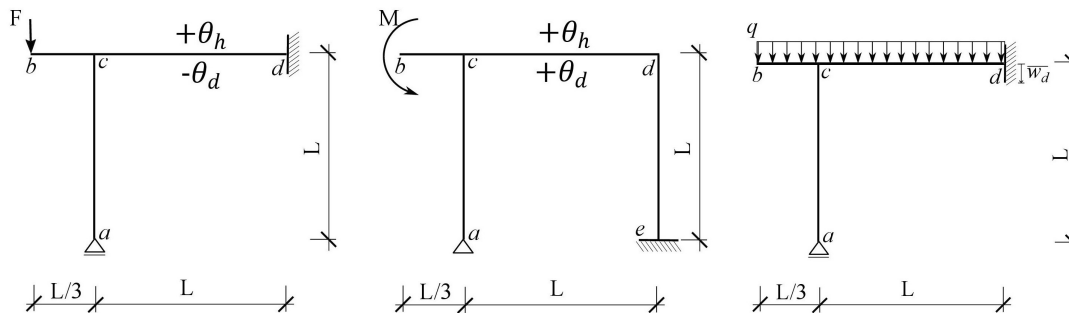
Řešením obecné soustavy rovnic obdržíme hodnoty pro neznámé reakce X_i . Zbývající reakce plynou z podmínek rovnováhy. Připomeňme, že poddajnosti δ_{ij} jsou dány vztahem

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \frac{M_j^k |_{X_j=1}}{EI_y} M_i^k |_{\delta X_i=1} dx = \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \frac{\overline{M}_j^k}{EI_y} \overline{M}_i^k dx$$

Případná doplňující otázka:

- Ovlivní změna teploty na prutu 1 hodnoty reakcí a vnitřních sil? Jak bude vypadat příslušný člen $\delta_{i\theta}$, pokud budeme uvažovat pouze rovnoměrnou změnu teploty θ_0 (pouze konstantní gradient teploty $\frac{\Delta\theta}{h}$)?
- Proč mohou výsledky od jednotlivých zatěžovacích stavů sčítat (superpozice)?
- Ovlivní volba ZS výsledné reakce a průběhy vnitřních sil?

Variantní zadání:



Title Page



Page 27 of 53

Go back

Full Screen

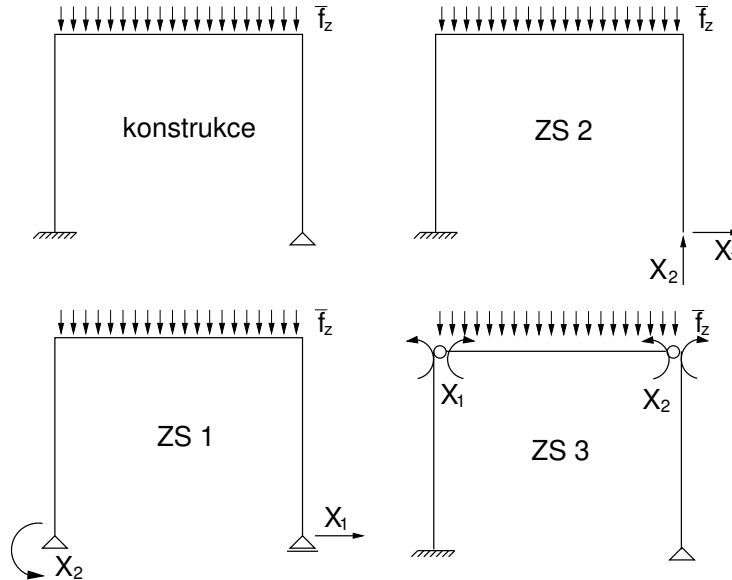
Close

Quit

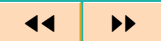
Silová metoda - staticky neurčitý rovinný rám

Poznámka k volbě základní soustavy:

Obecně bychom se měli držet zásady, že při volbě základní soustavy nebudeme nahrazovat nižší vazbu vazbou vyšší.



Title Page



Page 28 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

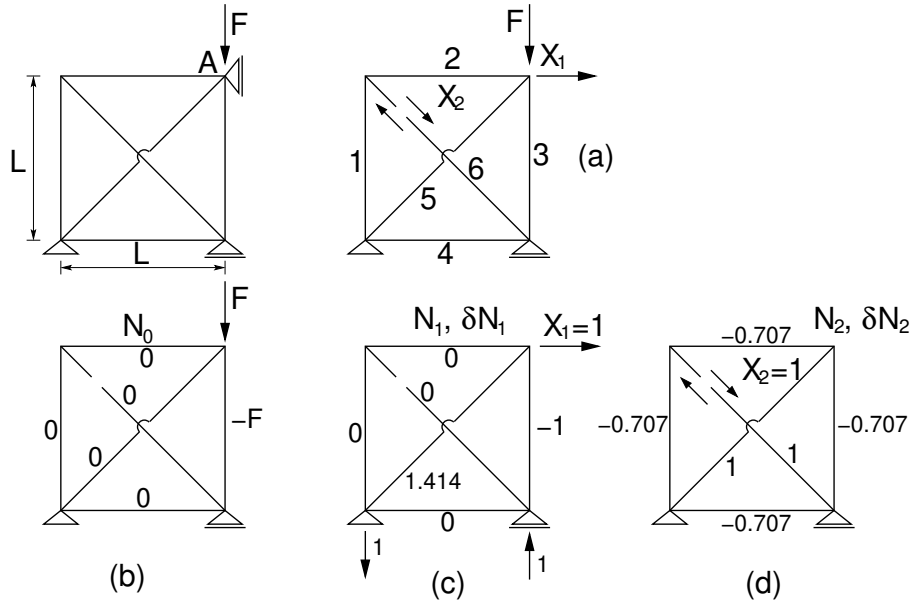
Silová metoda - staticky neurčitá příhradová konstrukce v rovině



Zadání:

Určete vnitřní síly staticky neurčité příhradové konstrukce užitím silové metody. Uvažujte tuhost průřezu EA shodnou pro všechny pruty.

Poznámka: u zkoušky nebude potřeba jednotlivé síly počítat. Stačí vysvětlit postup řešení po krocích popsanych v úvodním příkladu spojitého nosníku, viz níže.



Řesení:

1. Určete stupeň statické neurčitosti a navrhnete vhodnou základní soustavu. Identifikujte nezátížené pruty v rámci jednotlivých zatěžovacích stavů.
2. Podmínečné rovnice a výsledná soustava sil - k výpočtu posunů příslušných odebraným vazbám využijeme princip virtuálních posunutí. Připomeňme, že v případě příhradových konstrukcí si vystačíme s prací virtuálních normálových sil na relativním protažení jednotlivých prutů.

- Členy δ_{ij} a δ_{if}

$$\delta_{ij} = \sum_m \int_{L_m} \frac{N_j^m}{EA} \Big|_{X_j=1} \delta N_i^m \Big|_{\delta X_i=1} dx = \sum_m L_m \frac{\bar{N}_j^m}{EA} \bar{N}_i^m = \sum_m \Delta \bar{L}_m \bar{N}_i^m$$

$$\delta_{if} = \sum_m \int_{L_m} \frac{N_0^m}{EA} \Big|_F \delta N_i^m \Big|_{\delta X_i=1} dx = \sum_m L_m \frac{N_0^m}{EA} \Big|_F \bar{N}_i^m = \sum_m \Delta L_{m0} \bar{N}_i^m$$

- Výsledná soustava rovnic (srovnej s příkladem spojitého nosníku)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} = \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix}}_{[C_K]} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{1f} \\ \delta_{2f} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pro zadanou úlohu dostaneme $X_1 = -0.262F$, $X_2 = 0$, viz průběh vnitřních sil na sticky neurčité konstrukci na další stránce.

3. Dopočítejte zbývající vnitřní síly s využitím podmínek rovnováhy (metoda styčných bodů, průsečná metoda)



Title Page



Page 30 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

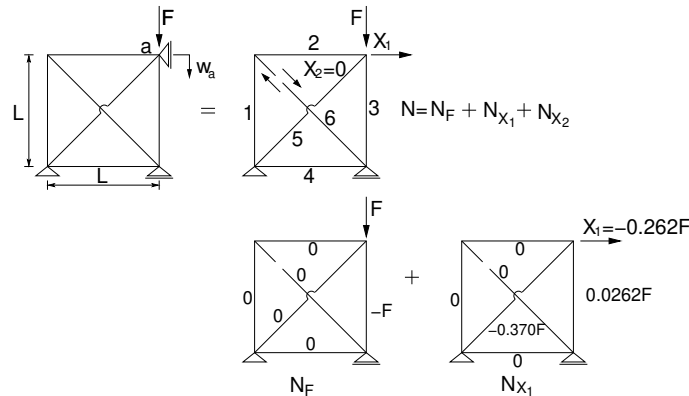


Případná doplňující otázka:

- Předpokládejte, že prut 1 se ohřeje o $\theta_0 = 10^\circ\text{C}$. Vyjádřete příslušný člen $\delta_{i\theta}$.
- Užitím redukční věty vyjádřete svislý posun w^a ve styčnicku a .
- Jak budete postupovat, pokud svislý posun \bar{w}^a ve styčnicku a předepíšeme?

Redukční věta

- Skutečný stav



- Skutečný a virtuální stav, PVs

$$\underbrace{\frac{L}{EA}(-0.738F)(-1)}_{\Delta L} = \delta E_i^* = \delta E_e^* = w^a \cdot 1$$

Řešení staticky neurčitých konstrukcí – deformační metoda

- Typy úloh
 1. Staticky neurčitý přímý prut (spojitý nosník) v rovině
 2. Staticky neurčitý rám (složená soustava) v rovině
 3. Staticky neurčitá příhradová konstrukce
- Bez ohledu na typ úlohy bude vaším úkolem vysvětlit postup řešení na zadané úloze. Student by měl být schopen:
 - Identifikovat počet neznámých posunů a pootočení ve styčnicích (**pn**).
 - Identifikovat základní neznámé a vysvětlit, jaké typy rovnic budou použity pro jejich určení.
 - Vysvětlit rozdíl mezi obecnou a zjednodušenou deformační metodou.
 - Vysvětlit, jak byly odvozeny vzorce pro vyjádření koncových sil v seznamu vzorců pro typ uložení vetknutí-kloub
 - Popsat postup řešení pro zadaný typ úlohy (počet neznámých, sestavení rovnic pro jejich vyřešení, dopočet reakcí a následně vnitřních sil).
 - Vysvětlit, jakým způsobem se do výpočtu zavedou účinky poklesu/natočení podpor, případně účinky rovnoměrné a nerovnoměrné změny teploty.



Title Page



Page 32 of 53

Go back

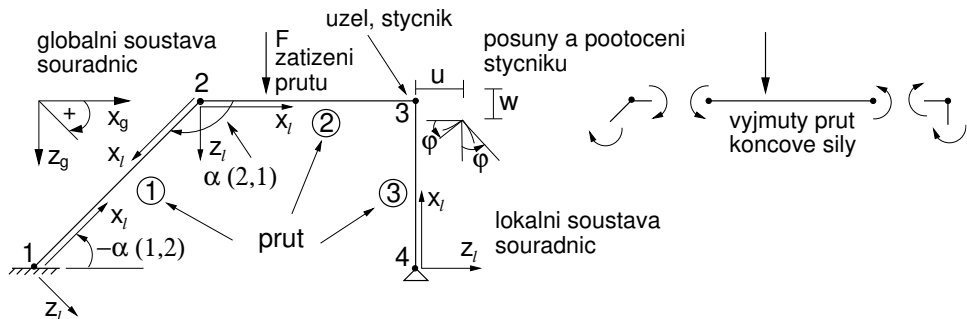
Full Screen

Close

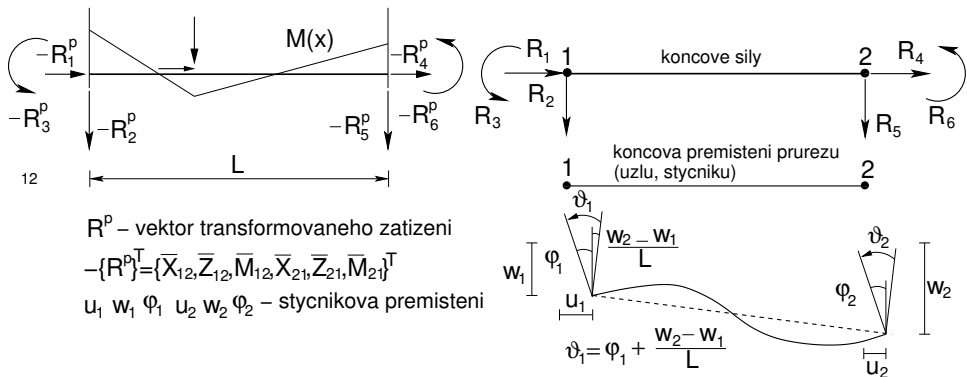
Quit

Řešení staticky neurčitých konstrukcí - deformační metoda

- Základní pojmy



- Prvek vyjmutý z konstrukce



R^p – vektor transformovaného zatížení

$$-\{R^p\}^T = \{\bar{X}_{12}, \bar{Z}_{12}, \bar{M}_{12}, \bar{X}_{21}, \bar{Z}_{21}, \bar{M}_{21}\}^T$$

$u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2$ – stycnikova přemístění



Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 33 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Řešení staticky neurčitých konstrukcí - deformační metoda

- **Vektor koncových sil $\{R\}$**
Síly, kterými působí styčník na prvek. Stejně velikými silami, opačně orientovanými, působí prvek na styčník.
- **Vektor transformovaného zatížení $\{R^P\}$**
Záporně vzaté koncové síly na dokonale vetknutém nosníku.
- **Prvek vyjmutý z konstrukce**
Vztah mezi zatížením a styčníkovými přemístěními pro prvek, který vyjme z konstrukce, zapíšeme ve tvaru

$$[K] \{r\} = \{R\} + \{R^P\}$$

V případě prutu vyjmutého z konstrukce, lze hodnoty deformací koncových průřezů prutu (styčníková přemístění) sestavit do vektoru

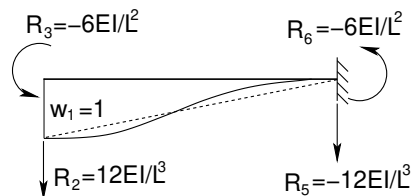
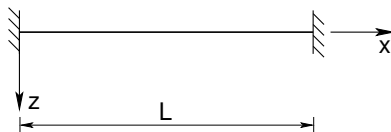
$$\{r\}^T = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}$$

- **Matice tuhosti přímého prutu $[K]$ (rozměr (6×6) 2D)**
Prvky matice tuhosti vyjadřují koncové síly od předepsaných jednotkových deformačních stavů, např $w_1 = 1$:

Podmínky rovnováhy:

$$R_2 + R_5 = 0$$

$$R_3 + R_6 + R_2L = 0$$



Title Page



Page 34 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Řešení staticky neurčitých konstrukcí - deformační metoda

Vyjádření koncových sil v závislosti na předepsaných koncových deformacích styčnicků na dokonale vetknutém prutu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}}_{\{r\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}}_{\{R\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} X_{12} \\ Z_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Z_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix}}_{\{R\}} \quad (5)$$

V případě, že na prvek působí vnější zatížení, doplníme předchozí rovnici o vektor transformovaného zatížení. Hodnoty koncových sil pak vyjádříme ve tvaru

$$\{R\} = -\{R_p\} + [K] \{r\} \quad (6)$$

kde vektor $-\{R_p\}$ vyjadřuje hodnoty koncových sil od zatížení na dokonale vetknutém nosníku. Známe-li hodnoty koncových sil (vektor $\{R\}$) můžeme bez problémů vyjádřit průběhy vnitřních sil v jakémkoli průřezu vyjmutého prutu užitím podmínek rovnováhy.



Title Page



Page 35 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

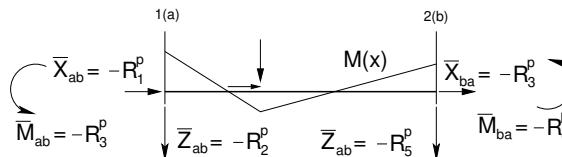
Řešení staticky neurčitých konstrukcí - deformační metoda



Vektory $\{R\}$, $\{R^P\}$ z tabulek

Připomeňme rov. (6) a vyjádříme vektory $\{R\}$, $\{R^P\}$, $\{r\}$ dle značení použitého v tabulkách koncových momentů

$$\begin{aligned} \{R\}^T &= \{X_{ab}, Z_{ab}, M_{ab}, X_{ba}, Z_{ba}, M_{ba}\} \\ -\{R^P\}^T &= \{\bar{X}_{ab}, \bar{Z}_{ab}, \bar{M}_{ab}, \bar{X}_{ba}, \bar{Z}_{ba}, \bar{M}_{ba}\} \\ \{r\}^T &= \{u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b\} \\ k &= \frac{2EI_y}{L}, \quad n = \frac{EA}{L} \end{aligned}$$



Dosazením těchto výrazů do rov. (5) již snadno dostaneme

Koncové síly $\{R\}$

$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k \left(2\varphi_a + \varphi_b + 3 \frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$	$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k \left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3 \frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$
$Z_{ab}^l = \bar{Z}_{ab}^l - \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6 \frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$	$Z_{ba}^l = \bar{Z}_{ba}^l + \frac{k}{L} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6 \frac{w_b^l - w_a^l}{L} \right)$
$X_{ab}^l = \bar{X}_{ab}^l - n(u_b^l - u_a^l)$	$X_{ba}^l = \bar{X}_{ba}^l + n(u_b^l - u_a^l)$

Prvky vektoru transformovaného zatížení $\{R^P\}$

	prut typu V-V	prut typu V-K	
	$\bar{M}_{ab} = \frac{FL}{8} \quad \bar{M}_{ba} = -\frac{FL}{8}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{3}{16}FL \quad \bar{M}_{ba} = \frac{3}{16}FL$	✘
	$\bar{Z}_{ab}^l = -\frac{F}{2} \quad \bar{Z}_{ba}^l = -\frac{F}{2}$	$\bar{Z}_{ab}^l = -\frac{11F}{16} \quad \bar{Z}_{ba}^l = -\frac{5F}{16}$	

Title Page



Page 36 of 53

Go back

Full Screen

Close

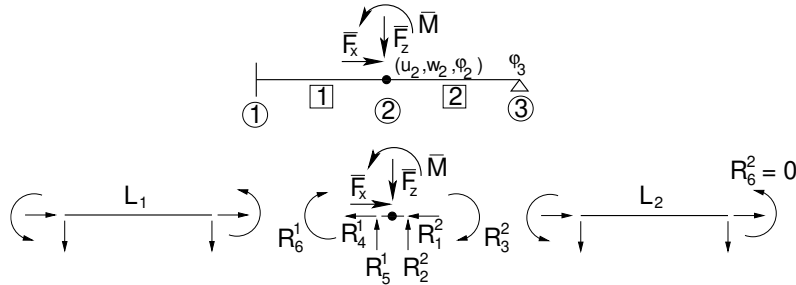
Quit

Deformační metoda - přímý prut v rovině



Zadání:

Uvažujte staticky neurčitý přímý nosník. S využitím obecné DM určete vnitřní síly. Osovou tuhost průřezu EA a ohybovou tuhost průřezu EI_y uvažujte konstantní, shodné pro oba pruty.



Řešení:

1. Definice a určení počtu neznámých (**pn**)

- **pn=4**, neznámé $\{r\}^T = \{u_2, w_2, \varphi_2, \varphi_3\}$
- neznámé $u_2, w_2, \varphi_2, \varphi_3$ určíme z podmínek rovnováhy ve styčnicích 2 a 3

2. Sestavení podmínek rovnováhy, styčnicí 2 a 3 ($R_6^1 = M_{21}$)

$$\begin{aligned}
 1) \quad & R_4^1 + R_1^2 = \bar{F}_x \\
 2) \quad & R_5^1 + R_2^2 = \bar{F}_z \\
 3) \quad & R_6^1 + R_3^2 = \bar{M} \\
 4) \quad & R_6^2 = 0
 \end{aligned}$$

Title Page



Page 37 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

3. Vyjádření koncových sil pomocí primárních neznámých (styčnicková přemístění) s využitím matice tuhosti a vektoru transformovaného zatížení, případně vzorců z tabulek koncových sil. Pro ilustraci uvádíme vyjádření momentu $R_6^1 = M_{21}$

$$R_6^1 = \frac{6EI_y}{L_1^2}w_2 + \frac{4EI_y}{L_1}\varphi_2 \quad R_3^2 = -\frac{6EI_y}{L_2^2}w_2 + \frac{4EI_y}{L_2}\varphi_2 + \frac{2EI_y}{L_2}\varphi_3$$

$$M_{21} = \frac{2EI_y}{L_1}\left(2\varphi_2 + 3\frac{w_2}{L_1}\right) \quad M_{23} = \frac{2EI_y}{L_2}\left(2\varphi_2 + \varphi_3 - 3\frac{w_2}{L_2}\right)$$

3) $M_{21} + M_{23} = \bar{M}$ Podmínka rovnováhy momentů ve styčnicku 2

Dosazením do výše uvedených podmínek rovnováhy dostaneme výslednou soustavu sil. Jednotlivé řádky soustavy vyjadřují příslušné podmínky rovnováhy: $[K]_K \{r\}_K = \{f\}$.
Matice tuhosti konstrukce $[K]_K$ je symetrická.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L_1} + \frac{EA}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L_1^3} + \frac{12EI_y}{L_2^3} & \frac{6EI_y}{L_1^2} - \frac{6EI_y}{L_2^2} & -\frac{6EI_y}{L_2^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L_1^2} - \frac{6EI_y}{L_2^2} & \frac{4EI_y}{L_1} + \frac{4EI_y}{L_2} & \frac{2EI_y}{L_2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L_2^2} & \frac{2EI_y}{L_2} & \frac{4EI_y}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{M} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. Vyřešení výsledné soustavy sil a dosazení spočtených hodnot volných (nepodepřených, nepředepsaných) posunů a pootočení zpět do výrazů pro koncové síly
5. Výpočet a vykreslení průběhů vnitřních sil s využitím podmínek rovnováhy.



Řešení s využitím statické kondenzace:

Eliminace některých stupňů volnosti na úrovni prvku (příkladem je vyjádření momentu pro typ uložení vetknutí-klob) → snížení řádu výsledné soustavy rovnic.

Pro ilustraci uvažujme prut 2 a podmínku nulového momentu ve styčnicku 3 ($R_6^2 = M_{32} = 0$)

$$R_6^2 = M_{32} = -\frac{6EI_y}{L_2^2}w_2 + \frac{2EI_y}{L_2}\varphi_2 + \frac{6EI_y}{L_2^2}w_3(=0) + \frac{4EI_y}{L_2}\varphi_3 = 0 \quad (7)$$

Zatímco neznámé (w_2, φ_2) závisí na tuhostech prutů 1 a 2, tak pootočení φ_3 závisí pouze na tuhosti prutu 2 a lze jej tudíž vyjádřit přímo na úrovni prutu 2 v závislosti na (w_2, φ_2)

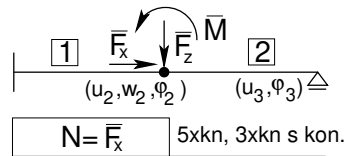
$$\varphi_3 = -\frac{L_2}{4EI_y} \left(-\frac{6EI_y}{L_2^2}w_2 + \frac{2EI_y}{L_2}\varphi_2 + \frac{6EI_y}{L_2^2}w_3(=0) \right) \quad (8)$$

Posledním krokem je zpětné dosazení do rovnice koncové síly $R_3^2 = M_{23}$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{R}_3^2 &= -\frac{6EI_y}{L_2^2}w_2 + \frac{4EI_y}{L_2}\varphi_2 + \frac{6EI_y}{L_2^2}w_3 + \\ &+ \frac{2EI_y}{L_2} \underbrace{\left(-\frac{L_2}{4EI_y} \right) \left(-\frac{6EI_y}{L_2^2}w_2 + \frac{2EI_y}{L_2}\varphi_2 + \frac{6EI_y}{L_2^2}w_3 \right)}_{\varphi_3} \\ &= \frac{3EI_y}{L_2}\varphi_2 + \frac{3EI_y}{L_2} \frac{w_3 - w_2}{L_2} = k \left(1,5\varphi_2 + 1,5\frac{w_3 - w_2}{L_2} \right) = M_{ab}^{vk} \end{aligned}$$

Obdobně bychom obdrželi $Z_{ab}^{vk}, X_{ab}^{vk} = X_{ab}$ (v našem případě).

$$X_{32} = 0 = \frac{EA}{L_2}(u_3 - u_2) \rightarrow u_3 = u_2 \rightarrow X_{23} = 0 \rightarrow \text{p.r. } \underbrace{X_{21} - \bar{F}_x}_{u_2} = 0$$



Případná doplňující otázka:

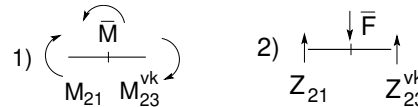
- Řešte danou úlohu zjednodušenou DM.

1. Počet neznámých: metoda předpokládá, že pruty jsou osově nestlačitelné ($EA \rightarrow \infty$), $pn=2$, neznámé $\{r\}^T = \{w_2, \varphi_2\}$

2. Podmínky rovnováhy ve styčnicku 2 pro určení neznámých $\{r\}$:

$$1) \quad M_{21} + M_{23}^{vk} - \bar{M} = 0$$

$$2) \quad Z_{21} + Z_{23}^{vk} - \bar{F}_z = 0$$



3. Dopočet neznámé φ_3 z podmínky $M_{32} = 0$, viz rov. (7) a (8)

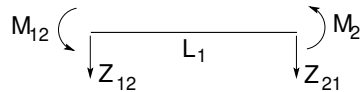
4. Dopočet zbývajících koncových sil buď použitím matice tuhosti, rov. (6), nebo přímo z tabulek, anebo z podmínek rovnováhy. Pro ilustraci uvažujme prut 1:

$$M_{12} = \frac{2EI_y}{L_1} \left(\varphi_2 + \frac{3w_2}{L_1} \right)$$

$$M_{21} = \frac{2EI_y}{L_1} \left(2\varphi_2 + \frac{3w_2}{L_1} \right)$$

$$0 = Z_{12}L_1 + M_{12} + M_{21}$$

$$0 = Z_{12} + Z_{21}$$



5. Dopočet a vykreslení vnitřních sil

6. Jak to bude s normálovou silou?

- Normálovou sílu nelze ZDM přímo určit \rightarrow lze využít silové metody (řešení úlohy staticky neurčitého tahu/tlaku)

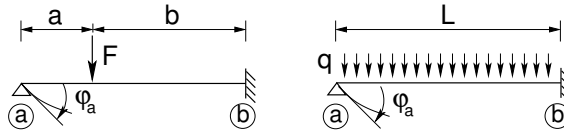


Deformační metoda - přímý prut v rovině - variantní zadání



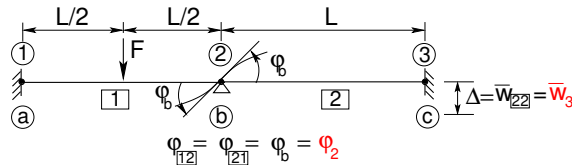
Statická kondenzace

Určete pootočení ve styčnicku (a) pro uvažované konstrukce



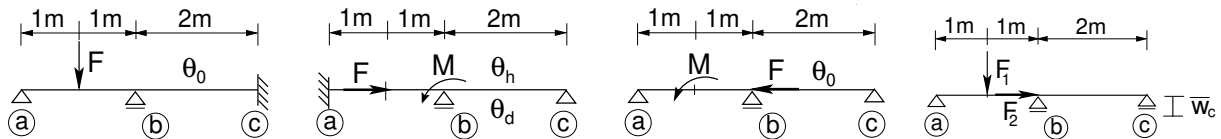
Vynucené přemístění podpory

Určete pootočení ve styčnicku (b) pro uvažovanou konstrukci



Styčnickové versus prutové zatížení, účinek teploty

Určete neznámé styčnickové posuny a pootočení na dané konstrukci



Title Page



Page 41 of 53

Go back

Full Screen

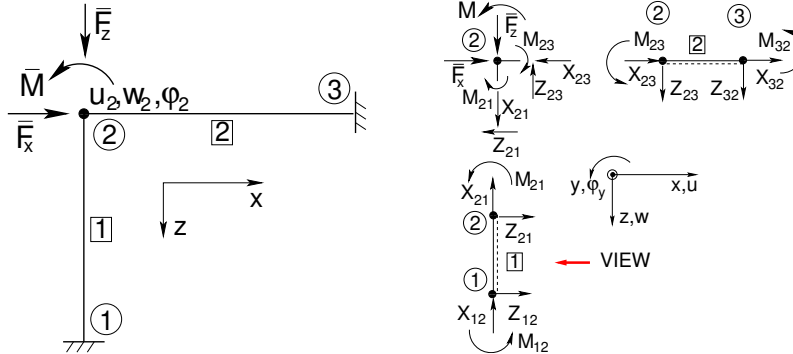
Close

Quit

Deformační metoda - rám v rovině

Zadání:

Uvažujte jednoduchý staticky neurčitý rám v rovině. S využitím obecné DM určete vnitřní síly. Tuhosti průřezu EA a EI_y uvažujte konstantní, shodné pro oba pruty.



Řešení:

1. Definice a určení počtu neznámých (**pn**): $pn=3$, neznámé $\{r\}^T = \{u_2, w_2, \varphi_2\}$

2. Zapište podmínky rovnováhy, dokumentujte graficky

Při použití vzorců z tabulek koncových sil a momentů se u svislých prutů na prut koukáme zprava doleva, $\alpha = -90^\circ$. Potom $u_{loc} = -w_g = -w, w_{loc} = u_g = u$ a $X_{ij}^g = Z_{ij}^{loc} = Z_{ij}, Z_{ij}^g = -X_{ij}^{loc} = -X_{ij}$, viz obrázek.

Podmínky rovnováhy ve styčnicku 2:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & Z_{21} + X_{23} = \bar{F}_x \\
 2) \quad & -X_{21} + Z_{23} = \bar{F}_z \\
 3) \quad & M_{21} + M_{23} = \bar{M}
 \end{aligned} \tag{9}$$



Title Page	
◀	▶
◀◀	▶▶
Page 42 of 53	
Go back	
Full Screen	
Close	
Quit	

Deformační metoda - rám v rovině



S využitím vzorců z tabulky celkových koncových sil a momentů vyjádříme jednotlivé členy v rov. (9) pomocí neznámých styčnických deformací u_2, w_2, φ_2 následovně

$$X_{21(ba)} = \frac{EA}{L_1}(-w_2) \quad (10)$$

$$Z_{21(ba)} = \frac{2EI_y}{L_1^2} \left(3\varphi_2 + 6\frac{u_2}{L_1} \right) = \frac{6EI_y}{L_1^2}\varphi_2 + \frac{12EI_y}{L_1^3}u_2 \quad (11)$$

$$M_{21(ba)} = \frac{2EI_y}{L_1} \left(2\varphi_2 + 3\frac{u_2}{L_1} \right) = \frac{4EI_y}{L_1}\varphi_2 + \frac{6EI_y}{L_1^2}u_2 \quad (12)$$

$$X_{23(ab)} = -\frac{EA}{L_1}(-u_2) = \frac{EA}{L_2}u_2 \quad (13)$$

$$Z_{23(ab)} = -\frac{2EI_y}{L_2^2} \left(3\varphi_2 - 6\frac{w_2}{L_2} \right) = -\frac{6EI_y}{L_2^2}\varphi_2 + \frac{12EI_y}{L_2^3}w_2 \quad (14)$$

$$M_{23(ab)} = \frac{2EI_y}{L_2} \left(2\varphi_2 - 3\frac{w_2}{L_2} \right) = \frac{4EI_y}{L_2}\varphi_2 - \frac{6EI_y}{L_2^2}w_2 \quad (15)$$

Uplatněním rovnic (10) - (15) v rov. (9) a převedením této soustavy do maticového zápisu obdržíme výslednou soustavu výsledných rovnic.

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L_1^3} + \frac{EA}{L_2} & 0 & \frac{6EI_y}{L_2^2} \\ 0 & \frac{EA}{L_1} + \frac{12EI_y}{L_2^3} & -\frac{6EI_y}{L_2^2} \\ \frac{6EI_y}{L_1^2} & -\frac{6EI_y}{L_2^2} & \frac{4EI_y}{L_1} + \frac{4EI_y}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_z \\ \bar{M} \end{Bmatrix}$$

Title Page



Page 43 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Případná doplňující otázka:

- Jak určité reakce ve vetknutí a jak následně dopočtete průběhy vnitřních sil?
- Řešte danou úlohu zjednodušenou DM
 - Připomeňme, že při ortogonálním uspořádání prutů nemají ohybové účinky vliv na hodnotu normálové síly a naopak → možnost použití tzv. **zjednodušené deformační metody**, kdy neuvažujeme stlačitelnost prutů ($EA \rightarrow \infty \Rightarrow u_a = u_b$). Naše úloha má v takové případě jedinou neznámou (**pn=1**), což je pootočení styčnicku 2 φ_2 .
 - Momentová podmínka rovnováhy ve styčnicku 2

$$M_{21} + M_{23} - \bar{M} = 0 \rightarrow \varphi_2$$

- Dopočet reakcí s využitím tabulek a podmínek rovnováhy

$$M_{12} = \frac{2EI_y}{L_1} \varphi_2$$

$$M_{32} = \frac{2EI_y}{L_2} \varphi_2$$

Z_{ij} – z podmínek rovnováhy na prutu

X_{ij} – z podmínek rovnováhy ve styčnicku 2



Title Page



Page 44 of 53

Go back

Full Screen

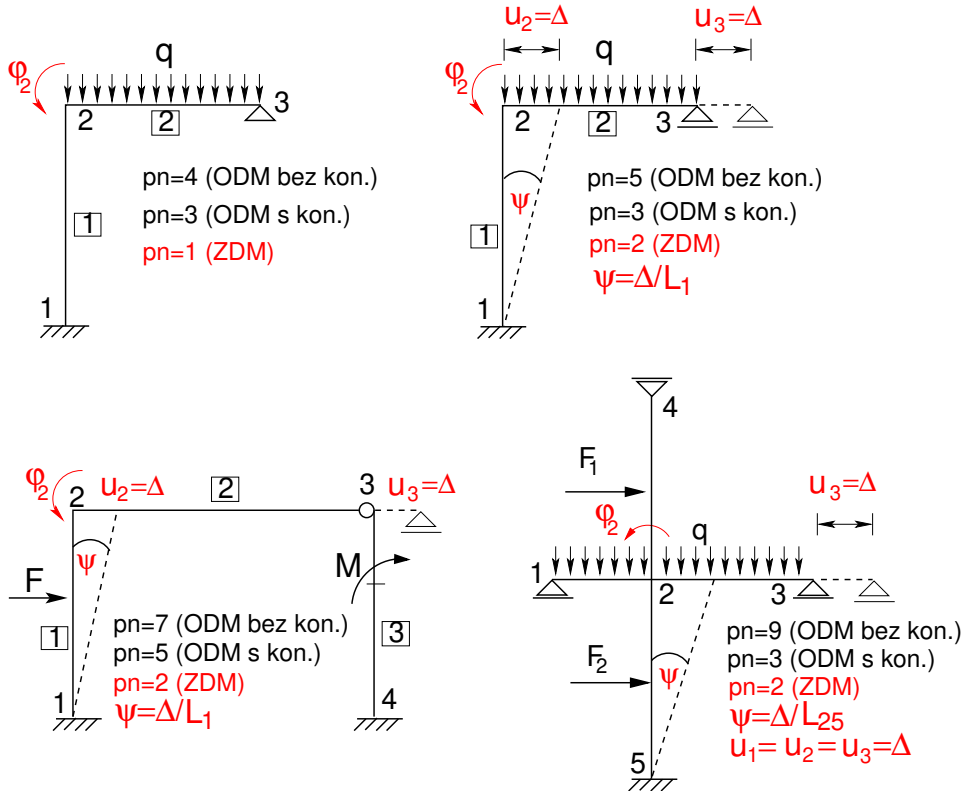
Close

Quit

Deformační metoda - rám v rovině



Variantsní zadání



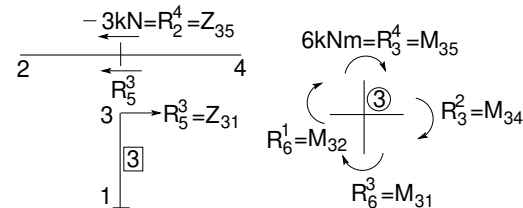
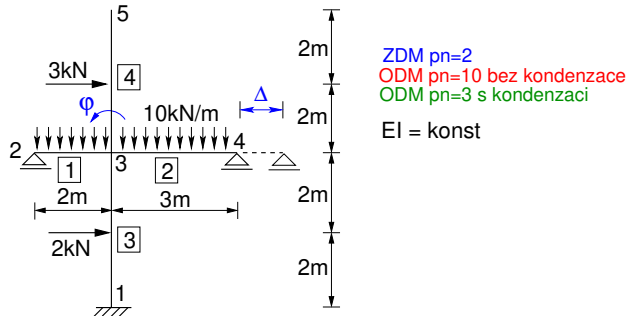
Title Page	
◀	▶
◀◀	▶▶
Page 45 of 53	
Go back	
Full Screen	
Close	
Quit	

Zjednodušená deformační metoda - rám v rovině

Momentová podmínka rovnováhy, patrová/sloupová rovnice

Zadání:

Určete hodnoty neznámých styčnickových deformací a průběhy vnitřních sil na dané konstrukci. Úlohu řešte zjednodušenou deformační metodou. Ohybovou tuhost průřezu EI_y uvažujte konstantní, shodnou pro všechny pruty.



Řešení:

1. Počet neznámých ($pn=2$), neznámé $\{r\}^T = \{\varphi_2, \Delta\}$
2. Podmínky rovnováhy

- Momentová podmínka rovnováhy ve styčnicku 3

$$R_6^1 + R_3^2 + R_6^3 + 6 = 0 \quad \text{nebo} \quad M_{32} + M_{34} + M_{31} + 6 = 0 \quad (16)$$

- Součtová podmínka rovnováhy ve vodorovném směru (patrová rovnice)

$$R_5^3 - 3 = 0 \quad \text{nebo} \quad Z_{31} - 3 = 0 \quad (17)$$



Title Page	
◀	▶
◀◀	▶▶
Page 46 of 53	
Go back	
Full Screen	
Close	
Quit	

3. Vyjádření koncových sil a momentů pomocí primárních neznámých

- Momenty M_{3j} ve styčnicku 3

$$M_{32}^{vk} = \bar{M}_{32} + k_1 \frac{3}{2} \varphi = -5 + EI_y \frac{3}{2} \varphi$$

$$M_{34}^{vk} = \bar{M}_{34} + k_2 \frac{3}{2} \varphi = \frac{45}{4} + EI_y \varphi$$

$$M_{31} = \bar{M}_{31} + k_3 \left(2\varphi + \frac{3}{L_3} \Delta \right) = -1 + EI_y \left(\varphi + \frac{3}{8} \Delta \right)$$

- Vodorovná síla Z_{31}

$$Z_{31} = \bar{Z}_{31} + \frac{k_3}{L_3} \left(3\varphi + \frac{6}{L_3} \Delta \right) = -1 + \frac{3EI_y}{8} \left(\varphi + \frac{1}{2} \Delta \right)$$

$$Z_{31} = -\frac{1}{L_3} (2 \times 2 - M_{31} - M_{13}) \quad \text{m.p.r ke styčnicku 1 - kontrola}$$

4. Výsledná soustava rovnic - vysvětlit její sestavení
5. Vyjádření koncových sil a momentů - tabulkové vzorce, podmínky rovnováhy
6. Výpočet a vykreslení průběhů vnitřních sil

Případná doplňující otázka:

- Jak určíte neznámé hodnoty pootočení φ_2, φ_4 ?
Připomeňme, že $M_{23} = M_{43} = 0$, tedy ze vzorců pro typ uložení vetknutí-vetknutí dosazením spočteného pootočení φ_3



Title Page



Page 47 of 53

Go back

Full Screen

Close

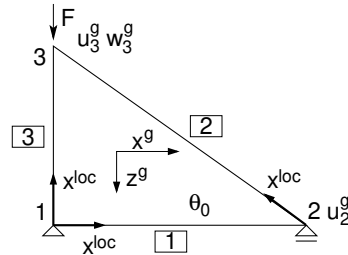
Quit

Deformační metoda - příhradová konstrukce



Zadání:

Určete posuny styčnicků dané příhradové konstrukce. Uvažujte osovou tuhost průřezu $EA = konst$ shodnou pro všechny pruty. Pro vlastní výpočet budeme předpokládat, že $L_1 = L_3$.



Řešení:

1. Definujte neznámé a určete jejich počet (každý styčnick má 2 stupně volnosti, 2 posuny)
2. Definujte lokální souřadnicový systém příslušný jednotlivým prutům
3. Vyjádřete koncové síly v globální souřadnicové soustavě v závislosti na globálních stupních volnosti
4. Sestavte podmínky rovnováhy ve styčnicích v globální souřadnicové soustavě příslušné volným stupňům volnosti

Připomeňme transformační vztahy:

$$\begin{aligned}
 [K]^g &= [T]^T [K]^{loc} [T] && \text{matice tuhosti v g.s.s.} && (18) \\
 -\{R^p\}^g &= -[T]^T \{R^p\}^{loc} && \text{vektor transformovaného zatížení v g.s.s.} && (19) \\
 \{r\}^g &= [T]^T \{r\}^{loc} && \text{vektor uzlových posunů v g.s.s.} && (20) \\
 \{R\}^g &= -\{R^p\}^g + [K]^g \{r\}^g && \text{koncové síly v g.s.s.} && (21)
 \end{aligned}$$

Title Page



Page 48 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Deformační metoda - příhradová konstrukce

- Matice tuhosti taženého/tlačeného prutu v lokální souřadnicové soustavě

$$[K]^{loc} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

- Matice tuhosti taženého/tlačeného prutu v globální souřadnicové soustavě

$$[K]^g = [T]^T [K]^{loc} [T] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

kde

$$c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha$$

- Vektor uzlových posunů v lokální a globální souřadnicové soustavě

$$\begin{aligned} (\{r\}^{loc})^T &= \{u_1, 0, u_2, 0\}^{loc} \\ (\{r\}^g)^T &= \{u_1, w_1, u_2, w_2\}^g \end{aligned}$$



Title Page



Page 49 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit

Deformační metoda - příhradová konstrukce

Řešení zadané úlohy, pokračování:

1. Konstrukce je staticky určitá a počet neznámých $pn=3$
2. Lokální souřadnicový systém a koncové síly v g.s.s.

$$X_{21}^g = X_{21} = \bar{X}_{21} + \frac{EA}{L_1} u_2 = -EA\alpha\theta_0 + \frac{EA}{L_1} u_2$$

$$Z_{31}^g = -X_{31} = \frac{EA}{L_3} w_3$$

$$\{R_2\}^g = \begin{Bmatrix} X_{23} \\ Z_{23} \\ X_{32} \\ Z_{32} \end{Bmatrix}^g = [K]^g \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}^g$$

3. Podmínky rovnováhy ve styčnicích 2 a 3

- styčník 2

$$X_{21}^g + X_{23}^g = 0$$

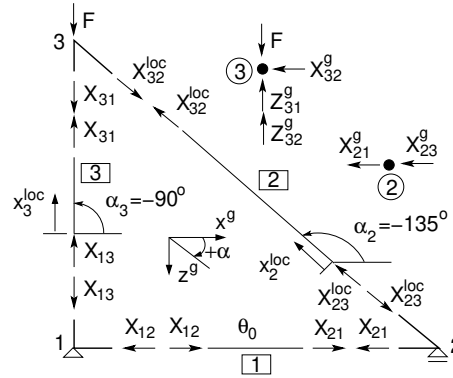
- styčník 3

$$X_{32}^g = 0$$

$$Z_{31}^g + Z_{32}^g = F$$

4. Sestavit a vyřešit výslednou soustavu rovnic

$$EA \begin{bmatrix} 1/L_1 + 0.5/L_2 & -0.5/L_2 & -0.5/L_2 \\ -0.5/L_2 & 0.5/L_2 & 0.5/L_2 \\ -0.5/L_2 & 0.5/L_2 & 0.5/L_2 + 1/L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA\alpha\theta_0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$



$$\{R\}_1^g = \frac{EA}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}^g + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -EA\alpha\theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{R\}_3^g = \frac{EA}{L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}^g$$

$$\{R\}_2^g = \frac{EA}{L_2} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}^g$$



Title Page



Page 50 of 53

Go back

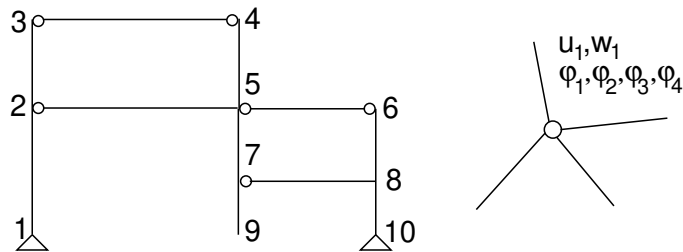
Full Screen

Close

Quit

Řešení staticky neurčitých konstrukcí - určení sn a pn

Obecná vs zjednodušená deformační metoda, statická kondenzace, vnitřní kloub



- SM - stupeň statické neurčitosti: tato konstrukce je staticky určitá
- DM
 $pn=33$ ($u_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_{21}, \varphi_{22}, u_3, w_3, \varphi_{31}, \varphi_{32}, u_4, w_4, \varphi_{41}, \varphi_{42}, u_5, w_5, \varphi_{51}, \varphi_{52}, u_6, w_6, \varphi_{61}, \varphi_{62}, u_7, w_7, \varphi_{71}, \varphi_{72}, u_8, w_8, \varphi_8, u_9, w_9, \varphi_9, \varphi_{10}$)
- DM s kondenzací
 $pn=18$ ($u_2, w_2, \varphi_2, u_3, w_3, u_4, w_4, u_5, w_5, \varphi_5, u_6, w_6, u_7, w_7, \varphi_7, u_8, w_8, \varphi_8$)
 $pn=17$ ($u_2, w_2, \varphi_2, u_3, w_3, u_4, w_4, u_5, w_5, \varphi_5, u_6, w_6, u_7, w_7, u_8, w_8, \varphi_8$)
 pokud prut 7-9 uvažují jako konzolu \Rightarrow koncový moment $M_{79} = M_{75}$ tedy znám
- ZDM
 $pn=7$ ($\varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$)
 $\Delta_1 = u_2 = u_5 = u_6$
 $\Delta_2 = u_3 = u_4$
 $\Delta_3 = u_7 = u_8$
 $\Delta_4 = w_4 = w_5 = w_7 = w_9$



Title Page

◀ ▶

◀▶

Page 51 of 53

Go back

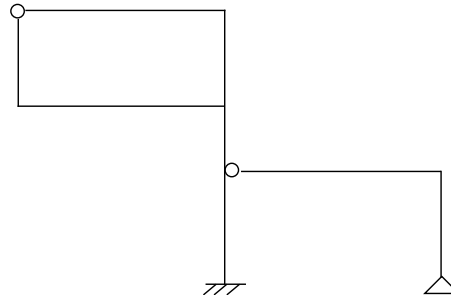
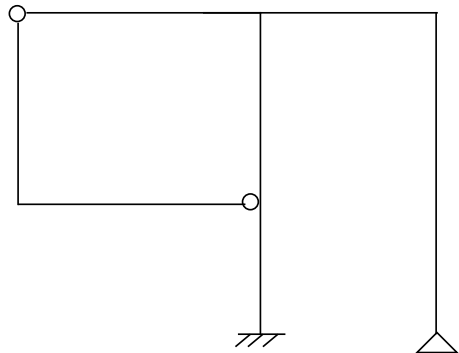
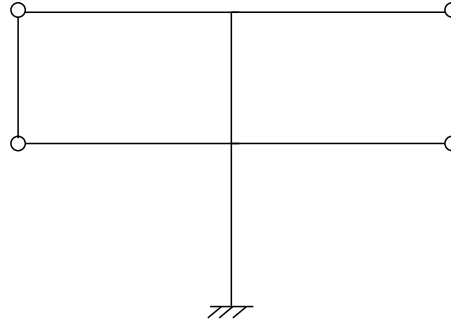
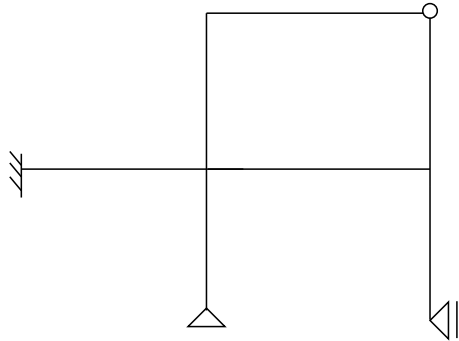
Full Screen

Close

Quit

Řešení staticky neurčitých konstrukcí - určení s_n a p_n

Variantní zadání



Title Page



Page 52 of 53

Go back

Full Screen

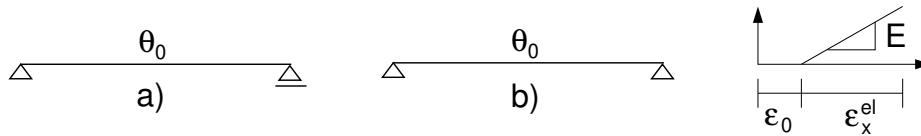
Close

Quit

Účinek teploty - staticky určitá vs staticky neurčitá konstrukce



Zadání: posuďte účinek teploty na daných konstrukcích



Řešení:

- Hookeův zákon

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \varepsilon_0) = E(\varepsilon_x - \alpha\theta_0), \quad \varepsilon_x = \varepsilon_0 + \varepsilon_x^{el}$$

- Varianta a)

$$\varepsilon_x = \alpha\theta_0 \Rightarrow \sigma_x = 0 \rightarrow N = 0$$

- Varianta b)

$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = -E\alpha\theta_0 \rightarrow N = A\sigma_x = -EA\alpha\theta_0$$

Title Page



Page 53 of 53

Go back

Full Screen

Close

Quit