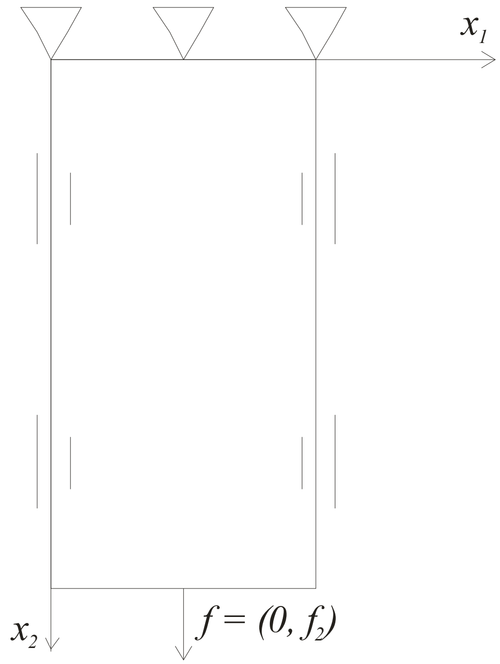
ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DVOU ÚLOH LINEÁRNÍ PRUŽNOSTI

Patricie Chrásková

ROVINNÁ NAPJATOST

- Obdélníková deska o rozměrech 1x2m, z homogenního izotropního materiálu, zatížená vlastní tíhou
- Rovinná napjatost
- Hledáme posunutí $\vec{u}(\vec{x})$



Zobecněný Hookeův zákon pro lineární pružnost v R^3

$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta + 2\mu e_{ij}$, i = 1, 2, 3.

$\tau_{ij}(\vec{x})$ - složky Cauchyova tenzoru napětí

$e_{ij}(\vec{x})$- složky tenzoru malých deformací

ϑ - stopa tenzoru malých deformací

λ a μ - Lamého koeficienty

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Klasická formulace úlohy lineární pružnost v R^3

- Rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{v } \Omega$$

- Lamého rovnice

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \Delta u_i + f_i = 0 \quad \text{v } \Omega$$

Okrajové podmínky: $\tau_{ij} n_j = T_{0i}$ na Γ_τ

$u_i = u_{0i}$ na Γ_u

Slabá formulace úlohy pružnosti

- $H^1(\Omega)$ - zúplnění prostoru $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{dx_i} \right)^2 \right) \mathrm{d}\Omega$$

- Prostory funkcí:

$$W = \left[H^1(\Omega)\right]^3 = \left\{\vec{u}; u_i \in H^1(\Omega), i = 1,2,3\right\}$$

$$V = \left\{\vec{u} \in W, u_i = 0 \text{ na } \Gamma_\mathrm{u},\ i = 1,2,3\right\}$$

- Hledáme $\vec{u} \in W$ tak, že $\vec{u} - \vec{u}_0 \in V$ a

$$\int_\Omega \tau_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega f_i v_i \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\tau} T_{0i} v_i \mathrm{dS} \quad \forall v \in V$$

Rovinná napjatost

- $\tau_{11} = \lambda_1 \vartheta' + 2\mu e_{11}$

  $\tau_{22} = \lambda_1 \vartheta' + 2\mu e_{22}$

  $\tau_{12} = 2\mu e_{12}$

- $\lambda_1 = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$

  $\vartheta' = e_{11} + e_{22}$

- Lamého rovnice: $(\lambda_1 + \mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) = -f_1$

  $(\lambda_1 + \mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) = -f_2$

Analytické řešení zadané úlohy

$$(\lambda_1 + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) = -f_2$$

$$\longrightarrow \ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = -f_2$$

- Řešení u_2 budeme hledat ve tvaru polynomu 2. stupně

$$u_1(x_1, x_2) \equiv 0$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2(x_2) = c_2 x_2^2 + c_1 x_2 + c_0$$

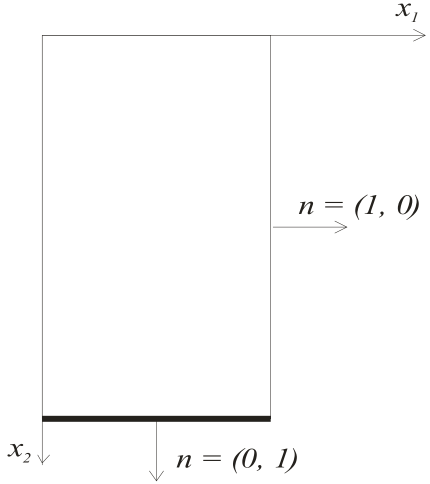
Analytické řešení zadané úlohy

- Z okrajových odmínek:

$$\Rightarrow u_2(0) = c_0 = 0$$

- $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 2c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = -\frac{f_2}{2(\lambda + 2\mu)}$$

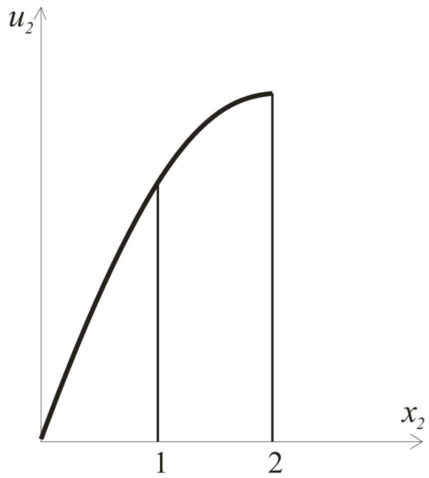
$$c_1 = \frac{2f_2}{\lambda_1 + 2\mu}$$



- Analytické řešení:

$$u_1(x_1, x_2) \equiv 0$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2(x_2) = -\frac{f_2}{2(\lambda_1 + 2\mu)} x_2^2 + \frac{2f_2}{\lambda_1 + 2\mu} x_2$$



Slabé řešení zadané úlohy

- $u'' = -\frac{f_2}{\lambda + 2\mu} = -F$, $\begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u'(2) = 0 \end{array}$
- Slabá formulace: $\int_0^2 u'v'dx_2 = \int_0^2 Fvdx_2 \text{ , } \forall v \in V$
- $\int_0^2 u'v'dx_2 = a(u,v)$

  $\int_0^2 Fvdx_2 = \langle F, v \rangle$

Metoda konečných prvků

- Vycházíme z Ritz-Galerkinovy metody
- $u_h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in \Re$
- Dosazením do slabé formulace:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a(v_i, v_j) = \langle F, v_j \rangle$$

$$\begin{bmatrix} a(v_1,v_1) & a(v_2,v_1) & \dots & a(v_n,v_1) \\ a(v_1,v_2) & a(v_2,v_2) & \dots & a(v_n,v_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(v_1,v_n) & a(v_2,v_n) & \dots & a(v_n,v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle F, v_1 \rangle \\ \langle F, v_2 \rangle \\ \dots \\ \langle F, v_n \rangle \end{bmatrix}$$

Přibližné řešení pomocí 2 lineárních konečných prvků

- $v_1(x_2) = N_1(x_2) = x_2$

  pro $x_2 \in \langle 0,1 \rangle$

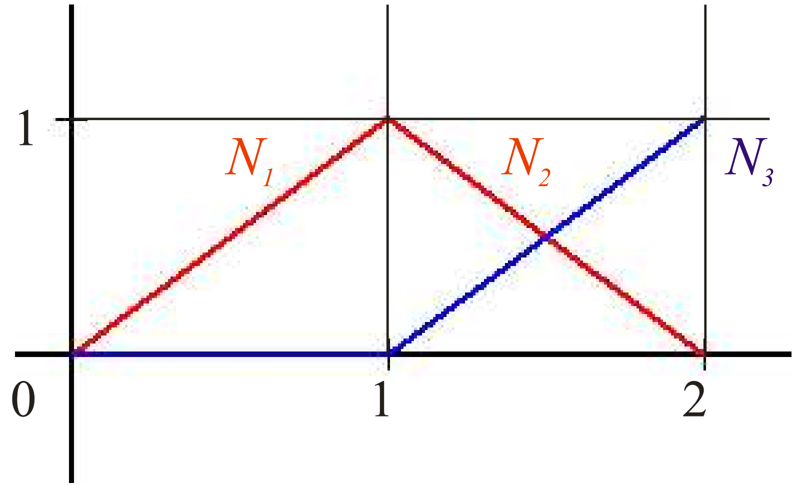
  $v_1(x_2) = N_2(x_2) = -x_2 + 2$

  pro $x_2 \in \langle 1,2 \rangle$
- $v_2(x_2) = 0$

  pro $x_2 \in \langle 0,1 \rangle$

  $v_2(x_2) = N_3(x_2) = x_2 - 1$

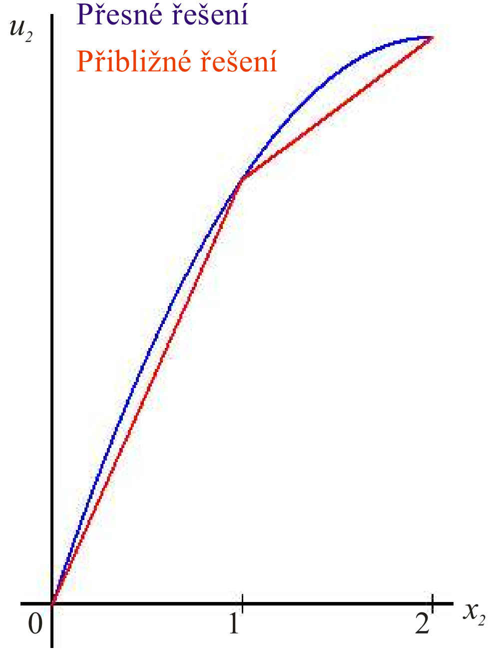
  pro $x_2 \in \langle 1,2 \rangle$



Přibližné řešení pomocí 2 lineárních konečných prvků

- Sestavíme soustavu rovnic pro koeficienty α_i
- Řešení: $\alpha_1 = \frac{3}{2} F = \frac{3 f_2}{2(\lambda + 2\mu)}$

$$\alpha_2 = 2F = \frac{2 f_2}{\lambda + 2\mu}$$



- Přibližné řešení úlohy:

$$u_h(x_2) = \frac{3 f_2}{2(\lambda + 2\mu)} v_1(x_2) + \frac{2 f_2}{\lambda + 2\mu} v_2(x_2)$$

Chyba aproximace

- Chyba na jednotlivých prvcích:

  $e_i = u - u_{hi}$, $i = 1, 2$

- Energetická norma řešení

  $$\|u\|_{\Omega_i}^2 = \int_{\Omega_i} (\lambda_1 + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_2$$

- Energetická norma chyby

  $$\|e_i\|_{\Omega_i}^2 = \int_{\Omega_i} (\lambda_1 + 2\mu) \left(\frac{\partial e_i}{\partial x_2} \right)^2 dx_2$$

- Relativní chyba = 6,25%

Přibližné řešení pomocí 2 kvadratických konečných prvků

- $v_1(x_2) = N_1(x_2) = 4\left(x_2 - x_2^2\right)$

  pro $x_2 \in \langle 0,1 \rangle$

  $v_1(x_2) = 0$

  pro $x_2 \in \langle 1,2 \rangle$

- $v_2(x_2) = 0$

  pro $x_2 \in \langle 0,1 \rangle$

  $v_2(x_2) = N_3(x_2) = 12x_2 - 4x_2^2 - 8$

  pro $x_2 \in \langle 1,2 \rangle$

- $v_3(x_2) = N_2(x_2) = 2x_2^2 - x_2$

  pro $x_2 \in \langle 0,1 \rangle$

  $v_3(x_2) = N_4(x_2) = 2x_2^2 - 7x_2 + 6$

  pro $x_2 \in \langle 1,2 \rangle$

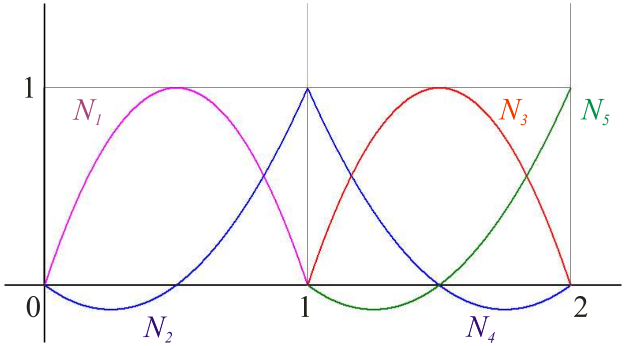
- $v_4(x_2) = 0$

  pro $x_2 \in \langle 0,1 \rangle$

  $v_4(x_2) = N_5(x_2) = 2x_2^2 - 5x_2 + 3$

  pro $x_2 \in \langle 1,2 \rangle$

Přibližné řešení pomocí 2 kvadratických konečných prvků

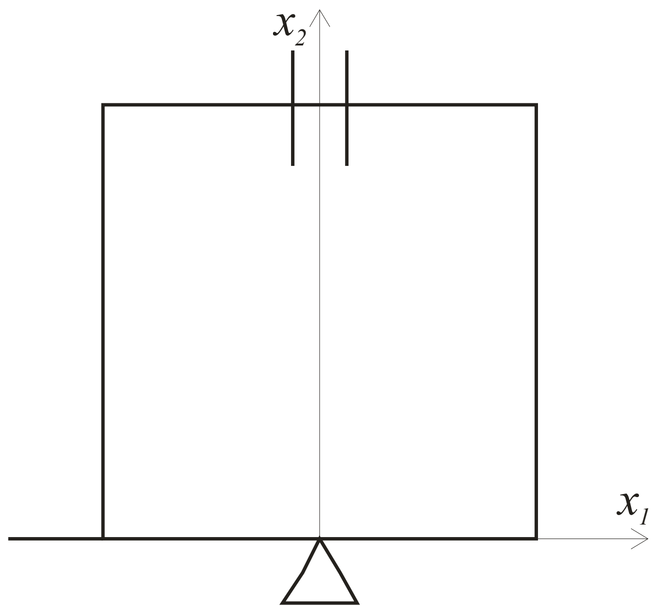


- Sestavíme soustavu rovnic pro koeficienty α_i
- $$u_h(x_2) = \frac{7F}{8} v_1(x_2) + \frac{15F}{8} v_2(x_2) + \frac{3F}{2} v_3(x_2) + 2F v_4(x_2)$$

$$u_h(x_2) = -\frac{f_2}{2(\lambda_1 + 2\mu)} x_2^2 + \frac{2 f_2}{\lambda_1 + 2\mu} x_2$$

ROVINNÁ TEPLOTNÍ NAPJATOST

- Čtvercová deska o rozměrech 2x2m, z homogenního izotropního materiálu, zatížená nekonstantním rozložením teplot $T = 10x_2$
- Rovinná napjatost



Hookeův zákon pro teplotní napjatost

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \left(\vartheta - 3\alpha T \right) + 2\mu \left(e_{ij} - \alpha T \delta_{ij} \right),$$

kde α je koeficient délkové teplotní roztažnosti

Klasická formulace úlohy lineární pružnost v R^3

- Rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{v } \Omega$$

- Lamého rovnice

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \Delta u_i = 2\alpha(\lambda + \mu)\frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{v } \Omega$$

Okrajové podmínky: $\tau_{ij} n_j = T_{0i}$ na Γ_τ

$u_i = u_{0i}$ na Γ_u

Rovinná teplotní napjatost

$$\tau_{ij} = \lambda_1 \delta_{ij} \left(\vartheta' - 2\alpha T \right) + 2\mu \left(e_{ij} - \alpha T \delta_{ij} \right),$$

$i = 1, 2$

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \text{ a } \vartheta' = e_{11} + e_{22}$$

- Lamého rovnice

$$(\lambda_1 + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) = 2\alpha(\lambda_1 + \mu)\frac{\partial T}{\partial x_1}$$

$$(\lambda_1 + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) = 2\alpha(\lambda_1 + \mu)\frac{\partial T}{\partial x_2}$$

Analytické řešení

- Řešíme soustavu Lamého rovnic
- Řešení hledáme ve tvaru

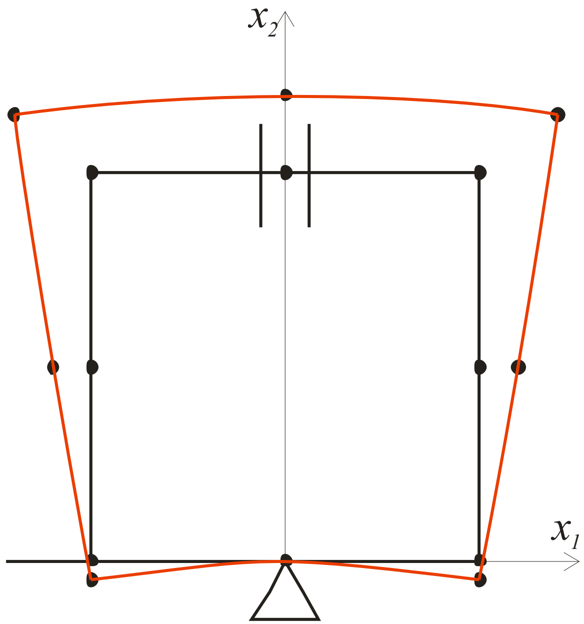
$$u_1(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6$$
$$u_2(x_1, x_2) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1 + b_5 x_2 + b_6$$
$$a_i, b_i \in \Re$$

- Vycházíme z okrajových podmínek a symetrie posunů

Analytické řešení

- $u_1(x_1, x_2) = 10\alpha x_1 x_2$

  $u_2(x_1, x_2) = -5\alpha x_1^2 + 5\alpha x_2^2 = 5\alpha\left(x_2^2 - x_1^2\right)$



Závěr

- Klasická a slabá formulace úlohy lineární pružnosti
- Principy metody konečných prvků
- Analytický a přibližný výpočet
- Relativní chyba