Analytické odvození vzorců pro moduly pružnosti v tahu a v ohybu

Marek Pýcha

Czech Technical University in Prague

Faculty of Civil Engineering

Prague 2009

Zadání:

Homogenizace mindlinovských nosníků - zavedení rovnice, určení efektivních parametrů, matematické aspekty.

O co nám jde:

- Najít způsob, jak převést kompozitní materiál na homogenní materiál
- Najít způsob, jak redukovat úlohu na tvar, který umíme řešit

Přesněji:

- Najít vzorec pro materiálové konstanty, který by uspokojivě simuloval rozložení materiálu v konstrukci
- Najít vzorec, kde bychom dostali "fiktivní" hodnotu E_H dosazením jednotlivých hodnot E_i

Zadání:

Homogenizace mindlinovských nosníků - zavedení rovnice, určení efektivních parametrů, matematické aspekty.

O co nám jde:

- Najít způsob, jak převést kompozitní materiál na homogenní materiál
- Najít způsob, jak redukovat úlohu na tvar, který umíme řešit

Přesněji:

- Najít vzorec pro materiálové konstanty, který by uspokojivě simuloval rozložení materiálu v konstrukci
- Najít vzorec, kde bychom dostali "fiktivní" hodnotu E_H dosazením jednotlivých hodnot E_i

Zadání:

Homogenizace mindlinovských nosníků - zavedení rovnice, určení efektivních parametrů, matematické aspekty.

O co nám jde:

- Najít způsob, jak převést kompozitní materiál na homogenní materiál
- Najít způsob, jak redukovat úlohu na tvar, který umíme řešit

Přesněji:

- Najít vzorec pro materiálové konstanty, který by uspokojivě simuloval rozložení materiálu v konstrukci
- Najít vzorec, kde bychom dostali "fiktivní" hodnotu E_H dosazením jednotlivých hodnot E_i

Zadání:

Homogenizace mindlinovských nosníků - zavedení rovnice, určení efektivních parametrů, matematické aspekty.

O co nám jde:

- Najít způsob, jak převést kompozitní materiál na homogenní materiál
- Najít způsob, jak redukovat úlohu na tvar, který umíme řešit

Přesněji:

- Najít vzorec pro materiálové konstanty, který by uspokojivě simuloval rozložení materiálu v konstrukci
- Najít vzorec, kde bychom dostali "fiktivní" hodnotu E_H dosazením jednotlivých hodnot E_i

Zadání:

Homogenizace mindlinovských nosníků - zavedení rovnice, určení efektivních parametrů, matematické aspekty.

O co nám jde:

- Najít způsob, jak převést kompozitní materiál na homogenní materiál
- Najít způsob, jak redukovat úlohu na tvar, který umíme řešit

Přesněji:

- Najít vzorec pro materiálové konstanty, který by uspokojivě simuloval rozložení materiálu v konstrukci
- Najít vzorec, kde bychom dostali "fiktivní" hodnotu E_H dosazením jednotlivých hodnot E_i

Zavedení

Počáteční zjednodušení:

- Pro začátek předpokládáme, že konstrukce je složena pouze ze dvou materiálů
- Konstrukce je jednorozměrná a staticky určitá

Jak budeme postupovat?

- Spočítáme průhyb na konci homogenizované konstrukce
- Spočítáme průhyb na konci kompozitní konstrukce
- Porovnáním průhybů dostaneme výsledný vzorec (vzorce)

Zavedení

Počáteční zjednodušení:

- Pro začátek předpokládáme, že konstrukce je složena pouze ze dvou materiálů
- Konstrukce je jednorozměrná a staticky určitá

Jak budeme postupovat?

- Spočítáme průhyb na konci homogenizované konstrukce
- Spočítáme průhyb na konci kompozitní konstrukce
- Porovnáním průhybů dostaneme výsledný vzorec (vzorce)

Zavedení

Počáteční zjednodušení:

- Pro začátek předpokládáme, že konstrukce je složena pouze ze dvou materiálů
- Konstrukce je jednorozměrná a staticky určitá

Jak budeme postupovat?

- Spočítáme průhyb na konci homogenizované konstrukce
- Spočítáme průhyb na konci kompozitní konstrukce
- Porovnáním průhybů dostaneme výsledný vzorec (vzorce)

Zavedení

Počáteční zjednodušení:

- Pro začátek předpokládáme, že konstrukce je složena pouze ze dvou materiálů
- Konstrukce je jednorozměrná a staticky určitá

Jak budeme postupovat?

- Spočítáme průhyb na konci homogenizované konstrukce
- Spočítáme průhyb na konci kompozitní konstrukce
- Porovnáním průhybů dostaneme výsledný vzorec (vzorce)

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 1

Model - obrázek:

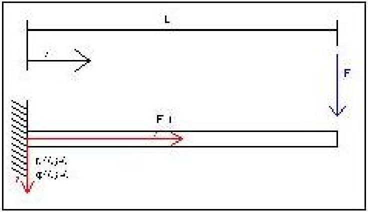

Figure: Homogenizovaný nosník

- Jde o konzolový nosník (na jednom konci vetknutý, na druhém volný), zatížený osamělou silou F
  Víme:
-
$$Q(x) = F$$
-
$$M(x) = -F(L - x)$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 1

Model - obrázek:

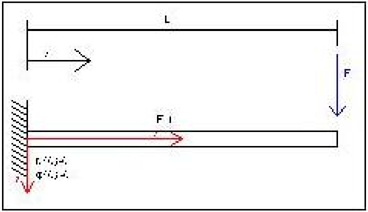

Figure: Homogenizovaný nosník

- Jde o konzolový nosník (na jednom konci vetknutý, na druhém volný), zatížený osamělou silou F

Víme:

- $$Q(x) = F$$

- $$M(x) = -F(L - x)$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 1

Model - obrázek:

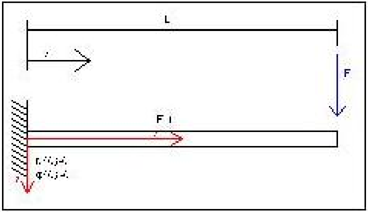

Figure: Homogenizovaný nosník

- Jde o konzolový nosník (na jednom konci vetknutý, na druhém volný), zatížený osamělou silou F
  Víme:
-
$$Q(x) = F$$
-
$$M(x) = -F(L-x)$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 1

Model - obrázek:

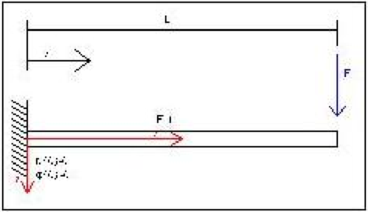

Figure: Homogenizovaný nosník

- Jde o konzolový nosník (na jednom konci vetknutý, na druhém volný), zatížený osamělou silou F
  Víme:
-
$$Q(x) = F$$
-
$$M(x) = -F(L - x)$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 2

- Nosník budeme počítat podle Mindlinovy teorie
- Pootočení φ již není derivací průhybu
- Zavádíme samostatnou proměnnou γ (zkosení)
- Platí:

Figure: Zkosení - grafická definice(převzato z [1])

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 2

- Nosník budeme počítat podle Mindlinovy teorie
- Pootočení φ již není derivací průhybu
- Zavádíme samostatnou proměnnou γ (zkosení)
- Platí:

Figure: Zkosení - grafická definice(převzato z [1])

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 2

- Nosník budeme počítat podle Mindlinovy teorie
- Pootočení φ již není derivací průhybu
- Zavádíme samostatnou proměnnou γ (zkosení)
- Platí:

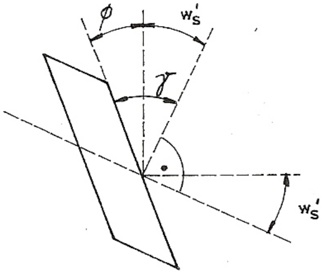

Figure: Zkosení - grafická definice(převzato z [1])

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 3

Základní vztahy pro výpočet průhybu dle Mindlina:

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Počítáme přímo:

$$\kappa = \varphi'(x) \Rightarrow \varphi = \int \kappa(x) \mathrm{d}x$$

$$\kappa(x) = \frac{-F \cdot (L - x)}{E_H I}$$

$$\varphi = \frac{F}{2E_H I}(L - x)^2 + C_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 3

Základní vztahy pro výpočet průhybu dle Mindlina:

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Počítáme přímo:

$$\kappa = \varphi'(x) \Rightarrow \varphi = \int \kappa(x) \mathrm{d}x$$

$$\kappa(x) = \frac{-F \cdot (L - x)}{E_H I}$$

$$\varphi = \frac{F}{2 E_H I}(L - x)^2 + C_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 3

Základní vztahy pro výpočet průhybu dle Mindlina:

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Počítáme přímo:

$$\kappa = \varphi'(x) \Rightarrow \varphi = \int \kappa(x)\mathrm{d}x$$

$$\kappa(x) = \frac{-F \cdot (L-x)}{E_H I}$$

$$\varphi = \frac{F}{2E_H I}(L-x)^2 + C_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 3

Základní vztahy pro výpočet průhybu dle Mindlina:

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Počítáme přímo:

$$\kappa = \varphi'(x) \Rightarrow \varphi = \int \kappa(x)\mathrm{d}x$$

$$\kappa(x) = \frac{-F \cdot (L - x)}{E_H I}$$

$$\varphi = \frac{F}{2E_H I}(L - x)^2 + C_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 3

Základní vztahy pro výpočet průhybu dle Mindlina:

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Počítáme přímo:

$$\kappa = \varphi'(x) \Rightarrow \varphi = \int \kappa(x)\mathrm{d}x$$

$$\kappa(x) = \frac{-F \cdot (L - x)}{E_H I}$$

$$\varphi = \frac{F}{2E_H I}(L - x)^2 + C_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 4

- Protože: $\varphi(0) = 0$ (vetknutí)

$$\Rightarrow C_0 = -\frac{FL^2}{2E_H I}$$

-

$$\varphi(x) = \frac{F}{2E_H I}(L-x)^2 - \frac{FL^2}{2E_H I}$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 4

- Protože: $\varphi(0) = 0$ (vetknutí)

$$\Rightarrow C_0 = -\frac{FL^2}{2E_H I}$$

-

$$\varphi(x) = \frac{F}{2E_H I}(L-x)^2 - \frac{FL^2}{2E_H I}$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 5

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Podobně:

$$w'(x) = \gamma(x) - \varphi(x)$$

$$\gamma(x) = \frac{F}{G_H A^*}$$

a $\varphi(x)$ máme spočítané

$$w(x) = \frac{F}{6E_H I}(L-x)^3 + \left(\frac{F}{G_H A^*} + \frac{FL^2}{2E_H I}\right)x + D_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 5

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Podobně:

$$w'(x) = \gamma(x) - \varphi(x)$$

$$\gamma(x) = \frac{F}{G_H A^*}$$

a $\varphi(x)$ máme spočítané

$$w(x) = \frac{F}{6E_H I}(L-x)^3 + \left(\frac{F}{G_H A^*} + \frac{FL^2}{2E_H I}\right)x + D_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 5

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Podobně:

$$w'(x) = \gamma(x) - \varphi(x)$$

$$\gamma(x) = \frac{F}{G_H A^*}$$

a $\varphi(x)$ máme spočítané

$$w(x) = \frac{F}{6E_H I}(L-x)^3 + \left(\frac{F}{G_H A^*} + \frac{FL^2}{2E_H I}\right)x + D_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 5

geometrické	$\gamma(x) = \varphi(x) + w_s'(x)$	$\kappa(x) = \varphi'(x)$
fyzikální	$Q(x) = GA^* \cdot \gamma(x)$	$M(x) = EI \cdot [\kappa(x) - \kappa^t(x)]$
statické	$f_z(x) = -Q'(x)$	$0 = Q(x) - M'(x)$

Table: Rovnice pro výpočet prutu dle Mindlina (převzato z [1])

Podobně:

$$w'(x) = \gamma(x) - \varphi(x)$$

$$\gamma(x) = \frac{F}{G_H A^*}$$

a $\varphi(x)$ máme spočítané

$$w(x) = \frac{F}{6E_H I}(L-x)^3 + \left(\frac{F}{G_H A^*} + \frac{FL^2}{2E_H I}\right)x + D_0$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 6

- Protože: $w(0) = 0$ (vetknutí)

$$\Rightarrow D_0 = -\frac{FL^3}{6E_H I}$$

- $$w(x) = \frac{F}{6E_H I}(L-x)^3 + \left(\frac{F}{G_H A^*} + \frac{FL^2}{2E_H I}\right)x - \frac{FL^3}{6E_H I}$$

Homogenizovaný nosník a jeho výpočet 6

- Protože: $w(0) = 0$ (vetknutí)

$$\Rightarrow D_0 = -\frac{FL^3}{6E_H I}$$

- $$w(x) = \frac{F}{6E_H I}(L-x)^3 + \left(\frac{F}{G_H A^*} + \frac{FL^2}{2E_H I}\right)x - \frac{FL^3}{6E_H I}$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 1

Model - kompozitní nosník:

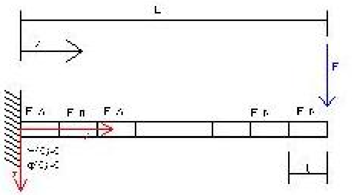

Figure: Kompozitní nosník

Předpoklady:

- Materiál je v nosníku rozložen rovnoměrně a pravidelně (půl na půl)
- Jednotlivé dílky se vůči sobě neposunou $w_{i-1}(x_0) = w_i(x_0)$
- Jednotlivé průřezy se vůči sobě rozdílně nepootočí $\varphi_{i-1}(x_0) = \varphi_i(x_0)$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 1

Model - kompozitní nosník:

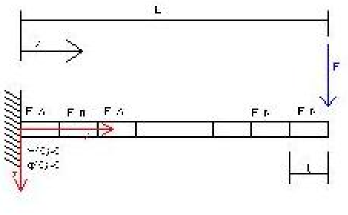

Figure: Kompozitní nosník

Předpoklady:

- Materiál je v nosníku rozložen rovnoměrně a pravidelně (půl na půl)
- Jednotlivé dílky se vůči sobě neposunou $w_{i-1}(x_0) = w_i(x_0)$
- Jednotlivé průřezy se vůči sobě rozdílně nepootočí $\varphi_{i-1}(x_0) = \varphi_i(x_0)$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 1

Model - kompozitní nosník:

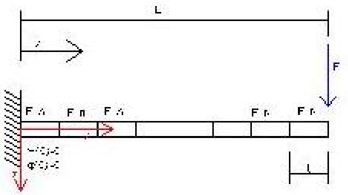

Figure: Kompozitní nosník

Předpoklady:

- Materiál je v nosníku rozložen rovnoměrně a pravidelně (půl na půl)
- Jednotlivé dílky se vůči sobě neposunou $w_{i-1}(x_0) = w_i(x_0)$
- Jednotlivé průřezy se vůči sobě rozdílně nepootočí $\varphi_{i-1}(x_0) = \varphi_i(x_0)$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 1

Model - kompozitní nosník:

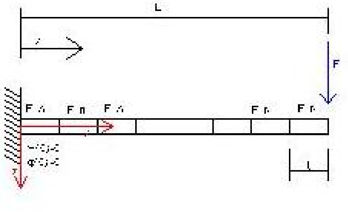

Figure: Kompozitní nosník

Předpoklady:

- Materiál je v nosníku rozložen rovnoměrně a pravidelně (půl na půl)
- Jednotlivé dílky se vůči sobě neposunou $w_{i-1}(x_0) = w_i(x_0)$
- Jednotlivé průřezy se vůči sobě rozdílně nepootočí $\varphi_{i-1}(x_0) = \varphi_i(x_0)$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 2

- Nechť l je délka jednoho dílku a n je počet dílků $\quad L = n \cdot l$

Víme:

- $$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{F}{2E_iI}(L-x)^2 + C_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} w_i(x) &= \frac{F}{6E_iI}(L-x)^3 + \frac{F}{G_iA^*}x - C_ix + D_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

A můžeme psát:

$$\begin{aligned} \varphi_{(i-1)}(il) &= \varphi_i(il) \\ w_{(i-1)}(il) &= w_i(il) \end{aligned}$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 2

- Nechť l je délka jednoho dílku a n je počet dílků $L = n \cdot l$

Víme:

- $$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{F}{2E_iI}(L-x)^2 + C_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} w_i(x) &= \frac{F}{6E_iI}(L-x)^3 + \frac{F}{G_iA^*}x - C_ix + D_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

A můžeme psát:

$$\begin{aligned} \varphi_{(i-1)}(il) &= \varphi_i(il) \\ w_{(i-1)}(il) &= w_i(il) \end{aligned}$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 2

- Nechť l je délka jednoho dílku a n je počet dílků $\quad L = n \cdot l$

Víme:

- $$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{F}{2E_iI}(L-x)^2 + C_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} w_i(x) &= \frac{F}{6E_iI}(L-x)^3 + \frac{F}{G_iA^*}x - C_ix + D_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

A můžeme psát:

$$\begin{aligned} \varphi_{(i-1)}(il) &= \varphi_i(il) \\ w_{(i-1)}(il) &= w_i(il) \end{aligned}$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 2

- Nechť l je délka jednoho dílku a n je počet dílků $L = n \cdot l$

Víme:

- $$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{F}{2E_iI}(L-x)^2 + C_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} w_i(x) &= \frac{F}{6E_iI}(L-x)^3 + \frac{F}{G_iA^*}x - C_ix + D_i \\ (i-1)l &< x < il \end{aligned}$$

A můžeme psát:

$$\begin{aligned} \varphi_{(i-1)}(il) &= \varphi_i(il) \\ w_{(i-1)}(il) &= w_i(il) \end{aligned}$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 3

Dostáváme posloupnosti konstant:
Jen pro představu

$$C_i = C_{(i-1)} + (-1)^{i+1}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^2}{2I}(n^2 - 2ni + i^2)$$

$$\begin{aligned} D_i = D_{(i-1)} \quad & + \quad il(-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^2}{2I}(n^2 - 2ni + i^2) + \\ & + \quad (-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{G_A} - \frac{1}{G_B}\right)\frac{F}{A^*}il + \\ & + \quad (-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^3}{6I}(n^3 - 3n^2i + 3ni^2 - i^3) \end{aligned}$$

Přičemž první členy posloupností C_0 a D_0 plynou z podmínky na levém konci (ve vetknutí)

Kompozitní nosník a jeho výpočet 3

Dostáváme posloupnosti konstant:

Jen pro představu

$$C_i = C_{(i-1)} + (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{Fl^2}{2I} (n^2 - 2ni + i^2)$$

$$\begin{aligned} D_i = D_{(i-1)} \quad & + \quad il(-1)^{(i+1)} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{Fl^2}{2I} (n^2 - 2ni + i^2) + \\ & + \quad (-1)^{(i+1)} \left(\frac{1}{G_A} - \frac{1}{G_B} \right) \frac{F}{A^*} il + \\ & + \quad (-1)^{(i+1)} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{Fl^3}{6I} (n^3 - 3n^2 i + 3ni^2 - i^3) \end{aligned}$$

Přičemž první členy posloupností C_0 a D_0 plynou z podmínky na levém konci (ve vetknutí)

Kompozitní nosník a jeho výpočet 3

Dostáváme posloupnosti konstant:

Jen pro představu

$$C_i = C_{(i-1)} + (-1)^{i+1}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^2}{2I}(n^2 - 2ni + i^2)$$

$$\begin{aligned} D_i = D_{(i-1)} \quad &+ \quad il(-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^2}{2I}(n^2 - 2ni + i^2) + \\ &+ \quad (-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{G_A} - \frac{1}{G_B}\right)\frac{F}{A^*}il + \\ &+ \quad (-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^3}{6I}(n^3 - 3n^2 i + 3ni^2 - i^3) \end{aligned}$$

Přičemž první členy posloupností C_0 a D_0 plynou z podmínky na levém konci (ve vetknutí)

Kompozitní nosník a jeho výpočet 3

Dostáváme posloupnosti konstant:
Jen pro představu

$$C_i = C_{(i-1)} + (-1)^{i+1}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^2}{2I}(n^2 - 2ni + i^2)$$

$$\begin{aligned} D_i = D_{(i-1)} \quad &+ \quad il(-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^2}{2I}(n^2 - 2ni + i^2) + \\ &+ \quad (-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{G_A} - \frac{1}{G_B}\right)\frac{F}{A^*}il + \\ &+ \quad (-1)^{(i+1)}\left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{Fl^3}{6I}(n^3 - 3n^2i + 3ni^2 - i^3) \end{aligned}$$

Přičemž první členy posloupností C_0 a D_0 plynou z podmínky na levém konci (ve vetknutí)

Kompozitní nosník a jeho výpočet 4

Protože chceme porovnávat průhyby na konci nosníku, sečteme konstanty přes všechny dílky ($\sum_{i=0}^{n-1} C_i$ a $\sum_{i=0}^{n-1} D_i$) např. pomocí programu Maple či **s** pomocí p. doc. Nekvindy (schválně si tipněte, co je rychlejší).

Položíme $x = L$ a dostáváme:

$$w_{(n-1)}(L) = \frac{FL}{2A^*}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) + \frac{FL^3}{3E_A I} + \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{FL^3}{4I}\frac{1}{6}\left(-4\frac{n^2}{n^2} + 9\frac{n}{n^2}\right)$$

Provedeme limitní přechod:

$$\lim_{n\to\infty} w$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 4

Protože chceme porovnávat průhyby na konci nosníku, sečteme konstanty přes všechny dílky ($\sum_{i=0}^{n-1} C_i$ a $\sum_{i=0}^{n-1} D_i$) např. pomocí programu Maple či **s** pomocí p. doc. Nekvindy (schválně si tipněte, co je rychlejší).

Položíme $x = L$ a dostáváme:

$$w_{(n-1)}(L) = \frac{FL}{2A^*}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) + \frac{FL^3}{3E_A I} + \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B}\right)\frac{FL^3}{4I}\frac{1}{6}(-4\frac{n^2}{n^2} + 9\frac{n}{n^2})$$

Provedeme limitní přechod:

$$\lim_{n\to\infty} w$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 4

Protože chceme porovnávat průhyby na konci nosníku, sečteme konstanty přes všechny dílky ($\sum_{i=0}^{n-1} C_i$ a $\sum_{i=0}^{n-1} D_i$) např. pomocí programu Maple či **s** pomocí p. doc. Nekvindy (schválně si tipněte, co je rychlejší).

Položíme $x = L$ a dostáváme:

$$w_{(n-1)}(L) = \frac{FL}{2A^*}\left(\frac{1}{G_A}+\frac{1}{G_B}\right)+\frac{FL^3}{3E_AI}+\left(\frac{1}{E_A}-\frac{1}{E_B}\right)\frac{FL^3}{4I}\frac{1}{6}(-4\frac{n^2}{n^2}+9\frac{n}{n^2})$$

Provedeme limitní přechod:

$$\lim_{n\to\infty} w$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 5

a dostáváme:

- $$\varphi(L) = -\frac{FL^2}{4I}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$$

- $$w(L) = \frac{FL}{2A^*}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) + \frac{FL^3}{6I}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$$

Kompozitní nosník a jeho výpočet 5

a dostáváme:

- $$\varphi(L) = -\frac{FL^2}{4I}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$$

- $$w(L) = \frac{FL}{2A^*}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) + \frac{FL^3}{6I}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $\varphi_H = \varphi$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_A G_B}{G_A + G_B}$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $$\varphi_H = \varphi$$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_A G_B}{G_A + G_B}$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $$\varphi_H = \varphi$$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_AE_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_AG_B}{G_A + G_B}$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $\varphi_H = \varphi$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_A G_B}{G_A + G_B}$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $\varphi_H = \varphi$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_A G_B}{G_A + G_B}$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $\varphi_H = \varphi$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_A G_B}{G_A + G_B}$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $$\varphi_H = \varphi$$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_A G_B}{G_A + G_B}$$

Porovnání

Spočetli jsme obě pootočení i oba průhyby. Jejich porovnáním dostaneme konečné vzorce:

- $\varphi_H = \varphi$
- $$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \Rightarrow E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$
- $w_H = w$ a se znalostí předcházejícího vzorce:
- $$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \Rightarrow G_H = \frac{2G_A G_B}{G_A + G_B}$$

Co to je?

$$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$$

$$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right)$$

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Co to je?

$$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \qquad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \qquad \frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Co to je?

$$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \qquad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \qquad \frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Co to je?

$$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right) \qquad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{G_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_A} + \frac{1}{G_B}\right) \qquad \frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Jedna otázka zmizí, objeví se deset dalších

- Jak přesný je náš vzorec? Kdy a jak jej můžeme použít?
- Co se bude dít, poroste-li počet materiálů?
- Co s dalšími rozměry a jiným rozložením materiálů?

Jedna otázka zmizí, objeví se deset dalších

- Jak přesný je náš vzorec? Kdy a jak jej můžeme použít?
- Co se bude dít, poroste-li počet materiálů?
- Co s dalšími rozměry a jiným rozložením materiálů?

Jedna otázka zmizí, objeví se deset dalších

- Jak přesný je náš vzorec? Kdy a jak jej můžeme použít?
- Co se bude dít, poroste-li počet materiálů?
- Co s dalšími rozměry a jiným rozložením materiálů?

Jedna otázka zmizí, objeví se deset dalších

- Jak přesný je náš vzorec? Kdy a jak jej můžeme použít?
- Co se bude dít, poroste-li počet materiálů?
- Co s dalšími rozměry a jiným rozložením materiálů?

Literatura:

Bittnar Z., Jirásek M., Konvalinka P.: *Statika stavebních konstrukcí II - Příklady*, CVUT, 1992

Poděkování

DĚKUJEME, ŽE JSTE NAVŠTÍVILI NÁŠ CIRKUS A NEKRMILI NAŠEHO ORANGUTANA

CHOVATELÉ A CVIČITELÉ