Hashinův-Shtrikmanův princip

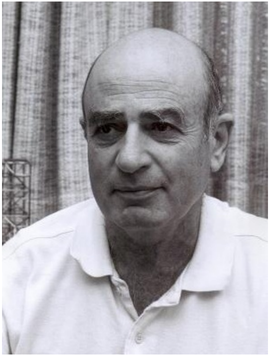
Martin Doškář

20. 6. 2013

závěrečná práce z předmětu Univerzální principy mechaniky

Autoři

Zvi Hashin
* 1929



Shmuel Shtrikman
* 1930 - † 2003

Hashinův-Shtrikmanův funkcionál

$$\Pi_{HS}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} : \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)^{-1} : \boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}V - \int_V \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V - \int_{S_t} \bar{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S_t \tag{1}$$

$\boldsymbol{u}$ ... pole posunů
$\boldsymbol{D}$ ... tenzor tuhosti
$\boldsymbol{D}_0$ ... tenzor referenční tuhosti
$\boldsymbol{\theta}$ ... tenzor polarizačního napětí
$\bar{\boldsymbol{b}}$ ... tenzor objemových sil
$\bar{\boldsymbol{t}}$ ... tenzor povrchových sil

První variace Π_{HS} funkcionálu

ve smyslu Gâteauxova diferenciálu

$$\delta\Pi_{HS}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\Pi_{HS}(\boldsymbol{u}+h\boldsymbol{\delta u},\boldsymbol{\theta}+h\boldsymbol{\delta\theta}) - \Pi_{HS}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta})\right)$$

vede na výraz

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HS}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \int_V &\left[-\boldsymbol{\nabla}_s\cdot(\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} : \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{\theta}) - \bar{\boldsymbol{b}}\right]\cdot\boldsymbol{\delta u} + \\ &\left[\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)^{-1} : \boldsymbol{\theta}\right]\cdot\boldsymbol{\delta\theta}\,\mathrm{d}V \\ &+ \int_{S_t}\left[\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} : \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{\theta}) - \bar{\boldsymbol{t}}\right]\cdot\boldsymbol{\delta u}\,\mathrm{d}S_t.\end{aligned} \tag{2}$$

Podmínky stacionarity

Z kritéria stacionarity

$$\delta\Pi_{HS}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = 0,\ \forall\boldsymbol{\delta u},\boldsymbol{\delta\theta}$$

vycházejí tři následující podmínky

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u}\colon \boldsymbol{D}_0+\boldsymbol{\theta})+\bar{\boldsymbol{b}} &= 0 && \text{na } V, && (3)\\
\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u}\colon \boldsymbol{D}_0+\boldsymbol{\theta})-\bar{\boldsymbol{t}} &= 0 && \text{na } S_t, && (4)\\
\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)^{-1}:\boldsymbol{\theta} &= 0 && \text{na } V, && (5)
\end{aligned}$$

kde (3) a (4) představují Cauchyho podmínky rovnováhy a (5) definuje tenzor polarizačního napětí $\boldsymbol{\theta}$.

Zpětným dosazením (5) ve tvaru

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0)^{-1} : \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u}$$

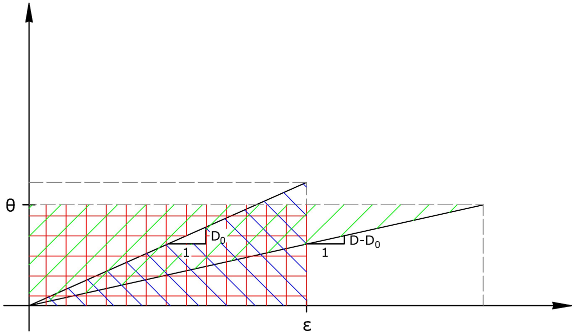
do definice funkcionálu (1) získáme výraz pro potenciální energii lineárně elastického tělesa

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u} : \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V - \int_V \bar{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V - \int_{S_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S_t .$$

Druhá variace Π_{HS} funkcionálu

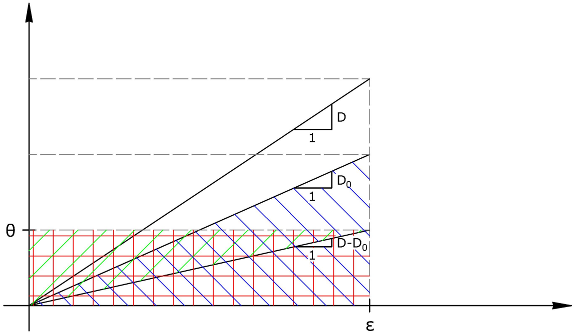
$$\delta^2 \Pi_{HS}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\theta}) = \int_V \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\delta u} : \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\delta u} + 2\boldsymbol{\delta\theta} : \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\delta u} - \boldsymbol{\delta\theta} : \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0\right)^{-1} : \boldsymbol{\delta\theta} \, \mathrm{d}V$$

Grafická reprezentace funkcionálu



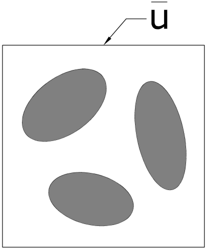
$$\Pi_{HS}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} : \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0)^{-1} : \boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}V - \int_V \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V - \int_{S_t}\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S_t$$

Grafická reprezentace funkcionálu



$$\Pi_{HS}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} : \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)^{-1} : \boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}V - \int_V \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V - \int_{S_t} \bar{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S_t$$

Aplikace H-S funkcionálu při odhadu efektivních vlastností



homogenní materiál	heterogenní materiál
$\boldsymbol{D}_0$	$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$
ε_0	$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$
$\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{D}_0 : \varepsilon_0$	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}_0 : \varepsilon + \boldsymbol{\theta}$
$\boldsymbol{u}_0$	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}'$

Předpoklady

- uvažují se nulové objemové a povrchové síly, tj. $\bar{\boldsymbol{b}} = 0$ a $\bar{\boldsymbol{t}} = 0$
- na celé hranici je předepsán posun ve tvaru $\bar{\boldsymbol{u}} = \varepsilon_0 : \boldsymbol{x}$, tj. $S = S_u$ $(\boldsymbol{u}'(S) = 0)$
- pro jednoduchost jsou uvažovány pouze izotropní materiály, tj. $\boldsymbol{D} = 3K\boldsymbol{I}_V + 2G\boldsymbol{I}_D$

Funkcionál uvedený Hashinem a Shtrikmanem v [1, 2] má tvar

$$\begin{aligned}\Pi_{HS}(\varepsilon', \boldsymbol{\theta}) = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 : \boldsymbol{D}_0 : \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0)^{-1} : \boldsymbol{\theta} \\ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} : \varepsilon' + \boldsymbol{\theta} : \varepsilon_0 \,\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{6}$$

Dosazením $\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u} = \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$ do (1) a s uvažováním podmínky

$$\left(\boldsymbol{D}_0 : \varepsilon' + \boldsymbol{\theta}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} = 0$$

je možné ukázat, že oba funkcionály jsou ekvivalentní.

Podmínky stacionarity nového funkcionálu:

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\theta}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} &= 0 && \text{na } V \\ \boldsymbol{u}' &= 0 && \text{na } S_u \\ \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u} - \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0\right)^{-1} : \boldsymbol{\theta} &= 0 && \text{na } V \end{aligned}$$

Funkcionál nabývá maxima pro případ, kdy je tenzor $(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0)$ pozitivně definitní, minima v případě, kde je tenzor $(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0)$ negativně definitní.
Stejně jako v předchozím případě lze dokázat[1], že dosazením podmínek stacionarity do předpisu funkcionálu získáme potenciální energii lineárně pružné deformace.

[1] Pole napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\sigma}_0$ musí být v rovnováze s nulovými objemovými a povrchovými silami, tj. $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ a $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = 0$.

Postup při homogenizaci

1. Tenzor $\boldsymbol{\theta}$ je uvažován jako konstantní v dané fázi r,

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}_r \qquad \text{pro } \boldsymbol{x} \in V_r,$$

   objemové zastoupení fáze je značeno v_r. Pro zjednodušení je uvažován jednotkový objem $V = 1$.

2. Pole polarizačního napětí $\boldsymbol{\theta}$ a pole deformace $\boldsymbol{\varepsilon}'$ je rozloženo na volumetrickou a deviatorickou část.

$$\boldsymbol{\theta} = p\mathbf{1} + \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \epsilon'\mathbf{1} + \boldsymbol{e}'$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \epsilon_0\mathbf{1} + \boldsymbol{e}_0$$

3. Výraz (6) je přepsán s rozdělením na volumetrickou a deviatorickou část na tvar

$$
\begin{aligned}
\Pi_{HS}(\boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\int_V \left[9K_0\epsilon_0^2 + 2G_0\boldsymbol{e}_0 : \boldsymbol{e}_0\right] \mathrm{d}V \\
+\frac{1}{2}\int_V \left[3p\epsilon' + \boldsymbol{f} : \boldsymbol{e}'\right] \mathrm{d}V \\
-\frac{1}{2}\int_V \left[\frac{p^2}{K - K_0} + \frac{\boldsymbol{f} : \boldsymbol{f}}{2(G - G_0)} - 6p\epsilon_0 - 2\boldsymbol{f} : \boldsymbol{e}_0\right] \mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

4. S uvažováním po částech konstantního průběhu $\boldsymbol{\theta}$ lze předchozí výraz upravit a nahradit integrály sumou

$$\Pi_{HS}(\varepsilon', \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left[9K_0\epsilon_0^2 + 2G_0\boldsymbol{e}_0 : \boldsymbol{e}_0\right] + \frac{1}{2}\int_V \left[3p\epsilon' + \boldsymbol{f} : \boldsymbol{e}'\right] \mathrm{d}V$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{p_r^2}{K_r - K_0} + \frac{\boldsymbol{f}_r : \boldsymbol{f}_r}{2(G_r - G_0)}\right] + 3\hat{p}\epsilon_0 + \hat{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{e}_0,$$

kde $\hat{p}$ a $\hat{\boldsymbol{f}}$ představují průměrné hodnoty

$$\hat{p} = \sum_{r=1}^{n} v_r p_r$$

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \sum_{r=1}^{n} v_r \boldsymbol{f}_r$$

5. Zbývá vyjádřit prostřední člen, tj. $\frac{1}{2}\int_V [3p\epsilon' + \boldsymbol{f} : \boldsymbol{e}']\,\mathrm{d}V$, v závislosti na p_r a $\boldsymbol{f}_r$. Toto vyjádření je možno získat za pomoci Fourierovy transformace, popsáno např. v [2]. Výsledkem je funkcionál $\Pi(\boldsymbol{\theta})$ závislý pouze na polarizačním napětí (které je rozloženo na deviatorickou a volumetrickou část)

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left[9K_0\epsilon_0^2 + 2G_0\boldsymbol{e}_0 : \boldsymbol{e}_0\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} v_r\left[\frac{p_r^2}{K_r - K_0} - \alpha_0 p_r^2 + \frac{\boldsymbol{f}_r : \boldsymbol{f}_r}{G_r - G_0} - \beta_0\boldsymbol{f}_r : \boldsymbol{f}_r\right] \tag{7}$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_0\hat{p}^2 + 3\hat{p}\epsilon_0 - \frac{1}{2}\beta_0\hat{\boldsymbol{f}}_r : \hat{\boldsymbol{f}}_r + \hat{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{e}_0,$$

kde α_0 a β_0 jsou koeficienty závislé na volbě K_0 a G_0.

6. Dalším krokem je nalezení extrému předchozí funkcionálu(7) v závislosti na $\hat{p}$ a $\hat{\boldsymbol{f}}$. Výsledkem jsou hodnoty

$$\tilde{p} = \epsilon_0 \frac{3A}{1 + \alpha_0 A}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{e}_0 \frac{B}{1 + \beta_0 B},$$

kde

$$A = \sum_{r=1}^{n} \frac{v_r}{\frac{1}{K_r - K_0} - \alpha_0}$$

$$B = \sum_{r=1}^{n} \frac{v_r}{\frac{1}{2(G_r - G_0)} - \beta_0},$$

a které splňují podmínku stacionarity předchozího funkcionálu.

7. Dosazením předchozího řešení lze funkcionál přepsat na tvar

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left(9K_0\epsilon_0^2 + 2G_0\boldsymbol{e}_0 : \boldsymbol{e}_0\right) + \frac{1}{2}\left(3\tilde{p}\epsilon_0 + \tilde{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{e}_0\right).$$

Jak bylo zmíněno, v případě stacionarity vyjadřuje H-S funkcionál potenciální energii deformace. Ta je pro homogenní materiál definována jako

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\left(9K_{hom}\epsilon_0^2 + 2G_{hom}\boldsymbol{e}_0 : \boldsymbol{e}_0\right)$$

Pro získání jednotlivých parametrů je možno dosadit ε_0 ve speciálním tvaru:

- pro odhady objemového modulu K

$$\varepsilon_0 = \epsilon_0\mathbf{1},$$

- pro odhady smykového modulu G

$$\varepsilon_0 = \boldsymbol{e}_0.$$

8. Z podmínky maxima/minima původního H-S funkcionálu je možné získat dolní a horní odhad efektivních vlastností.
   - $(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0)$ je pozitivně definitní, tj. $K_r > K_0$ a $G_r < G_0$, $\forall r$
   $$\Pi_e < \Pi$$
   - $(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_0)$ je negativně definitní, tj. $K_r < K_0$ a $G_r < G_0$, $\forall r$
   $$\Pi_e > \Pi$$

   Pro nejvyšší dolní odhad jsou parametry referenční tuhosti voleny jako minimum ze skutečných hodnot jednotlivých fází, tj. $K_0 = \min_r (K_r)$, pro nejnižší horní odhad pak $K_0 = \max_r (K_r)$ (stejně tak i pro G).

9. Výsledné vztahy pro horní a dolní odhad efektivních elastických parametrů heterogenního materiálů

$$K_{hom} \gtrless K_0 + \frac{A}{1+\alpha_0 A}$$

$$G_{hom} \gtrless K_0 + \frac{1}{2}\frac{B}{1+\beta_0 B}$$

$$A = \sum_{r=1}^{n} \frac{v_r}{\frac{1}{K_r - K_0} - \alpha_0}$$

$$B = \sum_{r=1}^{n} \frac{v_r}{\frac{1}{2(G_r - G_0)} - \beta_0}$$

$$\alpha_0 = -\frac{3}{3K_0 + 4G_0}$$

$$\beta_0 = -\frac{3\left(K_0 + 2G_0\right)}{5G_0\left(3K_0 + 4G_0\right)}$$

Literatura

- Z. Hashin, S. Shtrikman, On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10 (4) (1962) 335 – 342. doi:10.1016/0022-5096(62)90004-2. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509662900042
- Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 11 (2) (1963) 127 – 140. doi:10.1016/0022-5096(63)90060-7. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509663900607