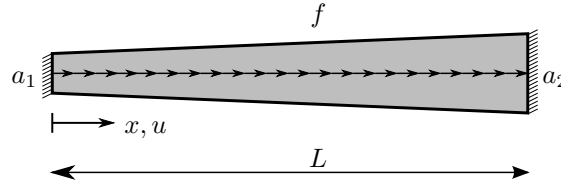


DOMÁCÍ ÚKOL č. 4

K132 YNMI

Uvažujte tažený-tlačený prut s lineárně proměnnou průřezovou plochou zatížený spojitým zatížením s konstantní intenzitou f a podepřený na obou koncích (viz následující obrázek).



Pro tuto konstrukci a zatížení

- (1) určete rozložení posunů u a deformací u' po konstrukci,
- (2) specifikujte tvar bilineární formy $A(u, v)$ a lineární formy $b(v)$ definující příslušné slabé řešení (včetně definičního oboru),
- (3) konstrukci diskretizujte lineárními konečnými prvky o stejné délce $h = \frac{L}{2}, \frac{L}{3}, \frac{L}{4}, \dots, \frac{L}{n}$, a pro každou síť
 - (a) určete přibližné řešení metodou konečných prvků u_h ,
 - (b) načrtněte rozložení chyby $e_h = u - u_h$ a e'_h ,
 - (c) ověřte, že platí tzv. galerkinovská ortogonalita, tj.

$$A(e_h, v_h) = 0 \text{ pro všechna } v_h \in P_h^1(0, L),$$

kde $P_h^1(0, L)$ je prostor po částech lineárních konečných prvků (nebo vysvětlete proč platí),

- (d) *určete chyby řešení, kvantifikované v normách

$$\|e_h\|_0 = \sqrt{\int_0^L e_h^2(x) dx}, \quad |e_h|_1 = \sqrt{\int_0^L e_h'^2(x) dx},$$

a ověřte, že splňují optimální odhady

$$|e_h|_1 \leq ch, \quad \|e_h\|_0 \leq ch^2,$$

kde konstanta $c > 0$ nezáleží na h .

Úkoly označené “*” vyžadují použití výpočetní techniky a proto nejsou povinné. Při řešení si můžete nastavit konstanty v obrázku výše na libovolnou hodnotu.

NÁPOVĚDA

Posun $u(x)$ najdete jako řešení řídicích rovnic jednorozměrné pružnosti

$$(Ea(x)u'(x))' = -f, \text{ pro } 0 < x < L, \quad u(0) = u(L) = 0,$$

kde E je Youngův modul pružnosti a $a(x)$ je průřezová plocha daná

$$a(x) = a_1 + (a_2 - a_1) \frac{x}{L} = a_1 + bx.$$

Matice tuhosti prvku $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ je dána jako

$$\mathbf{K}_i = \frac{1}{2} \frac{E}{h_i} a(x_{i-1} + x_i) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

kde $h_i = x_i - x_{i-1}$. Vektor ekvivalentních uzlových zatížení je roven

$$\mathbf{F}_i = \frac{bh_i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní řešení proveďte pomocí lokalizace a kódových čísel, jako např. ve speciálním cvičení ze SM 3, v předmětu Analýza konstrukcí, nebo v třetím bloku přednášek tohoto kurzu.