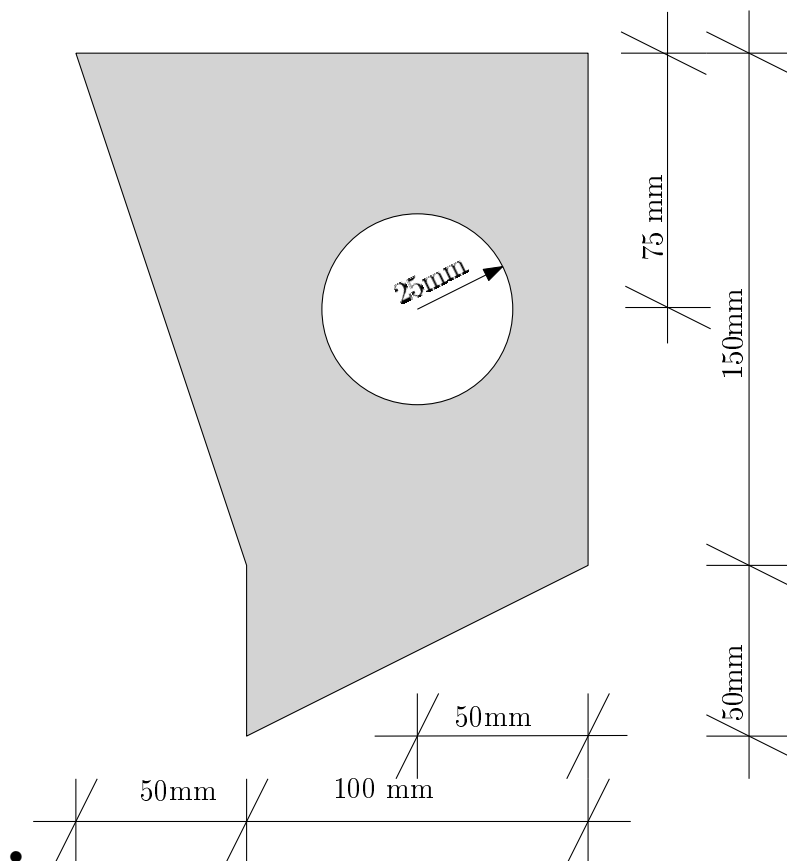


Průřezové charakteristiky

22. dubna 2020

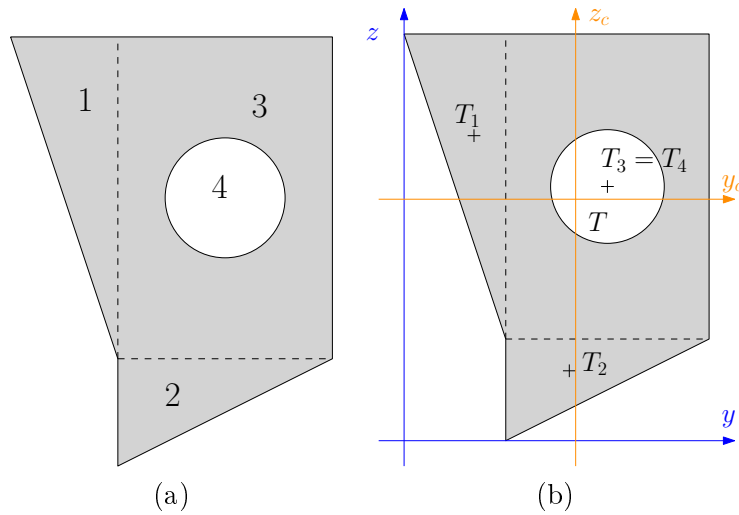


Obrázek 1: Schéma průřezu.

Úkol: Určete hlavní centrální momenty setrvačnosti a vykreslete v měřítku odpovídající elipsu setrvačnosti.

Řešení:

- Nejprve si složený průřez rozdělíme na plochy, u kterých umíme určit lokální těžiště a lokální momenty setrvačnosti. V tomto kroku se soustředíme na to, aby počet ploch byl co nejmenší, abychom si zbytečně nepřidělávali práci. V tomto případě rozdělíme průřez na 4 plochy dle Obrázku 2a a to na dva trojúhelníky, obdélník a kruhový výřez.
- Pro výpočet těžiště nejprve zavedeme pomocný souřadný systém (modrý) a určíme lokální těžiště jednotlivých ploch, viz Obrázek 2b. Souřadnice lokálních těžišť $T_i[y_i; z_i]$ a velikosti jednotlivých ploch zapíšeme do Tabulky 1. Souřadnice těžiště složeného průřezu získáme jako vážený průměr



Obrázek 2: (a) Rozdělení průřezu (b) Těžiště.

	y_i [mm]	z_i [mm]	A_i [mm ²]
1	33,3	150,0	3750
2	83,3	33,3	2500
3	100,0	125,0	15000
4	100,0	125,0	-1963
\sum_i			19286

Tabulka 1: Souřadnice lokálních těžišť a velikost jednotlivých ploch.

souřadnic jednotlivých ploch (neboli jako podíl celkového statického momentu k dané ose a celkové plochy):

$$y_t = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = 84,877 \text{ mm} \quad \text{a} \quad z_t = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = 117,979 \text{ mm}. \quad (1)$$

Výsledné těžišťové osy zakreslíme do Obrázku 2 (žluté) a pohledem zkontrolujeme, zda vše odpovídá našemu očekávání.

- V dalším kroku spočítáme momenty setrvačnosti. Jejich výpočet zahrnuje výpočet momentů setrvačnosti dílčích ploch k jejich lokálním těžišťovým osám a opravu o Steinerův doplněk vůči těžišťovým osám celého průřezu. Momenty setrvačnosti k lokálním osám spočítáme podle tabulkových vzorců pro základní geometrické útvary. Steinerův doplněk se pak spočítá jako součin plochy a druhé mocniny vzdálenosti lokálních těžišťových os od těžišťových os celého průřezu. Výpočty momentů setrvačnosti jednotlivých ploch k centrálním osám (y_c, z_c) vypadají následovně:

$$I_y^1 = \frac{1}{36} b_1 h_1^3 + A_1 (z_1 - z_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 50 \cdot 150^3 + 3750 \cdot (150 - 117,979)^2 = 8,533 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2)$$

$$I_z^1 = \frac{1}{36} b_1^3 h_1 + A_1 (y_1 - y_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 50^3 \cdot 150 + 3750 \cdot (33,3 - 84,877)^2 = 10,48 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (3)$$

$$I_y^2 = \frac{1}{36} b_2 h_2^3 + A_2 (z_2 - z_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 100 \cdot 50^3 + 2500 \cdot (33,3 - 117,979)^2 = 18,26 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (4)$$

$$I_z^2 = \frac{1}{36} b_2^3 h_2 + A_2 (y_2 - y_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 100^3 \cdot 50 + 2500 \cdot (83,3 - 84,877)^2 = 1,395 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (5)$$

$$I_y^3 = \frac{1}{12} b_3 h_3^3 + A_3 (z_3 - z_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 100 \cdot 150^3 + 15000 \cdot (125 - 117,979)^2 = 28,86 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (6)$$

$$I_z^3 = \frac{1}{12} b_3^3 h_3 + A_3 (y_3 - y_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 100^3 \cdot 150 + 15000 \cdot (100 - 84,877)^2 = 15,93 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (7)$$

$$I_y^4 = - \left[\frac{1}{4} \pi r_4^4 + A_4 (z_4 - z_t)^2 \right] = - \left[\frac{1}{4} \pi \cdot 25^4 + 1963 \cdot (125 - 117,979)^2 \right] = -0,4036 \cdot 10^6 \text{mm}^4 \quad (8)$$

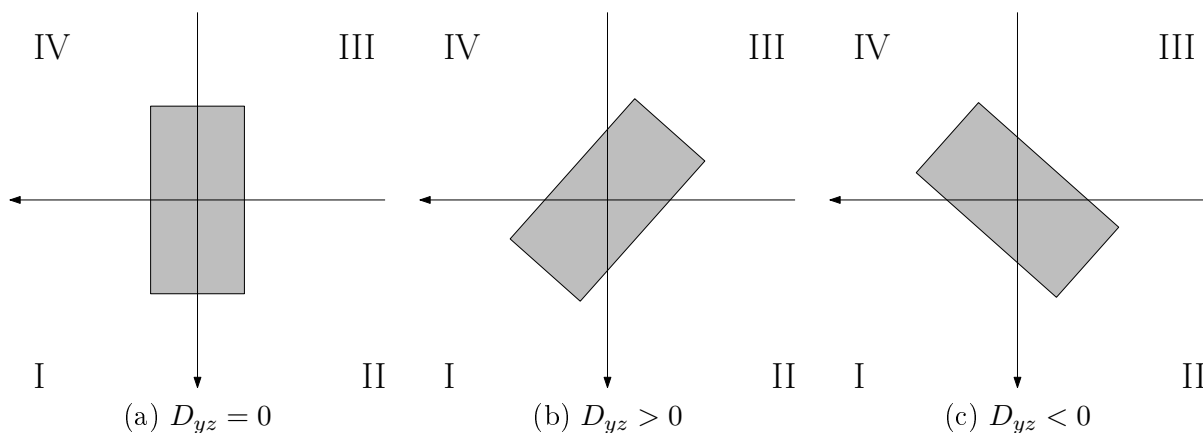
$$I_z^4 = - \left[\frac{1}{4} \pi r_4^4 + A_4 (y_4 - y_t)^2 \right] = - \left[\frac{1}{4} \pi \cdot 25^4 + 1963 \cdot (100 - 84,877)^2 \right] = -0,7558 \cdot 10^6 \text{mm}^4 \quad (9)$$

Výsledné momenty setrvačnosti celého průřezu získáme jako součet momentů setrvačnosti všech ploch:

$$I_y = \sum_{i=1}^4 I_y^i = 55,25 \cdot 10^6 \quad \text{a} \quad I_z = \sum_{i=1}^4 I_z^i = 27,05 \cdot 10^6. \quad (10)$$

Při výpočtu momentů setrvačnosti máme na paměti:

- **Momenty setrvačnosti musí být vždy kladné.** Výjimkou je pouze situace, kdy odčítáme zápornou plochu jako výřez.
- **Moment setrvačnosti k dané ose je tím větší, čím větší část plochy průřezu je od dané osy vzdálená.** Proto zkontrolujeme, zda nám vyšly větší ty momenty, u kterých to na první pohled očekáváme.
- Nyní přejdeme k výpočtu deviačního momentu setrvačnosti. Postup jeho výpočtu je velmi podobný výpočtu předchozích momentů setrvačnosti: podle tabulkových vzorců spočítáme deviační momenty setrvačnosti jednotlivých ploch k jejich lokálním osám a poté tyto hodnoty opravíme o Steinerův doplněk. Výsledné hodnoty nakonec opět sečteme. Zatímco momenty setrvačnosti jsou kladné, deviační moment může nabývat záporných hodnot a proto je třeba věnovat znaménkám při výpočtu deviačního momentu zvláštní pozornost. Znaménková konvence deviačního momentu je vysvětlena na Obrázcích 3a až 3c.



Obrázek 3: Znaménková konvence deviačního momentu.

Slovně vyjádřeno:

- Deviační moment je kladný, pokud se převážná část průřezu nachází v prvním a třetím kvadrantu souřadného systému.
- Naopak je záporný, pokud se převážná část průřezu nachází v druhém a čtvrtém kvadrantu souřadného systému.
- Pokud je plocha průřezu rovnoměrně rozmístěna do jednotlivých kvadrantů, deviační moment je nulový.

Konkrétní výpočet deviačních momentů pak vypadá následovně:

$$D_{yz}^1 = - \frac{1}{72} b_1^2 h_1^2 + A_1 (z_1 - z_t)(y_1 - y_t) \quad (11)$$

$$D_{yz}^1 = -\frac{1}{72} \cdot 50^2 \cdot 150^2 + 3750 \cdot (150 - 117,979) \cdot (33,3 - 84,877) = -6,971 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (12)$$

$$D_{yz}^2 = +\frac{1}{72} b_2^2 h_2^2 + A_2(z_2 - z_t)(y_2 - y_t) \quad (13)$$

$$D_{yz}^2 = +\frac{1}{72} \cdot 100^2 \cdot 50^2 + 2500 \cdot (33,3 - 117,979) \cdot (83,3 - 84,877) = 0,6810 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (14)$$

$$D_{yz}^3 = 0 + A_3(z_3 - z_t)(y_3 - y_t) \quad (15)$$

$$D_{yz}^3 = 15000 \cdot (125 - 117,979) \cdot (100 - 84,877) = 1,5927 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (16)$$

$$D_{yz}^4 = -[0 + A_4(z_4 - z_t)(y_4 - y_t)] \quad (17)$$

$$D_{yz}^4 = -[1963 \cdot (125 - 117,979) \cdot (100 - 84,877)] = -0,2084 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (18)$$

Je potřeba si všimnout, že deviační moment trojúhelníkových obrazců k jejich těžišťovým osám je záporný v případě trojúhelníku č.1, ale kladný u trojúhelníku č.2. Je to způsobeno otočením obrazce, jak je znázorněno na Obrázku 3. Zjednodušeně lze říci, že u pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami rovnoběžnými se souřadnicovými osami je deviační moment kladný, prochází-li přepona I. a III. kvadrantem. Prochází-li přepona II. a IV. kvadrantem, je deviační moment záporný. **Vždy je proto nutné zkontrolovat, jak je orientovaný náš obrazec i obrazec v tabulkách momentů setrvačnosti.**

Výsledný deviační moment následně určíme jako součet všech dílčích momentů setrvačnosti včetně jejich Steinerových doplňků:

$$D_{yz} = \sum_{i=1}^4 D_{yz}^i = -4,9057 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (19)$$

- Pomocí axiálních momentů a deviačního momentu můžeme nyní určit úhel α_0 , o který jsou pootočeny hlavní těžišťové (neboli hlavní centrální) osy y_0 a z_0 vůči osám y_c a z_c . Kladné pootočení α_0 se řídí pravidlem pravé ruky, osa x směřuje k nám, kladné pootočení je tedy proti směru hodinových ručiček.

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot D_{yz}}{I_z - I_y} \quad (20)$$

$$\alpha_0 = 9,592^\circ \quad (21)$$

- S využitím axiálních momentů setrvačnosti můžeme nyní stanovit i hlavní centrální momenty setrvačnosti I_1 a I_2 . Ty určujeme k hlavním centrálním osám. Tyto momenty setrvačnosti jsou největší a nejmenší, jakých lze dosáhnout otáčením souřadnicových os. Získáme je pootočením os y_c a z_c o úhel α_0 . Určíme je následujícím vztahem:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2} \quad (22)$$

$$I_{1,2} = \frac{55,25 \cdot 10^6 + 27,05 \cdot 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{55,25 \cdot 10^6 - 27,05 \cdot 10^6}{2}\right)^2 + (-4,9057 \cdot 10^6)^2} \quad (23)$$

$$I_1 = 56,08 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (24)$$

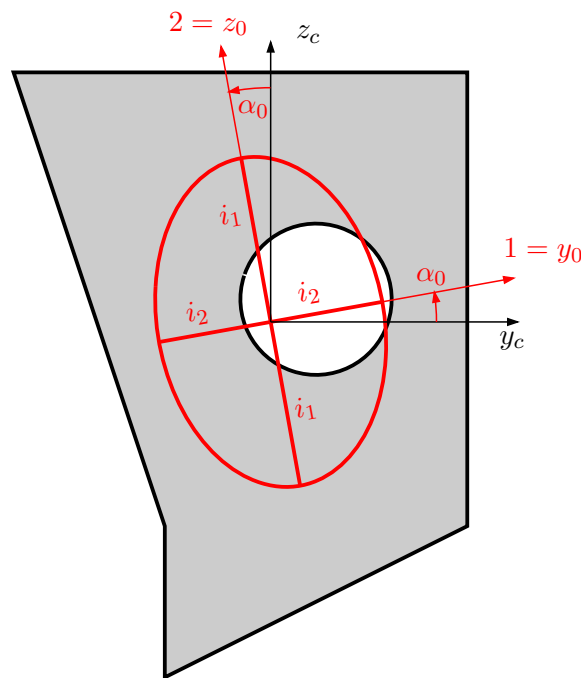
$$I_2 = 26,22 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (25)$$

Dále pomocí I_1 a I_2 určíme poloměry setrvačnosti i_1 a i_2 :

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{56,08 \cdot 10^6}{19286}} = 53,9 \text{ mm} \quad (26)$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{26,22 \cdot 10^6}{19286}} = 36,9 \text{ mm} \quad (27)$$

- Nyní vykreslíme elipsu setrvačnosti. Zaneseme do obrázku hlavní osy y_0 a z_0 , vyneseme poloměry setrvačnosti a vykreslíme elipsu setrvačnosti. Použitím rovnice 22 jsme sice zjistili momenty setrvačnosti k těmto osám, nyní ale nevíme, ke které z pootočených os patří který. K tomuto přiřazení je vhodné použít znaménko deviačního momentu setrvačnosti. Pokud je deviační moment kladný, je plocha rozmístěna převážně v I. a III. kvadrantu a do tohoto kvadrantu tedy vynášíme větší poloměr setrvačnosti. V našem případě je deviační moment záporný, větší poloměr setrvačnosti vynášíme tedy do II. a IV. kvadrantu. Maximální moment setrvačnosti je k ose, **od které** vynášíme větší poloměr setrvačnosti - v tomto případě k ose y_0 , tzn. $I_{max} = I_1 = I_{y_0}$ a $I_{min} = I_2 = I_{z_0}$. Stejně indexování pak platí i pro samotné poloměry setrvačnosti: $i_{max} = i_1 = i_{y_0}$ a $i_{min} = i_2 = i_{z_0}$. Osu, ke které je maximální moment setrvačnosti značíme jako osu 1, a osu, ke které je minimální moment setrvačnosti jako osu 2.



Obrázek 4: Elipsa setrvačnosti.

Pohledem zkontrolujeme, zda je elipsa setrvačnosti odpovídá našim předpokladům, tedy zda je menší než náš obrazec a zda kopíruje jeho rozložení plochy v rovině.

- Na závěr ukážeme pár způsobů částečné kontroly výpočtu, odhadu výsledků s pomocí tvaru obrazce a dáme je do souvislosti s definicí momentů setrvačnosti:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (28)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (29)$$

$$D_{yz} = \int_A yz dA \quad (30)$$

- Obrazec je vyšší než širší, plocha je rozložena dále od osy y a velká část plochy bude mít tedy souřadnici z větší než y . Při porovnání rovnic 28 a 29 je vidět, že pokud má velká část plochy větší souřadnici z než y , bude platit $I_y > I_z$
- Plocha obrazce je rozmístěna více ve II. a IV. kvadrantu (viz. Obrázek. 2), takže deviační moment bude záporný. V tomto konkrétním případě to však nelze pohledem určit tak jednoduše jako na Obrázku 3. Rovnice 30 říká, že plocha v I. a III. kvadrantu způsobuje kladný D_{yz} (souřadnice y a z jsou obě kladné nebo obě záporné), zatímco plocha ve II. a IV. způsobuje záporný D_{yz} .
- Na obrázku 2 je vidět, že rozložení plochy mezi kvadranty je poměrně symetrické. Z toho lze usoudit, že se příspěvky D_{yz} z jednotlivých kvadrantů z velké části odečtou a D_{yz} nebude příliš velký ve srovnání s axiálními momenty. U dvojose symetrického obrace se pak vzájemně vyruší celý D_{yz} a hlavní centrální osy jsou tedy totožné s osami symetrie. U jednoose symetrického obrazce taktéž platí $D_{yz} = 0$ a osa symetrie je jednou z hlavních os.
- z rovnice 20 vyjádříme α_0 jako funkci momentů setrvačnosti:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \cdot D_{yz}}{I_z - I_y} \quad (31)$$

Tato funkce má obor hodnot $(-\pi/4; \pi/4)$. Pokud je $D_{yz} = 0$, jsou osy y a z hlavními centrálními osami a úhel $\alpha_0 = 0$. Čím větší je D_{yz} , tím větší je pootočení hlavních os vůči námi zvoleným osám. Naopak čím větší je rozdíl I_z a I_y , tím menší je pootočení α_0 .