

**MIKROMECHANICKÉ MODELY PRO  
TEPELNOU VODIVOST V KOMPOZITNÍCH  
MATERIÁLECH S NEDOKONALÝM  
SPOJENÍM SLOŽEK**

Soutěžní práce  
Jan Stránský

Vedoucí práce:  
Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

České Vysoké Učení Technické v Praze  
Fakulta stavební  
2009

# Obsah

<b>1 SLOVO ÚVODEM</b>	<b>3</b>
<b>2 ÚVOD DO TERMODYNAMIKY</b>	<b>3</b>
2.1 ZÁKLADNÍ POJMY . . . . .	3
2.2 ZÁKLADNÍ ROVNICE VEDENÍ TEPLA . . . . .	5
2.2.1 1. termodynamický zákon . . . . .	6
2.2.2 Rovnice jednorozměrného vedení tepla . . . . .	6
2.2.3 Obecná rovnice vedení tepla v prostoru . . . . .	7
<b>3 VLIV OSAMOCENÉ NEHOMOGENITY</b>	<b>9</b>
3.1 POTENCIÁL TEPLOTNÍHO POLE . . . . .	9
3.1.1 Jednorozměrný případ . . . . .	9
3.1.2 Dvojměrný případ . . . . .	10
3.1.3 Trojměrný případ . . . . .	11
3.1.4 Potenciál tělesa tvaru elipsoidu . . . . .	11
3.2 METODA EKVIVALENTNÍ INKLUZE . . . . .	12
3.2.1 Jednorozměrný případ . . . . .	13
3.2.2 Obecný trojměrný případ . . . . .	15
3.3 ESHELBYHO TENZOR S . . . . .	17
3.3.1 Speciální tvary Eshelbyho tenzoru . . . . .	17
3.3.2 Porovnání numerického a analytického výpočtu . . . . .	18
<b>4 URČENÍ EFEKTIVNÍ TEPELNÉ VODIVOSTI</b>	<b>19</b>
4.1 METODA ŘÍDKÉ APROXIMACE (DA) . . . . .	21
4.1.1 Předpoklady . . . . .	21
4.1.2 Koncentrační faktor . . . . .	21
4.1.3 Výpočet $\mathbf{K}^*$ pomocí DA . . . . .	22
4.2 METODA MORI-TANAKA . . . . .	23
4.2.1 Předpoklady . . . . .	23
4.2.2 Výpočet $\mathbf{K}^*$ pomocí MT . . . . .	23
4.3 NÁHODNÁ ORIENTACE NEHOMOGENIT . . . . .	25
4.3.1 Náhodně orientované elipsoidy . . . . .	26
4.3.2 Náhodně orientované nehomogenity obecného tvaru . . . . .	27
4.4 NEDOKONALÝ KONTAKT, VLIV VELIKOSTI . . . . .	29
4.4.1 Jednorozměrný případ . . . . .	29
4.4.2 Trojměrný případ – kulové nehomogenity . . . . .	31
4.4.3 Trojměrný případ – nekulové nehomogenity . . . . .	32
<b>5 APLIKACE</b>	<b>33</b>
5.1 CEMENTO-GUMOVÉ KOMPOZITY . . . . .	33
5.2 Al-Si/SiC kompozity . . . . .	35
<b>6 ZÁVĚR</b>	<b>37</b>
<b>LITERATURA</b>	<b>38</b>

<b>A</b>	<b>DODATKY</b>	<b>39</b>
A.1	NUMERICKÝ VÝPOČET ESHELBYHO TENZORU <b>S</b> . . . . .	39
A.1.1	Obecný algoritmus . . . . .	39
A.1.2	Implementace do Matlabu . . . . .	40
A.2	TRANSFORMACE TENZORŮ . . . . .	41
A.2.1	Důkaz rovnice (4.48) . . . . .	41
A.2.2	Stopa matice transformovaného tenzoru . . . . .	41
A.2.3	Důkaz rovnice (4.52) . . . . .	42

# 1 SLOVO ÚVODEM

Tepelná vodivost materiálů může mít pro stavební konstrukce (zvláště pak pro konstrukce pozemních staveb) značný význam. Zároveň málokterý stavební materiál používaný ve stavebnictví je čistě homogenní a jednosložkový, naopak většina materiálů jsou nehomogenní vícesložkové materiály (například beton), které ale většinou mají známé složení. Je tedy výhodné mít k dispozici nástroj, kterým by bylo možno předpovědět celkovou (efektivní) tepelnou vodivost materiálů v závislosti na jejich složení. A to je právě cílem této práce, která logickou cestou přes vyšetřování vlivu osamocených nehomogenit, určení tepelné vodivosti pro případ, kdy se jednotlivé nehomogenity vzájemně neovlivňují, a pro případ, kdy interakce mezi částicemi hraje důležitou roli, a přes vliv náhodné orientace a náhodného tvaru nehomogenit vyústí v určení efektivní tepelné vodivosti v závislosti na složení materiálu a na míře nedokonalosti tepelného kontaktu mezi nehomogenitami a maticí (základní hmotou) a na absolutní velikosti nehomogenit. V závěru práce jsou odvozené metody ověřeny aplikací na skutečné experimentální hodnoty.

## 2 ÚVOD DO TERMODYNAMIKY

Dle [13] je termodynamika obor fyziky, který se zabývá teplem a tepelnými jevy, zkoumá vzájemné vztahy mezi veličinami charakterizujícími makroskopický stav systému a změny těchto veličin při fyzikálních dějích. Termodynamiku můžeme rozdělit na tzv. klasickou, která se zabývá systémem z makroskopického hlediska, a statistickou, která studuje chování velkého množství částic za pomoci metod teorie pravděpodobnosti a vychází z kinetické teorie látek (obor molekulové fyziky).

Dále můžeme termodynamiku rozdělit na rovnovážnou (stacionární), zabývající se studiem systémů v rovnovážném stavu (kdy se jednotlivé veličiny nemění s časem), a nerovnovážnou (nestacionární), zabývající se systémy ve stavu nerovnovážném, tedy takových, kde jsou termodynamické veličiny časově proměnné.

### 2.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Základní pojmy jsou převážně převzaty z [12].

#### **Teplota ( $T$ )**

Jedním ze základních pojmů termodynamiky je teplota. Dle definice z [14] je teplota vnitřní skalární intenzivní veličina charakterizující tepelný stav hmoty. Jednotkou teploty je Kelvin, značí se K. Kelvin je jednou ze základních jednotek soustavy SI.

#### **Teplo ( $Q$ )**

Podle 1. věty termodynamiky je teplo systémem přijaté při tepelné výměně rovno zvýšení vnitřní energie systému zvětšené o systémem vykonanou práci. V případě nulové vykonané práce můžeme teplo popsat jako míru změny vnitřní energie systému při styku s jiným materiálem. Jednotkou tepla je Joule,  $J = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$ , rozměrově se tedy jedná o energii.

#### **Tepelná kapacita ( $C$ )**

Tepelná kapacita vyjadřuje schopnost tělesa přijímat teplo. Číselně se tepelná kapacita rovná teplu potřebnému k ohřátí daného tělesa o jeden Kelvin. V závislosti na podmínkách

ohřevu se zavádí pro dva ideální případy (měrná) tepelná kapacita za stálého objemu a za stálého tlaku (viz kapitolu 2.2.1).

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (2.1)$$

Kde  $C$  je tepelná kapacita v  $\text{JK}^{-1} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$

$dQ$  dodané teplo

$dT$  přírůstek teploty způsobený dodaným teplem

### Měrná tepelná kapacita ( $c$ )

Měrná tepelná kapacita je teplo potřebné k ohřátí jednotky hmotnosti dané látky o jeden K, jedná se o materiálovou konstantu (která ale obvykle bývá závislá na aktuální teplotě).

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m} \left( \frac{dQ}{dT} \right) \quad (2.2)$$

Kde  $c$  je měrná tepelná kapacita v  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1} = \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$

$C$  tepelná kapacita

$m$  hmotnost dané látky

$dQ$  dodané teplo

$dT$  přírůstek teploty

### Tepelný tok ( $I_Q$ )

Tepelný tok je teplo dodané za jednotku času.

$$I_Q = \frac{dQ}{d\tau} \quad (2.3)$$

Kde  $I_Q$  je tepelný tok v  $\text{J s}^{-1} = \text{W} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3}$

$dQ$  přivedené teplo

$d\tau$  za čas  $\tau$

### Hustota tepelného toku ( $q$ )

Hustota tepelného toku je definována podílem tepelného toku a plochy, jíž tento tok kolmo prochází. Někdy se však hustota tepelného toku zkráceně nazývá tepelný tok, a i v této práci tak někdy budeme činit, vždy ale s označením výhradně  $q$  či  $D$  (respektive  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{D}$ ). Oproti netučně značeným skalárním veličinám, tučně značené veličiny vyjadřují vektory či tenzory 2. řádu.

$$q = \frac{dI_Q}{dS}, \quad \mathbf{q}^\top \mathbf{n} = \frac{dI_Q}{dS} \quad (2.4)$$

Kde  $\mathbf{q}$  je hustota tepelného toku v  $\text{W m}^{-2} = \text{kg s}^{-3}$

$dI_Q$  tepelný tok

$dS$  plocha v  $\text{m}^2$

$\mathbf{n}$  jednotkový normálový vektor plochy  $dS$

### Tepelná vodivost ( $K$ )

Tepelná vodivost vyjadřuje schopnost látky vést teplo. Číselně je tepelná vodivost (resp. součinitel tepelné vodivosti) rovna záporné hodnotě hustoty tepelného toku při jednotkovém teplotním gradientu. Značí se jako  $\lambda$  nebo  $K$ . V obecném případě trojrozměrného

vedení tepla je součinitel tepelné vodivosti tenzor druhého řádu rozměru  $3 \times 3$ . Následující rovnice vyjadřují tzv. Fourierův zákon.

$$q = -K \frac{dT}{dx} \quad (2.5)$$

nebo v obecném případě

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \nabla T \quad (2.6)$$

Kde  $\mathbf{K}$  je součinitel tepelné vodivosti (tenzor  $3 \times 3$ ) ve  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1} = \text{m kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$

$\mathbf{q}$  hustota tepelného toku,  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$   
 $\nabla T$  teplotní gradient

$$\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T)^T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^T \quad (2.7)$$

### Tepelná propustnost ( $h$ )

Tepelná propustnost tělesa (vrstvy) je číselně rovna záporné hodnotě hustoty tepelného toku při jednotkovém teplotním rozdílu na opačných površích dané vrstvy.

$$q = -h \Delta T, \quad \mathbf{q}^T \mathbf{n} = -h \Delta T \quad (2.8)$$

Jinou definicí tepelné propustnosti může být, že tato je tepelná vodivost připadající na tloušťku dané vrstvy.

$$h = \frac{K}{t} \quad (2.9)$$

Kde  $h$  je tepelná propustnost ve  $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1} = \text{kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$

$\mathbf{q}$  hustota tepelného toku  
 $\Delta T$  teplotní rozdíl  
 $K$  součinitel tepelné vodivosti  
 $t$  tloušťka dané vrstvy  
 $\mathbf{n}$  jednotkový normálový vektor vrstvy

## 2.2 ZÁKLADNÍ ROVNICE VEDENÍ TEPLA

Základní podmínkou pro šíření tepla prostředím jsou rozdílné teploty v různých místech prostředí. Přirozeně potom teplo z míst s vyšší teplotou postupuje do míst s teplotou nižší. Dle 2. termodynamického zákona tomu ani samovolně nemůže být obráceně. Teplo se může šířit třemi způsoby:

- vedením (kondukcí)
- prouděním (konvekcí)
- sáláním (radiací)

Tato práce se výhradně zabývá šířením tepla vedením (kondukcí).

### 2.2.1 1. termodynamický zákon

Základní rovnice vedení tepla vychází z již zmíněného 1. termodynamického zákona, který říká, že teplo systémem přijaté při tepelné výměně je rovno zvýšení vnitřní energie systému zvětšené o systémem vykonanou práci (zákon zachování energie).

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta U \quad (2.10)$$

Kde  $\Delta Q$  je teplo, kladné v případě, že systém teplo přijímá

$\Delta W$  práce systémem vykonaná

$\Delta U$  změna vnitřní energie systému, kladná v případě nárůstu

Tato rovnováha musí platit pro libovolný časový interval. Po vydělení celé rovnice časem a limitním přechodu k časové derivaci dle [10] dostáváme:

$$I_Q = \frac{dW}{d\tau} + \frac{dU}{d\tau} \quad (2.11)$$

Kde  $I_Q$  je tepelný tok

$dW/d\tau$  časová derivace práce, tedy výkon

$dU/d\tau$  časová změna vnitřní energie systému

Jednotky jsou  $\text{J s}^{-1} = \text{W}$ . V případě, že jediným výskytem práce soustavy je změna objemu, pak  $W$  můžeme vyjádřit jako  $W = p dV$ . Rovnice (2.11) má dva speciální případy: děj izochorický (za konstantního objemu) a děj izobarický (za konstantního tlaku)

$$\begin{aligned} I_Q &= \frac{dU}{d\tau} = mc_v \frac{dT}{d\tau} \\ I_Q &= \frac{dH}{d\tau} = mc_p \frac{dT}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Kde  $H$  je entalpie,  $H = U + pV$

$c_v$  měrná tepelná kapacita pro stálý objem

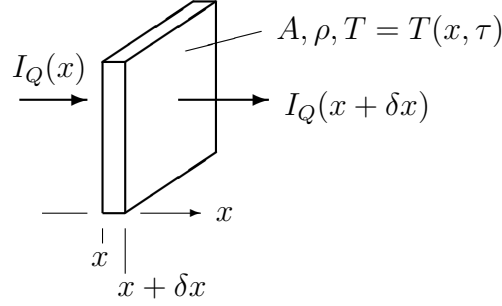
$c_p$  měrná tepelná kapacita pro stálý tlak

V ideálním případě dokonale tuhé (nestlačitelné) látky se obě měrné tepelné kapacity rovnají  $c_v = c_p = c$ , z čehož plyne výraz pro tepelný tok:

$$I_Q = \frac{dU}{d\tau} = mc \frac{dT}{d\tau} \quad (2.13)$$

### 2.2.2 Rovnice jednorozměrného vedení tepla

Kombinací rovnic (2.5) a (2.6) Fourierova zákona můžeme postupně vyjádřit základní rovnici vedení tepla, nejdříve pro jednorozměrný případ (pro jednoduchost budeme hned na začátku předpokládat nezávislost tepelné vodivosti na poloze v prostoru i na teplotě a absenci vnitřních zdrojů tepla):



Na obrázku je znázorněn výsek materiálu s hustotou  $\rho$ , plochou  $A$ , tloušťkou  $\delta x$  a hmotností  $m = \rho A \delta x$ . Další popis daného výseku je pomocí teploty  $T$ , která je funkcí polohy  $x$  a času  $\tau$  ( $T = T(x, \tau)$ ), a tepelného toku po obou stranách výseku  $I_Q(x)$  a  $I_Q(x + \delta x)$ .

Kombinací rovnic (2.4) a (2.5) dostáváme:

$$I_Q = Aq = -AK \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.14)$$

Změnu tepelného toku na obou stranách výseku vyjádříme takto:

$$I_{Q,net} = I_Q(x + \delta x) - I_Q(x) = -KA \frac{\frac{\partial T}{\partial x}|_{x+\delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}|_x}{\delta x} \delta x = -KA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \delta x \quad (2.15)$$

Ztráta tepelného toku odpovídá dle rovnic (2.11) a (2.13) změně vnitřní energie uzavřeného izochorického systému:

$$-I_{Q,net} = \frac{dU}{d\tau} = mc \frac{\partial T}{\partial \tau} = \rho c A \frac{\partial T}{\partial \tau} \delta x \quad (2.16)$$

Porovnáním rovnic (2.15) a (2.16) po úpravě dostáváme:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.17)$$

Kde  $\alpha = K/\rho c$  je součinitel teplotní (nikoliv tepelné) vodivosti. Rovnice jednorozměrného vedení tepla (2.17) neobsahuje veličinu  $I_Q$ , je to parciální diferenciální rovnice pouze pro neznámou funkci teploty  $T$ . Pro stacionární případ, kdy časová změna teploty (pravá strana rovnice) je nulová, dostaneme:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.18)$$

### 2.2.3 Obecná rovnice vedení tepla v prostoru

Pro obecný případ se opět vychází z rovnice (2.13). Představme si těleso o objemu  $V$  a povrchu  $S$ . Těleso má v každém bodě  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$  svého povrchu normálový vektor  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^\top$ . Dle rovnic (2.6), (2.4) a již zmíněné znaménkové konvence se tepelný tok přes element plochy  $dS$  (ven z tělesa) spočte takto:

$$-dI_Q = \mathbf{q}^\top (\mathbf{n} dS) = (-\mathbf{K} \nabla T)^\top (\mathbf{n} dS) \quad (2.19)$$

Dále uvažujme v tělese rozložený objemový zdroj tepla  $\bar{Q}(\mathbf{x})$  s jednotkou  $\text{W m}^{-3}$ . Tento může být například způsoben chemickými či jadernými procesy v tělese, elektrickým



odporem při průchodu proudu apod. Výraz pro celkový tepelný tok produkovaný (nebo spotřebovaný) tělesem potom bude:

$$I_Q = - \int_S (-\mathbf{K}\nabla T)^\top (\mathbf{n} dS) + \int_V \bar{Q} dV \quad (2.20)$$

Časová změna vnitřní energie tělesa  $V$  dle rovnice (2.13):

$$I_Q = \frac{dU}{d\tau} = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV \quad (2.21)$$

Kombinací rovnic (2.20) a (2.21) a úpravou dostáváme:

$$\int_S (\mathbf{K}\nabla T)^\top \mathbf{n} dS = \int_V \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} - \bar{Q} \right) dV \quad (2.22)$$

Užitím Gaussova teorému pro konverzi plošného integrálu na integrál objemový

$$\int_S \mathbf{v}^\top \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV \quad (2.23)$$

a substitucí  $\mathbf{v} = \mathbf{K}\nabla T$  dostaneme:

$$\int_V \left( \nabla \cdot \mathbf{K}\nabla T - \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} + \bar{Q} \right) dV = 0 \quad (2.24)$$

Rovnice (2.24) musí platit pro libovolnou (integrační) oblast, výslednou rovnicí tedy zapíšeme bez integrálu:

$$\nabla \cdot \mathbf{K}\nabla T + \bar{Q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.25)$$

Toto je obecná rovnice pro trojrozměrné vedení tepla. Pokud bychom uvažovali součinitel tepelné vodivosti izotropní (stejný ve všech směrech a nezávislý na volbě souřadného systému) a nezávislý na teplotě, můžeme rovnici (2.25) upravit na tvar:

$$\nabla^2 T + \frac{\bar{Q}}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.26)$$

Pro stacionární případ dostaneme formu:

$$\nabla^2 T = -\frac{\bar{Q}}{K} \quad (2.27)$$

Nyní zopakujeme předpoklady, pro které jsme odvodili rovnici (2.25):

- Materiál je dokonale tuhý (nestlačitelný), při působení tlaku není konána žádná práce
- Při přenosu tepla se neuplatňuje proudění (konvekce) ani sálání (radiace)

a rovnici (2.27):

- Prostředí je izotropní
- Součinitel tepelné vodivosti  $K$  je nezávislý na teplotě
- Vedení tepla je stacionární (ustáleně, časově neměnné)

### 3 Vliv osamocené nehomogenity

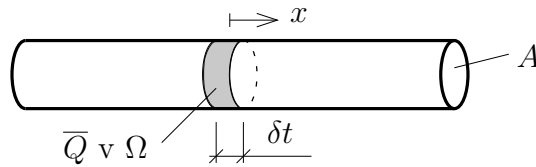
Mnoho homogenizačních metod je odvozeno od chování jediné nehomogenity umístěné v nekonečné základní hmotě (matrici). Náplní této kapitoly je vyřešení vlivu osamocené cizorodé částice na teplotní pole uvnitř této částice a v jejím okolí.

#### 3.1 POTENCIÁL TEPLITNÍHO POLE

Jako potenciál teplotního pole budeme chápat skalární veličinu, pomocí níž můžeme vyjádřit některé fyzikální veličiny (například teplotu). V této kapitole budeme definovat několik typů potenciálů, jejich značení a význam jsou následující: písmenem  $\varphi$  vyjádříme potenciál bodového (nekonečně malého) zdroje,  $\phi$  pak bude značit potenciál tělesa  $\Omega$  konečných rozměrů. Horním indexem  $T$  vyjádříme teplotní potenciál, závislý na poloze, vlastnostech prostředí (tepelné vodivosti) a případně na tvaru a rozměrech tělesa, jehož potenciál zkoumáme. Potenciál bez horního indexu značí geometrický potenciál, závislý pouze na poloze, tvaru a rozměrech tělesa. Dolní index  $1D$  vyjadřuje jednorozměrný případ,  $2D$  dvojrozměrný případ, výrazy bez dolního indexu vyjadřují obecný (trojrozměrný) případ. Například  $\varphi_{1D}^T$  vyjadřuje jednorozměrný teplotní potenciál bodového zdroje,  $\phi$  potom geometrický potenciál pro trojrozměrný případ.

##### 3.1.1 Jednorozměrný případ

Představme si nekonečný drát o ploše průřezu  $A$  a vodivosti  $K$  a v něm v počátku soustavy souřadnic zdroj tepla  $\bar{Q}$  zaujímající celý průřez drátu v oblasti  $\Omega$ .



Bereme-li v úvahu ustálený stav a předpokládáme-li, že se teplo v drátu bude šířit symetricky od zdroje tepla, bude podle zákona zachování energie platit:

$$\bar{Q} \delta t A = I_Q = q 2A \quad (3.1)$$

z čehož plyne:

$$\bar{Q} \delta t = -2K \frac{dT}{dr} \quad (3.2)$$

Kde  $r$  je vzálenost od zdroje tepla  $\bar{Q}$ . Úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned} dT &= -\frac{\bar{Q} \delta t}{2K} dr \\ \int dT &= -\int \frac{\bar{Q} \delta t}{2K} dr \\ T &= -\frac{\bar{Q} \delta t}{2K} r + C_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Kde  $C_1$  je integrační konstanta. Po předepsání teploty  $T_0$  v místě zdroje tepla a substitucí  $r = |x|$  dostaneme:

$$T = T_0 - \frac{\overline{Q}\delta t}{2K}|x| \quad (3.4)$$

K obdobnému výsledku bychom dospěli i po umístění počátku soustavy souřadnic do jiného bodu. Potom pro zdroj v bodě  $x'$  a teplotu zjišťovanou v bodě  $x$  platí:

$$T = T_0 - \frac{\overline{Q}\delta t}{2K}|x - x'| = T_0 + \overline{Q}\varphi_{1D}^T \quad (3.5)$$

Kde

$$\varphi_{1D}^T = -\frac{\delta t}{2K}|x - x'| \quad (3.6)$$

je jednorozměrný teplotní potenciál bodového zdroje tepla. Dle zákona superpozice získáme jednorozměrný potenciál tělesa konečné délky  $\phi_{1D}^T$  součtem (integrací) všech bodových zdrojů v oblasti  $\Omega$ , tedy:

$$\phi_{1D}^T = -\int_{\Omega} \frac{1}{2K}|x - x'| dt = -\frac{1}{2K} \int_{\Omega} |x - x'| dt = -\frac{1}{2K} \phi_{1D} \quad (3.7)$$

$\phi_{1D} = \int_{\Omega} |x - x'| dt$  je jednorozměrný geometrický potenciál tělesa. Při umístění počátku do středu tělesa dostaneme integrací v mezích  $-t_0$  až  $+t_0$  výsledný potenciál:

$$\phi_{1D} = \int_{-t_0}^{t_0} |x - x'| dx' = \begin{cases} x^2 + t_0^2 & , \text{v } \Omega \\ 2|x|t_0 & , \text{mimo } \Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

První a druhé derivace geometrického potenciálu vypadají následovně:

$$\frac{d\phi_{1D}}{dx} = \phi'_{1D} = \begin{cases} 2x & , \text{v } \Omega \\ \pm 2t_0 & , \text{mimo } \Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2\phi_{1D}}{dx^2} = \phi''_{1D} = \begin{cases} 2 & , \text{v } \Omega \\ 0 & , \text{mimo } \Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

Všimneme si několika vlastností potenciálu. Za prvé je potenciál v celé délce spojitý, jako funkce  $x$  se chová v oblasti  $\Omega$  kvadraticky, mimo  $\Omega$  lineárně, z čehož plynou i vlastnosti jeho derivací: první derivace je v  $\Omega$  lineární, mimo  $\Omega$  konstantní, druhá derivace je v  $\Omega$  konstantní, mimo  $\Omega$  je rovna nule.

### 3.1.2 Dvojměrný případ

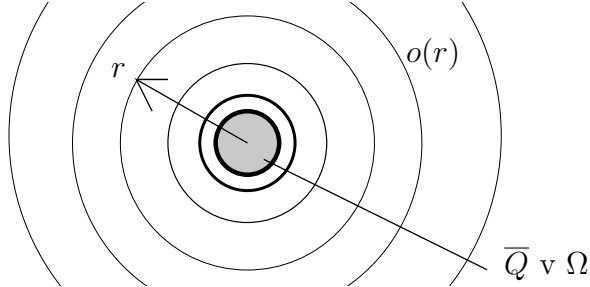
Podobnou posloupností a úvahou vyjádříme i potenciál pro 2D:

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (3.11)$$

$$t dS \overline{Q} = I_Q = q(r) o(r) = -K \frac{dT}{dr} 2\pi r \quad (3.12)$$

$$dT = -\frac{\overline{Q} dS}{2\pi K r} dr$$

$$\begin{aligned}
T &= T_0 - \frac{\bar{Q} dS}{2\pi K} \ln r = T_0 + \bar{Q} \varphi_{2D}^T \\
\varphi_{2D}^T &= -\frac{dS}{2\pi K} \ln r \\
\phi_{2D} &= \int_{\Omega} \ln r dS
\end{aligned} \tag{3.13}$$



### 3.1.3 Trojrozměrný případ

A konečně i pro případ trojrozměrný:

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \tag{3.14}$$

$$dV \bar{Q} = I_Q = q(r) S(r) = -K \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 \tag{3.15}$$

$$dT = -\frac{\bar{Q} dV}{4\pi K r^2} dr$$

Po integraci a podmínce  $T(r \rightarrow \infty) = 0$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\bar{Q} dV}{4\pi K r} = \bar{Q} \varphi^T \\
\varphi^T &= \frac{dV}{4\pi K r} = \frac{1}{4\pi K} \varphi \\
\phi &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} dV = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV
\end{aligned} \tag{3.16}$$

### 3.1.4 Potenciál tělesa tvaru elipsoidu

Je-li tělesem elipsoid s poloosami  $a, b, c$  a s rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{3.17}$$

pak se dle odvození například v [4] nebo [9] geometrický potenciál redukuje na:

$$\begin{aligned}
\phi &= \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{U(s)}{\Delta(s)} ds \\
U(s) &= 1 - \left( \frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \\
\Delta(s) &= \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

kde  $\lambda = 0$  pro vnitřní body elipsoidu ( $x \in \Omega$ ) a je největším kořenem rovnice  $U(s) = 0$  pro body mimo elipsoid ( $x \notin \Omega$ ). První a druhé derivace potenciálu uvnitř elipsoidu vypadají následovně:

$$\phi = \pi abc \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta(s)} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \phi'_x &= -2\pi abc \int_0^\infty \frac{x}{(a^2 + s)} \frac{ds}{\Delta(s)} \\ \phi'_y &= -2\pi abc \int_0^\infty \frac{y}{(b^2 + s)} \frac{ds}{\Delta(s)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \phi'_z &= -2\pi abc \int_0^\infty \frac{z}{(c^2 + s)} \frac{ds}{\Delta(s)} \\ \phi''_{xx} &= -2\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) \Delta(s)} \end{aligned}$$

$$\phi''_{yy} = -2\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s) \Delta(s)} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \phi''_{zz} &= -2\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) \Delta(s)} \\ \phi''_{xy} &= \phi''_{yx} = \phi''_{xz} = \phi''_{zx} = \phi''_{yz} = \phi''_{zy} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Všimneme si, že druhé derivace potenciálu jsou v celé oblasti elipsoidu konstantní. Pokud se druhé derivace elipsoidu poskládají do matice, dostaneme:

$$\Phi'' = \begin{pmatrix} \phi''_{xx} & \phi''_{xy} & \phi''_{xz} \\ \phi''_{yx} & \phi''_{yy} & \phi''_{yz} \\ \phi''_{zx} & \phi''_{zy} & \phi''_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Dle [7] se druhá derivace potenciálu na ploše elipsoidu skokově mění podle vztahu

$$(\Phi'')_{s+} - (\Phi'')_{s-} = 4\pi \mathbf{n} \mathbf{n}^T \quad (3.24)$$

kde  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  je jednotkový normálový vektor plochy elipsoidu. Index  $s+$  značí limitu funkce, kdy se k ploše přibližujeme z vnějšku,  $s-$  potom limitu zevnitř. Jednoduchým roznásobením a úvahou  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  dostaneme pro libovolný vektor  $\mathbf{v}$  vztah

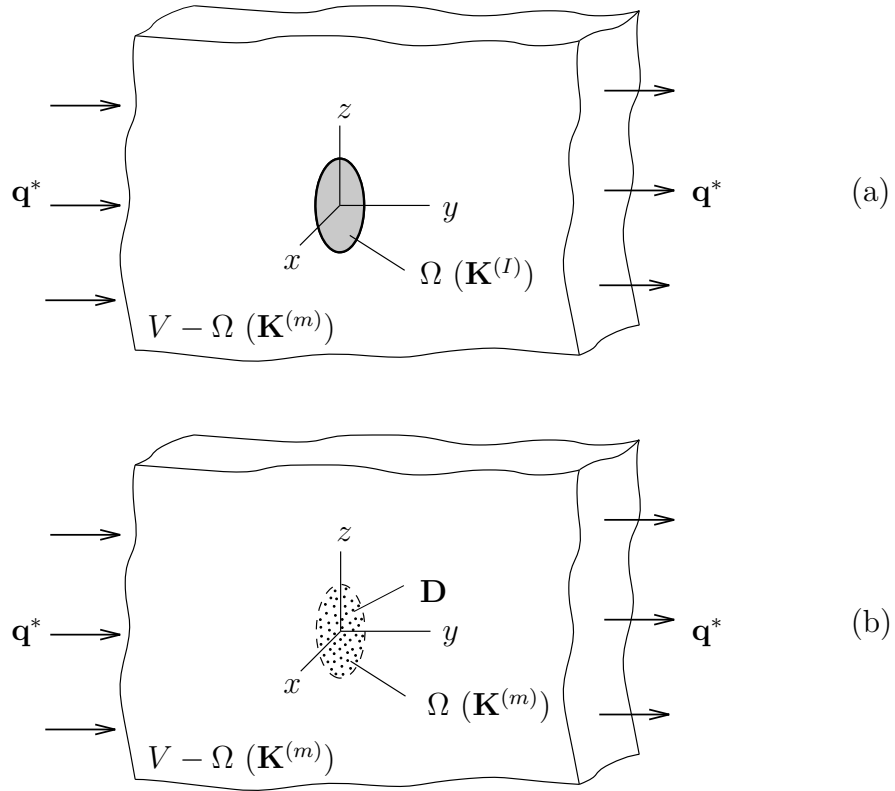
$$(\mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{v})^T \mathbf{n} = \mathbf{v}^T \mathbf{n}, \quad (3.25)$$

čehož využijeme v následujících kapitolách.

## 3.2 METODA EKVIVALENTNÍ INKLUZE

Představme si nekonečné izotropní prostředí s tepelnou vodivostí  $\mathbf{K}^{(m)} = K^{(m)} \mathbf{I}$  (kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice) obsahující osamocenou nehomogenitu s vodivostí  $\mathbf{K}^{(l)}$ . Dále na okrajích nekonečného prostředí předepíšeme konstantní tepelný tok  $\mathbf{q}^*$  (tzv. vzdálený tok). Principem metody ekvivalentní inkluze<sup>1</sup> je nahrazení nehomogenity s vodivostí  $\mathbf{K}^{(l)}$  ekvivalentní inkluzí s vodivostí  $\mathbf{K}^{(m)}$  okolního prostředí, doplněnou o rovnoměrný předepsaný „inkluzivní“ tok  $\mathbf{D}$  v oblasti nehomogenity (inkluze).

<sup>1</sup>Equivalent inclusion method v anglicky psané literatuře



Obrázek 1: Převodění nehomogenity s  $\mathbf{K}^{(I)}$  (a) na ekvivalentní inkluzi s  $\mathbf{K}^{(m)}$  (b) dle [7]

### 3.2.1 Jednorozměrný případ

Úvod příkladu je analogický k odvození jednorozměrného potenciálu v kapitole 3.1.1, vektorové veličiny z prostorového případu mají jen jednu složku, značíme je tedy netučným písmem. Stejně tak gradient přejde v obyčejnou derivaci podle  $x$ . Počátek souřadného systému umístíme do středu inkluze délky  $2t_0$ . Dále rozdělíme celkovou teplotu  $T^{(I)}$  (index  $I$  znamená, že se jedná o teplotní pole vzniklé působením nehomogenity označené jako  $I$  - z anglického „inhomogeneity“) na rovnoměrnou teplotu  $T^*$  závislou na předepsaném vzdáleném toku  $q^*$  a teplotu flukтуаční  $\tilde{T}^{(I)}$  závislou na předepsaném inkluzivním toku  $D$ .

$$T^{(I)} = T^* + \tilde{T}^{(I)} \quad (3.26)$$

$$T^* = T_r + \nabla T^* x \quad (3.27)$$

$$q^* = -K^{(m)} \nabla T^* \rightarrow \nabla T^* = -\frac{q^*}{K^{(m)}} \quad (3.28)$$

kde  $T_r$  je referenční teplota v počátku souřadného systému,  $\nabla T^*$  je konstantní teplotní gradient definovaný rovnicí (3.28). V případě, že druhá derivace potenciálu je v oblasti nehomogenity konstantní (u jednorozměrného případu splněno identicky), flukтуаční teplota  $\tilde{T}^{(I)}$  se určí podle vztahu (viz [7]):

$$\tilde{T}^{(I)}(x) = D\phi_{1D}^{T'} = D\frac{d\phi_{1D}^T}{dx} \quad (3.29)$$

kde  $\phi_{1D}^T$  je teplotní potenciál. Kombinací rovnic (3.7), (3.9), a (3.10) můžeme zapsat:

$$\tilde{T}^{(I)} = -\frac{D}{K^{(m)}} x \quad , \text{ v } \Omega \quad (3.30)$$

$$\tilde{T}^{(I)} = -\frac{D}{K^{(m)}} t_0 \quad , \text{ mimo } \Omega \quad (3.31)$$

$$\nabla \tilde{T}^{(I)} = \frac{d\tilde{T}^{(I)}}{dx} = -\frac{D}{K^{(m)}} \quad , \text{ v } \Omega \quad (3.32)$$

$$\nabla \tilde{T}^{(I)} = \frac{d\tilde{T}^{(I)}}{dx} = 0 \quad , \text{ mimo } \Omega \quad (3.33)$$

Další derivací je ukázáno, že flukтуаční teplota  $\tilde{T}^{(I)}$  splňuje rovnici (2.18)

$$\nabla^2 \tilde{T}^{(I)} = \frac{d^2 \tilde{T}^{(I)}}{dx^2} = 0 \quad (3.34)$$

ve všech bodech jednorozměrného prostoru. Podle rovnic (3.32) a (3.33) je zřejmé, že teplotní gradient se skokově mění na hranicích inkluze:

$$(\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s+} - (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-} = D/K^{(m)} \quad (3.35)$$

Jak již bylo řečeno dříve,  $s+$  značí limitu hranice zvnějšku,  $s-$  limitu hranice zevnitř. I když se mění teplotní gradient, tepelný tok musí zůstat spojitý:

$$(q^{(I)})_{s+} = (q^{(I)})_{s-} \quad (3.36)$$

$$K^{(m)}(\nabla T^{(I)})_{s+} = K^{(I)}(\nabla T^{(I)})_{s-} \quad (3.37)$$

$$K^{(m)}[(\nabla T^*)_{s+} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s+}] = K^{(I)}[(\nabla T^*)_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] \quad (3.38)$$

$$K^{(m)}[(\nabla T^*)_{s+} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s+} - (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] = K^{(I)}[(\nabla T^*)_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] \quad (3.39)$$

$$K^{(m)}[(\nabla T^*)_{s+} + D/K^{(m)} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] = K^{(I)}[(\nabla T^*)_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] \quad (3.40)$$

Uvážíme-li fakt, že teplotní gradient rovnoměrné teploty  $\nabla T^*$  je všude konstantní a definiční

$$\nabla T^D = \frac{D}{K^{(m)}} \quad (3.41)$$

stanovíme vztah mezi skutečnou nehomogenitou (pravá strana) a ekvivalentní inkluzí (strana levá)

$$K^{(m)}(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)} + \nabla T^D) = K^{(I)}(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)}), \quad (3.42)$$

z čehož dosazením a úpravou vyjádříme vztah mezi gradientem rovnoměrné teploty  $\nabla T^*$  a gradientem souhrnné teploty v inkluzi  $\nabla T^{(I)}$  jako

$$K^{(m)}(\nabla T^{(I)} + \nabla T^D) = K^{(I)}\nabla T^{(I)} \quad (3.43)$$

$$\nabla T^D = \frac{K^{(I)} - K^{(m)}}{K^{(m)}}\nabla T^{(I)} \quad (3.44)$$

$$\nabla \tilde{T}^{(I)} = -\frac{D}{K^{(m)}} = -\nabla T^D \quad (3.45)$$

$$\nabla T^{(I)} = \nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)} = \nabla T^* - \nabla T^D = \nabla T^* - \frac{K^{(I)} - K^{(m)}}{K^{(m)}}\nabla T^{(I)} \quad (3.46)$$

$$\nabla T^{(I)} = \left(1 - \frac{K^{(m)} - K^{(I)}}{K^{(m)}}\right)^{-1} \nabla T^* = \frac{K^{(m)}}{K^{(I)}} \nabla T^* \quad (3.47)$$

### 3.2.2 Obecný trojrozměrný případ

V obecném trojrozměrném případě se postupuje analogicky k případu jednorozměrnému, jen některé veličiny nejsou skalární, ale tenzorové. Zopakujeme v úvodu kapitoly zavedené veličiny  $\mathbf{K}^{(m)} = K^{(m)}\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}^{(I)}$ ,  $\mathbf{q}^*$ ,  $\mathbf{D}$ , dále souřadnicový vektor  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Stejně jako v jednorozměrném případě zavedeme rozdělení teploty

$$T^{(I)} = T^* + \tilde{T}^{(I)} \quad (3.48)$$

$$T^* = T_r + \nabla T^* \cdot \mathbf{x} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{q}^* = -\nabla T^* K^{(m)} \quad \rightarrow \quad \nabla T^* = -\frac{\mathbf{q}^*}{K^{(m)}} \quad (3.50)$$

V případě, že nehomogenita má tvar elipsoidu, jsou druhé derivace v oblasti inkluze konstantní. Analogicky k jednorozměrnému případu a rovnici (3.29) můžeme zapsat (viz [7])

$$\tilde{T}^{(I)}(\mathbf{x}) = (\Phi^{T'})^\top \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi K^{(m)}} (\Phi')^\top \mathbf{D} \quad (3.51)$$

kde  $\Phi' = (\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z)$  je gradient (geometrického) potenciálu ( $\Phi^{T'}$  je gradient potenciálu teplotního). Opět se dá dokázat, že flukтуаční teplota splňuje rovnici (2.27)

$$\nabla^2 \tilde{T}^{(I)} = \frac{\bar{Q}}{K} = 0 \quad (3.52)$$

Pokračováním z rovnice (3.51) dostane gradient flukтуаční teploty tvar

$$\nabla \tilde{T}^{(I)} = \frac{1}{4\pi K^{(m)}} \Phi'' \mathbf{D}, \quad (3.53)$$

kde  $\Phi''$  je dán rovnicí (3.23). Ze znalosti rovnice (3.24) můžeme skok v teplotním gradientu přes plochu inkluze zapsat následovně:

$$(\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s+} - (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-} = \frac{1}{4\pi K^{(m)}} [(\Phi'')_{s+} - (\Phi'')_{s-}] \mathbf{D} = \frac{1}{K^{(m)}} \mathbf{n} \mathbf{n}^\top \mathbf{D} \quad (3.54)$$

Zároveň však musí platit, že tok přes plochu inkluze je spojitý, analogicky k jednorozměrnému případu můžeme odvodit (kde  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^\top \mathbf{n}$ ):

$$[(\mathbf{q}^{(I)})_{s+}] \cdot \mathbf{n} = [(\mathbf{q}^{(I)})_{s-}] \cdot \mathbf{n} \quad (3.55)$$

$$[\mathbf{K}^{(m)}(\nabla T^{(I)})_{s+}] \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{K}^{(I)}(\nabla T^{(I)})_{s-}] \cdot \mathbf{n} \quad (3.56)$$

$$K^{(m)}[(\nabla T^*)_{s+} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s+}] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{K}^{(I)}[(\nabla T^*)_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}]) \cdot \mathbf{n} \quad (3.57)$$

$$[(\nabla T^*)_{s+} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s+} - (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\mathbf{K}^{(I)}}{K^{(m)}} [(\nabla T^*)_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] \right) \cdot \mathbf{n} \quad (3.58)$$

$$[(\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s+} - (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\mathbf{K}^{(I)}}{K^{(m)}} [(\nabla T^*)_{s-} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] - [(\nabla T^*)_{s+} + (\nabla \tilde{T}^{(I)})_{s-}] \right) \cdot \mathbf{n} \quad (3.59)$$

Vzhledem k faktu, že gradient rovnoměrné teploty  $\nabla T^*$  je všude konstantní a dosazením rovnice (3.54) pokračujeme

$$[\mathbf{n} \mathbf{n}^\top \mathbf{D} / K^{(m)}] \cdot \mathbf{n} = [(\mathbf{K}^{(I)} / K^{(m)} - \mathbf{I})(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)})] \cdot \mathbf{n} \quad (3.60)$$



Využitím znalosti vzorce (3.25) dostaneme:

$$[\mathbf{D}/K^{(m)}] \cdot \mathbf{n} = [(\mathbf{K}^{(I)}/K^{(m)} - \mathbf{I})(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)})] \cdot \mathbf{n} \quad (3.61)$$

Je zřejmé, že pokud se sobě budou rovnat výrazy v hranatých závorkách, rovnice bude splněna.

$$\mathbf{D}/K^{(m)} = (\mathbf{K}^{(I)}/K^{(m)} - \mathbf{I})(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)}) \quad (3.62)$$

Substitucí

$$\nabla T^D = \frac{\mathbf{D}}{K^{(m)}} \quad (3.63)$$

a další úpravou dostaneme

$$K^{(m)}(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)} + \nabla T^D) = \mathbf{K}^{(I)}(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)}), \quad (3.64)$$

což je opět vztah mezi skutečnou nehomogenitou (pravá strana) a ekvivalentní inkluzí (strana levá), který dále můžeme upravovat

$$K^{(m)}(\nabla T^{(I)} + \nabla T^D) = \mathbf{K}^{(I)}\nabla T^{(I)} \quad (3.65)$$

$$\nabla T^D = (\mathbf{K}^{(m)})^{-1}(\mathbf{K}^{(I)} - \mathbf{K}^{(m)})\nabla T^{(I)} \quad (3.66)$$

Definicí

$$\nabla \tilde{T}^{(I)} = \frac{1}{4\pi K^{(m)}} \Phi'' \mathbf{D} = \frac{\Phi''}{4\pi} \frac{\mathbf{D}}{K^{(m)}} = \frac{\Phi''}{4\pi} \nabla T^D \quad (3.67)$$

a dosazením rovnice (3.66) můžeme rovnici (3.48) rozepsat jako

$$\nabla T^{(I)} = \nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(I)} = \nabla T^* + \frac{\Phi''}{4\pi} \nabla T^D = \nabla T^* + \frac{\Phi''}{4\pi} (\mathbf{K}^{(m)})^{-1}(\mathbf{K}^{(I)} - \mathbf{K}^{(m)})\nabla T^{(I)} \quad (3.68)$$

$$\nabla T^* = [\mathbf{I} - \frac{\Phi''}{4\pi} (\mathbf{K}^{(m)})^{-1}(\mathbf{K}^{(I)} - \mathbf{K}^{(m)})]\nabla T^{(I)} \quad (3.69)$$

$$\nabla T^{(I)} = [\mathbf{I} - \frac{\Phi''}{4\pi} (\mathbf{K}^{(m)})^{-1}(\mathbf{K}^{(I)} - \mathbf{K}^{(m)})]^{-1} \nabla T^* \quad (3.70)$$

Dále definujeme Eshelbyho tenzor

$$\mathbf{S} = -\frac{\Phi''}{4\pi} \quad (3.71)$$

pomocí něž zapíšeme veličiny

$$\nabla \tilde{T}^{(I)} = -\mathbf{S} \nabla T^D \quad (3.72)$$

$$\nabla T^{(I)} = [\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{K}^{(m)})^{-1}(\mathbf{K}^{(m)} - \mathbf{K}^{(I)})]^{-1} \nabla T^* \quad (3.73)$$

Z výše uvedených rovnic plyne fakt, že teplotní gradient v oblasti inkluze tvaru elipsoidu je v celém objemu inkluze konstantní.

### 3.3 ESHELBYHO TENZOR S

Eshelbyho tenzor

$$\mathbf{S} = -\frac{\Phi''}{4\pi} = S_{ij} \quad (3.74)$$

určíme z rovnic (3.21) a (3.22). Je zřejmé, že

$$S_{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j. \quad (3.75)$$

Z výrazů pro druhou derivaci potenciálu (3.21) odvodíme pro diagonální prvky tenzoru tvar

$$\phi''_{ii} = -2\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s) \Delta(s)} \quad (3.76)$$

$$S_{ii} = -\frac{\phi''_{ii}}{4\pi} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s) \Delta(s)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s)[(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)]^{1/2}} \quad (3.77)$$

kde  $i$  nabývá ve výrazu  $S_{ii}$  hodnot od 1 do 3, v  $\phi''_{ii}$  značí příslušnou souřadnici ( $x$ ,  $y$  nebo  $z$ ) a v  $a_i$  značí příslušnou poloosu elipsoidu ( $a$ ,  $b$  nebo  $c$ ). Konkrétně tedy:

$$S_{11} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty [(b^2 + s)(c^2 + s)]^{-1/2} (a^2 + s)^{-3/2} ds \quad (3.78)$$

$$S_{22} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty [(a^2 + s)(c^2 + s)]^{-1/2} (b^2 + s)^{-3/2} ds \quad (3.79)$$

$$S_{33} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty [(a^2 + s)(b^2 + s)]^{-1/2} (c^2 + s)^{-3/2} ds \quad (3.80)$$

#### 3.3.1 Speciální tvary Eshelbyho tenzoru

Pro některé speciální tvary je možno Eshelbyho tenzor vyjádřit analyticky [7]:

- Koule ( $a = b = c$ )

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = \frac{1}{3} \quad (3.81)$$

- Eliptický válec ( $c \rightarrow \infty$ )

$$S_{11} = \frac{b}{a+b}, \quad S_{22} = \frac{a}{a+b}, \quad S_{33} = 0 \quad (3.82)$$

- Stěna ( $b \rightarrow \infty$ ,  $c \rightarrow \infty$ )

$$S_{11} = 1, \quad S_{22} = S_{33} = 0 \quad (3.83)$$

- Tenká čočka (penny-shape) ( $a = b \gg c$ )

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\pi c}{4a}, \quad S_{33} = 1 - \frac{\pi c}{2a} \quad (3.84)$$

- Zploštělý (diskovitý) sferoid<sup>2</sup> (oblate spheroid) ( $a = b > c$ )

$$S_{11} = S_{22} = \frac{a^2 c}{2(a^2 - c^2)^{3/2}} \left[ \arccos\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{c}{a} \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)^{1/2} \right] \quad (3.85)$$

$$S_{33} = 1 - 2S_{11} \quad (3.86)$$

- Protáhlý (doutníkovitý) sferoid (prolate spheroid) ( $a = b < c$ )

$$S_{11} = S_{22} = \frac{a^2 c}{2(c^2 - a^2)^{3/2}} \left[ \frac{c}{a} \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)^{1/2} - \operatorname{arccosh}\left(\frac{c}{a}\right) \right] \quad (3.87)$$

$$S_{33} = 1 - 2S_{11} \quad (3.88)$$

K určení Eshelbyho tenzoru pro obecný elipsoid je v dodatku A.1 představen algoritmus dle [5].

### 3.3.2 Porovnání numerického a analytického výpočtu

Pro porovnání využijeme konkrétní hodnoty výše zmíněných obecných výrazů. Pro každý příklad jsou nejdříve vypsány vstupní hodnoty, na prvním řádku následuje výsledek analytického výpočtu a poté výsledek numerického algoritmu z dodatku dodatku A.1 (s tolerancí  $\epsilon_{ps} = 2^{-52}$ ). Dle očekávání se sobě jednotlivé hodnoty rovnají.

- Koule:  $a = 2, b = 2, c = 2$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 1/3 = 0,3333 \quad (3.89)$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0,3333 \quad (3.90)$$

- Eliptický válec:  $a = 1, b = 3, c \rightarrow \infty (c = 9999)$

$$S_{11} = 3/4 = 0,75 \quad S_{22} = 1/4 = 0,25 \quad S_{33} = 0 \quad (3.91)$$

$$S_{11} = 0,7500 \quad S_{22} = 0,2500 \quad S_{33} = 0,0000 \quad (3.92)$$

- Tenká čočka:  $a = 3, b = 3, c = 0,01$

$$S_{11} = 0,0026 \quad S_{22} = 0,0026 \quad S_{33} = 0,9948 \quad (3.93)$$

$$S_{11} = 0,0026 \quad S_{22} = 0,0026 \quad S_{33} = 0,9948 \quad (3.94)$$

- Zploštělý sferoid:  $a = 5, b = 5, c = 3$

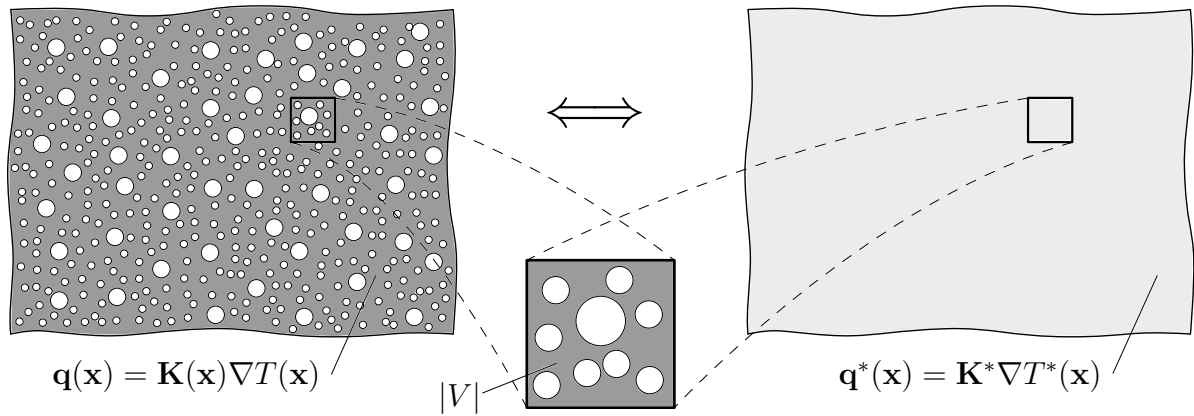
$$S_{11} = 0,2621 \quad S_{22} = 0,2621 \quad S_{33} = 0,4758 \quad (3.95)$$

$$S_{11} = 0,2621 \quad S_{22} = 0,2621 \quad S_{33} = 0,4758 \quad (3.96)$$

- Protáhlý sferoid:  $a = 5, b = 5, c = 9$

$$S_{11} = 0,4030 \quad S_{22} = 0,4030 \quad S_{33} = 0,1941 \quad (3.97)$$

$$S_{11} = 0,4030 \quad S_{22} = 0,4030 \quad S_{33} = 0,1941 \quad (3.98)$$



Obrázek 2: Princip homogenizace

## 4 URČENÍ EFEKTIVNÍ TEPELNÉ VODIVOSTI

Ve své podstatě každý reálný materiál má strukturu (buď na mikroúrovni), kterou můžeme označit jako nehomogenní. Na druhou stranu se u praktického řešení inženýrských úloh považuje většina materiálů z makroskopického hlediska za homogenní. Úkolem homogenizace je nalézt takové makroskopické vlastnosti (modul pružnosti, tepelnou vodivost atd.), jež by nahradily složité vlastnosti mikroskopické a pomocí nichž by bylo možno materiál modelovat jako homogenní. Tyto makroskopické vlastnosti se označují jako makroskopické, průměrné, ekvivalentní, efektivní atd. Ve výseku materiálu o objemu  $V$  potom průměrný (ekvivalentní) teplotní gradient a tepelný tok budou:

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{q}(\mathbf{x}) dV \quad (4.1)$$

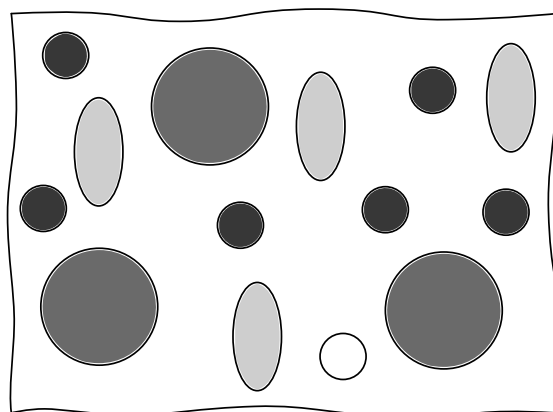
$$\nabla T^* = \frac{1}{|V|} \int_V \nabla T(\mathbf{x}) dV \quad (4.2)$$

Kde index  $*$  značí průměrné hodnoty. Z Fourierova zákona je efektivní tepelná vodivost  $\mathbf{K}^*$  tenzor, který splňuje rovnici

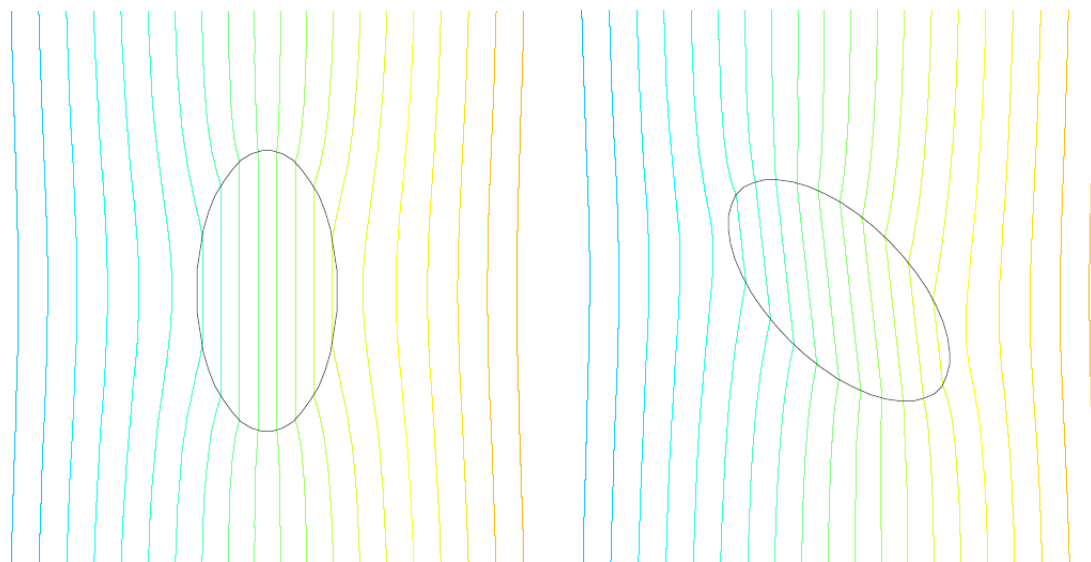
$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{K}^* \nabla T^* \quad (4.3)$$

Následuje představení principu metody řídké aproximace a metody Mori-Tanaka pro určení efektivní tepelné vodivosti, vhodné pro materiály s výskytem nehomogenit známého objemového zastoupení, avšak náhodného výskytu (předpokládá se ale z makroskopického hlediska rovnoměrné rozmístění nehomogenit).

Uvažujeme  $N$ -fázový kompozitní materiál, kde jednotlivé fáze jsou očíslovány od 1 do  $N$ , přičemž číslo 1 je rezervováno pro matici, která se ale pro přehlednost často označuje indexem  $m$ .



Obrázek 3: Příklad 4-fázového kompozitu



Obrázek 4: Deformované teplotní pole pro eliptickou nehomogenitu.  $K^{(m)}/K^{(l)} = 2$

## 4.1 METODA ŘÍDKÉ APROXIMACE (DA)

### 4.1.1 Předpoklady

Metoda řídké aproximace (dilute approximation, DA), jak už název napovídá, předpokládá řídkou hustotu nehomogenit, kdy se tyto vzájemně prakticky neovlivňují (nebo jen minimálně) a flukтуаční část teplotního pole v relativně malé vzdálenosti od nehomogenity v podstatě vymizí (viz obrázek 4). Také čím více se poměr vodivosti matrice a nehomogenity blíží 1, tím více se výše jmenované předpoklady blíží realitě. Předpokladem metody je tedy vzájemná nulová interakce mezi nehomogenitami, v důsledku čehož můžeme teplotní gradient v každé jednotlivé nehomogenitě  $i$  rozdělit na část rovnoměrnou a část flukтуаční

$$\nabla T^{(i)} = \nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(i)} \quad (4.4)$$

Metodou ekvivalentní inkluze dospějeme k výrazu

$$K^{(m)}(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(i)} + \nabla T^{D(i)}) = \mathbf{K}^{(1)}(\nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(i)}), \quad (4.5)$$

a další úpravou

$$\nabla T^{(i)} = [\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(i)}(\mathbf{K}^{(m)})^{-1}(\mathbf{K}^{(m)} - \mathbf{K}^{(i)})]^{-1} \nabla T^* \quad (4.6)$$

### 4.1.2 Koncentrační faktor

Z předchozí rovnice definujeme koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$

$$\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} = [\mathbf{I} - \mathbf{S}^{(i)}(\mathbf{K}^{(m)})^{-1}(\mathbf{K}^{(m)} - \mathbf{K}^{(i)})]^{-1} \quad (4.7)$$

pomocí nějž vyjádříme vztah mezi teplotním gradientem v jednotlivých inkluzích  $\nabla T^{(i)}$  a průměrným (makroskopickým) teplotním gradientem  $\nabla T^*$ :

$$\nabla T^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \nabla T^* \quad (4.8)$$

Pro obecný elipsoid (s hlavními poloosami rovnoběžnými se souřadným systémem) má koncentrační faktor nulové nediagonální členy. Stejně jako Eshelbyho tenzor má i koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$  (v závislosti na dosaženém tenzoru  $\mathbf{S}$ ) pro některé speciální elipsoidy svůj speciální tvar:

- Koule ( $a = b = c$ ), všechny diagonální prvky mají tvar:

$$A_{dil}^{(i)} = \frac{3K^{(m)}}{2K^{(m)} + K^{(i)}} \quad (4.9)$$

- Kruhový válec ( $a = b, c \rightarrow \infty$ ), prvek  $A_{33} = 1$ , zbylé diagonální prvky mají tvar:

$$A_{dil}^{(i)} = \frac{2K^{(m)}}{K^{(m)} + K^{(i)}} \quad (4.10)$$

- Stěna ( $b \rightarrow \infty, c \rightarrow \infty$ ),  $A_{22} = A_{33} = 1$ ,  $A_{11}$  má tvaru (srovnej s (3.47)):

$$A_{dil}^{(i)} = \frac{K^{(m)}}{K^{(i)}} \quad (4.11)$$

---

<sup>2</sup>sferoid = rotační elipsoid [15]

### 4.1.3 Výpočet $\mathbf{K}^*$ pomocí DA

Řídká aproximace předpokládá, že teplotní gradient v každé jednotlivé fázi  $\nabla T^{(i)}$  je konstantní a závislý na průměrném teplotním gradientu prostředí  $\nabla T^*$  dle vztahu (4.8). Vztah (4.2) poté uprívme dle výše zmíněných předpokladů pro  $N$  druhů nehomogenit s objemovým zastoupením jednotlivých fází  $\xi^{(i)}$

$$\begin{aligned}\nabla T^* &= \frac{1}{|V|} \int_V \nabla T(\mathbf{x}) \, dV = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|V|} \int_{V^{(i)}} \nabla T^{(i)} \, dV = \sum_{i=1}^N \frac{\nabla T^{(i)}}{|V|} \int_{V^{(i)}} dV = \\ &= \sum_{i=1}^N \nabla T^{(i)} \frac{|V^{(i)}|}{|V|} = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \nabla T^{(i)}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Tento vztah využijeme i při metodě Mori-Tanaka, diskutované dalším oddílu. Pro metodu řídké aproximace jej můžeme dále rozepsat jako

$$\nabla T^* = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \nabla T^{(i)} = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \nabla T^*, \quad (4.13)$$

což musí platit pro libovolné  $\nabla T^*$ , tedy

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \quad \rightarrow \quad \xi^{(m)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(m)} = \mathbf{I} - \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \quad (4.14)$$

Předpoklad konstantnosti teplotních gradientů platí i pro tepelné toky

$$\mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)} \nabla T^{(i)} \quad (4.15)$$

a analogický je i zápis průměrného tepelného toku, který rozšíříme

$$\mathbf{q}^* = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} = - \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \nabla T^{(i)} = - \left( \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right) \nabla T^* \quad (4.16)$$

Porovnáním rovnice (4.16) a (4.3) vyjádříme efektivní tepelnou vodivost jako

$$\mathbf{K}^* = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \quad (4.17)$$

Další úpravou a dosazením rovnice (4.14) dostaneme:

$$\mathbf{K}^* = \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} + \mathbf{K}^{(m)} \xi^{(m)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(m)} = \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} + \mathbf{K}^{(m)} \left( \mathbf{I} - \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right), \quad (4.18)$$

odkud konečně vyjádříme vztah pro určení efektivní tepelné vodivosti metodou řídké aproximace:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} (\mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{K}^{(m)}) \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \quad (4.19)$$

kde koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$  je dán vzcrcem (4.7).

Ještě jednou zopakujeme, že metoda řídké aproximace dává tím přesnější výsledky, čím je hustota nehomogenit řidší a čím víc se poměr vodivostí nehomogenit a matrice blíží k 1.

## 4.2 METODA MORI-TANAKA

### 4.2.1 Předpoklady

Metoda Mori-Tanaka je podobná metodě řídké aproximace, vychází však z jiných předpokladů. Na rozdíl od řídké aproximace uvažuje vzájemnou interakci jednotlivých nehomogenit. Jak je uvedeno v [2], průměrný teplotní gradient v matici  $\nabla T^{(m)}$  a v jednotlivých fázích kompozitu  $\nabla T^{(i)}$  můžeme rozdělit takto:

$$\nabla T^{(m)} = \nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(m)} \quad (4.20)$$

$$\nabla T^{(i)} = \nabla T^* + \nabla \tilde{T}^{(m)} + \nabla \tilde{T}^{(i)} \quad (4.21)$$

kde  $\nabla \tilde{T}^{(m)}$  je průměrný gradient flukтуаční teploty v matici v důsledku přítomnosti nehomogenit a  $\nabla \tilde{T}^{(i)}$  je již dříve zmíněný průměrný gradient flukтуаční teploty jednotlivých fází kompozitu. Kombinací rovnic (4.20) a (4.21) vyjádříme

$$\nabla T^{(i)} = \nabla T^{(m)} + \nabla \tilde{T}^{(i)} \quad (4.22)$$

a dosazením do úvodních rovnic metody ekvivalentní inkluze (v celém výpočtu pouze nahradíme gradient  $\nabla T^*$  gradientem  $\nabla T^{(m)}$ ) dostaneme

$$K^{(m)}(\nabla T^{(m)} + \nabla \tilde{T}^{(i)} + \nabla T^D) = \mathbf{K}^{(i)}(\nabla T^{(m)} + \nabla \tilde{T}^{(I)}) \quad (4.23)$$

$$\nabla T^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \nabla T^{(m)} \quad (4.24)$$

V metodě Mori-Tanaka tedy koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$  svazuje průměrný teplotní gradient nehomogenity  $\nabla T^{(i)}$  s průměrným teplotním gradientem matrice  $\nabla T^{(m)}$  (oproti  $\nabla T^*$  v DA). Pro názornost předchozí rovnici ještě jednou opíšeme a doplníme k ní vztah mezi teplotními gradienty  $\nabla T^{(i)}$  a  $\nabla T^*$  pomocí nového koncentračního faktoru  $\bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i)}$  (kde index  $MT$  značí faktor metody Mori-Tanaka).

$$\nabla T^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \nabla T^{(m)} \quad (4.25)$$

$$\nabla T^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i)} \nabla T^* \quad (4.26)$$

Vyjádření  $\bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i)}$  se budeme věnovat dále.

### 4.2.2 Výpočet $\mathbf{K}^*$ pomocí MT

Všimneme si, že pro  $i = 1$  vyjádříme z rovnice (4.25)

$$\nabla T^{(m)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(m)} \nabla T^{(m)} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(m)} = \mathbf{I} \quad (4.27)$$

Z rovnice (4.12) dále odvodíme

$$\nabla T^* = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \nabla T^{(i)} = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \nabla T^{(m)} \quad (4.28)$$

z toho

$$\nabla T^{(m)} = \left( \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right)^{-1} \nabla T^* = \left( \xi^{(m)} \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right)^{-1} \nabla T^* \quad (4.29)$$



Kombinací rovnic (4.25) a (4.29) zapíšeme

$$\nabla T^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \nabla T^{(m)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \left( \xi^{(m)} \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right)^{-1} \nabla T^* \quad (4.30)$$

porovnáním s rovnicí (4.26) můžeme koncentrační faktor pro metodu Mori-Tanaka vyjádřit jako

$$\bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \left( \xi^{(m)} \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right)^{-1} \quad (4.31)$$

kde pro  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$  viz (4.8). Analogickým postupem jako v případě DA od rovnice (4.15) odvodíme vztah pro efektivní tepelnou vodivost pro metodu Mori-Tanaka ve tvaru [3]

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} (\mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{K}^{(m)}) \bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i)} \quad (4.32)$$

nebo ve tvaru [6]

$$\mathbf{K}^* = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \left( \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right)^{-1} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{K}^* = \left[ \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right] \left[ \sum_{i=1}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right]^{-1} \quad (4.34)$$

nebo

$$\mathbf{K}^* = \left[ \xi^{(m)} \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right] \left[ \xi^{(m)} \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \right]^{-1} \quad (4.35)$$

Výsledné rovnice (4.32), (4.34) a (4.35) jsou navzájem ekvivalentní.

Speciální tvary výrazu pro efektivní tepelnou vodivost kompozitů obsahujících pouze nehomogenity kulového tvaru nebo tvaru rotačního válce můžeme vyjádřit kombinací rovnic (4.32), (4.31), (4.9) a (4.10). Následující rovnice vyjadřuje efektivní tepelnou vodivost dvoufázového kompozitu obsahujícího pouze kulové nehomogenity. Dle očekávání je makroskopická vodivost takového materiálu izotropní (stejná ve všech směrech), výraz je proto zapsán ve skalární formě.

$$K^* = K^{(m)} \frac{2K^{(m)} + K^{(I)} + 2\xi^I (K^{(I)} - K^{(m)})}{2K^{(m)} + K^{(I)} - \xi^I (K^{(I)} - K^{(m)})} \quad (4.36)$$

Obdobně se vyřeší i efektivní tepelná vodivost dvoufázového materiálu obsahujícího nehomogenity ve tvaru rovnoběžných rotačních válců. Efektivní vodivost ve směru osy válců je dána prostým váženým průměrem vodivostí jednotlivých fází ve vztahu k jejich objemovému zastoupení, ve směru kolmém pak vypadá následovně:

$$K^* = K^{(m)} \frac{K^{(m)} + K^{(I)} + \xi^I (K^{(I)} - K^{(m)})}{K^{(m)} + K^{(I)} - \xi^I (K^{(I)} - K^{(m)})} \quad (4.37)$$

kde horní index  $I$  značí vlastnosti (tepelnou vodivost a objemové zastoupení) nehomogenit.

Pro úplnost ještě doplníme výraz pro výpočet efektivní tepelné vodivosti dvoufázového vrstevnatého materiálu ve směru kolmém na vrstvy:

$$K^* = K^{(m)} \frac{K^{(I)}}{K^{(I)} - \xi^I (K^{(I)} - K^{(m)})} \quad (4.38)$$

### 4.3 NÁHODNÁ ORIENTACE NEHOMOGENIT

V minulé kapitole jsme uvažovali fázi kompozitního materiálu jako skupinu nehomogenit známého objemového zastoupení a vzhledem k použitým metodám i stejného koncentračního faktoru  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$ . Tento fakt má za následek, že v případě nekulových nehomogenit bychom každou jinak orientovanou částici uvažovali jako samostatnou fázi (při změně orientace nehomogenity se mění Eshelbyho tenzor  $\mathbf{S}$  a tudíž i koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$ ). Za takovýchto předpokladů je praktická použitelnost výše zmíněných metod značně diskutabilní.

Tento nedostatek ale v této kapitole odstraníme. Postup bude opět obdobný, začínající od vlivu osamocené nehomogenity, pokračující metodou řídké aproximace a končící u metody Mori-Tanaka. Zavedeme nejprve pojem transformace složek tenzoru při změně báze. Uvažujme ortonormální bázi v třírozměrném prostoru (kartézskou soustavu souřadnic)

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

a jinou (čárkovanou) bázi  $\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ . Báze  $\mathbf{e}'$  je také ortonormální (všechny bázevé vektory jsou navzájem kolmé) a z původní báze  $\mathbf{e}$  je vytvořena prostorovým pootočením. Libovolná ploha souřadného systému v prostoru je jednoznačně určena třemi úhly (tzv. Eulerovy úhly [16])  $\alpha$  (otočení kolem osy  $z$ ),  $\beta$  (otočení kolem osy  $y$ ),  $\gamma$  (otočení kolem osy  $z'$  - již pootočené osy  $z$ ). Úhly  $\alpha$  a  $\gamma$  nabývají hodnot  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , úhel  $\beta$  pak hodnot  $\langle 0, \pi \rangle$ . Transformační matice jednotlivých pootočení vypadají následovně:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Výsledná transformační matice má tvar (přičemž záleží na pořadí jednotlivých pootočení):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad (4.43)$$

Bázevé vektory v našem případě jsou vždy normované (jednotkové) a vztah mezi transformační maticí a jednotlivými bázemi můžeme dle [8] vyjádřit jako:

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}' \mathbf{e} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{R} \quad (4.44)$$

z čehož plyne, že transformační matice  $\mathbf{R}$  je zároveň pootočenou bází a dle následujícího vzorce i maticí směrových kosinů (kosinů úhlů mezi bázevími vektory jednotlivých bází)  $\mathbf{C} = \cos \phi_{ij}$ .

$$\mathbf{C} = \mathbf{e}' \mathbf{e} = \mathbf{R} \quad (4.45)$$

Dále uvažujme tenzor druhého řádu  $\mathbf{T}$ . Transformace složek tenzoru  $\mathbf{T}$  v maticovém zápisu má tvar:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^\top \quad (4.46)$$

### 4.3.1 Náhodně orientované elipsoidy

Jak již bylo řečeno, pro každý elipsoid, jehož osy jsou rovnoběžné se souřadným systémem, můžeme definovat diagonální Eshelbyho tenzor  $\mathbf{S}$  a pomocí něj i diagonální koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)}$ . Transformace složek tenzoru  $\mathbf{S}$  můžeme zapsat jako

$$\mathbf{S}' = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{R}^\top \quad (4.47)$$

a transformovaný koncentrační faktor se vyjádří následovně:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)'} &= [\mathbf{I} - \frac{K^{(m)} - K^{(i)}}{K^{(m)}} \mathbf{S}']^{-1} = [\mathbf{I} - \frac{K^{(m)} - K^{(i)}}{K^{(m)}} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{R}^\top]^{-1} = \\ &= \mathbf{R} [\mathbf{I} - \frac{K^{(m)} - K^{(i)}}{K^{(m)}} \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{R}^\top \end{aligned} \quad (4.48)$$

tedy

$$\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)'} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \mathbf{R}^\top \quad (4.49)$$

Matlabovská implementace důkazu poslední úpravy je vypsána v dodatku A.2.1. Důsledkem je, že při transformaci Eshelbyho tenzoru se koncentrační faktor transformuje dle rovnice (4.46).

Stopa matice tenzoru  $\mathbf{T}$  je součet jejích diagonálních členů, značí se  $\text{tr}(\mathbf{T})$ . Stopa matice Eshelbyho tenzoru je dle rovnic (2.27), (3.21), (3.23) a (3.71) konstantní a rovna 1. Stopa matice tenzoru je konstantní (invariantní) i při transformaci souřadného systému, pro důkaz viz dodatek A.2.2. Toto tvrzení platí nejen pro Eshelbyho tenzor, ale například i pro koncentrační faktor, čehož využijeme dále.

Nejprve definujeme „průměrný“ koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)}$ , který je pro konkrétní Eshelbyho tenzor výsledkem transformace (otáčení) elipsoidu do všech možných orientací

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)'} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)'} \sin(\beta) d\alpha d\beta d\gamma = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{R} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \mathbf{R}^\top \sin(\beta) d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned} \quad (4.50)$$

kde  $\sin(\beta)$  je Jakobián a konstanta  $8\pi^2$  je míra množiny transformačních úhlů

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\beta) d\alpha d\beta d\gamma = 8\pi^2 \quad (4.51)$$

Výsledkem rovnice (4.50) je diagonální matice se shodnými diagonálními prvky tvaru (viz dodatek A.2.3)

$$\bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)} = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)})}{3} \mathbf{I} \quad (4.52)$$

Důsledkem tohoto faktu je dále dokázaná tepelně-vodivostní makroskopická izotropie materiálu s náhodně orientovanými elipsoidálními nehomogenitami.

Pro řešení opět vyjdeme z metody řídké aproximace (DA). Výše odvozené výrazy dosadíme do rovnice (4.19) a upravíme.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \xi^{(i)'} (\mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{K}^{(m)}) \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)'} = \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} (\mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{K}^{(m)}) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)'} = \\ &= \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} (\mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{K}^{(m)}) \bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Ve výrazu znamená  $\xi^{(i)'}$  objemové zastoupení právě jedné orientace nehomogenity, po sumě přes všechny možné polohy nehomogenity obdržíme objemové zastoupení celé fáze daných nehomogenit stejného tvaru a vodivosti.

Výraz pro metodu Mori-Tanaka získáme obdobnou úvahou z rovnice (4.35).

$$\mathbf{K}^* = \left[ \xi^{(m)} \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \mathbf{K}^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)} \right] \left[ \xi^{(m)} \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)} \right]^{-1} \quad (4.54)$$

V této rovnici jsou všechny matice násobky jednotkových matic, tudíž i výsledná matice tenzoru efektivní tepelné vodivosti bude násobkem jednotkové matice. Podáno jinými slovy to znamená již zmíněný fakt, že z makroskopického hlediska se materiál s náhodně orientovanými elipsoidálními nehomogenitami náhodných tvarů chová izotropně, rovnici tedy můžeme zapsat ve skalární formě:

$$K^* = \frac{\xi^{(m)} K^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} K^{(i)} \bar{A}_{dil,avg}^{(i)}}{\xi^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{A}_{dil,avg}^{(i)}} \quad (4.55)$$

Co se týče velikosti tepelné vodivosti, dá se ukázat, že čím více se tvary částic blíží tvaru koule a čím více se tepelná vodivost nehomogenit blíží k tepelné vodivosti matrice, tím přesněji se dá efektivní tepelná vodivost modelovat pomocí náhradních kulových nehomogenit stejného objemového zastoupení jako skutečné nekulové nehomogenity. Vzorce pro výpočet efektivní tepelné vodivosti materiálů, které jsou tvořené pouze kulovými nehomogenitami, jsou velmi jednoduché, výše zmíněný fakt je tedy poměrně zásadní pro praktickou použitelnost metod používaných v této práci.

Pro lepší představu následuje příklad: pro hodnoty  $K^{(m)} = 1,16 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $K^{(i)} = 0,19 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\xi^{(i)} = 0,5$  (viz kapitolu 5.1) a rozměry nehomogenit  $10 : 1 : 1$  činí rozdíl mezi spočtenou efektivní tepelnou vodivostí pro eliptické a kulové nehomogenity  $0,3\%$ , Pro rozměry elipsoidu  $1 : 10 : 10$  pak necelé  $2\%$ . Příkladné hodnoty rozměrů nehomogenit můžeme označit za extrémní, i přesto je ale odchylka obou teoretických modelů (elipsoidální a kulové nehomogenity) značně menší než nepřesnost experimentálního měření ( $5\%$  [1]).

### 4.3.2 Náhodně orientované nehomogenity obecného tvaru

Představme si osamocenou nehomogenitu obecného (neelipsoidálního) tvaru umístěnou v nekonečné matici (analogie k metodě ekvivalentní inkluze). Po vystavení takovéto sous-

tavy vzdálenému toku můžeme určit průměrný teplotní gradient v nehomogenitě  $\Omega$  jako

$$\nabla \bar{T}^{(i)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (4.56)$$

Koncentrační faktor nehomogenity můžeme (v souladu s [3]) určit jako svazující tenzor vzdáleného teplotního gradientu a průměrného teplotního gradientu v nehomogenitě (který už ale na rozdíl od elipsoidálního případu nebude v celém objemu nehomogenity konstantní):

$$\nabla \bar{T}^{(i)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} \nabla T^* \quad (4.57)$$

Analytické vyjádření koncentračního faktoru by bylo značně složité a v naprosté většině případů nemožné, lze ale použít řešení numerického, např. pro jednotkové vzdálené teplotní gradienty rovnoběžné s osami souřadnic určit průměrné teplotní gradienty v nehomogenitě a z nich výsledný koncentrační faktor

$$(\nabla \bar{T}_x^{(i)}, \nabla \bar{T}_y^{(i)}, \nabla \bar{T}_z^{(i)}) = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} (\nabla T_x^*, \nabla T_y^*, \nabla T_z^*) \quad (4.58)$$

Vzdálené teplotní gradienty jsou jednotkové, tedy

$$(\nabla T_x^*, \nabla T_y^*, \nabla T_z^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}, \quad (4.59)$$

tudíž koncentrační faktor obecné nehomogenity můžeme definovat jako tenzor složený z vypočtených průměrných teplotních gradientů při aplikaci výše definovaných vzdálených gradientů jako:

$$\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)} = (\nabla \bar{T}_x^{(i)}, \nabla \bar{T}_y^{(i)}, \nabla \bar{T}_z^{(i)}) \quad (4.60)$$

Rovnice (4.57) samozřejmě platí pro předepsané vzdálené gradienty. Dále budeme (s odvoláním na [3]) předpokládat, že tato rovnice platí i pro libovolný vzdálený teplotní gradient.

Obdobně jako v případě nehomogenit tvaru elipsoidu zavedeme transformaci koncentračního faktoru i pro nehomogenity obecného tvaru (4.49) a stejným způsobem definujeme průměrný koncentrační faktor (4.50) s výsledkem dle rovnice (4.52):

$$\bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)} = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i)})}{3} \mathbf{I} \quad (4.61)$$

Dle výše zmíněného faktu, že stopa matice tenzoru je při transformaci invariantní, nám k určení průměrného koncentračního faktoru stačí znát pro tři předepsané vzdálené gradienty (viz (4.59)) z každého průměrného teplotního gradientu nehomogenity vždy jen jednu složku (a sice složku nenulového předepsaného gradientu -  $x$ -ovou pro směr  $x$ ,  $y$ -ovou pro směr  $y$  a  $z$ -ovou pro směr  $z$ ). Aritmetickým průměrem těchto tří hodnot obdržíme hodnotu všech nenulových (diagonálních) prvků průměrného koncentračního faktoru  $\bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)}$ .

Stejným způsobem jako pro nehomogenity tvaru elipsoidu (rovnice (4.53), (4.54), (4.55)) dospějeme k výrazu pro efektivní tepelnou vodivost metodou Mori-Tanaka:

$$K^* = \frac{\xi^{(m)} K^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} K^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)}}{\xi^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil,avg}^{(i)}} \quad (4.62)$$

Stejně jako v případě elipsoidálních nehomogenit má tato rovnice význam takový, že i pro nehomogenity obecného náhodného tvaru a orientace je efektivní tepelná vodivost izotropní. Stejně tak platí i tvrzení, že čím více se tvary jednotlivých nehomogenit blíží tvaru kulovému a čím více se k sobě blíží vodivosti matrice a nehomogenit, tím přesnější je (z hlediska efektivní tepelné vodivosti) modelování materiálu s obecnými nehomogenitami jako materiálu s nehomogenitami kulovými. Pro potvrzení této teorie viz kapitolu 5.1.

## 4.4 NEDOKONALÝ KONTAKT, VLIV VELIKOSTI

Obě metody (DA a MT) ve své základní podobě předpokládají dokonalý tepelný kontakt mezi jednotlivými složkami kompozitu, z čehož vyplývá například to, že efektivní vodivost závisí pouze na tvaru a objemovém zastoupení nehomogenit, ale nezávisí na jejich velikosti. To znamená, že jedno jest, vezmeme-li například  $N$  kulových nehomogenit průměru  $d$  nebo  $64N$  kulových nehomogenit průměru  $d/4$ , neboť jejich objem je stejný.

Reálné kompozitní materiály však výše zmíněnou podmínku nemusí splňovat (například v betonu mohou mezi cementovou maticí a zrny kameniva vznikat vzduchové bublinky atp.). Zavedení vlivu nedokonalého (imperfektního) tepelného kontaktu (spojení) na rozhraní materiálů a současně i zavedení vlivu velikosti nehomogenit je představeno v této kapitole.

### 4.4.1 Jednorozměrný případ

Pro názornost je opět úvod kapitoly předveden na jednorozměrném případě, jeho výsledky však přímo využijeme i pro řešení obecné prostorové. Nedokonalý kontakt mezi složkami kompozitu budeme modelovat jako tenkou vrstvu na rozhraní materiálů, která má odlišné vlastnosti než obě sousedící složky. Tloušťku vrstvy budeme uvažovat jako zanedbatelně malou vzhledem k rozměrům nehomogenit a její vlastnosti popíšeme tepelnou propustností  $h$  (viz rovnici (2.8)).

$$\mathbf{q}^T \mathbf{n} = -h\Delta T \quad (4.63)$$

což znamená to, že se teplota na rozhraní materiálů bude skokově měnit. Již tradičně započneme řešení u osamocené nehomogenity v nekonečné matici, nyní jen pro jednorozměrný případ.



Obrázek 5: Znázornění nedokonalého kontaktu na rozhraní složek

Analogicky k metodě ekvivalentní inkluze předepíšeme vzdálený tepelný tok  $q^*$ , z toho bude vzdálený teplotní gradient roven

$$\nabla T^* = -\frac{q^*}{K^{(m)}} \quad (4.64)$$

Při dokonalém tepelném kontaktu bychom vztah mezi teplotním gradientem v matici a v nehomogenitě zapsali jako kombinaci rovnic (4.8) a (4.11), tedy:

$$\nabla T^{(I)} = \bar{A}_{dil}^{(I)} \nabla T^* = \frac{K^{(m)}}{K^{(I)}} \nabla T^* \quad (4.65)$$

V případě nedokonalého kontaktu přisoudíme rozhraní k oblasti nehomogenity a budeme předpokládat, že pro náhradní (replacement, proto index  $r$ ) nehomogenitu (spojená základní nehomogenita a nedokonalé rozhraní) bude platit:

$$\nabla T^{(I,r)} = \bar{A}_{dil}^{(I,r)} \nabla T^* = \frac{K^{(m)}}{K^{(I,r)}} \nabla T^* \quad (4.66)$$

V jednorozměrném případě je tepelný tok všude stejný (za předpokladu ustáleného vedení tepla a absence vnitřních zdrojů), můžeme tedy jednoduše zapsat změny teploty v jednotlivých částech prostředí, nejprve pro vlastní nehomogenitu délky  $L$ :

$$q^* = -K^{(I)} \frac{\Delta T^{(I)}}{L} \rightarrow \Delta T^{(I)} = -q^* \frac{L}{K^{(I)}} \quad (4.67)$$

a dále pro vrstvu na rozhraní materiálu:

$$q^* = -h \Delta T^{(h)} \rightarrow \Delta T^{(h)} = -q^* \frac{1}{h} \quad (4.68)$$

Celková změna teploty (popisující celkové chování náhradní nehomogenity) poté bude

$$\Delta T^{(I,r)} = \Delta T^{(I)} + 2\Delta T^{(h)} = -q^* \left( \frac{L}{K^{(I)}} + \frac{2}{h} \right) \quad (4.69)$$

Dále definujeme náhradní vodivost  $K^{(I,r)}$ , což je vodivost splňující následující rovnici:

$$q^* = -K^{(I,r)} \frac{\Delta T^{(I,r)}}{L} = -\frac{K^{(I,r)}}{L} \left( -q^* \left( \frac{L}{K^{(I)}} + \frac{2}{h} \right) \right) \quad (4.70)$$

z toho:

$$K^{(I,r)} = \frac{L}{\frac{L}{K^{(I)}} + \frac{2}{h}} = K^{(I)} \frac{Lh}{Lh + 2K^{(I)}} \quad (4.71)$$

Rovnici (4.70) můžeme rozšířit a vyjádřit tak vztah mezi vzdáleným teplotním gradientem a náhradním teplotním gradientem nehomogenity

$$q^* = -K^{(m)} \nabla T^* = -K^{(I,r)} \nabla T^{(I,r)} \rightarrow \nabla T^{(I,r)} = \frac{K^{(m)}}{K^{(I,r)}} \nabla T^* \quad (4.72)$$

Porovnáním s rovnicí (4.65) definujeme náhradní koncentrační faktor  $\bar{A}_{dil}^{(I,r)}$  jako

$$\nabla T^{(I,r)} = \bar{A}_{dil}^{(I,r)} \nabla T^*, \quad \text{kde} \quad \bar{A}_{dil}^{(I,r)} = \frac{K^{(m)}}{K^{(I,r)}} \quad (4.73)$$

čímž jsme potvrdili platnost předpokladu z rovnice (4.66) o náhradním koncentračním faktoru  $\bar{A}_{dil}^{(I,r)}$ . Odvození efektivní tepelné vodivosti pro náhradní nehomogenity je analogické k odvození původnímu, jen s náhradními veličinami. Celá procedura tedy bude stejná, jediný rozdíl bude v indexu  $r$  u náhradních veličin. Konečný výraz pro řídkou aproximaci je

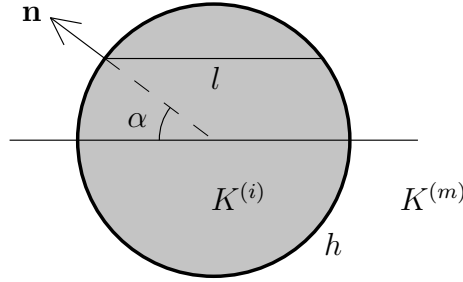
$$K^{(*)} = K^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} (K^{(i,r)} - K^{(m)}) \bar{A}_{dil}^{(i,r)} \quad (4.74)$$

a pro metodu Mori-Tanaka:

$$K^* = \frac{\xi^{(m)} K^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} K^{(i,r)} \bar{A}_{dil}^{(i,r)}}{\xi^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{A}_{dil}^{(i,r)}} = \frac{K^{(m)}}{\xi^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} K^{(m)} / K^{(i,r)}} \quad (4.75)$$

#### 4.4.2 Trojrozměrný případ – kulové nehomogenity

Analytické vyjádření provedeme pro kulovou nehomogenitu, již tradičně začínáme od osamělé nehomogenity umístěné v nekonečné matici. Řešení vychází z faktu, že teplotní gradient v celé oblasti nehomogenity je konstantní a rovnoběžný s předepsaným vzdáleným gradientem. V kulové nehomogenitě průměru  $d$  zavedem lokální souřadný systém, kde osa  $x$  je rovnoběžná s předepsaným vzdáleným tokem. Dále zavedem sférické souřadnice  $\alpha$  a  $\beta$ , kde úhel  $\alpha$  je odklon od osy  $x$  a  $\beta$  je rotace kolem osy  $x$ . Nehomogenitu rozdělíme na vlákna rovnoběžná se směrem předepsaného vzdáleného toku (osou  $x$ ). Každé vlákno má délku  $l = d \cos \alpha$ . Dále definujeme jednotkový normálový vektor plochy nehomogenity  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta)^\top$ .



Obrázek 6: Schema kulové nehomogenity s nedokonalým kontaktem na rozhraní mezi nehomogenitou a maticí

V každém vláknu definujeme změnu teploty pro jednotlivé části systému (analogicky k jednorozměrnému příkladu). Pro konstantní tok v nehomogenitě  $\mathbf{q}^{(I)} = (q^{(I)}, 0, 0)$  definujeme změny teploty v nehomogenitě a ve vrstvě rozhraní jako:

$$q^{(I)} = -K^{(I)} \frac{\Delta T^{(I)}}{l} = -K^{(I)} \frac{\Delta T^{(I)}}{d \cos \alpha} \quad \rightarrow \quad \Delta T^{(I)} = -q^{(I)} \frac{d \cos \alpha}{K^{(I)}} \quad (4.76)$$

$$\mathbf{q}^{(I)\top} \mathbf{n} = q^{(I)} \cos \alpha = -h \Delta T^{(h)} \quad \rightarrow \quad \Delta T^{(h)} = -q^{(I)} \frac{\cos \alpha}{h} \quad (4.77)$$

Celkovou změnu teploty vlákna vyjádříme jako

$$\Delta T^{(I,r)} = \Delta T^{(I)} + 2\Delta T^{(h)} = -q^{(I)} \left( \frac{d \cos \alpha}{K^{(I)}} + \frac{2 \cos \alpha}{h} \right) \quad (4.78)$$

Náhradní vodivost je opět vodivost splňující podmínku

$$q^{(I)} = -K^{(I,r)} \frac{\Delta T^{(I,r)}}{l} = -K^{(I,r)} \frac{\Delta T^{(I,r)}}{d \cos \alpha} = -q^{(I)} \frac{K^{(I)}}{d \cos \alpha} \left( \frac{d \cos \alpha}{K^{(I)}} + \frac{2 \cos \alpha}{h} \right) \quad (4.79)$$

z toho úpravou získáme náhradní tepelnou vodivost pro každé vlákno

$$K^{(I,r)} = K^{(I)} \frac{Lh}{Lh + 2K^{(I)}} \quad (4.80)$$

Náhradní tepelná vodivost je stejná v každém vlákne, je tedy stejná i pro celou kulovou nehomogenitu. V duchu jednorozměrného případu definujeme z rovnice (4.9) náhradní koncentrační faktor pro kulové nehomogenity s tepelně nedokonalým rozhraním jako

$$\bar{A}_{dil}^{(i,r)} = \frac{3K^{(m)}}{2K^{(m)} + K^{(i,r)}} \quad (4.81)$$

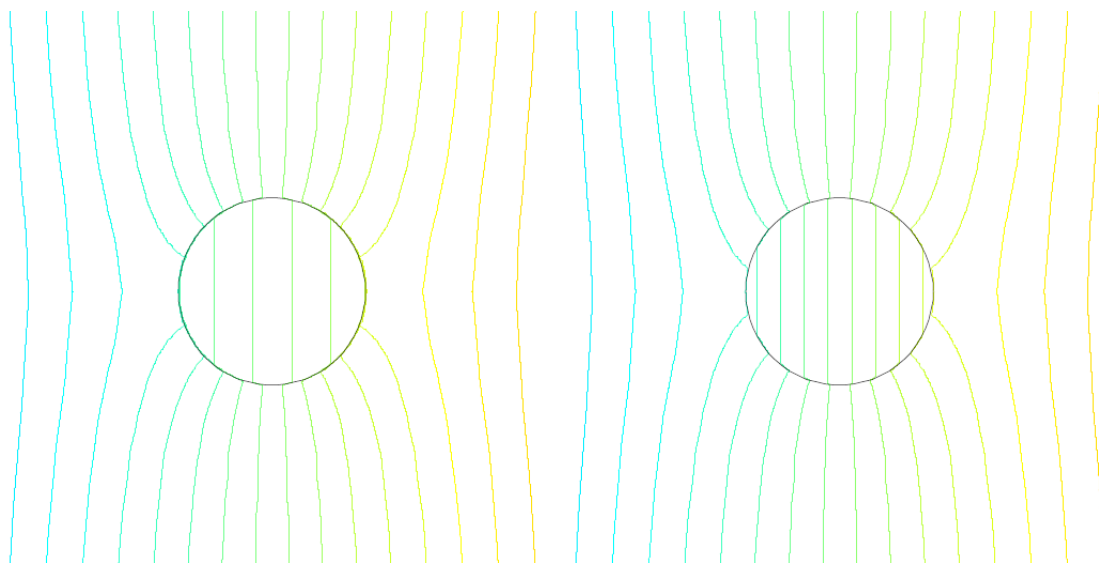


a pomocí něj a rovnice výraz pro efektivní tepelnou vidivost metodou řídké aproximace

$$K^* = K^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} (K^{(i,r)} - K^{(m)}) \bar{A}_{dil}^{(i,r)} \quad (4.82)$$

a pro metodu Mori-Tanaka

$$K^* = \frac{\xi^{(m)} K^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} K^{(i,r)} \bar{A}_{dil}^{(i,r)}}{\xi^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{A}_{dil}^{(i,r)}} \quad (4.83)$$



Obrázek 7: Deformované teplotní pole pro kruhovou nehomogenitu a různé propustnosti rozhraní. Všimneme si konstantního gradientu uvnitř nehomogenity a skokové změny teploty na rozhraní

#### 4.4.3 Trojrozměrný případ – nekulové nehomogenity

Analytické odvození vztahů tak, jak bylo provedeno pro kulové nehomogenity, není prakticky pro nekulové nehomogenity možné. V [3] je zmíněn případ elipsoidálních nehomogenit s konfokálním rozhraním (vnitřní i vnější okraj vrstvy rozhraní má shodná ohniska), kdy při vystavení osamocené nehomogenity vzdálenému toku je teplotní gradient v celé oblasti nehomogenity opět konstantní.

Pro nehomogenity obecného tvaru je v [3] představen princip numerického řešení. Nehomogenita známého objemu, tepelné vodivosti i tepelné propustnosti svého povrchu je umístěna do tělesa tvaru krychle značně větších rozměrů než samotná nehomogenita. Takovýto systém je pak vystaven třem nezávislým (ideálně vzájemně kolmým) předepsaným vzdáleným tokům. Princip metody spočívá v určení efektivní tepelné vodivosti jako průměru pole teplotního gradientu v celé oblasti krychle a v určení náhradního koncentračního faktoru jako průměru pole teplotního gradientu v oblasti nehomogenity. Náhradní

tepelná vodivost nehomogenity  $\mathbf{K}^{(i,r)}$  je potom tenzor splňující rovnici řídké aproximace pro známou efektivní tepelnou vodivost  $\mathbf{K}^*$  a známý náhradní koncentrační faktor  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i,r)}$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^{(m)} + \xi^{(i)}(\mathbf{K}^{(i,r)} - \mathbf{K}^{(m)})\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i,r)} \quad (4.84)$$

Z hlediska přesnosti je pro odhad efektivní tepelné vodivosti kompozitních materiálů výhodnější použití metody Mori-Tanaka, zde ale vidíme, že pro numerické řešení vstupních údajů pro tuto metodu je velmi výhodné použití právě metody řídké aproximace.

Jednoduše se potom spočte náhradní koncentrační faktor pro metodu Mori-Tanaka dle rovnice (4.31)

$$\bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i,r)} = \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i,r)} \left( \xi^{(m)} \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)} \bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i,r)} \right)^{-1} \quad (4.85)$$

a výsledný výraz pro efektivní tepelnou vodivost metodou Mori-Tanaka dle rovnice (4.32)

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^{(m)} + \sum_{i=2}^N \xi^{(i)}(\mathbf{K}^{(i,r)} - \mathbf{K}^{(m)})\bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i,r)} \quad (4.86)$$

Ať už se jedná o kulové či nekulové nehomogenity, veličiny  $\mathbf{K}^{(i,r)}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{dil}^{(i,r)}$  i  $\bar{\mathbf{A}}_{MT}^{(i,r)}$  a tudíž i efektivní tepelná vodivost  $\mathbf{K}^*$  jsou závislé na rozměrech nehomogenit, tozn. že do výpočtu je zahrnuta asolutní velikost částic (jako důsledek nedokonalého tepelného kontaktu na rozhraní nehomogenit a matrice).

Bez újmy na obecnosti můžeme říci, že čím více se tvar nehomogenit blíží tvaru kulovému, tím přesnější je modelování materiálu jako materiálu s kulovými nehomogenitami a nedokonalým rozhraním přesnější. Měření propustnosti vrstvy rozhraní nehomogenit velikosti řádu mikrometrů je velmi obtížné, a často se pouze nepřímou zjišťuje, například výše zmíněnými metodami. Většina metod je ale založena na přítomnosti pouze kulových nehomogenit, výsledná spočtená „výpočtová“ tepelná propustnost je ale jiná než skutečná tepelná propustnost rozhraní materiálů, nicméně pokud je naší prioritou zjistit makroskopickou efektivní tepelnou vodivost, můžeme tento fakt s klidem přijmout.

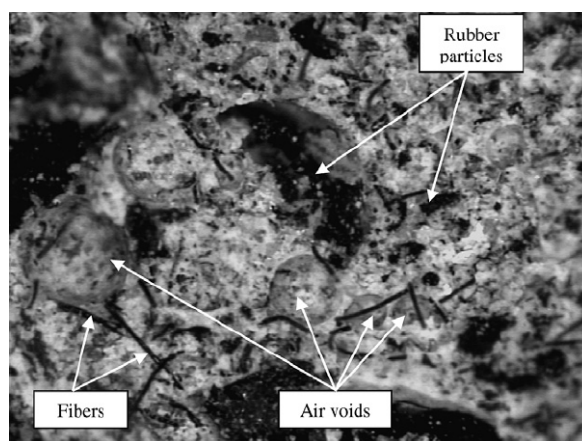
Taktéž obecně platí následující tvrzení: čím je částice menší, tím je náhradní tepelná vodivost a tudíž i efektivní tepelná vodivost materiálu také menší. Znamená to, že čím jsou částice menší, tím větší hraje uvažování nedokonalého rozhraní roli. Pro použití představených metod má uvažování nedokonalého rozhraní ten význam, že každá velikost částic je uvažována jako samostatná fáze (každá má svou náhradní tepelnou vodivost i náhradní koncentrační faktor). Takto je metoda použita například v aplikaci v kapitole 5.2.

## 5 APLIKACE

Dosud odvozené vzorce a metody nyní ověříme a aplikujeme na několik konkrétních experimentálních výsledků.

### 5.1 CEMENTO-GUMOVÉ KOMPOZITY

Na následujícím příkladě z literatury [1] ověříme možnost modelování nehomogenit nejrůznějších tvarů jako kulových nehomogenit. Materiál, na kterém byl experiment prováděn,



Obrázek 8: Opticko-mikroskopická fotografie cemento-gumového kompozitu [1]

je složen z cementové matrice a odpadní guma. Guma je vyrobena z odpadu (skládkované automobilové pneumatiky) drcením a řezáním (mechanical shredding), proto mají gumové částice značně nekulové tvary.

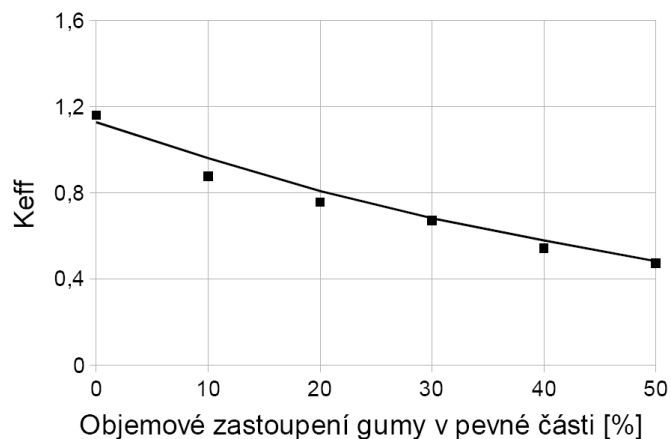
<b>Materiál</b>	Cement	Guma	Vzduch
<b>Tepelná vodivost</b>	1,16	0,19	0,024

<b>Číslo Vzorku</b>	<b>Objemové zastoupení</b>			<b>Výsledky</b>	
	<b>Cement</b>	<b>Guma</b>	<b>Vzduch</b>	<b>Exp.</b>	<b>MT</b>
1	98	0	2	1,16	1,13
2	85,5	9,5	5	0,86	0,96
3	73,04	18,26	8,7	0,76	0,81
4	61,74	26,46	11,8	0,67	0,68
5	51,6	34,4	14	0,54	0,58
6	41,5	41,5	17	0,47	0,48

Tabulka 1: Vstupní materiálové údaje a složení jednotlivých vzorků

Zopakujeme poznatek z kapitoly 4.3.1, totiž že při uvažování dvoufázového kompozitu z cementovou maticí a gumovými částicemi jako nehomogenitami a pro příklad nehomogenity s poměrem velikostí 1 : 1 : 10 (kdy se částice tvarem už blíží vláknu a dle obrázku 8 tento tvar můžeme označit za extrémní) je rozdíl mezi efektivní tepelnou vodivostí materiálu složeného s takovýchto nehomogenit a materiálu s kulovými nehomogenitami 0,3%. Naopak u vzduchových bublin (kdy poměr vodivosti matrice a vzduchu je přibližně 50 a tedy předpoklad poměrně podobných vodivostí z kapitoly 4.3.1 není splněn), kdy odchylka od kulového tvaru již má značný vliv na efektivní tepelnou vodivost, můžeme opět na obrázku 8 pozorovat, že vzduchové póry podmínku přibližného kulového tvaru vzorně splňují.

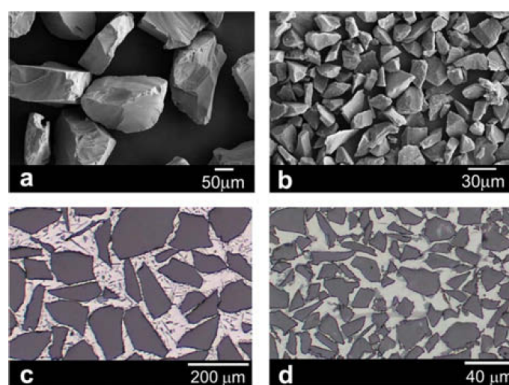
Výsledný materiál byl připraven s různým obsahem gumových částic a různou poroz-



Obrázek 9: Závislost efektivní tepelné vodivosti na objemovém zastoupení gumových částic v pevné fázi kompozitu

itou. Vstupní údaje experimentu a výsledky jak experimentální tak teoretické jsou v tabulce 1, grafické znázornění výsledků pak v grafu na obrázku 9, přičemž plná čára znázorňuje teoretický model a čtverce experimentální výsledky.

## 5.2 Al-Si/SiC kompozity



Obrázek 10: Fotografie plniva čísla 100 (a) a 400 (b) a řez výsledným kompozitem s plnivem 100 (c) a 400 (d)

Na dalším příkladu z literatury [11] ověříme platnost metod pro určení efektivní tepelné vodivosti materiálů s nedokonalým rozhraním. Ačkoliv používané v elektrotechnickém průmyslu, svým založením přesně vyhovují zadání této práce. Al-Si/SiC kompozity jsou kompozity, jejichž matrice je tvořena slitinou hliníku a křemíku (Al-Si), do níž se přidávají SiC (karbid křemíku) částice. SiC částice chemicky reagují s matricí a vytvářejí tenkou vrstvičku mezi nehomogenitami a matricí, právě ono uvažované tepelně-nedokonalé rozhraní z kapitoly 4.4. V původní literatuře byla tepelná vodivost matrice odvozena nepřímo z její elektrické vodivosti a parametry tepelné vodivosti nehomogenit a tepelné

propustnosti rozhraní stanoveny také nepřímou z naměřených hodnot. Autoři pro určení efektivní tepelné vodivosti použili model s jednou velikostí částic a dosáhli odchylky od experimentu 2%. Nyní si ukážeme, že v případě uvažování rozložení velikostí částic můžeme dosáhnout přesnosti ještě vyšší (při stejném způsobu určování vstupních údajů, totiž minimalizací čtverců odchylek experimentálních a teoretických hodnot).

Pro každou frakci SiC plniva jsou známy průměry  $D(10)$ ,  $D(90)$  a rozsah  $S = [D(90) - D(10)]/D(50)$  (viz tabulka 2). Dle [3] definujeme

$$\mu = \ln(D(50)) \quad (5.1)$$

$$\sigma = \frac{1}{1,2816} \ln \left( \frac{S + \sqrt{S^2 + 4}}{2} \right) \quad (5.2)$$

a z toho celkové lognormální rozdělení objemového zastoupení jednotlivých velikostí plniva

$$\xi(d) = \frac{\exp \left( - \left[ \frac{\ln(d) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right]^2 \right)}{d\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (5.3)$$

Jsou uvažovány velikosti plniva v řádu  $10^{-28} - 10^{20}$  m, celý interval je logaritmičtě rozdělen na 1000 částí, každá část je aproximována lineární funkcí spojující krajní body intervalu a takto spočtené objemové zastoupení je přisouzeno logaritmičtě střední velikosti částic plniva. Jako vstupní údaje jsou brány hodnoty z tabulky 3, dále pak  $K^{(m)} = 187 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $K^{(l)} = 252,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  a  $h = 72,5 \cdot 10^6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . Z experimentálních i teoretických výsledků plyne již zmíněný fakt, že se zmenšující se velikostí nehomogenit klesá efektivní tepelná vodivost materiálu (grafické znázornění tohoto je v grafu na obrázku 11).

Odchylka od experimentálních výsledků

$$O = \sqrt{\frac{\sum_i (K_{exp} - K_{MT})^2}{\sum_i K_{MT}^2}} = 1,1\% \quad (5.4)$$

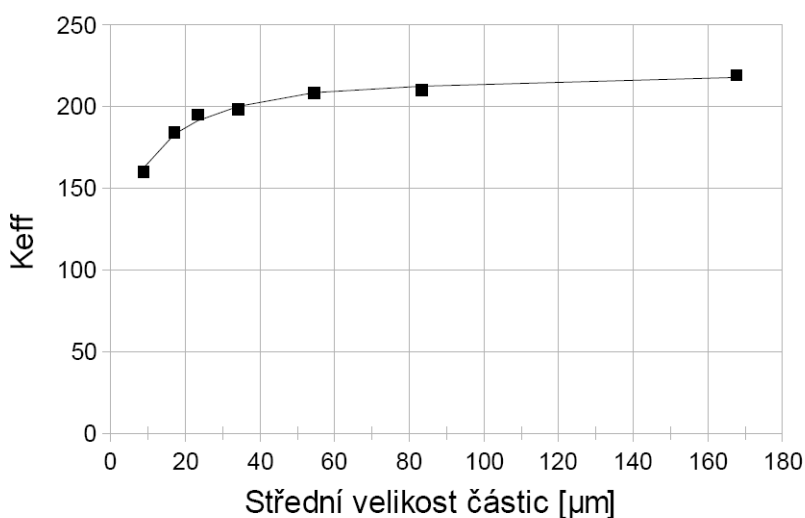
dokazuje lepší odhad efektivní tepelné vodivosti s uvažováním rozdělení velikostí částic než s uvažováním pouze jedné velikosti, a tím pádem i oprávněné užití mírně složitější metody Mori-Tanaka.

Označení	D(10)	D(90)	S
100	110	229	0,71
180	46	131	1,02
240	39	75	0,66
320	23	50	0,79
400	14	34	0,86
500	10	24	0,82
800	4,8	14	1,05

Tabulka 2: Vlastnosti jednotlivých použitých frakcí (velikost v  $\mu\text{m}$ )

Č.	$\xi^{\text{SiC}}$	Exp.	MT
100	0,58	219	217,8
180	0,58	210	212,3
240	0,60	208	208,5
320	0,59	198	199,9
400	0,58	195	190,8
500	0,55	184	182,5
800	0,53	160	161,3

Tabulka 3: Vstupní údaje a experimentální i teoretické výsledky



Obrázek 11: Závislost efektivní tepelné vodivosti na střední velikosti částic plniva

## 6 ZÁVĚR

v této práci byl odvozen a aplikován vzorec metody Mori-Tanaka pro určení efektivní tepelné vodivosti kompozitních materiálů. Byla diskutována možnost modelování materiálu s náhodě orientovanými nehomogenitami náhodného tvaru jako materiálu s pouze kulovými nehomogenitami a na konkrétním příkladě ukázána oprávněnost tohoto zjednodušení. Dále byl do výpočtu zaveden vliv nedokonalého rozhraní mezi plnivem a matricí a tím i vliv absolutní velikosti částic plniva a opět na konkrétním reálném příkladu ukázán fakt, že při snižující se velikosti částic plniva se snižuje efektivní tepelná vodivost. Dále byl ověřen fakt, že při uvažování rozdělení velikostí částic plniva dává metoda Mori-Tanaka přesnější výsledky než při uvažování pouze jedné velikosti částic plniva.

## LITERATURA

- [1] BENAZZOUK, A.; DOUZANE, O.; MEZREB, K.; aj.: Thermal conductivity of cement composites containing rubber waste particles: Experimental study and modelling. *Construction and Building Materials*, ročník 22, 2008: s. 573–579.
- [2] BENVENISTE, T.: On the effective thermal conductivity of multiphase composites. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, ročník 37, 1986: s. 696–713.
- [3] BÖHM, H. J.; NOGALES, S.: Mori-Tanaka models for the thermal conductivity of composites with interfacial resistance and particle size distribution. *Composites Science and Technology*, ročník 68, 2008: s. 1181–1187.
- [4] CAI, W.: Potential field of uniformly charged ellipsoid, 2007, [http://micro.stanford.edu/~caiwei/me340/a.ellipsoid\\_potential.pdf](http://micro.stanford.edu/~caiwei/me340/a.ellipsoid_potential.pdf).
- [5] CARLSON, B. C.: Numerical computation of real or complex elliptic integrals. *Numerical algorithms*, ročník 10, 1995: s. 13–26.
- [6] ŠEJNOHA, M.; KABELE, P.; ZEMAN, J.; aj.: Elastic and inelastic analysis of heterogeneous material. *CTU in Prague (unpublished)*, 2001.
- [7] HATTA, H.; TAYA, M.: Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. *International Journal of Engineering Science*, ročník 24, 1986: s. 1159–1170.
- [8] JIRÁSEK, M.: Přednášky z předmětu Univerzální principy mechaniky.
- [9] KELLOGG, O. D.: *Foundations of potential theory*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1929.
- [10] LIENHARD IV, J. H.; LIENHARD V, J. H.: *A heat transfer textbook - 3rd edition*. Phlogiston press, Cambridge, Massachusetts, 2008.
- [11] MOLINA, J. M.; PRIETO, R.; NARCISO, J.; aj.: The effect of porosity on the thermal conductivity of Al–12 wt.% Si/SiC composites. *Scripta Materialia*, ročník 60, 2008: s. 582–585.
- [12] VAVERKA, J.; CHYBÍK, J.; MRLÍK, F.: *Stavební fyzika 2*. Vutium, Brno, 2000.
- [13] <http://cs.wikipedia.org/wiki/termodynamika>.
- [14] <http://cs.wikipedia.org/wiki/teplota>.
- [15] <http://cs.wikipedia.org/wiki/sferoid>.
- [16] <http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>.

# A DODATKY

## A.1 NUMERICKÝ VÝPOČET ESHELBYHO TENZORU S

### A.1.1 Obecný algoritmus

Výpočet ukážeme na příkladu prvku tenzoru  $S_{11}$ , ostatní prvky se určí analogicky (s jiným pořadím konstant  $a, b, c$  v integrálu  $R_D$ ). Rovnici

$$S_{11} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty [(b^2 + s)(c^2 + s)]^{-1/2} (a^2 + s)^{-3/2} ds = \frac{abc}{3} R_D(b, c, a) \quad (\text{A.1})$$

Kde

$$R_D(b, c, a) = \frac{3}{2} \int_0^\infty [(b^2 + s)(c^2 + s)]^{-1/2} (a^2 + s)^{-3/2} ds \quad (\text{A.2})$$

je Carlsonův úplný eliptický integrál druhého druhu. Pro jeho výpočet použijeme algoritmus uvedený v [5]. Nejdříve zapíšeme integrál pro obecné konstanty  $k, l, m$ .

$$R_D(k, l, m) = \frac{3}{2} \int_0^\infty [(k^2 + s)(l^2 + s)]^{-1/2} (m^2 + s)^{-3/2} ds \quad (\text{A.3})$$

Pro zvolenou toleranci  $tol$  definujeme:

$$k_0 = k, \quad l_0 = l, \quad m_0 = m, \quad A_0 = \frac{k + l + 3m}{5} \quad (\text{A.4})$$

$$Q = (tol/4)^{-1/6} \max\{|A_0 - k|, |A_0 - l|, |A_0 - m|\} \quad (\text{A.5})$$

Pro  $n = 0, 1, 2, \dots$  definujeme

$$\lambda_n = \sqrt{k_n l_n} + \sqrt{k_n m_n} + \sqrt{l_n m_n}, \quad A_{n+1} = \frac{A_n + \lambda_n}{4} \quad (\text{A.6})$$

$$k_{n+1} = \frac{k_n + \lambda_n}{4}, \quad l_{n+1} = \frac{l_n + \lambda_n}{4}, \quad m_{n+1} = \frac{m_n + \lambda_n}{4} \quad (\text{A.7})$$

Spočítáme  $A_n$  pro  $n = 1, 2, \dots, N$ , kde  $4^{-N} Q < |A_N|$ . Definujeme

$$K = \frac{A_0 - k}{4^N A_N}, \quad L = \frac{A_0 - l}{4^N A_N}, \quad M = -(K + L)/3 \quad (\text{A.8})$$

$$E_2 = KL - 6M^2, \quad E_3 = (3KL - 8M^2)M \quad (\text{A.9})$$

$$E_4 = 3(KL - M^2)M^2, \quad E_5 = KLM^3 \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{E} = \left(1 - \frac{3}{14}E_2 + \frac{1}{6}E_3 + \frac{9}{88}E_2^2 - \frac{3}{22}E_4 - \frac{9}{52}E_2E_3 + \frac{3}{26}E_5\right) \quad (\text{A.11})$$

Poté vyjádříme integrál  $R_D$  s odchylkou menší než  $tol$  jako

$$R_D(k, l, m) \approx 4^{-N} A_N^{-3/2} \bar{E} + 3 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{4^{-n}}{\sqrt{m_n(m_n + \lambda_n)}} \quad (\text{A.12})$$

Následuje zdrojový kód pro numerický výpočet v programu Matlab.



## A.1.2 Implementace do Matlabu

Pro výpočet použijeme subor `Sij.m` a `Carlson_2nd_kind.m` pro vstupní hodnoty  $a, b, c$ .

- Soubor `Sij.m`:

```
a = 1;
b = 1;
c = 1;
%a, b, c poloosy elipsoidu, vstupni udaje

S(1,1) = a*b*c/3*Carlson_2nd_kind(b^2,c^2,a^2);
S(2,2) = a*b*c/3*Carlson_2nd_kind(a^2,c^2,b^2);
S(3,3) = a*b*c/3*Carlson_2nd_kind(a^2,b^2,c^2);
S
```

- Soubor `Carlson_2nd_kind.m`

```
function [Rd] = Carlson_2nd_kind(k,l,m)

tol=eps;%tolerance od presneho reseni
ki=k;
li=l;
mi=m;
A0=(k+l+3*m)/5;
Q=(tol/4)^(-1/6)*max([abs(A0-k),abs(A0-l),abs(A0-m)]);
n=0;
A=A0;
mm(1)=m;

while 4^(-n)*Q>=abs(A)
    lambda=sqrt(ki*li)+sqrt(li*mi)+sqrt(mi*ki);
    ll(n+1)=lambda;
    A=(A+lambda)/4;
    ki=(ki+lambda)/4;
    li=(li+lambda)/4;
    mi=(mi+lambda)/4;
    n=n+1;
    mm(n+1)=mi;
end

R=0;
for i=1:n
    R=R+4^(-(i-1))/((mm(i)+ll(i))*sqrt(mm(i)));
end

K=(A0-k)/(4^n*A);
L=(A0-l)/(4^n*A);
M=-(K+L)/3;
E2=K*L-6*M^2;
```

```

E3=(3*K*L-8*M^2)*M;
E4=3*(K*L-M^2)*M^2;
E5=K*L*M^3;
EE=1-3/14*E2+1/6*E3+9/88*E2^2-3/22*E4-9/52*E2*E3+3/26*E5;

```

```
Rd=4^(-n)*A^(-3/2)*EE+3*R;
```

## A.2 TRANSFORMACE TENZORŮ

### A.2.1 Důkaz rovnice (4.48)

Následující matlabovský soubor provede důkaz rovnosti (4.48) a to tím, že po podíl odpovídajících si prvků matic na obou stranách rovnice je roven 1

```

%Dukaz rovnosti matic Adil a Adil2
syms a b g A B C Km Ki real
ca=cos(a);
sa=sin(a);
cb=cos(b);
sb=sin(b);
cg=cos(g);
sg=sin(g);
R1=[ca -sa 0;sa ca 0;0 0 1];%otoceni kolem osy Z o uhel a
R2=[cb 0 -sb;0 1 0;sb 0 cb];%otoceni kolem osy Y o uhel b
R3=[cg -sg 0;sg cg 0;0 0 1];%otoceni kolem osy Z' o uhel g
R=simplify(R3*R2*R1);
Adil=simplify(inv(eye(3)-R*(Km-Ki)/Km*diag([A B C],0)*R'));
Adil2=simplify(R*inv(eye(3)-(Km-Ki)/Km*diag([A B C],0))*R');
simplify(Adil./Adil2)
%podil jednotlivych clenu roven 1

```

### A.2.2 Stopa matice transformovaného tenzoru

Další matlabovský soubor provede důkaz toho, že stopa matice tenzoru je invariantní při transformaci souřadnic rotací (i po rotaci je stopa transformované matice rovna stopě matice výchozí).

```

%Dukaz konstantnosti stopy matice tenzoru pri trasformaci
syms a b g a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33 real
ca=cos(a);
sa=sin(a);
cb=cos(b);
sb=sin(b);
cg=cos(g);
sg=sin(g);
R1=[ca -sa 0;sa ca 0;0 0 1];%otoceni kolem osy Z o uhel a
R2=[cb 0 -sb;0 1 0;sb 0 cb];%otoceni kolem osy Y o uhel b
R3=[cg -sg 0;sg cg 0;0 0 1];%otoceni kolem osy Z' o uhel g

```

```

R=simplify(R3*R2*R1);
T=[a11 a12 a13;a21 a22 a23;a31 a32 a33];
T=R*T*R';
simplify(trace(T))

```

### A.2.3 Důkaz rovnice (4.52)

Matlabovský zápis důkazu rovnice (4.52), totiž že „průměrný“ tenzor, vniklý rotací obecného tenzoru  $\mathbf{T}$  do všech možných poloh v prostoru, je právě roven identickému tenzoru násobenému třetinou stopy matice tenzoru původního.

$$\mathbf{T}_{avg} = \frac{\text{tr}(\mathbf{T})}{3} \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \text{tr}(\mathbf{T})/3 & 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(\mathbf{T})/3 & 0 \\ 0 & 0 & \text{tr}(\mathbf{T})/3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

```

syms a b g a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33 real
ca=cos(a);
sa=sin(a);
cb=cos(b);
sb=sin(b);
cg=cos(g);
sg=sin(g);
R1=[ca -sa 0;sa ca 0;0 0 1];%otoceni kolem osy Z o uhel a
R2=[cb 0 -sb;0 1 0;sb 0 cb];%otoceni kolem osy Y o uhel b
R3=[cg -sg 0;sg cg 0;0 0 1];%otoceni kolem osy Z' o uhel g
T=simplify(R3*R2*R1);
Adil=[a11 a12 a13;a21 a22 a23;a31 a32 a33];
Adil=T*Adil*T';
tr_Adil=simplify(trace(Adil));
Adil_avg=(int((int((int(Adil*sb,a,0,2*pi)/pi),b,0,pi)/8),g,0,2*pi)/pi);
Adil_avg=simplify(Adil_avg);
Adil_avg(find(Adil_avg==tr_Adil/3))='tr(Adil)/3'

```