1. Řešená konstrukce 2

2. Statické řešení 2

2.1 Výpočet průhybové čáry 5

3. Dynamika 13

3.1 Vlastní netlumené kmitání 13

3.1.1 Jacobiho metoda rovinné rotace 14

3.1.2 Popis algoritmu 14

3.2 Vynucené kmitání 15

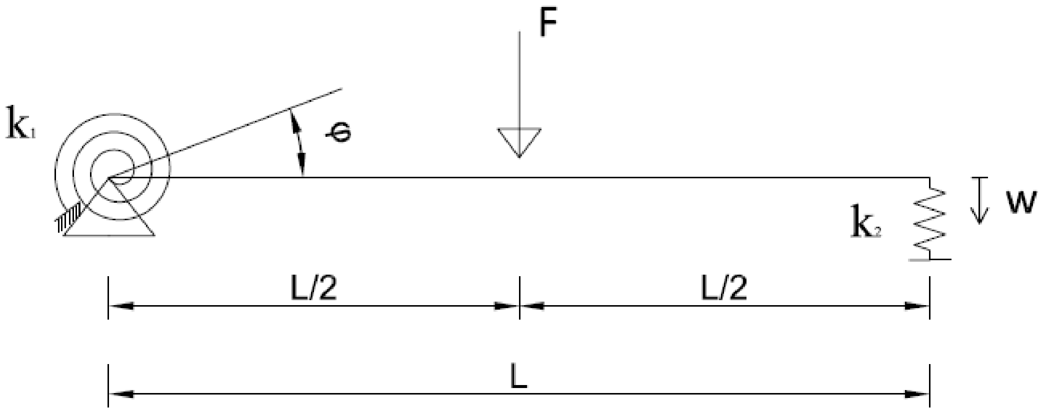
4. Řešení úlohy vlastního kmitání Klouškovou deformační metodou 18

5. Porovnání výsledků vlastních frekvencí jednotlivých metod 25

6. Použitá literatura 25

1. Řešená konstrukce

Řešenou konstrukcí je prizmatický prut zatížený osamělým břemenem v polovině rozpětí s nedokonalým vetknutím na levé straně a pružnou podporou na straně pravé viz obr. 1



Obr. 1 Řešená konstrukce pro statickou úlohu

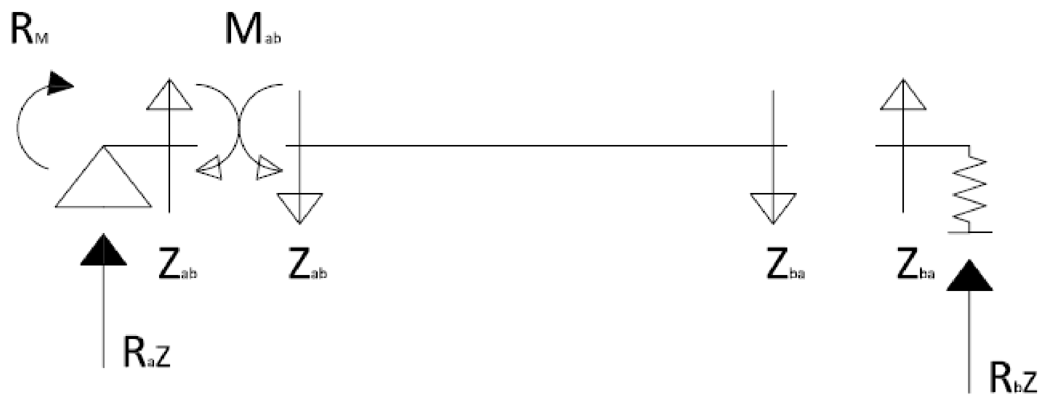
2. Statické řešení

Neznámými deformacemi jsou: natočení levého konce prutu φ_a (závislé na tuhosti rotační pružiny $k_1[kNm/rad]$) a svislý posun pravého konce w_b (závislý na tuhosti pružiny $k_2[kN/m]$). V těchto pružinách vznikají tzv. direkční síly, které jsou přímo úměrné deformaci dané pružiny s konstantou úměrnosti k_1 respektive k_2. Výpočet neznámých deformací je proveden Zjednodušenou deformační metodou (ZDM)

Vektor neznámých deformací:

$$\{r\} = \{\varphi_a, w_b\}^T$$

Styčníkové podmínky rovnováhy:



Obr. 2 Konvence vnitřních sil a reakcí na styčníky resp. na prut

Ve styčnících se sestaví podmínky rovnováhy (momentová a silová ve svislém směru)

$$R_M + M_{ab} = 0$$
$$Z_{ba} + R_b^z = 0$$

$$k_1\varphi_a + M_{ab} = 0$$
$$Z_{ba} + k_2 w_b = 0$$

Z tabulek pro ZDM vyplývá:

$$\widetilde{M}_{ab} = \frac{3}{16}FL \quad \widetilde{Z}_{ba} = -\frac{5}{16}F$$

$$M_{ab} = \frac{3}{16}FL + \frac{3}{4}\frac{2EI}{L}\left(2\varphi_a + 2\frac{w_b}{L}\right)$$

$$Z_{ba} = -\frac{5}{16}F + \frac{3}{4}\frac{2EI}{L^2}\left(2\varphi_a + 2\frac{w_b}{L}\right)$$

Dosazením těchto výrazů zpět do soustavy obdržíme:

$$k_1\varphi_a + \frac{3}{16}FL + \frac{3EI}{L}\varphi_a + \frac{3EI}{L^2}w_b = 0$$
$$-\frac{5}{16}F + \frac{3EI}{L^2}\varphi_a + \frac{3EI}{L^3}w_b + k_2 w_b = 0$$

$$\left(k_1+\frac{3EI}{L}\right)\varphi_a+\frac{3EI}{L^2}w_b=-\frac{3}{16}FL$$
$$\frac{3EI}{L^2}\varphi_a+\left(k_2+\frac{3EI}{L^3}\right)w_b=\frac{5}{16}F$$

Maticový zápis soustavy rovnic:

$$\begin{bmatrix}\frac{3EI}{L}+k_1 & \frac{3EI}{L^2}\\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3}+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_a\\ w_b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{3}{16}FL\\ \frac{5}{16}F\end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]\cdot\{\mathbf{r}\}=\{\mathbf{f}\}$$

Matice tuhosti $[\mathbf{K}]$ je pozitivně definitní a čtvercová a je tedy možné vypočítat vektor $\{\mathbf{f}\}$ ze vztahu:

$$\{\mathbf{r}\}=[\mathbf{K}]^{-1}\cdot\{\mathbf{f}\}$$

$$\begin{Bmatrix}\varphi_a\\ w_b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{15EIFL}{\underbrace{16\left(k_1k_2L^3+3EIk_2L^2+3EIk_1\right)}_{\lambda}}-\frac{3FL\left(k_2L^3+3EI\right)}{\lambda}\\ \frac{9EIFL^2}{\lambda}+\frac{5FL^2\left(3EI+Lk_1\right)}{\lambda}\end{Bmatrix}$$

Pro případ, kdy $k_1\to 0\wedge k_2\to\infty$ statické schéma konstrukce odpovídá prostému nosníku.

$$\lim_{\substack{k1\to 0\\ k2\to\infty}}\left(-\frac{15EIFL}{\lambda}-\frac{3FL\left(k_2L^3+3EI\right)}{\lambda}\right)=-\frac{FL^2}{16EI}=\varphi_a$$

$$\lim_{\substack{k1\to 0\\ k2\to\infty}}\left(\frac{9EIFL^2}{\lambda}+\frac{5FL^2\left(3EI+Lk_1\right)}{\lambda}\right)=0=w_b$$

Pro případ, kdy $k_1 \to \infty \wedge k_2 \to 0$ statické schéma konstrukce odpovídá konzole upnuté na levém konci.

$$\lim_{\substack{k1 \to 0 \\ k2 \to \infty}} \left(-\frac{15EIFL}{\lambda} - \frac{3FL\left(k_2 L^3 + 3EI\right)}{\lambda} \right) = 0 = \varphi_a$$

$$\lim_{\substack{k1 \to 0 \\ k2 \to \infty}} \left(\frac{9EIFL^2}{\lambda} + \frac{5FL^2\left(3EI + Lk_1\right)}{\lambda} \right) = \frac{5FL^3}{48EI} = w_b$$

2.1 Výpočet průhybové čáry

$\left\langle 0; \frac{L}{2} \right\rangle$

$Q_{(x)} = R_{az}$

$M_{(x)} = R_{az}x - R_M$

$EI\frac{d^3 w_{(x)}}{dx^3} = -R_{az} \; / \int dx$

$EI\frac{d^2 w_{(x)}}{dx^2} = -R_{az}x + R_M \; / \int dx$

$EI\frac{dw_{(x)}}{dx} = -\frac{1}{2}R_{az}x^2 + R_M x + C_1 \; / \int dx$

$EIw_{(x)} = -\frac{1}{6}R_{az}x^3 + \frac{1}{2}R_M x^2 + C_1 x + C_2$

$\left\langle \frac{L}{2}; L \right\rangle$

$Q_{(x)} = R_{az} - F$

$M_{(x)} = R_{az}x - R_M - F\left(x - \frac{L}{2}\right)$

$EI\frac{d^3 w_{(x)}}{dx^3} = -R_{az} + F \; / \int dx$

$EI\frac{d^2 w_{(x)}}{dx^2} = -R_{az}x + R_M + F\left(x - \frac{L}{2}\right) / \int dx$

$EI\frac{dw_{(x)}}{dx} = -\frac{1}{2}R_{az}x^2 + R_M x + F\frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2} + C_3 \; / \int dx$

$EIw_{(x)} = -\frac{1}{6}R_{az}x^3 + \frac{1}{2}R_M x^2 + F\frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^3}{6} + C_3 x + C_4$

Aditivní konstanty $C_{1,} C_{2,} C_{3,} C_4$ se určí z okrajových podmínek v každém intervalu, případně z podmínek spojitosti funkce popisující průhyb nosníku.

$$\underbrace{w_{(0)} = 0}_{\Downarrow} \wedge \underbrace{\left.\frac{dw_{(x)}}{dx}\right|_{x=0} = \varphi_a}_{\Downarrow} \qquad \underbrace{w^{I}_{\left(\frac{L}{2}\right)} = w^{II}_{\left(\frac{L}{2}\right)}}_{\Downarrow} \wedge \underbrace{\left.\frac{dw^{I}_{(x)}}{dx}\right|_{x=L/2} = \left.\frac{dw^{II}_{(x)}}{dx}\right|_{x=L/2}}_{\Downarrow}$$

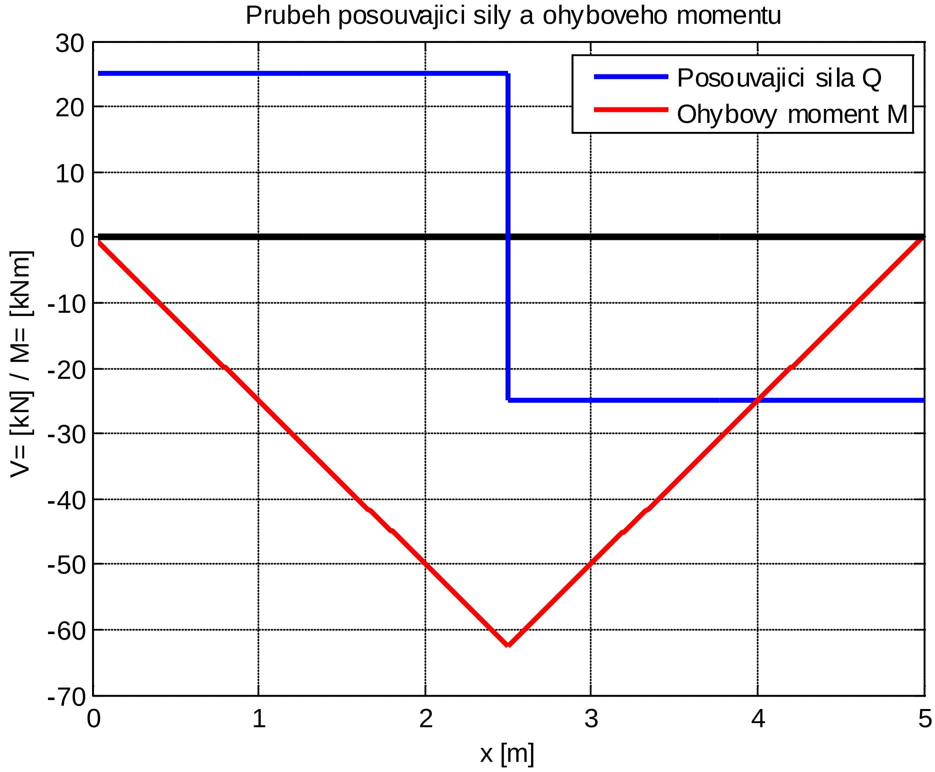
$$C_2 = 0 \qquad C_1 = EI\varphi_a \qquad C_4 = C_2 \qquad C_1 = C_3$$

$$w_{(x)} = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{6}R_{az}x^3 + \frac{1}{2}R_M x^2 + EI\varphi_a x\right\} \qquad w_{(x)} = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{6}R_{az}x^3 + \frac{1}{2}R_M x^2 + F\frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^3}{6} + EI\varphi_a x\right\}$$

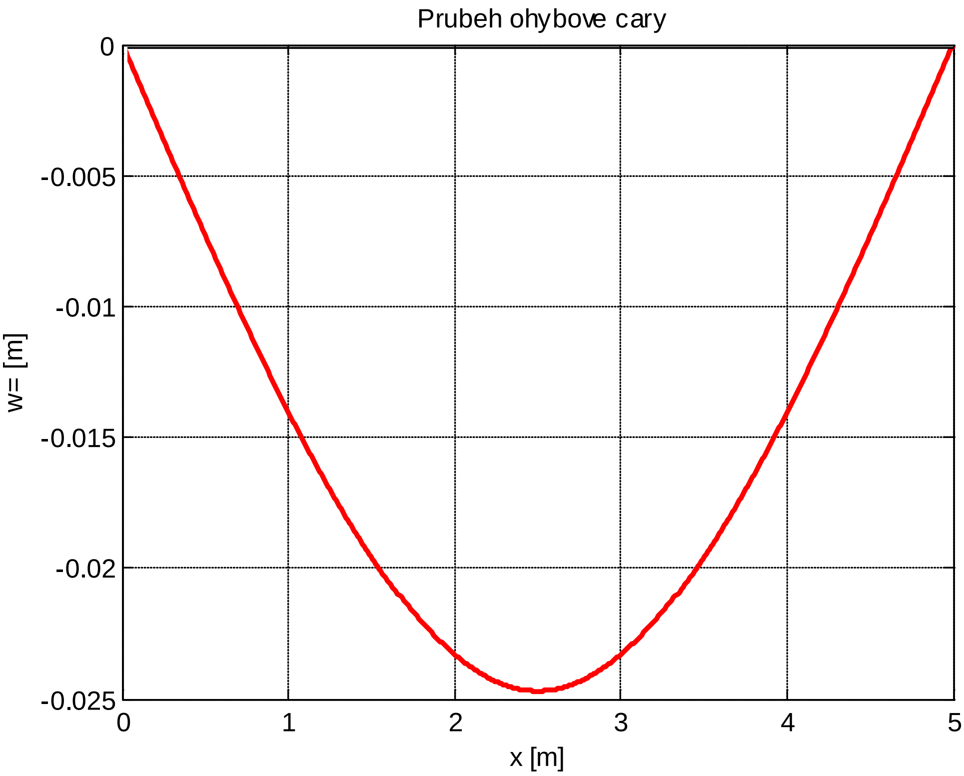
Numerické řešení bylo provedeno pro následující hodnoty popisující materiál a příčný řez nosníku.

$L = 5m$, $EI = 5273.37kNm^2$, $F = 50kN$

Výsledky pro $k_1 \to 0 \wedge k_2 \to \infty$

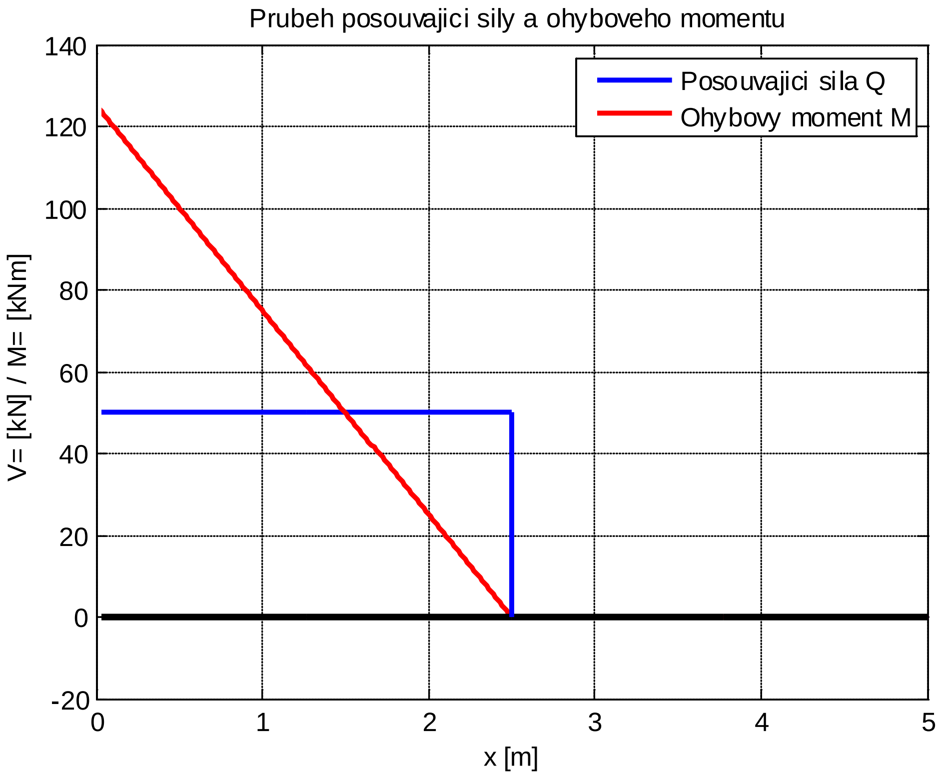


Obr. 3 Průběh posouvající síly a ohybového momentu na prostém nosníku

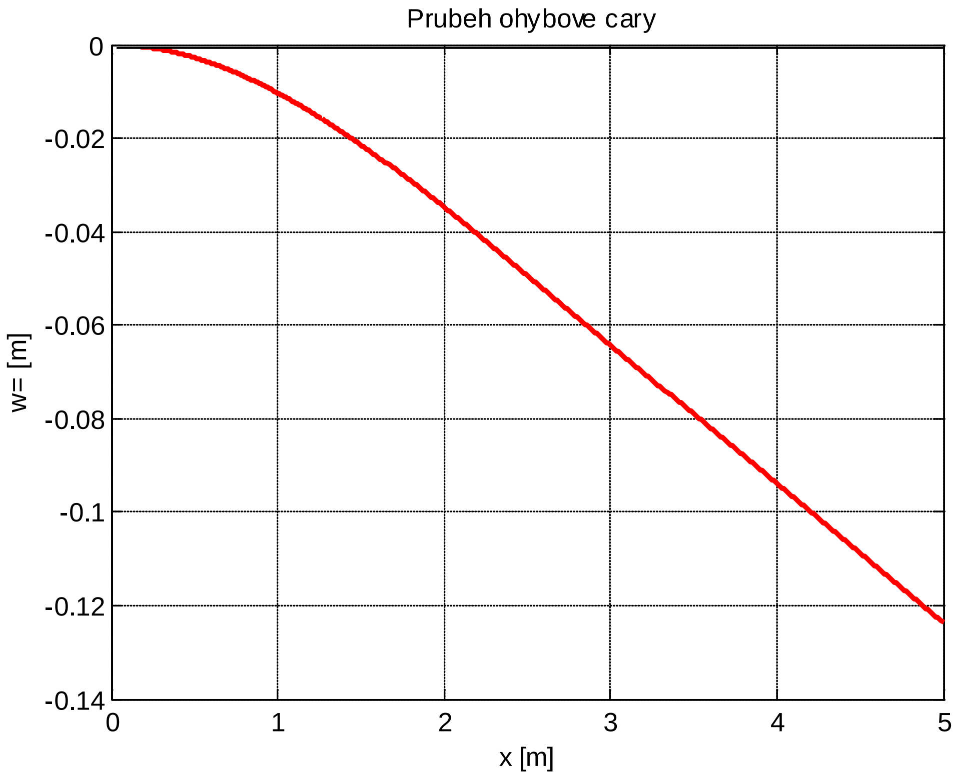


Obr. 4 Průběh ohybové čáry na prostém nosníku

Výsledky pro $k_1 \to \infty \wedge k_2 \to 0$

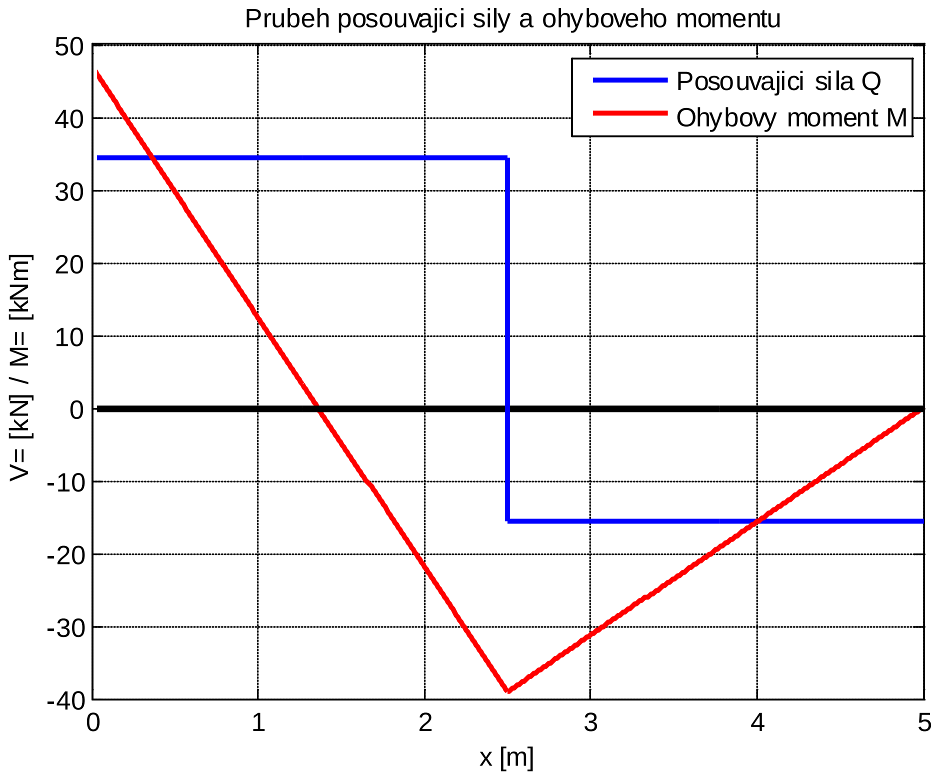


Obr. 5 Průběh posouvající síly a ohybového momentu na konzole

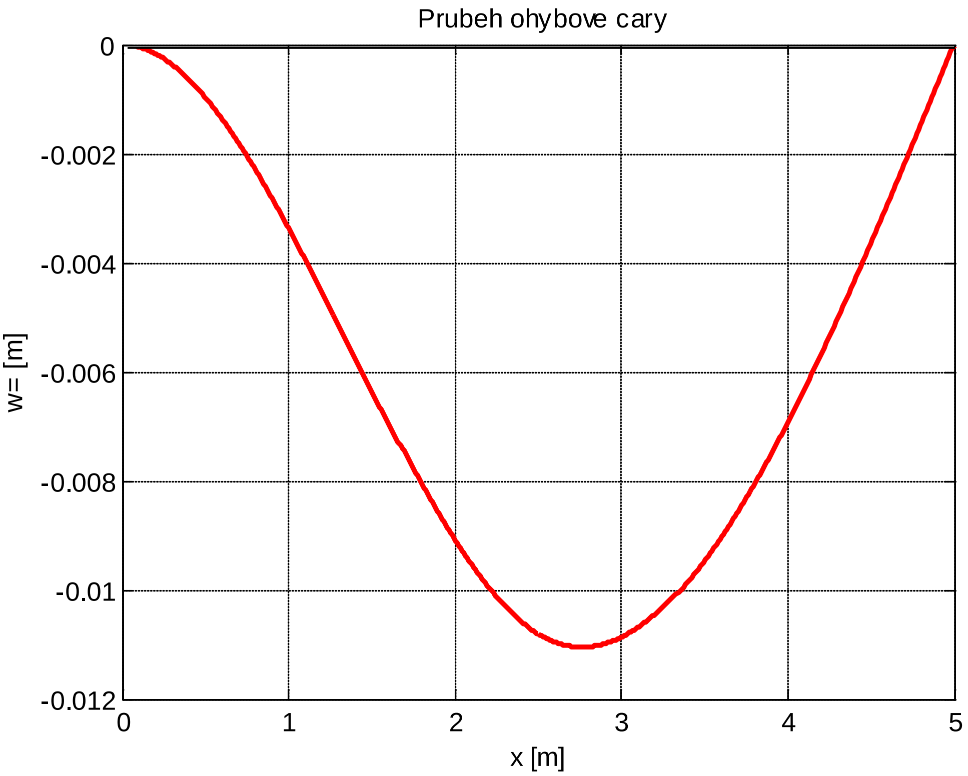


Obr. 6 Průběh ohybové čáry na konzole

Výsledky pro $k_1 \to \infty \wedge k_2 \to \infty$

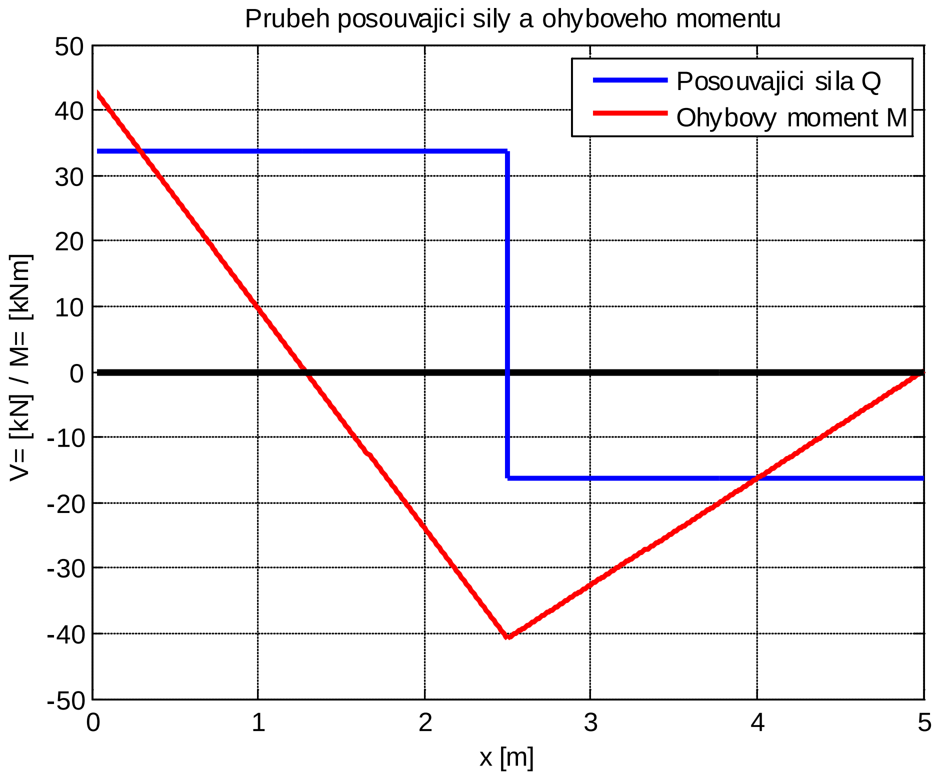


Obr. 7 Průběh posouvající síly a ohybového momentu na nosníku s dokonalým vetknutím a dokonalým kloubem

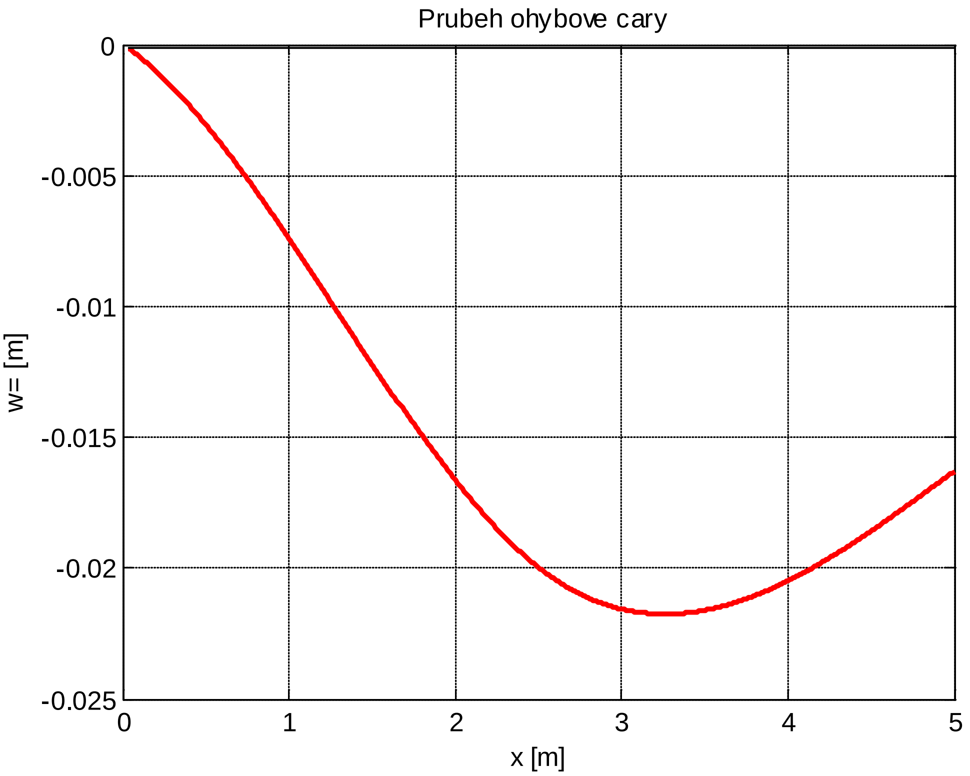


Obr. 8 Průběh ohybové čáry na nosníku s dokonalým vetknutím a dokonalým kloubem

Výsledky pro $k_1 = 10000 kNm / rad \wedge k_2 = 1000 kN / m$



Obr. 9 Průběh posouvající síly a ohybového momentu na nosníku s nedokonalým vetknutím a nedokonalým kloubem

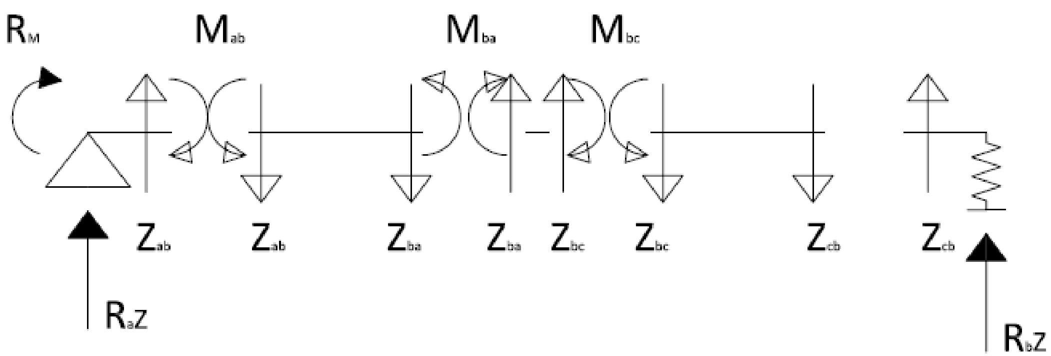


Obr. 10 Průběh ohybové čáry na nosníku s nedokonalým vetknutím a nedokonalým kloubem

3. Dynamika

Dynamický výpočet je nutné provést v případě, kdy není možné zanedbat vliv setrvačných sil tzn. nepředpokládá se, že by se zatížení měnilo nekonečně pomalu jako v případě statického výpočtu.

3.1 Vlastní netlumené kmitání



Obr. 11 Konvence vnitřních sil a reakcí na styčníky resp. na prut

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{w}}\}+[\mathbf{K}]\{\mathbf{w}\}=\{0\}$$

3.1.1 Jacobiho metoda rovinné rotace

Tato metoda slouží k výpočtu všech N vlastních čísel matice [N x N]. Postupně dochází k diagonalizaci matice tuhosti a hmotnosti. Na konci iteračního cyklu tedy mimodiagonální prvky konvergují k nule a diagonální prvky konvergují k vlastním číslům daných matic.

$$\mathbf{A}_{k+1}=\mathbf{S}^T\mathbf{A}_k\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\alpha & \cdots & \sin\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin\alpha & \cdots & \cos\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Popis algoritmu

Obr. 12 Carl Gustav Jacob Jacobi

Nejprve je vyhledán prvek mimo diagonálu s maximální absolutní hodnotou (v celé matici) a_{mn}. Prvky transformační matice *sin α* se umístí na pozice **S**(m,n) **S**(n,m) a *cos α* na pozice **S**(n,n) **S**(m,m). Dále se vypočte neznámá **k**

$$k=\operatorname{cotg}(2\alpha)=\frac{a_{mm}-a_{nn}}{2a_{mn}}$$

a parametr **t**

$$t=\begin{cases} kořen\ \ t^2+2Kt-1^* \quad pro\ \ K\neq 0 \\ \quad 1\ \ pro\ \ K=0 \end{cases}$$

vztahy pro cosinus respektive sinus v transformační matici:

$$s=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad c=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Prvky matice $\mathbf{A}_{k+1}$ jsou dány výrazy:

$$a_{mi}^{k+1} = a_{im}^{k+1} = c \cdot a_{mi}^{k} - s \cdot a_{ni}^{k} \quad i \neq m,n$$

$$a_{ni}^{k+1} = a_{in}^{k+1} = c \cdot a_{ni}^{k} + s \cdot a_{mi}^{k} \quad i \neq m,n$$

$$a_{mi}^{k+1} = a_{im}^{k+1} = a_{nn}^{k} + t \cdot a_{mn}^{k} \quad i = n$$

$$a_{mi}^{k+1} = a_{im}^{k+1} = a_{mm}^{k} - t \cdot a_{mn}^{k} \quad i = m$$

Numerické výsledky:

Výpočet proveden pomocí skriptu v programovém prostředí MATLAB

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 11{,}96\ \text{Hz} \\ 103{,}65\ \text{Hz} \end{Bmatrix}$$

Výsledky z programu SCIA ENGINEER 2008

Vlastní frekvence

Calc protokol

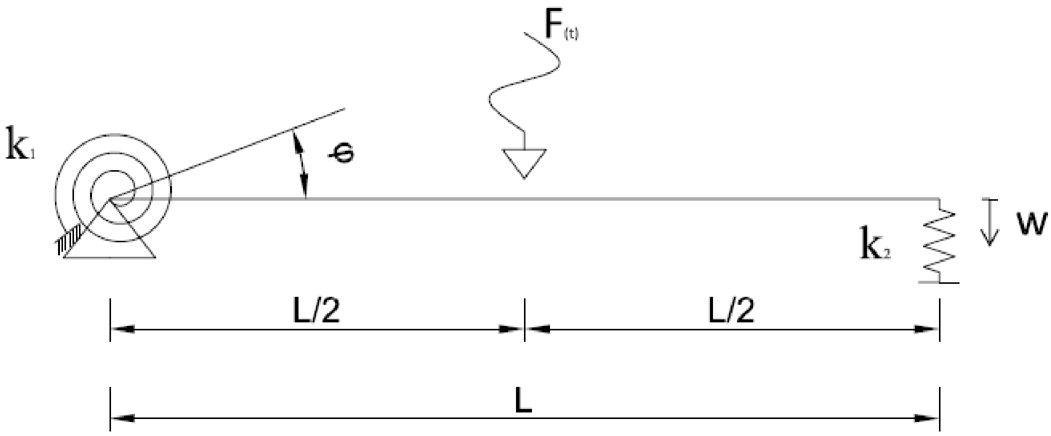
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	11,07	69,58	4841,55	0,09
2	43,91	275,90	76118,23	0,02
3	97,40	611,94	374470,79	0,01
4	122,47	769,48	592092,68	0,01

Tab. 1 Tabulka vlastních frekvencí vypočtené programem SCIA ENGINEER 2008

3.2 Vynucené kmitání

Nyní uvažujme, že na konstrukci uprostřed rozpětí působí harmonicky proměnná síla daná výrazem:

$$F_{(t)} = F \sin(\omega t)$$



Obr. 13 Řešená konstrukce pro úlohu vynuceného kmitní

Pohybová rovnice bude mít potom tvar:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{w}}\}+[\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{w}}\}+[\mathbf{K}]\{\mathbf{w}\}=\{\mathbf{F}_{(t)}\}$$

$$\mathbf{r}=\{\varphi_a,w_b,\varphi_b,w_c\}^T$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} \frac{4EI}{L_1}+k_1 & \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{2EI}{L_1} & 0 \\ \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{12EI}{L_1^3}+\frac{3EI}{L_2^3} & \frac{6EI}{L_1^2}-\frac{3EI}{L_2^2} & -\frac{3EI}{L_2^3} \\ \frac{2EI}{L_1} & \frac{6EI}{L_1^2}-\frac{3EI}{L_2^2} & \frac{4EI}{L_1}+\frac{3EI}{L_2} & \frac{3EI}{L_2^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L_2^3} & \frac{3EI}{L_2^2} & \frac{3EI}{L_2^3}+k_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} \frac{4\mu L_1^3}{420} & -\frac{13\mu L_1^2}{420} & -\frac{3\mu L_1^3}{420} & 0 \\ -\frac{13\mu L_1^2}{420} & \frac{156\mu L_1}{420}+\frac{156\mu L_2}{420} & \frac{22\mu L_1^2}{420}-\frac{22\mu L_2^2}{420} & \frac{54\mu L_2}{420} \\ -\frac{3\mu L_1^3}{420} & \frac{22\mu L_1^2}{420}-\frac{22\mu L_2^2}{420} & \frac{4\mu L_1^3}{420}+\frac{4\mu L_2^3}{420} & -\frac{13\mu L_2^2}{420} \\ 0 & \frac{54\mu L_2}{420} & -\frac{13\mu L_2^2}{420} & \frac{156\mu L_2}{420} \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}]$$

Za předpokladu, že nejméně je tlumen první vlastní tvar platí:

$$\alpha = \xi\omega_1 \quad \beta = \frac{\xi}{\omega_1}$$

Řešení úlohy vynuceného kmitání bylo provedeno Newmarkovou metodou, což je metoda numerické integrace diferenciálních rovnic. Při vhodné volbě parametrů je tato metoda nepodmíněně stabilní.

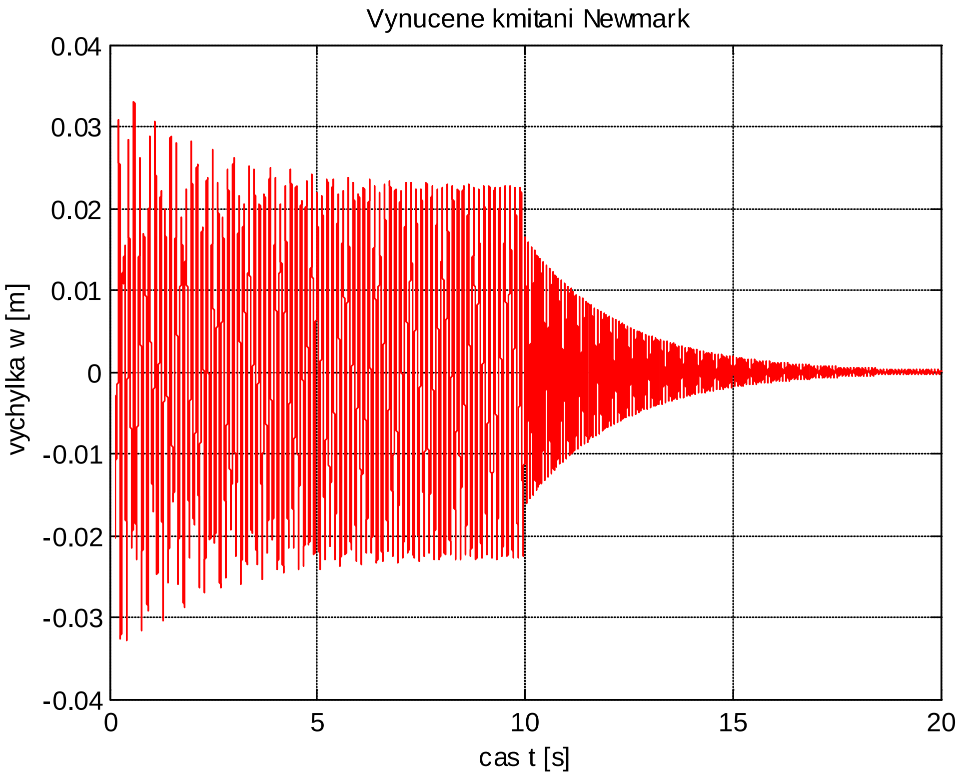
$$w_{n+1} = w_n + \Delta t\dot{w}_n + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\Delta t^2\ddot{w}_n + \delta\ddot{w}_{n+1}\Delta t^2$$
$$\dot{w}_{n+1} = \dot{w}_n + (1-\gamma)\Delta t\ddot{w}_n + \gamma\Delta t\ddot{w}_{n+1}$$

$$\ddot{w}_{n+1} = \left[M + \gamma\Delta tC + \delta\Delta t^2K\right]^{-1}\left\{f_{n+1} - C\left[\dot{w}_n + (1-\gamma)\Delta t\ddot{w}_n\right] - K\left[w_n + \Delta t\dot{w}_n + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\Delta t^2\ddot{w}_n\right]\right\}$$

Výpočet proveden pro tyto hodnoty:

$$L = 5m\,,\ EI = 5273.37kNm^2\,,\ F = 50\sin(50t)kN \quad \mu = 0.125\frac{t}{m} \quad k_1 \to 0 \quad k_2 \to \infty \quad \xi = 0.005$$

Zatížení působí po dobu 10 s uprostřed rozpětí nosníku.



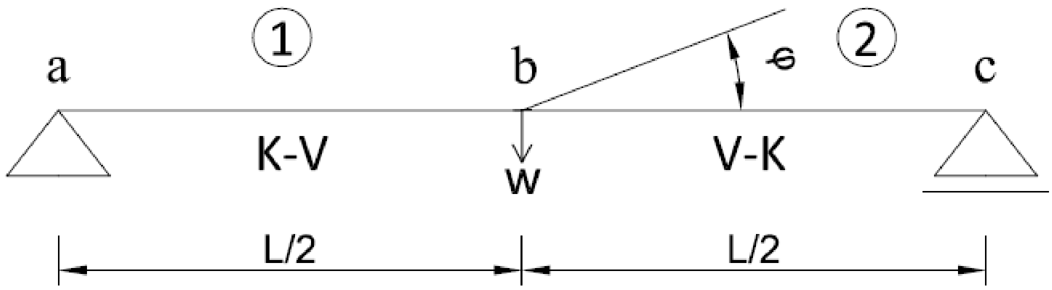
Obr. 14 Kmitání středu nosníku

4. Řešení úlohy vlastního kmitání Kolouškovou deformační metodou

Obr. 15 Prof. Ing. Vladimír Koloušek, DrSc

Kolouškova deformační metoda je použitelné pro konstrukce s harmonicky proměnným zatížením. Její princip spočívá v tom, že koncové síly na prutech jsou vyjádřeny kombinací frekvenčních funkcí. Tyto funkce jsou závislé na způsobu podepření prutu a na tzv. nosníkovém parametru λ:

$$\lambda = L\sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EI}}$$



Obr. 16 Řešená konstrukce

Hodnoty uvažované pro numerický výpočet:

$$\mu = 0{,}125 \quad t/m; \quad EI = 5273{,}37 \quad kNm^2; \quad L = 5m; \quad k_1 \to 0 \wedge k_2 \to \infty$$

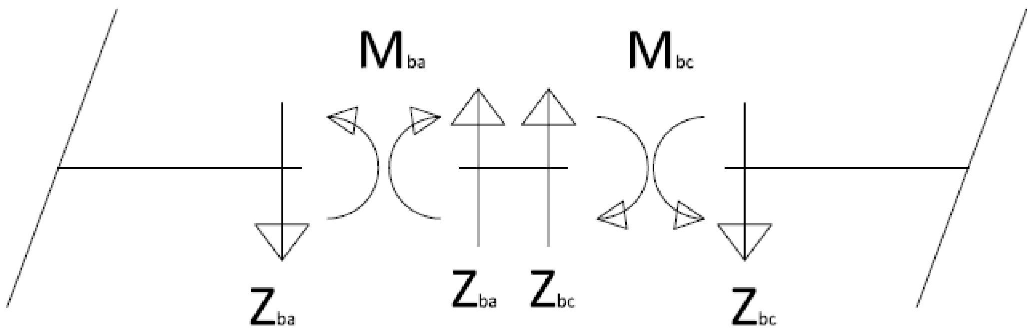
Pro každý prut je nutné spočítat prutovou konstantu λ. Díky tomu, že se jedná o prizmatický prut a pruty jsou stejně dlouhé, platí, že $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = L_1 \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EI}}$$

Z tohoto výrazu vyjádříme ω.

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{L_1} \right)^2$$

Nyní stanovíme styčníkové podmínky rovnováhy ve styčníku b pro neznámý posun a natočení:



Obr. 17 Síly resp. momenty působící ve styčníku b

$$M_{ba} + M_{bc} = 0$$
$$Z_{ba} + Z_{bc} = 0$$

Tyto síly respektive momenty se vyjádří v závislosti na frekvenčních funkcích uvedených v [2]. Podmínky rovnováhy potom přejdou na tvar:

$$\frac{EI}{L_1} F_{7(\lambda)} \varphi + \frac{EI}{L_1^2} F_{9(\lambda)} w_b + \frac{EI}{L_2} F_{7(\lambda)} \varphi - \frac{EI}{L_2^2} F_{9(\lambda)} w_b = 0$$
$$\frac{EI}{L_1^2} F_{9(\lambda)} \varphi + \frac{EI}{L_1^3} F_{11(\lambda)} w_b - \frac{EI}{L_2^2} F_{9(\lambda)} \varphi + \frac{EI}{L_2^3} F_{11(\lambda)} w_b = 0$$

$$F_{7(\lambda)} = \lambda \frac{2\sinh(\lambda)\sin(\lambda)}{\cosh(\lambda)\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)\cos(\lambda)}$$

$$F_{11(\lambda)} = \lambda^3 \frac{2\cosh(\lambda)\cos(\lambda)}{\cosh(\lambda)\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)\cos(\lambda)}$$

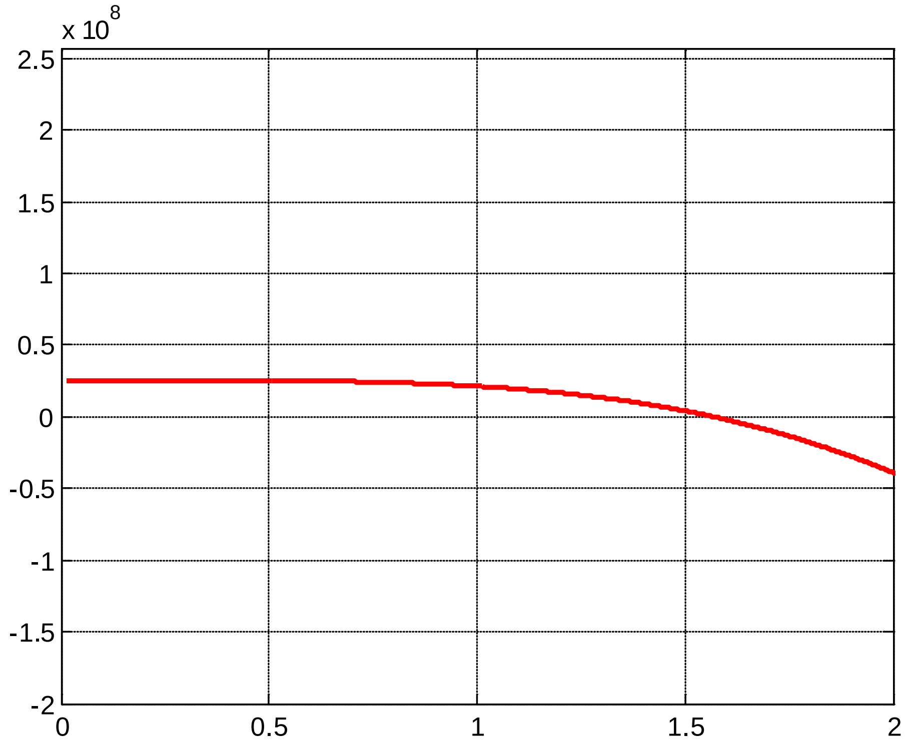
Maticový zápis soustavy rovnic:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{EI}{L_1} + \frac{EI}{L_2}\right) F_{7(\lambda)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{EI}{L_1^3} + \frac{EI}{L_2^3}\right) F_{11(\lambda)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^{dyn}} \begin{Bmatrix} \varphi \\ w_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tato soustava má netriviální řešení pokud determinant matice dynamické tuhosti (**K**^{dyn}) je roven nule.

$$\det\left(\mathbf{K}^{dyn}\right) = 0$$
$$\det\left(\mathbf{K}^{dyn}\right) = \left(\frac{EI}{L_1} + \frac{EI}{L_2}\right)\left(\frac{EI}{L_1^3} + \frac{EI}{L_2^3}\right) F_{7(\lambda)} F_{11(\lambda)} = 0$$

Je nutné zjistit nulové body této funkce, například odečtením z grafu.



Obr. 18 Průběh det(K^{dyn}) na intervalu <0;2>

První tři odečtené hodnoty λ:

$$\lambda^{(1)} = 1{,}57; \quad \lambda^{(2)} = 3{,}14; \quad \lambda^{(3)} = 4{,}71$$

Pro tyto hodnoty je možné zpětně dopočítat vlastní kruhové frekvence ω

$$f^{(1)} = \frac{\omega}{2\pi} = 12{,}89 \quad Hz; \quad f^{(2)} = \frac{\omega}{2\pi} = 51{,}57 \quad Hz; \quad f^{(3)} = \frac{\omega}{2\pi} = 116{,}03 \quad Hz$$

Tvary vlastního kmitání

Průhyb v místě x je dán vztahem:

$$w_{(x)} = C_1 \cosh\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_3 \cos\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\lambda x}{L}\right)$$

Kde $C_1 - C_4$ jsou integrační konstanty, které je možné získat v [2] a L je délka jednotlivých prutů

Nejprve je nutné spočítat pro každý odečtený parameter λ dynamickou matici tuhosti $\mathbf{K}^{dyn}$.

Pro λ_1=1,57

$$\mathbf{K}^{dyn} = \begin{bmatrix} 1{,}2156\cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 4{,}1633 \end{bmatrix}$$

Poměr neznámých φ a w se získá jako poměr subdeterminantů k_{11} a k_{21}. Tyto subdeterminanty vzniknou vyloučením prvního řádku a prvního sloupce respektive druhého řádku a prvního sloupce.

$$\varphi : w = k_{11} : k_{21} = 4{,}1633 : 1{,}2156\cdot 10^4 = 3{,}4\cdot 10^{-4} : 1$$

Integrační konstanty pak mají tvar:

$$C_1 = \frac{-LF_{7(\lambda)}}{2\lambda^2}\varphi + \left(\frac{F_{9(\lambda)}}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}\right)w$$

$$C_2 = L\frac{-F_{9(\lambda)} + \lambda^2}{2\lambda^3}\varphi + \frac{F_{11(\lambda)}}{2\lambda^3}w$$

$$C_3 = -C_1^{(\varphi)} + \left(1 - C_1^{(w)}\right)$$

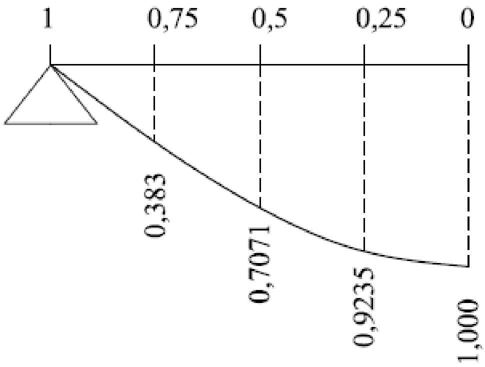
$$C_4 = \left(\frac{L}{\lambda} - C_2^{(\varphi)}\right) - C_2^{(w)}$$

Podíl φ je zanedbatelný a proto budeme uvažovat pouze integrační konstanty související s průhybem w.

Pro levou část konstrukce (první prut) platí, že:

$$w_{(L_1 - x)} = w_{1(x)}$$

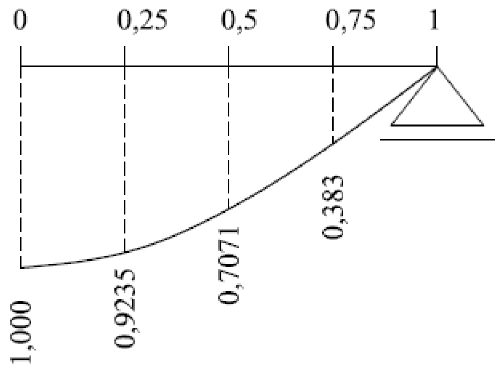
Viz číslování průřezů zprava.



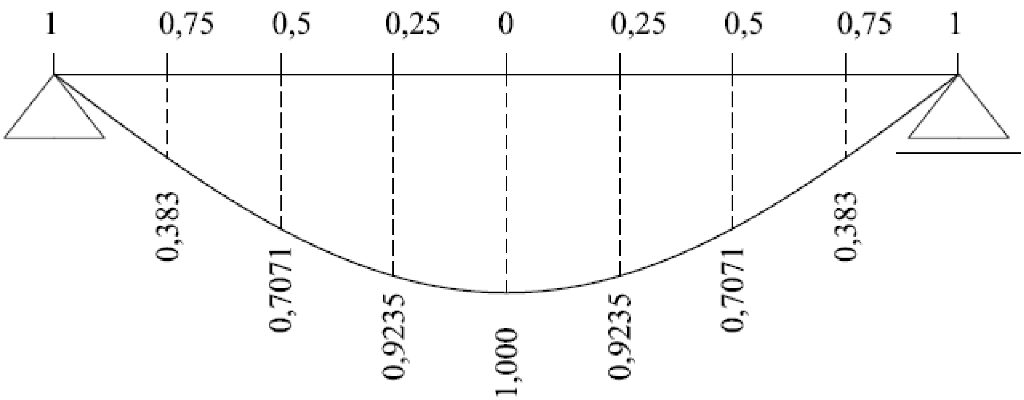
Obr. 19 1. tvar kmitání na prvním prutu

Pro pravou pravou část konstrukce (druhý prut) platí, že:

$$w_{(x)} = w_{2(x)}$$

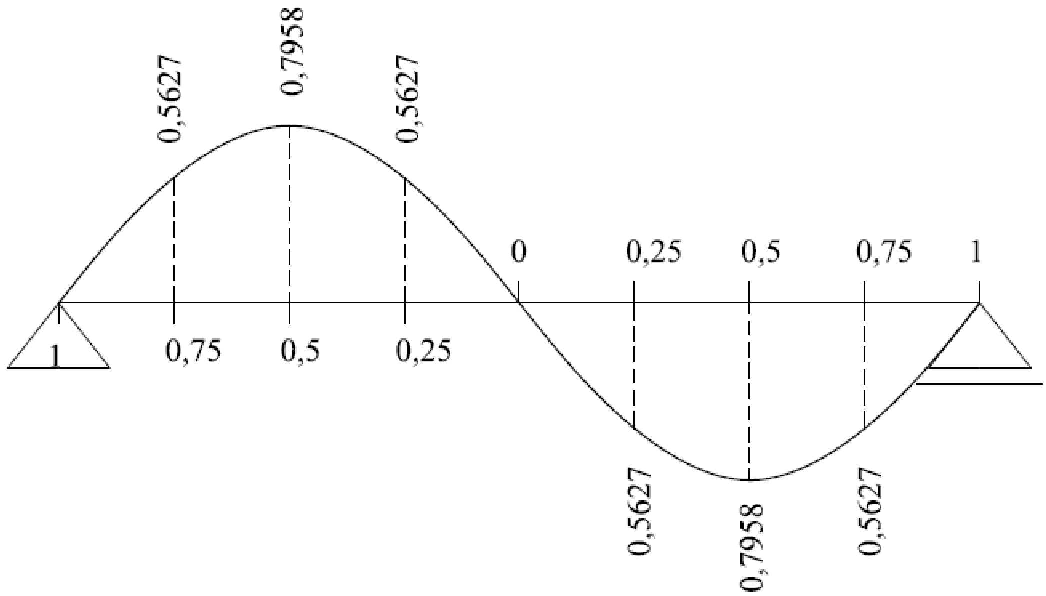


Obr. 20 1. tvar kmitání na druhém prutu

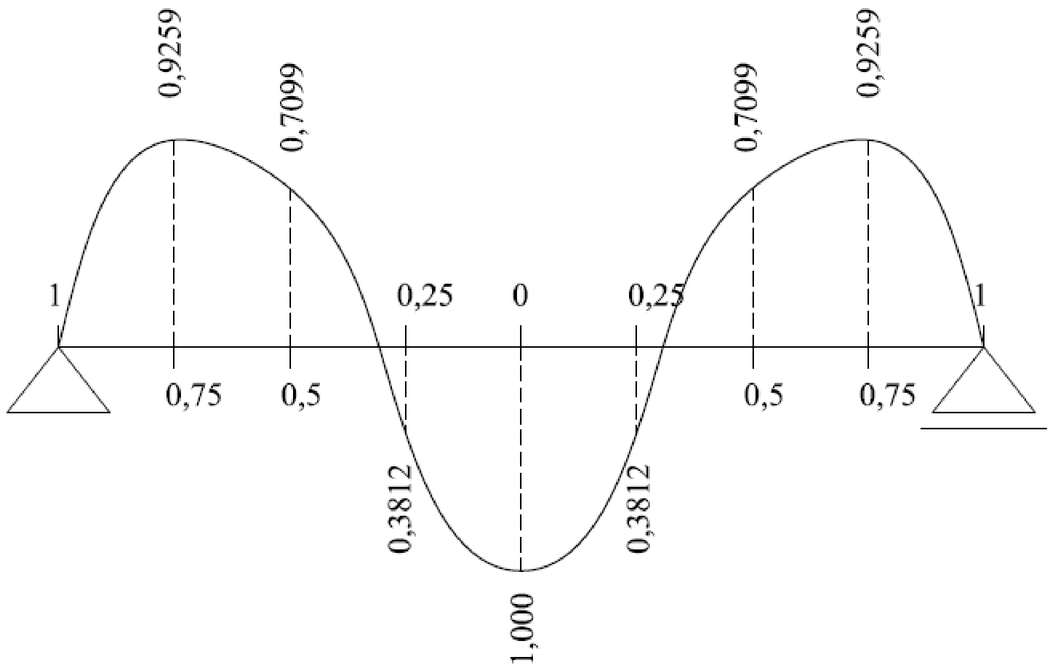


Obr. 21 První tvar kmitání

Stejným postupem dostaneme další vlastní tvary kmitání nosníku



Obr. 22 Druhý tvar kmitání



Obr. 23 Třetí tvar kmitání

5. Porovnání výsledků vlastních frekvencí jednotlivých metod

[Hz]	Jacobiho rotace	SCIA ENGINEER 2008	Kolouškova metoda
f1	11,96	11,07	12,89
f2	103,65	43,91	51,57
f3	-	97,40	116,03

Tab. 2 Porovnání výsledků

6. Použitá literatura

[1] Baťa, Plachý, Trávníček: Dynamika stavebních konstrukcí

[2] Koloušek Vladimír: Dynamika II – Obecná část

[3] Bittnar, Řeřicha: Metoda konečných prvků v dynamice, Technická knižnice inženýra

Vypracoval Vladimír Šána v rámci řešení projektu FRVŠ 112121328A: Nová výuková pomůcka pro předmět Dynamika stavebních konstrukcí.