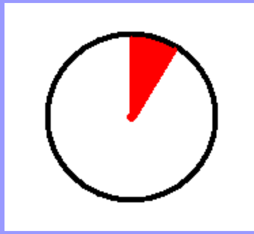
České vysoké učení technické
v Praze
Fakulta stavební

Energetická metoda
aplikace na ohýbané konstrukce

Miloš Hüttner

OBSAH

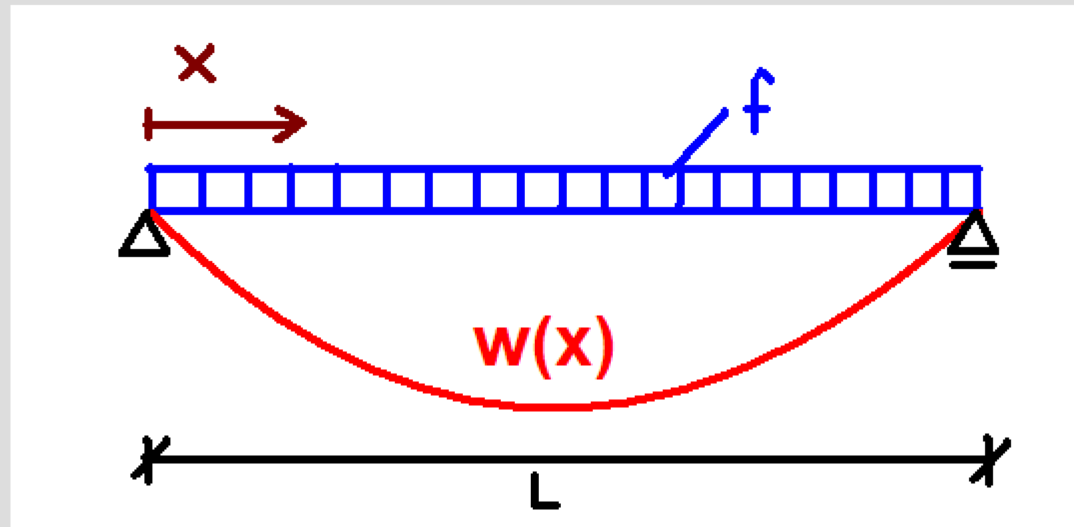


- Princip metody
- Příklad na nosníku
- Aplikace na desku
- Příklad na desce
- Shrnutí

PRINCIP ENERGETICKÉ METODY

Zavedeme:

$$\hat{w}(x) = a\,\varphi(x)$$

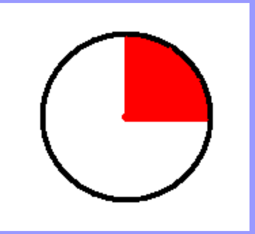


$\varphi(x)$

- Bázová funkce
- Dodržet okr. kinematické podmínky

a

- Koeficient
- Hledáme ho



PRINCIP ENERGETICKÉ METODY

Pot. energie vnitřních sil $$E^i = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\hat{w}''\right)^2 dx$$

Pot. energie vnějších sil $$E^e = -\int_0^L f\,\hat{w}\,dx$$

Systém si hledá stav s minimální potenciální energií

$$\frac{1}{2}a^2\underbrace{\int_0^L EI\left[\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right]^2 dx}_{\alpha} - a\underbrace{\int_0^L f\,\varphi(x)\,dx}_{\beta} \rightarrow \quad min$$

PRINCIP ENERGETICKÉ METODY

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} \right) dx$$

$$\beta_i = \int_0^L f \varphi_i \, dx$$

Pro ortogonální systém

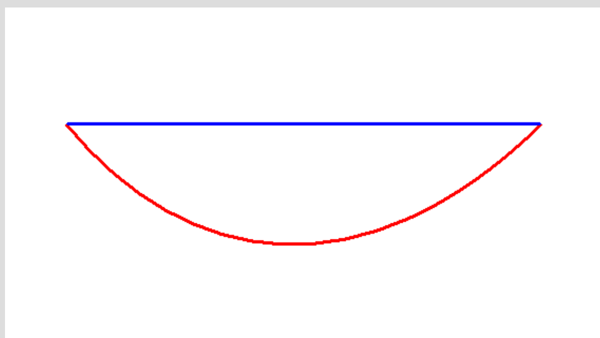
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

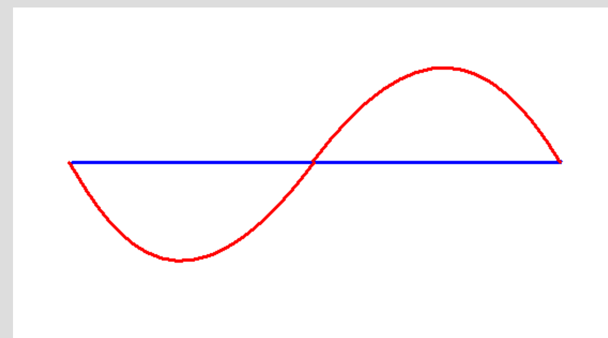
$$\alpha_i = \int_0^L EI \left[\frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right]^2 dx$$

$$\beta_i = \int_0^L f \varphi_i \, dx$$

PŘÍKLAD - NOSNÍK

$$\hat{w} = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$$





$$a_1 = \frac{4 \mathrm{fL}^4}{\pi^5 EI}$$

$$a_2 = 0$$

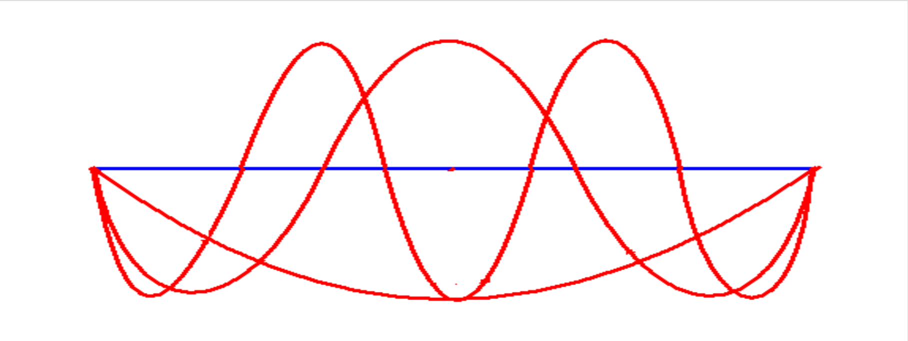
$$\hat{w}(x) = \frac{4 f L^4}{\pi^5 EI} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\frac{4}{\pi^5} - \frac{5}{384} \approx 0{,}00005$$

PŘÍKLAD - NOSNÍK

Aproximace *n* sinovými funkcemi

$$\varphi(x)_i = \sin\frac{k_i \pi x}{L}$$



$$\hat{w}(x) = \sum_{k_1} \frac{4L^4}{(k_i \pi)^5 EI} \sin\frac{k_i \pi x}{L} \qquad k_i = 1, 3, 5, 7, \ldots, n$$

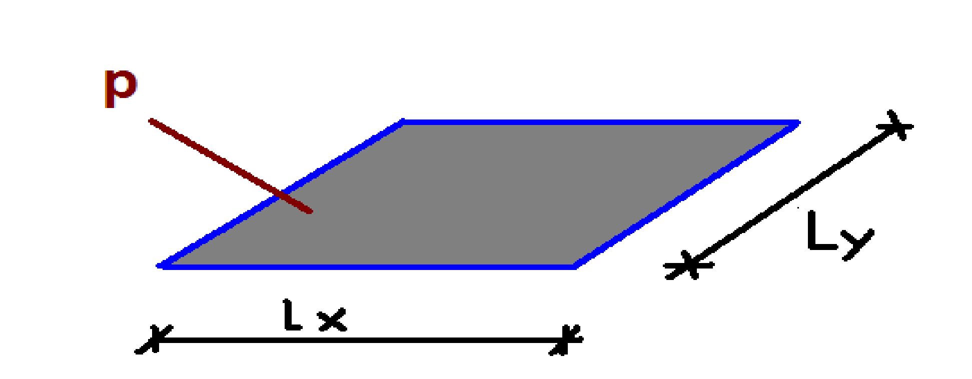
<u>Pro průhyb uprostřed:</u>

$$\hat{w} = \frac{4L^4}{\pi^5 EI}\left[\frac{1}{k_1^5} - \frac{1}{k_2^5} + \frac{1}{k_3^5} - \frac{1}{k_4^5} + \cdots + \frac{1}{k_n^5}\right]$$

$$\hat{w} = \frac{4L^4}{\pi^5 EI}\left[1 - \frac{1}{243} + \frac{1}{3125} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

DESKA

Co se mění?



Deska	Nosník
Desková tuhost $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	Ohybová tuhost EI
Půhyb $w(x,y)$	Průhyb $w(x)$
Funkcionál potenciální energie $\Pi = \frac{1}{2}\iint D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 dx\,dy - \iint p\,w\,dx\,dy$	Funkcionál potenciální energie $\Pi = \frac{1}{2}\int D\left[\frac{d^2 w}{d x^2}\right]^2 dx - \int f\,w\,dx$

DESKA - PŘÍKLAD

Minimum potenciální energie

$$\Pi = \frac{D}{2} \iint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]^2 dx\, dy - \iint p\, w\, dx\, dy$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i = D \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right]^2 dy\, dx \qquad \beta_i = p \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \varphi_i\, dy\, dx$$

DESKA - PŘÍKLAD

$$\varphi_i = \sin\frac{k_i \pi x}{L_x} \sin\frac{m_i \pi y}{L_y}$$

k_i, m_i – Lichá čísla

$$a_i = \frac{16\, p\, L_x^4 L_y^4}{k_i m_i \pi^6 D \left(k_i^2 L_x^2 + m_i^2 L_y^2\right)^2}$$

$$\hat{w}(x) = \frac{16\, p\, L_x^4 L_y^4}{k_i m_i \pi^6 D \left(k_i^2 L_x^2 + m_i^2 L_y^2\right)^2} \sin\frac{k_i \pi x}{L_x} \sin\frac{m_i \pi y}{L_y}$$

$$\hat{w} = \frac{16\, p\, L_x^4 L_y^4}{\pi^6 D}\left[\pm\frac{1}{k_1 m_1 \left(k_1^2 L_x^2 + m_1^2 L_y^2\right)^2} \pm \frac{1}{k_2 m_2 \left(k_2^2 L_x^2 + m_2^2 L_y^2\right)^2} \pm \ldots \pm \frac{1}{k_n m_n \left(k_n^2 L_x^2 + m_n^2 L_y^2\right)^2}\right]$$

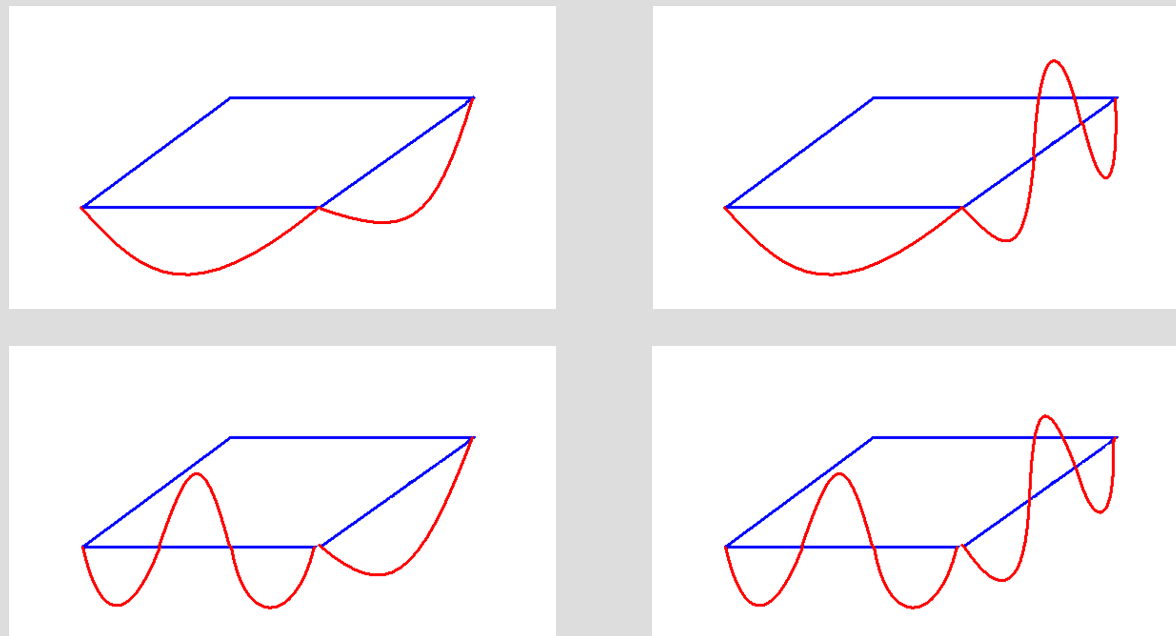
DESKA - PŘÍKLAD

$$\varphi_1 = \sin\frac{\pi x}{L_x}\sin\frac{\pi y}{L_y}$$

$$\varphi_2 = \sin\frac{\pi x}{L_x}\sin\frac{3\pi y}{L_y}$$

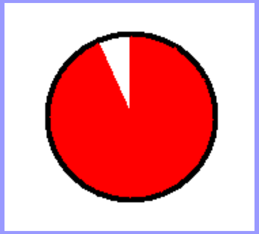
$$\varphi_3 = \sin\frac{3\pi x}{L_x}\sin\frac{\pi y}{L_y}$$

$$\varphi_4 = \sin\frac{3\pi x}{L_x}\sin\frac{3\pi y}{L_y}$$



$$\hat{w} = \frac{16 * p * L_x^4 * L_y^4}{\pi^6 * D}\left[\frac{1}{\left(L_x^2 + L_y^2\right)^2} - \frac{1}{3\left(L_x^2 + 3^2 . L_y^2\right)^2} - \frac{1}{3\left(3^2 . L_x^2 + L_y^2\right)^2} + \frac{1}{3.3\left(3^2 . L_x^2 + 3^2 . L_y^2\right)^2}\right]$$

SHRNUTÍ



- Elegantní způsob
- Lze použít na desky
- Lze zahrnout vliv kroutícího momentu
- Lze zahrnout příčné deformace
- Lze řešit numericky

PODĚKOVÁNÍ

Ing. Jan Zeman, Ph.D. - Konzultace

Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc. - výběr tématu

Doc. Ing. Jitka Bittnarová – skripta PRPE 20

DĚKUJI ZA POZORNOST